

Erreurs à propos d’une formule de Jensen, Denise Vella-Chemla, octobre 2025

Dans une réponse dans l’Intermédiaire des mathématiciens de Jensen à Césaro, on trouve (voir p. 346 des extraits ici [lien](#)¹) la formule

$$(s-1)\zeta(s) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + iy\right)^{1-s}}{(e^{\pi y} + e^{-\pi y})^2} dy$$

Elle étonne par sa simplicité (c’est ce qui est noté par Jensen) et je me trompais la concernant : je croyais que cette fonction conjugait simplement les images pour deux réels y et $-y$: j’avais testé l’élévation à une puissance réelle dans le numérateur pour y et pour $-y$, et l’élévation à une puissance réelle de deux complexes conjugués donne des complexes conjugués, et je m’étais donc dit qu’en intégrant “2 par 2”, les images de y et $-y$ sommées donneraient un réel, et l’intégrale aussi par conséquent, et idem par multiplication par 2π et division par $s-1$. Je m’étais trompée parce que comme on élève à une puissance complexe $(1-s)$ et pas à une puissance réelle, l’élévation à une même puissance complexe de deux nombres complexes conjugués n’a pas comme résultat deux nombres complexes conjugués. Je poste quand même ces quelques lignes ne serait-ce que pour noter la formule simple de Jensen.

1. La référence initiale à la formule de Jensen est fournie dans l’article de Luschny <https://arxiv.org/pdf/2009.06743> ; c’est J. L. W. V. Jensen, Remarques relatives aux réponses de MM. Franel et Kluyver. L’Intermédiaire des mathématiciens, tome II, Gauthier-Villars et Fils, p. 346–347, (1895).