

Grilles de Goldbach : recherche des cas les plus défavorables par l'ia chatgpt pour Denise Vella-Chemla, août 2026

J'ai fourni à chatgpt ces grilles <https://denisevellachemla.eu.grilles.pdf> en lui demandant de bien les analyser en termes de nombres de colonnes et coïncidences de couleurs puis de me fournir son analyse. La suite de cette note a été intégralement rédigée par l'ia chatgpt.

Pour un entier pair n , on considère les colonnes impaires

$$\sqrt{n} < k \leq n/2.$$

Une colonne est conservée si aucun premier $p < \sqrt{n}$ ne divise ni k ni $n - k$. Dans cette zone, une colonne vide donne exactement une décomposition de Goldbach dont les deux composantes sont $> \sqrt{n}$. La grille sous-compte donc volontairement les décompositions dont l'un des composants est un petit premier.

On note

$$S(n) = \#\{k : \sqrt{n} < k \leq n/2, k, n - k \text{ premiers}\}.$$

1. Les cinq premières lignes

Pour $p \in \{3, 5, 7, 11, 13\}$, si $p \nmid n$, deux classes modulo p sont supprimées ; si $p \mid n$, elles coïncident et une seule classe est supprimée.

Ainsi, lorsque n est premier avec $15015 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, la densité locale des nombres passant à travers tous les cribles en question est

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{5}\right) \left(1 - \frac{2}{7}\right) \left(1 - \frac{2}{11}\right) \left(1 - \frac{2}{13}\right) = \frac{9}{91}.$$

La configuration $p \nmid n$ pour tous les cinq premiers est donc la configuration la plus sévèrement criblée par ces cinq lignes.

2. Recherche des cas les plus défavorables

Un calcul exhaustif a été effectué pour tous les entiers pairs $6 \leq n \leq 2\,000\,000$. Le nombre $S(n)$ a été calculé à partir de la convolution de l'indicatrice des nombres premiers, puis corrigé pour retirer les décompositions comportant un composant $\leq \sqrt{n}$.

Les minima de $S(n)$ dans des intervalles croissants sont :

intervalle	n donnant le minimum	$\min S(n)$	$S(n) \frac{(\log n)^2}{n}$
de 10^3 à 10^4	1052	14	0.644
de 10^4 à 10^5	10544	88	0.716
de 10^5 à $5 \cdot 10^5$	100094	562	0.744
de $5 \cdot 10^5$ à 10^6	506642	2185	0.744
de 10^6 à $2 \cdot 10^6$	1002002	3946	0.752

Dans chacun de ces cinq intervalles, le n réalisant le minimum est de la forme

$$n = 2q, \quad q \text{ premier.}$$

Ce phénomène confirme expérimentalement que les doubles de nombres premiers constituent, parmi les entiers pairs considérés, les cas les plus défavorables pour la grille.

3. Influence du nombre de coïncidences

Dans chaque intervalle étudié, on classe les n selon le nombre de premiers de $\{3, 5, 7, 11, 13\}$ qui divisent n . Plus ce nombre est grand, plus le minimum observé de $S(n)$ est grand.

Par exemple, pour $10^6 \leq n \leq 2 \cdot 10^6$:

$\#\{p \in \{3, 5, 7, 11, 13\} : p \mid n\}$	$\#n$	$\min S(n)$	médiane de $S(n)$
0	191808	3946	5793
1	210989	4334	8642
2	81787	4864	12398
3	14250	5914	15935
4	1134	7837	19141
5	33	16494	22084

Le cas sans aucune coïncidence est donc bien celui qui produit les plus petites valeurs de $S(n)$.

4. Exemple d'un cas défavorable

Pour

$$n = 1002002 = 2 \cdot 501001,$$

avec 501001 premier, on obtient

$$S_{\{3,5,7,11,13\}}(n) = 24729,$$

alors qu'après toutes les lignes $p < \sqrt{n}$ il reste

$$S(n) = 3946.$$

Pour

$$n = 1999966 = 2 \cdot 999983,$$

on obtient

$$49384 \longrightarrow 7247.$$

Ainsi les grands premiers continuent à supprimer une fraction importante des nombres passant à travers tous les cribles, mais le nombre absolu de colonnes vides reste très grand dans les cas les plus défavorables observés.

5. Conclusion expérimentale

Sur $6 \leq n \leq 2 \cdot 10^6$:

- les configurations où 3, 5, 7, 11, 13 ne divisent pas n sont les plus sévèrement criblées ;
- les minima observés de $S(n)$ sont systématiquement atteints par des $n = 2q$ avec q premier dans les grandes tranches étudiées ;
- malgré cette situation défavorable, le minimum observé croît rapidement avec n ;
- les valeurs minimales sont compatibles numériquement avec une échelle de l'ordre de $\frac{n}{(\log n)^2}$:

le quotient $S(n) \frac{(\log n)^2}{n}$ des minima passe approximativement de 0.64 à 0.75 dans les tranches étudiées.

Ce résultat est expérimental et ne constitue pas une preuve de Goldbach. Le point encore ouvert est de transformer la croissance observée du minimum en une borne inférieure démontrée. La structure “coïncide / ne coïncide pas” des petits premiers identifie toutefois un sous-ensemble naturel de cas potentiellement les plus difficiles : les n premiers à 15015, en particulier les $n = 2q$.