

Pour mémoire, il nous faut poster ici les indices concordants qui fixent la ligne à suivre pour la suite du travail.

D'abord, longtemps, on avait aimé une fonction qui trouvait les nombres premiers par des annulations de sommes de sommes de cosinus. On avait essayé de voir cette fonction comme une onde, de calculer par programme sa transformée de Fourier, et ça avait donné ce genre de programmes et copies d'écrans de résultats ci-dessous (voir Fig. 1 et 2).

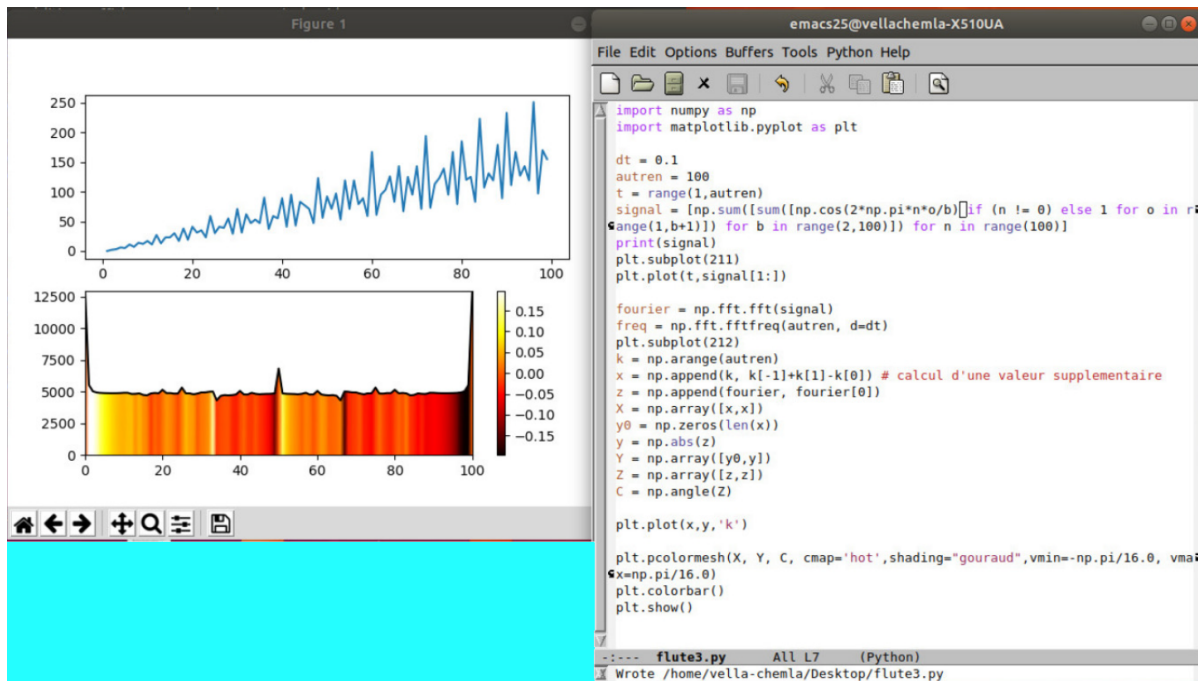


FIG. 1 : fonction qui voit les nombres premiers comme annulant une somme de somme de cosinus et transformée de Fourier de cette fonction si on la considère comme une sorte de signal.

Récemment, on a programmé des histogrammes (voir Fig. 3) qui comptent les décompositions de Goldbach des nombres en les ramenant toutes dans l'intervalle $[0, 1]$, et en associant à la décomposition de Goldbach $19 + 79$ de 98 les deux rationnels $\frac{19}{98}$ et $\frac{79}{98}$. L'histogramme correspondant a la même forme, il montre que les décompositions de Goldbach "éloignées du centre" (i.e. faisant intervenir un tout petit premier et un nombre premier proche de n pour décomposer n en une somme de deux nombres premiers), sont plus nombreuses que les autres. Il y a cependant une petite pointe au centre de l'histogramme qui compte les décompositions de Goldbach triviales des doubles de nombres premiers.

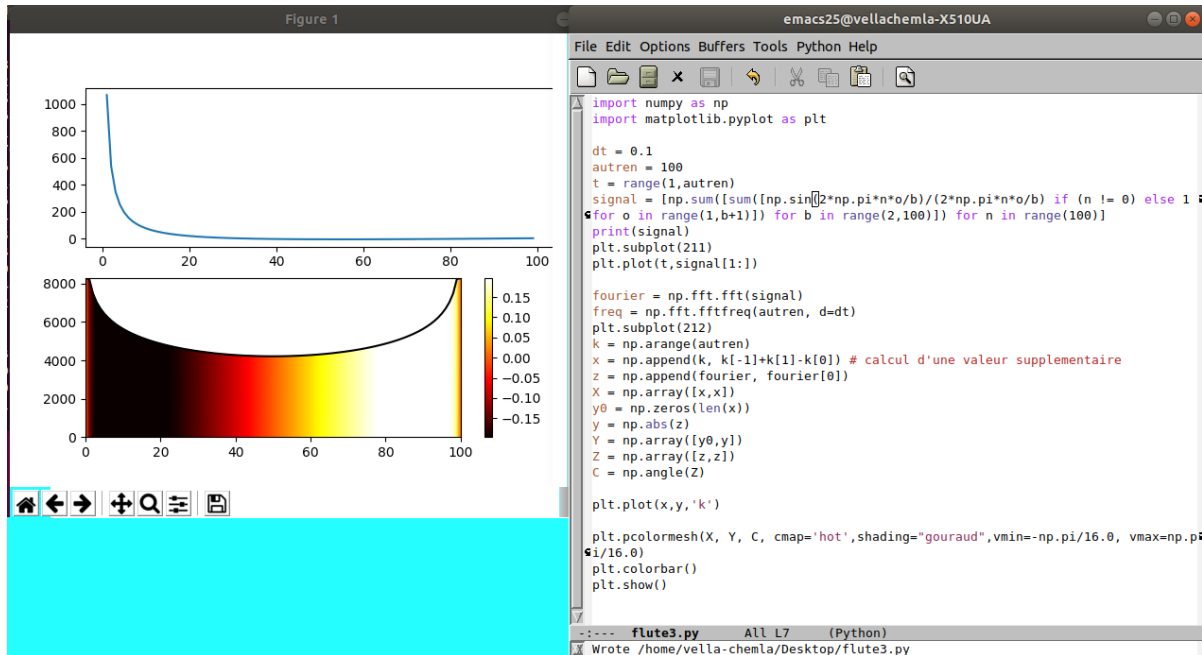


FIG. 2 : similaire à la FIG. 1 mais avec une somme de somme de sinus.

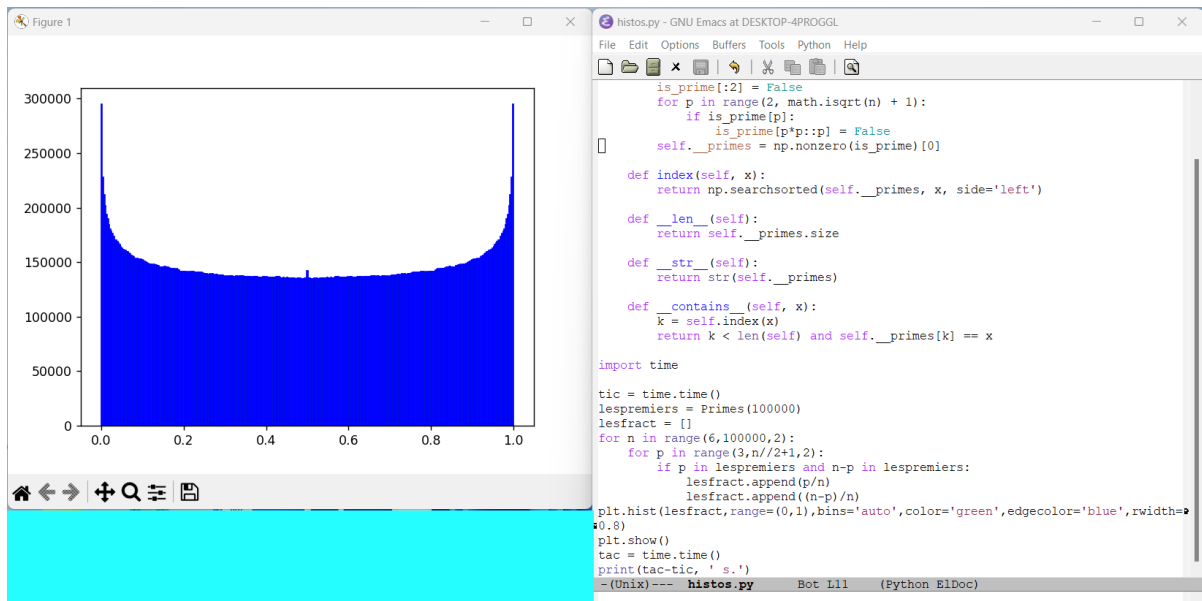


FIG. 3 : Histogrammes des décomposants de Goldbach, tous “quotientés rationnellement” sur l’intervalle $[0, 1]$.

Or il s’avère qu’en revenant aux fonctions sphéroïdales prolates, notamment en parcourant à nouveau le livre de Osipov, Rokhlin et Xiao¹, on retrouve à la page 221 une figure qui ressemble à nos figures 2 et 3.

¹*Prolate spheroidal wave functions of order zero, Mathematical tools for bandlimited approximation*, A. Osipov, V. Rokhlin, H. Xiao, Springer, Applied mathematical Sciences, AMS, vol. 187, 2013.

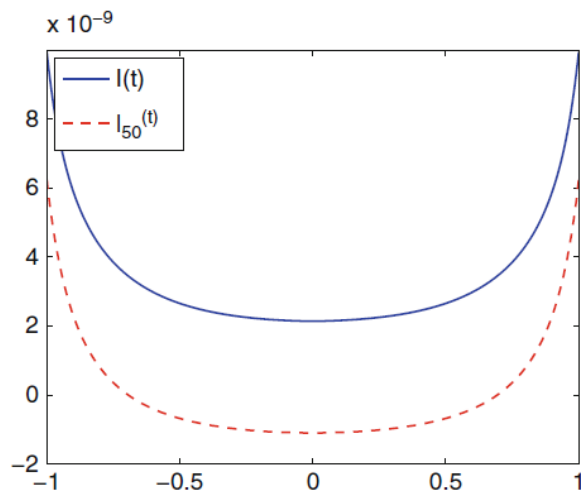


Figure 6.5: Illustration of Theorem 6.31 with $c = 100$, $n = 80$. $|\lambda_n| = 0.58925\text{E-}07$

FIG. 4 : page 221 du livre sur les fonctions d'onde sphéroïdales prolates d'Osipov, Rokhlin et Xiao, pour illustrer un théorème de leur ouvrage.

Même si les manières dont ont été obtenus ces graphiques n'ont strictement rien à voir, cela conforte l'idée que les nombres premiers et les valeurs propres de fonctions sphéroïdales prolates ont des comportements similaires.

D'autre part, lors de tentatives totalement hasardeuses, on avait posté ce “Jeu avec la fonction zeta” sur notre premier blog².

On avait noté : “C'est marrant ce que l'on obtient lorsqu'on prend les carrés des parties réelles des zéros de zêta³, et qu'on divise ces différences par $e^{2\pi}$ ”.

Voici le résultat du programme :

²un blog anciennement Google+, mais Google avait brutalement fermé tous les blogs Google+, et ce blog se trouve maintenant à l'adresse <https://milliardsdautres.blogspot.com>. On avait posté le jeu avec les zéros de zeta le 21.2.2018 ; l'article en question se trouve à cette adresse : <https://milliardsdautres.blogspot.com/2019/10/jeu-avec-la-fonction-zeta.html>.

³Là, en calculant à nouveau, je réalise que pour obtenir les résultats fournis, il ne fallait pas soustraire le carré du premier zéro, contrairement à ce qui est indiqué.

$\zeta_1 = 14.1347$ de carré 199.79 et qu'on divise par $e^{2\pi} \rightarrow 0.373097$.
 $\zeta_2 = 21.022 \rightarrow 441.926 \rightarrow 0.825272$
 $\zeta_3 = 25.0109 \rightarrow 625.543 \rightarrow 1.16817$
 $\zeta_4 = 30.4249 \rightarrow 925.673 \rightarrow 1.72864$
 $\zeta_5 = 32.9351 \rightarrow 1084.72 \rightarrow 2.02565$
 $\zeta_6 = 37.5862 \rightarrow 1412.72 \rightarrow 2.63818$
 $\zeta_7 = 40.9187 \rightarrow 1674.34 \rightarrow 3.12674$
 $\zeta_8 = 43.3271 \rightarrow 1877.24 \rightarrow 3.50563$
 $\zeta_9 = 48.0052 \rightarrow 2304.49 \rightarrow 4.30351$
 $\zeta_{10} = 49.7738 \rightarrow 2477.43 \rightarrow 4.62647$
 $\zeta_{11} = 52.9703 \rightarrow 2805.85 \rightarrow 5.23977$
 $\zeta_{12} = 56.4462 \rightarrow 3186.18 \rightarrow 5.95001$
 $\zeta_{13} = 59.347 \rightarrow 3522.07 \rightarrow 6.57727$
 $\zeta_{14} = 60.8318 \rightarrow 3700.51 \rightarrow 6.91048$
 $\zeta_{15} = 65.1125 \rightarrow 4239.64 \rightarrow 7.91729$
 $\zeta_{16} = 67.0798 \rightarrow 4499.7 \rightarrow 8.40293$
 $\zeta_{17} = 69.5464 \rightarrow 4836.7 \rightarrow 9.03226$
 $\zeta_{18} = 72.0672 \rightarrow 5193.68 \rightarrow 9.69889$
 $\zeta_{19} = 75.7047 \rightarrow 5731.2 \rightarrow 10.7027$
 $\zeta_{20} = 77.1448 \rightarrow 5951.33 \rightarrow 11.1138$
 $\zeta_{21} = 79.3374 \rightarrow 6294.42 \rightarrow 11.7545$
 $\zeta_{22} = 82.9104 \rightarrow 6874.13 \rightarrow 12.837$
 $\zeta_{23} = 84.7355 \rightarrow 7180.1 \rightarrow 13.4084$
 $\zeta_{24} = 87.4253 \rightarrow 7643.18 \rightarrow 14.2732$
 $\zeta_{25} = 88.8091 \rightarrow 7887.06 \rightarrow 14.7286."$

Et ça continue comme ça, un peu un nombre de plus tous les 2 nombres environ, et ça, très loin⁴).

Un autre jeu pour lequel on obtient, un peu de la même façon, cette augmentation de 1 environ un coup sur deux, au niveau de la partie imaginaire :

Il s'agit là de mener cette nouvelle expérience marrante ainsi : on prend les parties imaginaires des zéros de zêta et on les divise par $\frac{\pi^2}{4}$.

⁴Enfin assez loin, face à l'infini... enfin, cacahuètes, quoi !

1 → 5.72859	21 → 32.1542	41 → 50.3594	61 → 67.0896	81 → 82.0676	101 → 96.3645
2 → 8.51991	22 → 33.6023	42 → 51.6806	62 → 67.7573	82 → 82.755	102 → 97.0882
3 → 10.1365	23 → 34.342	43 → 52.5163	63 → 68.5314	83 → 83.2433	103 → 97.6935
4 → 12.3307	24 → 35.4321	44 → 53.1278	64 → 68.8627	84 → 84.2612	104 → 98.4126
5 → 13.3481	25 → 35.993	45 → 54.1046	65 → 70.281	85 → 84.9382	105 → 98.9182
6 → 15.2331	26 → 37.4856	46 → 54.6148	66 → 70.8252	86 → 85.7951	106 → 100.161
7 → 16.5837	27 → 38.3607	47 → 55.9763	67 → 71.509	87 → 86.4667	107 → 100.552
8 → 17.5598	28 → 38.8549	48 → 56.633	68 → 72.2936	88 → 86.9526	108 → 101.148
9 → 19.4558	29 → 40.0548	49 → 57.1953	69 → 72.9174	89 → 87.6102	109 → 101.733
10 → 20.1726	30 → 41.0626	50 → 58.001	70 → 73.8457	90 → 88.7848	110 → 102.565
11 → 21.4681	31 → 42.0384	51 → 59.172	71 → 74.9268	91 → 89.4524	111 → 103.472
12 → 22.8768	32 → 42.7359	52 → 59.7482	72 → 75.2204	92 → 89.7425	112 → 103.907
13 → 24.0525	33 → 43.4338	53 → 60.8144	73 → 75.881	93 → 90.7866	
14 → 24.6542	34 → 44.9986	54 → 61.1677	74 → 76.7675	94 → 91.1823	
15 → 26.3891	35 → 45.3411	55 → 62.0186	75 → 77.8255	95 → 92.1704	
16 → 27.1864	36 → 46.3322	56 → 63.2702	76 → 78.2523	96 → 92.947	
17 → 28.1861	37 → 47.1049	57 → 63.8719	77 → 79.1381	97 → 93.7222	
18 → 29.2077	38 → 48.1441	58 → 64.3795	78 → 79.791	98 → 94.0209	
19 → 30.682	39 → 49.1895	59 → 65.3274	79 → 80.2526	99 → 94.7124	
20 → 31.2656	40 → 49.8285	60 → 66.0739	80 → 81.5695	100 → 95.8597	

Et ces deux expériences qui ont pour résultats des nombres qui “sautent à peu près” de 1 en 1 sont à mettre en regard des fonctions sphéroïdales prolates : on voit sur les figures 2 et 3 de l'article d'Estelle Sonnenblick et David Slepian que de tels écarts d'à peu près 1 ont lieu sur l'axe des abscisses par exemple entre les courbes successives.

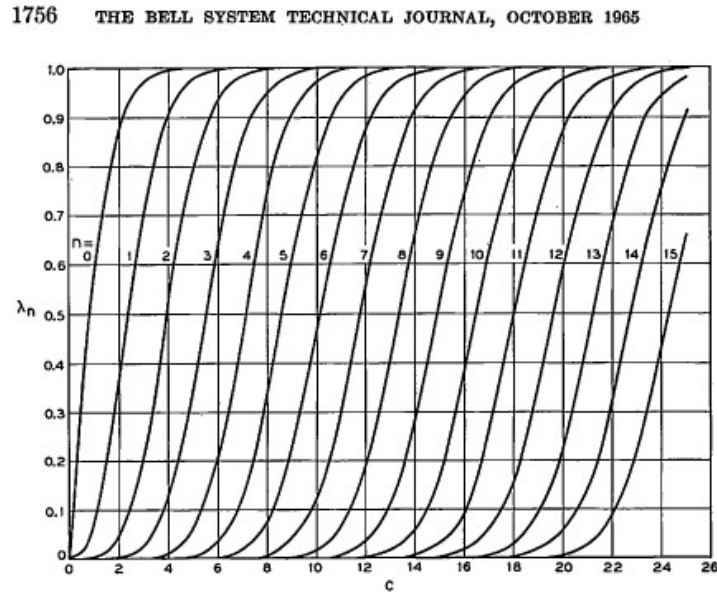


FIG. 4 : Fig. 2 de l'article de Estelle Sonnenblick et David Slepian

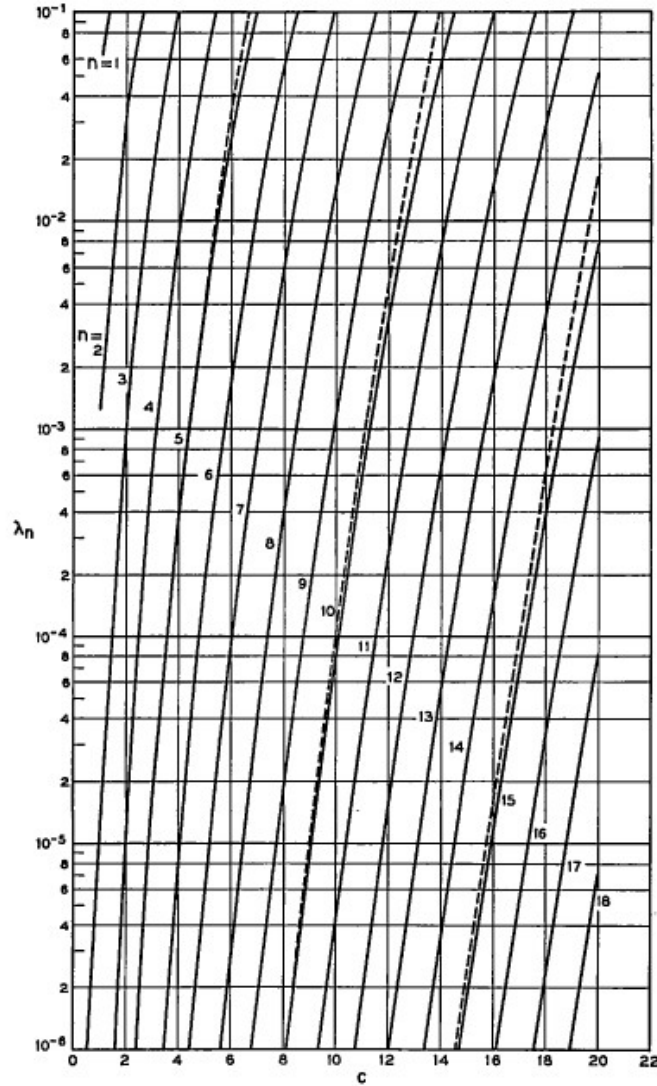


FIG. 5 : Fig. 3 de l'article de Estelle Sonnenblick et David Slepian

On note ici pour mémoire, qu'il nous faudrait comprendre, les 3 extraits suivants d'articles d'Alain Connes, en lien avec les fonctions sphéroïdales prolates, ou bien à propos du spectre de l'ensemble des nombres premiers :

- un extrait d'un article fournissant l'opérateur qui aurait $\mathcal{P}$, les nombres premiers, comme valeurs propres lien 1 ;
- deux extraits de deux articles traitant de fonctions sphéroïdales prolates : lien 2 et lien 3.

On colle ici pour mémoire un graphique des fonctions de projections sur l'ellipsoïde

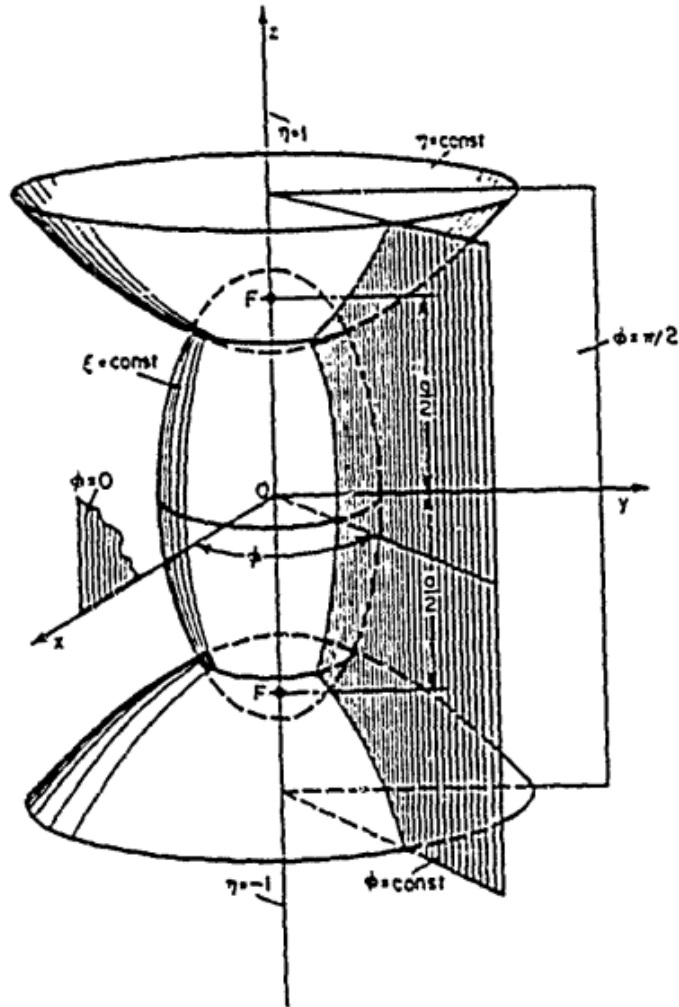


Fig. 1 - The prolate spheroidal coordinate system

ainsi que le programme python de dessin de l'ellipsoïde.

```
import matplotlib.pyplot as plt, numpy as np
```

```
fig = plt.figure(figsize=(8, 8))
ax = fig.add_subplot(projection='3d')
mu = 0.6
a = np.cosh(mu)
b, c = np.meshgrid(np.linspace(-1, 1, 100), np.linspace(0, 2*np.pi, 100))
x = np.sqrt((a**2-1)*(1-b**2))*np.cos(c)
y = np.sqrt((a**2-1)*(1-b**2))*np.sin(c)
z = a*b
ax.plot_surface(x, y, z, cmap=plt.cm.coolwarm_r, alpha=0.3, edgecolor='royalblue', lw=0.5)
ax.set(xlim=(-1, 1), ylim=(-1, 1), zlim=(-a, a))
ax.dist = 6
ax.set_axis_off()
```

```

Z = a*1.16
ax.quiver([0],[0],[0],[0],[0],[2*Z],pivot='middle',color='k', arrow_length_ratio=0.02)
fc, fl = np.array([[0, 0, -1], [0, 0, 1]]), ['F-', 'F+']
ax.scatter(fc[:, 0], fc[:, 1], fc[:, 2], s=7**2, c='k')
for k in range(len(fl)):
    ax.text(fc[k, 0] + 0.05, fc[k, 1], fc[k, 2], fl[k], size=16)
plt.show()

```

