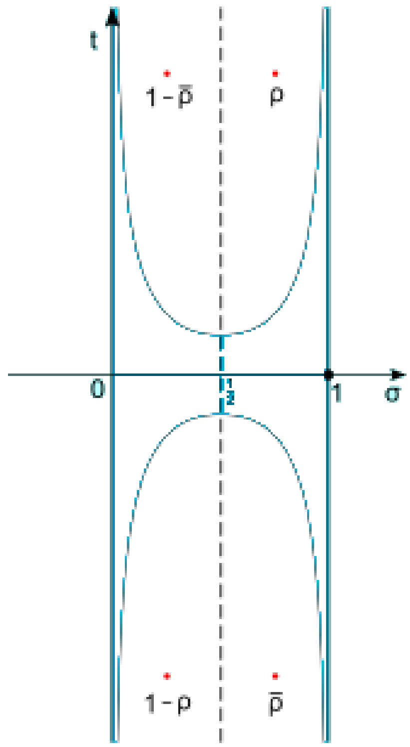
Deux par deux, Denise Vella-Chemla, novembre 2024

On s'inspire de cette image présentant une propriété de la fonction zeta, qui est que si un nombre complexe ρ est un zéro de ζ, i.e. est tel que $\zeta(\rho) = 0$, alors $\bar{\rho}, 1 - \bar{\rho}$ et $1 - \rho$ sont eux-aussi des zéros de ζ.



On cherche un polynôme qui s'annule pour $z, 1 - z, \bar{z}, 1 - \bar{z}$.

On essaie avec les 4 nombres complexes $0.2 + 0.6i, 0.2 - 0.6i, 0.8 + 0.6i, 0.8 - 0.6i$. Le polynôme que ces 4 complexes annulent est

$$x^4 - 2x^3 + 2.04x^2 - 1.04x + 0.4.$$

Les coefficients, surprenants au premier abord, sont, à leur habitude, la somme des 4 complexes, la somme de leurs produits pris deux par deux, trois par trois, ou produit de tous. On calcule les coefficients du polynôme de façon générale en posant :

$$\begin{aligned}
&z = a + bi \\
&\bar{z} = a - bi \\
&1 - z = (1 - a) + bi \\
&1 - \bar{z} = (1 - a) - bi \\
\\
&\text{et} \;\; P = x^4 + S_1 x^3 + S_2 x^2 + S_3 x + S_4
\end{aligned}$$

Calculons ces sommes dans le cas général pour un quadruplet de zéros :

$$\begin{aligned}
S_1 &= (a+bi)+(a-bi)+((1-a)+bi)+((1-a)-bi)\\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= (a+bi)(a-bi)+(a+bi)((1-a)+bi)+(a+bi)((1-a)-bi)\\
&\qquad +(a-bi)((1-a)+bi)+(a-bi)((1-a)-bi)\\
&\qquad\qquad +((1-a)+bi)((1-a)-bi)\\
&= -2a^2+2a+2b^2+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= (a+bi)(a-bi)((1-a)+bi)+(a+bi)(a-bi)((1-a)-bi)\\
&\qquad +(a+bi)((1-a)+bi)((1-a)-bi)+(a-bi)((1-a)+bi)((1-a)-bi)\\
&= -2a^2+2a+2b^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_4 &= (a+bi)(a-bi)((1-a)+bi)((1-a)-bi)\\
&= a^4-2a^3+2a^2b^2+a^2-2ab^2+b^4+b^2
\end{aligned}$$

On a abouti à cette équation polynomiale générale :

$$x^4-2x^3+(-2a^2+2a+2b^2+1)x^2-(-2a^2+2a+2b^2)x+(a^4-2a^3+2a^2b^2+a^2-2ab^2+b^4+b^2)=0$$

Puis, on utilise le petit programme ci-après pour retrouver des solutions imposées $0.2+6i, 0.8+6i, 0.2+6i, 0.2-6i$ autour de la droite critique. On trouve bien un discriminant nul pour une équation pour laquelle on impose $a=0.5$. On ne comprend pas pourquoi on ne parvient pas à imposer une solution de partie imaginaire la partie imaginaire du premier zéro non trivial de ζ et obtenir pour cette valeur, comme pour la valeur $b=6$ un discriminant nul ; à vrai dire, il y a une erreur sur les solutions trouvées à partir d'une certaine décimale, ce qui fait trouver 4 solutions au lieu de 2.

```
import sympy as sp

x = sp.symbols('x')
aa=0.5
bb=14.1347251417346937904572519835625
bb = 6
equationgenerale = x**4-2*x**3+(-2*(aa**2)+2*aa+2*(bb**2)+1)*x**2
                       -(-2*(aa**2)+2*aa+2*(bb**2))*x+(aa**4-2*(aa**3)
                       +2*(aa**2)*(bb**2)+aa**2-2*aa*(bb**2)+bb**4+bb**2)
solution = sp.solve(equationgenerale)
print(len(solution))
for k in range(len(solution)):
     print(solution[k].evalf())
```

```
a = 1
b = -2
c = -2*(aa**2)+2*aa+2*(bb**2)+1
d = -(-2*(aa**2)+2*aa+2*(bb**2))
e = aa**4-2*(aa**3)+2*(aa**2)*(bb**2)+aa**2-2*aa*(bb**2)+bb**4+bb**2
equationdeg4 = a*(x**4)+b*(x**3)+c*(x**2)+d*x+e
discrim = 256*(a**3)*(e**3)-128*(a**2)*(c**2)*(e**2)-4*(b**3)*(d**3)+16*a*(c**4)*e
           -4*a*(c**3)*(d**2)-192*(a**2)*b*d*(e**2)-27*(b**4)*(e**2)-6*a*(b**2)*(d**2)*e
           +144*a*(b**2)*c*(e**2)+144*(a**2)*c*(d**2)*e-80*a*b*(c**2)*d*e+18*(b**3)*c*d*e
           +18*a*b*c*(d**3)+(b**2)*(c**2)*(d**2)-4*(b**2)*(c**3)*e-27*(a**2)*(d**4)
print('a = ',a,' b = ',b,' c = ',c,' d = ',d,' e = ',e,' discrim = ',discrim)
```

Résultats du programme :

pour solutions imposées de parties imaginaires 6 *ou* -6 *:*

```
C:\Users\Denise_Vella\Desktop>python sottien.py
4
0.2 - 6.0*I
0.2 + 6.0*I
0.8 - 6.0*I
0.8 + 6.0*I
a =  1  b =  -2  c =  73.32  d =  -72.32  e =  1320.5056  discrim =  56004604.22572017

C:\Users\Denise_Vella\Desktop>python sottien.py
2
0.5 - 6.0*I
0.5 + 6.0*I
a =  1  b =  -2  c =  73.5  d =  -72.5  e =  1314.0625  discrim =  0.0
```

pour solutions imposées de parties imaginaires $14.134725141734693790457251983562$ [1]*:*

```
C:\Users\Denise_Vella\Desktop>python sottien.py
4
0.5 - 14.1347254235299*I
0.5 - 14.1347248599395*I
0.5 + 14.1347248599395*I
0.5 + 14.1347254235299*I
a =  1  b =  -2  c =  401.08090966477374  d =  -400.08090966477374  e =  40016.183569548215  discrim =  -1.81689453125
```

[1]voir cette page : https://www.lmfdb.org/zeros/zeta/?limit=100000N=1.

On a également regardé ce qui se passe si on choisit $a = 0.5$ et $b = Z[k]$ avec $Z[k]$ les valeurs des parties imaginaires des zéros non triviaux de la fonction ζ. On conserve les coefficients des équations qui ont chacune comme solution un zéro et son conjugué, coefficients calculés par curiosité (on ne note pas le coefficient $a = 1$ et $b = -2$) mais cela n'a pas d'intérêt.

z	c	d	e
14.1347251417	401.080909664774	400.080909664774	40016.1835695482
21.0220396387	885.352301148165	884.352301148165	195519.748136514
25.0108575801	1252.58599378866	1251.58599378866	391616.874961988
30.4248761258	1852.84617454779	1851.84617454779	857333.563546823
32.9350615877	2170.93656357635	2169.93656357635	1177156.17248638
37.5861781588	2826.94157717397	2825.94157717397	1996486.44940012
40.9187190121	3350.18313119016	3349.18313119016	2804256.91156218
43.3270732809	3755.97055817956	3754.97055817956	3524950.97319882
48.0051508811	4610.48902224725	4609.48902224725	5311847.26155447
49.7738324776	4956.36879903077	4955.36879903077	6138919.98360192
52.9703214777	5613.20991490484	5612.20991490484	7874225.03223904
56.4462476970	6373.85775815647	6372.85775815647	10153329.0014238
59.3470440026	7045.64326369364	7044.64326369364	12406749.678176
60.8317785246	7402.51055693436	7401.51055693436	13695589.6311027
65.1125440480	8480.78678482673	8479.78678482673	17976695.9790305
67.0798105294	9000.90196134567	8999.90196134567	20249558.8284584
69.5464017111	9674.90398194397	9673.90398194397	23396104.5629678
72.0671576744	10388.8504305573	10387.8504305573	26976859.1419072
75.7046906990	11463.9003876879	11462.9003876879	32849521.324514
77.1448400688	11904.1526985045	11903.1526985045	35421261.040979
79.3373750202	12590.3381502074	12589.3381502074	39622858.7650667
82.9103808540	13749.7625067392	13748.7625067392	47257117.6166793
84.7354929805	14361.7075413025	14360.7075413025	51557480.2717057
87.4252746131	15287.8572823607	15286.8572823607	58422001.3928162
88.8091112076	15775.61646698	15774.61646698	62209631.1700789
92.4918992705	17111.0028613503	17110.0028613503	73188049.4788537
94.6513440405	17919.2538573537	17918.2538573537	80265955.3241429
95.8706342282	18383.857014652	18382.857014652	84482358.0052851
98.8311942181	19536.7099011886	19535.7099011886	95410990.33585
101.317851005	20532.1138648392	20531.1138648392	105381659.132748
103.725538040	21519.4744835734	21518.4744835734	115761186.02505