Conjecture de Goldbach et géométrie affine, Denise Vella-Chemla, octobre 2024

Il s'agit d'expliquer simplement la conjecture de Goldbach. On cherche les décomposants de Goldbach d'un nombre pair n. On n'utilise que des additions/soustractions itérées (entendues comme des opérateurs), à partir d'un nombre donné, dans $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs (sauts de tant en tant, vers un nombre plus grand ou vers un nombre plus petit). On présentera les idées dans l'ensemble des matrices 2×2 plus loin.

Les deux questions qu'on se pose sont :

- à partir d'un nombre x, peut-on atteindre 0, par des soustractions itérées d'un nombre compris entre 2 et $x - 1$? et
- à partir d'un nombre x, peut-on atteindre n, par des additions itérées d'un nombre compris entre 2 et $x - 1$?".

Si on peut atteindre 0 à partir de x, i.e. si $0 = x - a \times b$, avec $a, b \in [2, x - 1]$ alors x est composé. Si on peut atteindre n à partir de x, i.e. si $n = x + a \times b$, avec $a, b \in [2, x - 1]$ alors le complémentaire de x à n (noté $n - x$) est composé.

On comprend aisément que les décomposants de Goldbach de n sont les nombres qui ne permettent ni d'atteindre 0 par itération d'un certain nombre de soustractions, ni d'atteindre n par itération d'un certain nombre d'additions (en respectant les contraintes énoncées ci-dessus).

Voyons les nombres qui ne sont pas des décomposants de 98 [1]:

- on atteint 0 à partir de n'importe quel pair par soustractions itérées de 2, ou bien on atteint $n = 98$ à partir de n'importe quel pair par additions itérées de 2 ;
- on atteint 98, à partir de 3, par additions itérées de 5 ; il en est de même à partir de 13 ou de 43 ;
- on atteint 98, à partir de 5, par additions itérées de 3 ; il en est de même à partir de 11, 17, 29, 41 ou de 47 ;
- on atteint 98, à partir de 7, par additions itérées de 7 ;
- on atteint 0, à partir de 9, par soustractions itérées de 3 ; il en est de même à partir de de 15, 21, 33 ou 39 ;
- on atteint 0, à partir de 25, par soustractions itérées de 5 ; il en est de même à partir de 35 ou de 45.

Voyons maintenant les décomposants de 98.

- on ne peut atteindre ni 0 par soustractions itérées de 2, ni 98 par additions itérées de 2, à partir de 19 ou bien à partir de son complémentaire à 98 qui est 79 ; il en est de même par des soustractions itérées d'un nombre quelconque compris entre 2 et 18 pour 19, ou compris entre 2 et 78 pour 79 ;

[1] Les énoncés ci-dessous s'expriment très simplement dans le langage des congruences de Gauss.

- de même, 0 ou 98 sont hors d'atteinte de $x = 31$ ou de $n - x = 67$, par additions ou soustractions itérées d'un nombre compris entre 2 et x, et 0 est hors d'atteinte de $n - x = 67$ par soustractions itérées de nombres compris entre entre 2 et $n - x$;

  enfin, 0 ou 98 sont hors d'atteinte de $x = 37$ et $n - x = 61$, par additions ou soustractions itérées d'un nombre compris entre 2 et x, et 0 est hors d'atteinte de $n-x = 61$ par soustractions itérées de nombres compris entre 2 et $n - x$.

Comment être sûre qu'un nombre qui n'atteint ni 0 par soustractions itérées ni n par additions itérées existe toujours ?

On peut se placer dans un autre espace : utilisons le cercle modulaire (horloge) sur lequel sont positionnés les nombres de 0 à n avec identification de ces deux extrémités 0 et n. Les additions/soustractions itérées deviennent des rotations d'angle constant et leurs puissances, dans le sens horaire ou anti-horaire, sur ce cercle. Il se produit cependant quelque chose de différent : en partant d'un décomposant de Goldbach et en effectuant les rotations dans un sens et l'autre, on finira au bout d'un certain nombre de sauts à revenir à son point de départ, mais plus ou moins vite : prenons $n = 20$, il a pour décompositions de Goldbach $3 + 17$ et $7 + 13$. Les nombres successifs par sauts de 3 à partir de 3 donnent :

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 3.$$

En partant de 3, il a fallu effectuer 20 sauts pour revenir à 3 (ou 19 sauts pour atteindre $n = 20$). Si l'on veut, pour trouver les décomposants de Goldbach, imposer la contrainte "ne pas atteindre 0 (qui est dans le cas du cercle modulaire identifié à n)" en effectuant des rotations itérées d'angle fixé dans un sens ou dans l'autre, il faut imposer une contrainte sur le nombre de sauts : "ne pas atteindre 0 ou n en un nombre de sauts inférieur à $n/2$ par exemple."

Représentons ces idées par des matrices 2×2. Les nombres sont représentés par des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; par exemple la matrice $\begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ représente le nombre 19. Les opérateurs, ou matrices correspondant aux sauts de tant en tant, sont représentés par des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On utilise l'opération d'élévation à une certaine puissance d'une matrice pour itérer l'action d'un opérateur.

Exemple : faire 2 sauts montants de longueur 3 à partir de 19 (i.e. ajouter 2 fois 3 à 19, et on doit bien sûr trouver 25 par multiplication matricielle).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour représenter correctement le saut souhaité, l'opérateur doit être placé à gauche du nombre (*attention* : du fait de la non-commutativité de la multiplication matricielle, le résultat obtenu est différent si l'opérateur est placé à droite du nombre).

En ayant bien à l'esprit que les 3 manières fournies ci-dessus de présenter le problème sont équivalentes, revenons à la droite des entiers relatifs.

Écrivons ci-dessous les différentes façons d'atteindre 98, qu'on écrit sous la forme $a + bc$ (on les imagine comme c additions du nombre b du nombre a) ou les différentes façons d'atteindre 0 (remplacer additions par soustractions).

$$98 = \begin{cases} 3+5\times 19 \\ 5+3\times 31 \\ 7+7\times 13 \\ 11+3\times 29 \\ 13+5\times 17 \\ 17+3\times 27 \\ 21+7\times 11 \\ 23+3\times 25 \\ 23+5\times 15 \\ 29+3\times 23 \\ 33+5\times 13 \\ 35+3\times 21 \\ 35+7\times 9 \\ 41+3\times 19 \\ 43+5\times 11 \\ 47+3\times 17 \end{cases} \Bigg| \quad 0 = \begin{cases} 3-3\times 1 \\ 5-5\times 1 \\ 7+7\times 1 \\ 9-3\times 3 \\ 15-3\times 5 \\ 15-5\times 3 \\ 21-3\times 7 \\ 21-7\times 3 \\ 25-5\times 5 \\ 27-3\times 9 \\ 33-3\times 11 \\ 35-5\times 7 \\ 35-5\times 7 \\ 39-3\times 13 \\ 39-3\times 13 \\ 45-3\times 15 \\ 45-5\times 9 \end{cases}$$

Dans la mesure où on ne sait pas quels sont les triplets solutions des équations $a - bc = 0$ ou $a+bc = n$ (a et b appartenant à des intervalles contraints convenablement), on n'est pas capable de compter les redondances, ce qui permettrait éventuellement d'être assurée qu'un nombre au moins ne peut atteindre ni 0 ni n. C'est une autre raison, plus structurelle, qui doit garantir l'existence.

Puisque pour $a = 19$, $a = 31$ ou $a = 37$, aucun couple (b, c) n'est solution des équations $a+bc = 98$ ou $a - bc = 0$ (avec $c \neq -1$), 19, 31 ou 37 sont des décomposants de Goldbach de 98.