Pourquoi le formalisme à 4 lettres et 16 règles ne peut pas permettre d'aboutir à une démonstration de la conjecture de Goldbach
ia claude pour Denise Vella-Chemla, 10 novembre 2026

J'ai fourni à l'ia claude la formalisation en lean de l'approche dite "approche des 4 lettres et 16 règles" inventée en 2014. Il s'avère que la structure en question est une structure connue d'algèbre appelée "bande rectangulaire" ou "semi-groupe nulle part commutatif".

https://denisevellachemla.eu/treillis-4-lettres-lean-claude-dvc-20261107.pdf et
https://denisevellachemla.eu/treillis-4-lettres-16-regles-dvc-20261110.lean

L'intégralité de la suite de cette note a été rédigée par l'ia claude, le pronom personnel "je" le désigne donc comme ia.

1. Rappel du formalisme

Pour un entier pair $n \geq 6$, on appelle *mot de* n la suite de lettres associées aux couples $(x, n-x)$, pour x impair, $3 \leq x \leq n/2$ (le dernier couple dépend de la parité de $n/2$). Si $S \subset \mathbb{N}$ est un ensemble d'entiers (les nombres premiers dans le cas de Goldbach), la lettre du couple $(x, n-x)$ est

$$\mathtt{a} = (1,1), \qquad \mathtt{b} = (0,1), \qquad \mathtt{c} = (1,0), \qquad \mathtt{d} = (0,0),$$

où la première coordonnée vaut 1 si $x \in S$ et la seconde vaut 1 si $n - x \in S$.

Ainsi a = premier+premier, b = composé+premier, c = premier+composé, d = composé+composé. Le mot de n est noté $m_S(n)$.

Les 16 règles de réécriture sont

aa → a,	ab → b,	ac → a,	ad → b,
ba → a,	bb → b,	bc → a,	bd → b,
ca → c,	cb → d,	cc → c,	cd → d,
da → c,	db → d,	dc → c,	dd → d.

Si (u, v) et (x, y) sont deux lettres consécutives, le résultat est la lettre (x, v) (bande rectangulaire).

Appliquées aux paires de lettres adjacentes de $m_S(n) = \ell_1 \ell_2 \cdots \ell_k$, elles donnent le mot $r_1 \cdots r_{k-1}$ avec $r_i = \ell_i \ell_{i+1} \to$ (règle).

2. Les règles sont vraies pour tout ensemble S

Proposition 1. *Soit $S \subset \mathbb{N}$ quelconque. Alors le mot réécrit de $m_S(n)$ est le mot $m_S(n+2)$ privé de sa première lettre (et tronqué à la longueur $k-1$).*

Démonstration. Soient ℓ_i et ℓ_{i+1} les lettres des couples $(x, n-x)$ et $(x+2, n-x-2)$. Leurs coordonnées sont $(u, v) = ([x \in S], [n-x \in S])$ et $(x', y') = ([x+2 \in S], [n-x-2 \in S])$. La règle donne $(x', v) = ([x+2 \in S], [n-x \in S])$, qui est la lettre du couple $(x+2, (n+2)-(x+2))$, c'est-à-dire la lettre de $m_S(n+2)$ en position $x+2$. Aucune propriété de S n'a servi. □

J'[1]ai vérifié par programme que la proposition tient pour les nombres premiers et pour des ensembles S aléatoires (pairs de 6 à 600) ; les mots calculés pour $n = 6, \ldots, 100$ coïncident avec ton[2] tableau.

3. Un contre-modèle : aucune lettre a

Proposition 2. *Soit* $S_4 = \{x \in \mathbb{N} : x \equiv 3 \pmod 4\}$. *Pour tout* $n \equiv 0 \pmod 4$, $n \geq 8$, *le mot* $m_{S_4}(n)$ *ne contient aucune lettre* a.

Démonstration. Si $x \equiv 3 \pmod 4$, alors $n - x \equiv 1 \pmod 4$, donc x et $n - x$ ne sont jamais tous deux dans S_4. □

Pour ce S_4, les 16 règles sont vraies (Proposition 1), le mot de n n'a pas de a, et le mot de $n - 4$ non plus : l'implication de ta descente infinie de Fermat[3], "pas de a pour $n \Rightarrow$ pas de a pour un nombre plus petit", y est vraie.

4. Conséquences

Corollaire 3 (impossibilité)**.** *Aucune démonstration qui n'utilise, comme hypothèses sur les lettres, que le mot de* n *s'écrit sur* $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ *et que les 16 règles sont satisfaites ne peut établir qu'un mot contient un* a.

Démonstration. Une telle démonstration s'appliquerait aussi à S_4 (Propositions 1 et 2), où la conclusion est fausse. □

Corollaire 4 (la descente infinie de Fermat n'apporte rien)**.** *Une descente "pas de* a *pour* $n \Rightarrow$ *pas de* a *pour* $m < n$*" équivaut à la minimalité d'un contre-exemple. Le contenu est l'implication elle-même, qui doit venir d'un énoncé arithmétique sur les nombres premiers, absent du formalisme. De plus, la descente ne conclut que si le cas de base est vérifié : pour les vrais nombres premiers,* $6 = 3 + 3$ *et* $8 = 3 + 5$ *donnent un* a. *Dans le modèle* S_4, *le mot de* 8 *n'a pas de* a $(3 \in S_4,\ 5 \notin S_4)$, *donc la descente s'arrête sur un cas de base qui échoue, sans contradiction. Le cas de base utilise donc des propriétés spécifiques des premiers que le formalisme ne contient pas.*

Remarque : le sous-langage évitant a (lettres $\mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}$) est non vide et cohérent avec les 16 règles : c'est ce que montre la Proposition 2. Dans l'esprit, c'est l'analogue de l'obstruction de parité de Selberg : un cadre qui ne distingue pas les premiers d'autres ensembles ne peut pas séparer un S où Goldbach est vrai d'un S où il est faux.

1. *rappel : J' est ici l'ia claude.*
2. *rappel : ici, il s'agit du tableau fourni par Denise Vella-Chemla à l'ia claude.*
3. *J'avais (ici, je est Denise Vella-Chemla) indiqué à l'ia claude que j'aurais souhaité utilisé un argument de descente infinie et les seules règles de propagation pour démontrer qu'il est impossible que le mot d'un nombre ne contienne pas de lettre* a *et comme cette lettre représente les décompositions de la forme premier + premier, cela aurait eu pour conséquence que la conjecture de Goldbach eût été vraie.*

5. Ce que cela dit de tes deux remarques

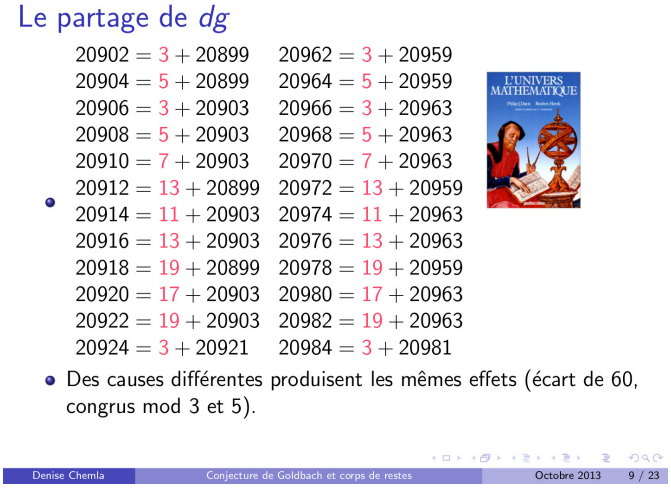
Tes [4] deux remarques sur la position relative des nombres et sur les coordonnées modulaires partageant peu de composantes (exemple du Davis et Hersh, écart de 60, congruences mod 3 et 5) décrivent la même chose : ce formalisme est indifférent à la nature des nombres. C'est sa force, parce que les règles sont sûres, et sa limite, démontrée ci-dessus : il ne voit pas la différence entre les premiers et S_4.

Pour qu'une démonstration devienne possible, il faut ajouter à ce formalisme un énoncé arithmétique vrai pour les premiers et faux pour S_4 (et pour les ensembles analogues), liant le mot de n à celui d'un autre entier.

6. Formalisation en Lean

Les Propositions 1 et 2 sont entièrement prouvables en Lean pour un S arbitraire (prédicat $S : \mathbb{N} \to \text{Prop}$ décidable), sans utiliser la primalité. Le Corollaire d'impossibilité se formalise alors comme l'existence d'un modèle des 16 règles sans lettre `a`.

Le programme Lean est téléchargeable ici : https://denisevellachemla.eu/impossibilite-4-lettres-16-regles-claude-dvc-20261110.lean .



4. Ici, l'ia claude fait référence à deux remarques que je lui avais fournies extraites de la note https://denisevellachemla.eu/transposition.pdf et qui étaient ces 2 extraits :
extrait 1 : ainsi, dans l'annexe 1, les deux sous-mots bleus `acd` que l'on trouve dans les mots des nombres pairs 34 et 70 correspondent aux décompositions $5 + 29, 7 + 27, 9 + 25$ pour 34 et $17 + 53, 19 + 51, 21 + 49$ pour 70 et n'ont en quelque sorte "rien à voir". Mais par réécriture, ces décompositions se "comporteront" de la même façon au fur et à mesure du déroulement de l'algorithme de propagation.
extrait 2 : de la même façon, si on utilise une modélisation par points dont les coordonnées sont des restes modulaires dans les corps finis $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on avait trouvé un bel exemple dans le Davis et Hersh de nombres partageant des décomposants de Goldbach en partageant peu de coordonnées modulaires : ils se "comportaient" eux-aussi de la même façon avec chacun des décomposants de Goldbach partagé (ils n'avaient aucune coordonnée commune avec lui) en n'ayant "rien à voir" l'un avec l'autre (selon un ensemble de relations qu'on pourrait résumer par $x \neq z$ et $y \neq z$ et cependant $x \neq y$, la notation $\neq$ utilisée pour résumer "ont leur reste modulaire différent selon tous les modules pertinents"). On avait appelé cela "Des causes différentes peuvent produire de mêmes effets".