Petite note provoquée par une conférence à l'Académie des Sciences au sujet, entre autres, des équations du troisième degré, Denise Vella-Chemla, octobre 2024.

Je raconte une incompréhension totale, au sujet des racines cubiques complexes. Lors d'une séance publique à l'Académie des Sciences en février 2024

$$https://alainconnes.org/fr/2024/02/mathematiques-et-imagination/,$$

Alain Connes a proposé le problème suivant [1].

En utilisant la formule du binôme :

$$(u+v)^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3 \iff (u+v)^3 - 3uv(u+v) - u^3 - v^3 = 0,$$

déterminer à quoi correspond le nombre : $a = \sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$.

On pose $u = \sqrt[3]{\sqrt{108}+10}$ et $v = -\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$, on a $uv = -2$ (en appliquant l'identité remarquable $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$) et $u^3 + v^3 = 20$ (on ajoute simplement les radicandes).

$u + v$ est donc solution de $x^3 + 6x - 20 = 0$ et le nombre a qu'on cherche est la solution réelle de cette équation du troisième degré.

On utilise le programme suivant pour voir :

```
import sympy as sp

x = sp.symbols('x')
eq1deg3 = x**3 + 6*x - 20
solutions1 = sp.solve(eq1deg3, x)
print('solutions eq.  deg.3 :  ',solutions1)
```

Ce programme a comme résultat :

```
solutions eq.  deg.3 :  [2, -1 - 3*I, -1 + 3*I]
```

et ô, merveille, $a = 2$ (la racine cubique réelle de 8, qu'on reconnaît, cachée dans l'identité remarquable $(\sqrt{108}-10)(\sqrt{108}+10)$).

On vérifie par exemple que $2^3 + 6 \times 2 - 20 = 0$ ou que :

$$\begin{aligned}(-1-3i)^3 + 6(-1-3i) - 20 &= (1+6i-9)(-1-3i) - 6 - 18i - 20\\ &= (-8+6i)(-1-3i) - 6 - 18i - 20\\ &= 8 - 6i + 24i + 18 - 6 - 18i - 20 = 0\end{aligned}$$

ou enfin que

$$\begin{aligned}(-1+3i)^3 + 6(-1+3i) - 20 &= (1+6i-9)(-1+3i) - 6 + 18i - 20\\ &= (-8-6i)(-1+3i) - 26 + 18i\\ &= 26 - 18i - 26 + 18i = 0\end{aligned}$$

[1] Voir transcription de la conférence ici https://denisevellachemla.eu/transc-Alain-Connes-Academie-2024.pdf, p. 2.

Deuxième exercice dans la même veine : déterminer à quoi correspond le nombre :

$$b = \sqrt[3]{4 + \sqrt{-11}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{-11}} \quad ?$$

L'équation du troisième degré à résoudre est $x^3 - 9x + 2\sqrt{-11} = 0$.

Le programme renvoie :

```
 solutions eq.  2 deg.3 :
               [ -4.01e-17 + 2.52433779896214*I,
                 -1.69e-17 - 3.3166247903554*I,
                 5.71e-17 + 0.792286991393261*I]
```
mais on ne voit pas ce que ces nombres ont de surprenant..., si ce n'est qu'on a affaire à trois multiples de i, un peu comme si une courbe (serpentine à deux méandres) du troisième degré se trouvait tournée d'un quart de tour horaire, par exemple ; mais alors, à une même abscisse correspondraient de multiples ordonnées, ou, dit autrement, un même point aurait plusieurs images différentes, ça remet en cause tout ce qu'on a appris.

L'essentiel est de commencer à comprendre (un peu) que ça tourne. Merci !

Voici l'incompréhension :

dans le livre de Gustave Verriest "Leçons sur la théorie des équations selon Galois", le problème de l'indiscernabilité des racines est bien présenté[2] par l'exemple suivant : un tour ou deux tours (2π ou 4π) sont égaux sur le cercle unité (congrus modulo 2π), ils ramènent au point 1 (du plan complexe, car $e^{2i\pi} = 1$).

Pourtant, si on divise 360 par 3, on obtient 120° (ou j), qui n'est pas identique sur le cercle-unité à 720°/3, égal à 240° (ou j^2). Ce sont deux racines de l'unité, c'est vrai, mais cependant, en divisant les 2 angles qui sont égaux modulo 2π, on devrait tomber sur le même point du cercle-unité, non ?... Incompris.

[2] je ne retrouve plus la page