LETTRE CIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Loi d'après laquelle procèdent les sommes des diviseurs des nombres naturels.

Berlin d. 1. April 1747.

— — Letztens habe ich eine sehr wunderbare Ordnung in den Zahlen, welche die summas divisorum der numerorum naturalium darstellen, entdecket, welche mir um so viel merkwürdiger vorkam, da hierin eine grosse Verknüpfung mit der Ordnung der numerorum primorum zu stecken scheint. Daher bitte Ew. diesen Einfall einiger Aufmerksamkeit zu würdigen.

Wenn n einen numerum quemcunque integrum affirmativum bedeutet, so soll $\int n$ die summam omnium divisorum hujus numeri n anzeigen. Also wird seyn

$\int 1 = 1$
$\int 2 = 1 + 2 = 3$
$\int 3 = 1 + 3 = 4$
$\int 4 = 1 + 2 + 4 = 7$
$\int 5 = 1 + 5 = 6$
$\int 6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$
$\int 7 = 1 + 7 = 8$
$\int 8 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$
$\int 9 = 1 + 3 + 9 = 13$
$\int 10 = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$
$\int 11 = 1 + 11 = 12$
$\int 12 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$
$\int 13 = 1 + 13 = 14$
$\int 14 = 1 + 2 + 7 + 14 = 24$
$\int 15 = 1 + 3 + 5 + 15 = 24$
$\int 16 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$
etc.

Diese Bedeutung des Zeichens $\int$ vorausgesetzt, so habe ich gefunden dass

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) - \int(n-26) + \text{etc.}$$

wo immer zwey Zeichen + und — auf einander folgen. Die Ordnung der abzuziehenden Zahlen 1, 2, 5, 7, 12, 15 etc. fällt aus ihren Differenzen, wenn dieselben alternatim betrachtet werden, sogleich in die Augen, als

	1,	2,	5,	7,	12,	15,	22,	26,	35,	40,
Diff.	1,	3,	2,	5,	3,	7,	4,	9,	5,	11,

	51,	57,	70,	77,	92,	100,	117,	126,	145 etc.
Diff.	6,	13,	7,	15,	8,	17,	9,	19 etc.	

Ferner ist zu merken, dass man in einem jeglichen Fall, nicht mehr terminos nehmen müsse, als bis man ad numeros negativos komme, und wenn ein solcher terminus $\int 0$ vorkommt, so muss dafür die vorgegebene Zahl n selbst geschrieben werden, also dass in quovis casu $\int 0 = n$. Folgende Exempel werden zur Erläuterung der Wahrheit dieses theorematis dienen:

Wenn so wird
1. $n=1$; $\int 1 = \int 0 = 1$
2. $n=2$; $\int 2 = \int 1 + \int 0 = 1 + 2 = 3$
3. $n=3$; $\int 3 = \int 2 + \int 1 = 3 + 1 = 4$
4. $n=4$; $\int 4 = \int 3 + \int 2 = 4 + 3 = 7$
5. $n=5$; $\int 5 = \int 4 + \int 3 - \int 0 = 7 + 4 - 5 = 6$
6. $n=6$; $\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1 = 6 + 7 - 1 = 12$
7. $n=7$; $\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - \int 0 = 12 + 6 - 3 - 7 = 8$
8. $n=8$; $\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 = 8 + 12 - 4 - 1 = 15$
9. $n=9$; $\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 = 15 + 8 - 7 - 3 = 13$
10. $n=10$; $\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 = 13 + 15 - 6 - 4 = 18$
11. $n=11$; $\int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4 = 18 + 13 - 12 - 7 = 12$
12. $n=12$; $\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28$
etc.

Der Grund dieser Ordnung fällt um so viel weniger in die Augen, da man nicht sieht, was die Zahlen 1, 2, 5, 7, 12, 15 etc. für eine Verwandtschaft mit der natura divisorum haben. Ich kann mich auch nicht rühmen, dass ich davon eine demonstrationem rigorosam hätte. Wenn ich aber auch gar keine hätte, so würde man an der Wahrheit doch nicht zweifeln können, weil bis über 300 diese Regel immer eingetroffen. Inzwischen habe ich doch dieses theorema aus folgendem Satz richtig hergeleitet.

Wenn $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. in infinitum, so ist auch $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} +$ etc., wo die exponentes des x eben diejenigen Zahlen sind, welche oben vorgekommen; und wenn dieser Satz seine Richtigkeit hat, wie ich nicht zweifle, ungeacht mir hier eine demonstratio rigorosa fehlt, so ist auch das angeführte theorema völlig gegründet.

Denn aus dem doppelten Werth von s bekomme ich erstlich

$$\frac{ds}{s} = \frac{-dx}{1-x} - \frac{2x\,dx}{1-x^2} - \frac{3x^2\,dx}{1-x^3} - \frac{4x^3\,dx}{1-x^4} - \frac{5x^4\,dx}{1-x^5} - \text{etc.}$$

und dann

$$\frac{ds}{s} = \frac{-dx - 2x\,dx + 5x^4\,dx + 7x^6\,dx - 12x^{11}\,dx - 15x^{14}\,dx + \text{etc.}}{1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.}}$$

folglich ist $\dfrac{1 - 2x - 5x^4 - 7x^6 + 12x^{11} + 15x^{14} - \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.}} =$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{5x^4}{1-x^5} + \frac{4x^3}{1-x^4} + \frac{6x^5}{1-x^6} + \text{etc.}$$

wenn aber alle diese letzten Brüche in progressiones geometricas verwandelt werden, so bekommt man für dieselben

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1 + & x + & x^2 + & x^3 + & x^4 + & x^5 + & x^6 + & x^7 + & x^8 + & x^9 + & x^{10} + & x^{11} + & x^{12} + & \text{etc.} \\
 & +2x & & +2x^3 & & +2x^5 & & +2x^7 & & +2x^9 & & +2x^{11} & & \\
 & & +3x^2 & & & +3x^5 & & & +3x^8 & & & +3x^{11} & & \\
 & & & +4x^3 & & & & +4x^7 & & & & +4x^{11} & & \\
 & & & & +5x^4 & & & & & +5x^9 & & & & \\
 & & & & & +6x^5 & & & & & & +6x^{11} & & \\
 & & & & & & +7x^6 & & & & & & & \\
 & & & & & & & +8x^7 & +9x^8 & +10x^9 & +11x^{10} & +12x^{11} & +13x^{12} & +\text{etc.}
\end{array}$$

das ist:

$$1 + \int 2x + \int 3x^2 + \int 4x^3 + \int 5x^4 + \int 6x^5 + \int 7x^6 + \int 8x^7 + \int 9x^8 + \int 10x^9 + \text{etc.} =$$

$$\frac{1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 + 12x^{11} + 15x^{14} - 22x^{21} - 26x^{25} + 35x^{34} + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \text{etc.}},$$

woraus das gegebene theorema leicht fliesst. Man sieht aber zugleich, dass dasselbe nicht so obvium ist, und dass zweifelsohne darin noch schöne Sachen verborgen liegen müssen.

Euler.