Extrait d'une conférence du 15 juin 2011 de Pierre Boulez et Alain Connes à l'IRCAM au sujet de la créativité en musique et mathématiques (DC 30/12/13)

Pierre Boulez explique[1] : "Quand je regarde la musique, je commence par essayer d'en comprendre la forme".

[puis, à propos de non-experts s'exprimant au sujet d'une musique entendue] "Il n'y avait *(de leur part)* aucune conception de la forme mais il y avait une conception des évènements et des évènements qui n'étaient pas liés par une forme, mais des évènements séparés.
C'est très difficile d'approcher une forme même car une forme est vraiment disons... ce que... comment la personne la regarde.
Quand on voit le détail *(d'une partition musicale)*, on voit comment le discours se construit, s'il se construit plus horizontalement que verticalement ou plus verticalement qu'horizontalement, par cassure ou continuité".

Notes (!)
J'applique la méthode préconisée par Francis Brown : je regarde intensément mes grilles de divisibilité, et j'attends qu'un miracle se produise...
Pourquoi une colonne vide (qui dénote une décomposition de Goldbach) n'est pas perdue d'une grille à la suivante ; il y a quelque-chose qui ne bouge pas, au fur et à mesure du processus, un invariant qui fait qu'une condition est conservée et cette condition garantit la non-perte de l'existence d'un décomposant de Goldbach. On voit bien ce qui ne varie pas d'une grille à l'autre : c'est la forme (au sens de Pierre Boulez) des configurations bleues ou grises ; pour décrire mathématiquement une forme, il faut utiliser les distances entre les sommets de la forme et dans le cas qui nous intéresse, les sommets en question correspondent aux restes des différents entiers dans les différents corps premiers, les coordonnées de points qu'on a définies dans d'autres notes. On a le sentiment de s'approcher un peu du but, mais il semble tout de même encore très loin...

1. entre les minutes 19 et 21

Annexe 1 : Rappel historique

Citons Charles-Ange Laisant dans la note intitulée *Sur un procédé expérimental de vérification de la conjecture de Goldbach* du Bulletin de la SMF $n°25$ de 1897.

> *Ce fameux théorème empirique : Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers, dont la démonstration semble dépasser les possibilités scientifiques actuelles, a fait l'objet de nombreux travaux et de certaines contestations. Lionnet a tenté d'établir que la proposition devait probablement être inexacte. M. Georg Cantor l'a vérifiée numériquement jusqu'à 1000, en donnant pour chaque nombre pair toutes les décompositions en deux nombres premiers, et il a remarqué que le nombre de ces décompositions ne cesse de croître en moyenne, tout en présentant de grandes irrégularités.*
>
> *Voici un procédé qui permettrait de faire sans calcul la vérification expérimentale dont il s'agit, et d'avoir pour chaque nombre pair, à la seule inspection d'une figure, toutes les décompositions. Supposons que sur une bande formée de carrés accolés, représentant les nombres impairs successifs, on ait construit le crible d'Erathostène, en ombrant les nombres composés, jusqu'à une limite quelconque* $2n-1$.

FIGURE 1

> *Si l'on a construit deux réglettes pareilles, et si l'on place la seconde au-dessous de la première en la retournant et en faisant correspondre la case* 1 *à* $2n$ **, il est évident que si le théorème de Goldbach est vrai pour* $2n$*, il y aura quelque part deux cases blanches en correspondance ; et tous les couples de cases blanches donneront les diverses décompositions. On les aura même en lisant la moitié de la figure, à cause de la symétrie par rapport au milieu. Ainsi la vérification relative au nombre* 28 *donnera la figure 2 et montrera qu'on a les décompositions* $28 = 5+23 = 11+17$.

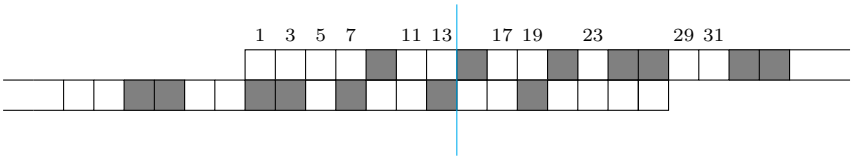

FIGURE 2

> *On comprend que les réglettes étant construites à l'avance, et un simple glissement permettant de passer d'un nombre à un autre, les vérifications sont très rapides.*

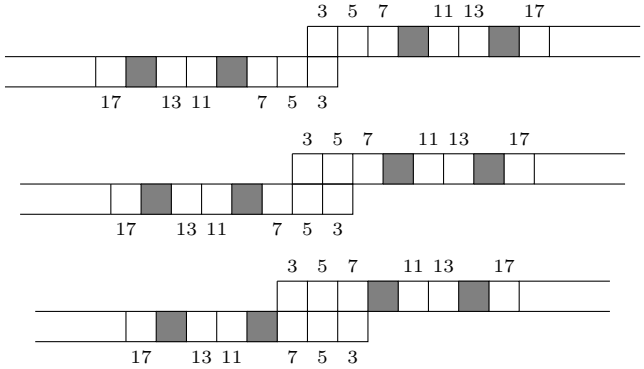

FIGURE 3

*. Ici devrait être écrit $2n-1$.

Annexe 1 : extrait du texte de Laisant sur la figuration des nombres composés

A ces remarques sur les décompositions des nombres en facteurs, nous croyons devoir en ajouter une sur un mode de figuration fort simple et qui n'a cependant pas été signalé jusqu'ici, du moins à notre connaissance. Il y aurait peut-être lieu d'en tirer parti pour l'enseignement des premiers principes élémentaires relatifs à la décomposition des nombres en facteurs premiers, à la formation du plus grand commun diviseur et à celle du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres.
Voici en quoi consiste cette figuration. Supposons que, un quadrillage indéfini étant tracé à la droite d'une ligne verticale, nous numérotions les bandes horizontales successives 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17..., en les affectant aux nombres premiers successifs. Si un nombre composé contient un facteur premier a à l'exposant i, on comptera i cases, à partir de la droite verticale, dans la bande qui représente le facteur a. L'ensemble des cases ainsi déterminées, et que l'on pourra limiter par le tracé du contour extérieur, figurera le nombre en question. Il est évident que ce tracé peut suivre parfois la ligne verticale origine, lorsque certains facteurs premiers font défaut, c'est à dire ont l'exposant zéro.
Nous nous bornons à donner comme exemple la figuration des nombres
$360 = 2^3.3^2.5$ et $16500 = 2^2.3.5^3.11$ (fig. 1 et 2).

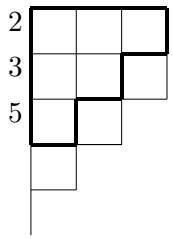

Fig. 1 – N = 360

Ce mode de représentation met en relief d'une façon saisissante la formation des diviseurs, ou, ce qui revient au même, la décomposition en deux facteurs, dont nous avons parlé ci-dessus. Le nombre des diviseurs est

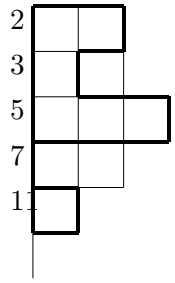

Fig. 2 – N = 16500

évidemment égal au nombre des chemins différents qu'on peut suivre pour aller de la base inférieure à la base supérieure de la figure formée, en suivant toujours les lignes du quadrillage.
Le plus grand commun diviseur de deux nombres se trouve représenté par la partie commune des figures qui représentent ces deux nombres ; le plus petit commun multiple, par la figure limitée au contour extérieur dessinée par l'ensemble des deux figures. Nous donnons comme exemple (fig.3) le plus grand commun diviseur D des deux nombres $N = 1890 = 2.3^3.5.7$ et $N' = 660 = 2^2.3.5.11$, leur plus grand commun diviseur $D = 2.3.5 = 30$ et leur plus petit commun multiple $p = 2^2.3^2.5.7.11 = 41580$, en figurant les deux nombres au moyen de carrés colorés.

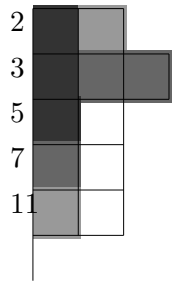

Fig. 3 – pgcd et ppcm

On comprend qu'en représentant par diverses valeurs plusieurs nombres, on peut ainsi figurer leurs diviseurs ou leurs multiples, soit d'ensemble, soit deux à deux. Par exemple, si trois nombres A, B, C sont figurés A en rouge, B en bleu et C en jaune, les plus grands communs diviseurs seront figurés celui de A et B par la partie violette, celui de B et C par la partie verte, celui de A et C par la partie orangée.

Un assez grand nombre de propriétés connues peuvent avec cette figuration prendre un caractère intuitif. Il suffit pour cela de remarquer que, lorsqu'un nombre A est multiple d'un autre nombre B, le contour de la figuration de A contient le contour de la figuration de B, et aussi que, lorsque plusieurs nombres sont premiers entre eux deux à deux, les figurations des deux quelconques de ces nombres n'ont aucune partie commune.

Au fond, ce mode de figuration est en quelque sorte un système de numérotation dans lequel l'ordre d'un chiffre, à partir de la gauche par exemple, représenterait l'exposant. Ainsi, dans les exemples cités plus haut, les divers nombres s'écriraient comme suit : 360 s'écrirait 321, 16500 s'écrirait 21301, 1890 s'écrirait 1311, 660 s'écrirait 21101, 30 s'écrirait 111, 41580 s'écrirait 23111. Le produit de deux nombres, dans ce système, s'obtiendrait par l'addition des chiffres de même rang (et il est bien entendu qu'ici nous désignons par le mot *chiffres* des nombres qui peuvent devenir aussi grands qu'on voudra). La formation du plus petit commun multiple ou du plus grand commun diviseur est évidente ; et il apparaît non moins clairement, par exemple, que le produit de deux nombres est également le produit de leur plus petit commun multiple par leur plus grand commun diviseur.
Tout nombre représenté par l'unité précédée d'un nombre quelconque de zéros est un nombre premier, et réciproquement.
Tout nombre dont les chiffres sont pairs est un carré.
Nous croyons devoir borner là ces observations, trop simples pour mériter d'être plus complètement développées.

Annexe 2 : extrait de la communication de Laisant "Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach"

Ce fameux théorème empirique : *Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers*, dont la démonstration semble dépasser les possibilités scientifiques actuelles, a fait l'objet de nombreux travaux et de certaines contestations. Lionnet a tenté d'établir que la proposition devait probablement être inexacte. M. Georg Cantor l'a vérifiée numériquement jusqu'à 1000, en donnant pour chaque nombre pair toutes les décompositions en deux nombres premiers, et il a remarqué que le nombre de ces décompositions ne cesse de croître en moyenne, tout en présentant de grandes irrégularités.

Voici un procédé qui permettrait de faire sans calculs la vérification expérimentale dont il s'agit, et d'avoir pour chaque nombre pair, à la seule inspection d'une figure, toutes les décompositions.

Supposons que sur une bande formée de carrés accolés, représentant les nombres impairs successifs, on ait construit le crible d'Erathostène, en ombrant les nombres composés, jusqu'à une limite quelconque $2n - 1$.

Fig. 1

Si l'on a construit deux réglettes pareilles, et si l'on place la seconde au dessous de la première en la retournant et en faisant correspondre la case 1 à $2n - 1$, il est évident que si le théorème de Goldbach est vrai pour $2n$, il y aura quelque part deux cases blanches en correspondance ; et tous les couples de cases blanches donneront les diverses décompositions. On les aura même en lisant la moitié de la figure, à cause de la symétrie par rapport au milieu. Ainsi la vérification relative au nombre 28 donnera la figure 2 et montrera qu'on a les décompositions $28 = 5 + 23 = 11 + 17$.

Fig. 2

On comprend que les réglettes étant construites à l'avance, et un simple glissement permettant de passer d'un nombre à un autre, les vérifications sont très rapides.

Annexe 2 : éléments épars

- Extrait d'un numéro spécial du magazine la Recherche "Nombres" n°278, juillet/août 1995.

  Quand les paramètres et les variables de l'équation sont des éléments d'un corps fini (remarque de l'auteur : mais cela n'est pas le cas pour $\mathbb{Z}_n$ lorsque n n'est pas premier car il existe des diviseurs de 0), on dit que l'équation définit une courbe sur le corps fini considéré. Ce sont des courbes *algébriques*, car leurs équations sont toujours données par des polynômes. En effet, sur un corps fini, *toutes* les fonctions sont des polynômes, ce qui simplifie grandement les calculs : il n'y a ni sinus ni cosinus (cela découle du fait que pour tout élément x d'un tel corps, on a $x^q = x$, où q est le nombre d'éléments du corps). L'un des résultats les plus importants concerne le nombre de points d'une courbe algébrique sur un corps fini, c'est-à-dire le nombre de solutions du système d'équations correspondant. Le mathématicien français André Weil a prouvé en 1940 que le nombre N de points de la courbe vérifie l'inégalité $N \leq q+1+2g\sqrt{q}$ (où q est le nombre d'éléments du corps considéré et g est le "genre" de la courbe, un nombre qui mesure sa complexité). La généralisation de cette inégalité a valu à Pierre Deligne la médaille Fields en 1978.

- Extrait d'une revue de vulgarisation mathématique

  L'équation $x^n - 1 = 0$ est équivalente à autant d'équations particulières que $n-1$ a de facteurs premiers et les degrés des équations sont les facteurs en question. Par exemple, l'équation $x^{13} - 1 = 0$ puisque $13 - 1 = 12 = 2 * 2 * 3$ est équivalente à deux équations du second degré et une équation du troisième degré.

  D'ailleurs, il n'y a que les équations d'un pareil degré p^ν qui soient à la fois primitives et solubles par radicaux.

- Extrait des oeuvres mathématiques d'Evariste Galois trouvées sur Gallica p.405

  Le principal avantage de la nouvelle théorie que nous venons d'exposer est de ramener les congruences à la propriété (si utile dans les équations ordinaires) d'admettre précisément autant de racines qu'il y a d'unités dans l'ordre de leur degré. La méthode pour avoir toutes ces racines sera très simple. Premièrement, on pourra toujours préparer la congruence donnée $Fx = 0$, et le moyen de le faire est évidemment le même que pour les équations ordinaires.

  Ensuite, pour avoir les solutions entières, il suffira, ainsi que M. Libri paraît en avoir fait le premier la remarque, de chercher le plus grand facteur commun à $Fx = 0$ et à $x^{p-1} = 1$.

  Si maintenant on veut avoir les solutions imaginaires du second degré, on cherchera le plus grand facteur commun à $Fx = 0$ et à $x^{p^\nu - 1} = 1$.

  C'est surtout dans la théorie des permutations, où l'on a sans cesse besoin de varier la forme des indices, que la considération des racines imaginaires des congruences paraît indispensable. Elle donne un moyen simple et facile de reconnaître dans quel cas une équation primitive est soluble par radicaux, comme je vais essayer d'en donner en deux mots une idée [...] Ainsi, pour chaque nombre de la forme p^ν, on pourra former un groupe de permutations tel que toute fonction des racines invariable par ces permutations devra admettre une valeur rationnelle quand l'équation de degré p^ν sera primitive et soluble par radicaux.

Annexe 3 : d'autres manières d'aborder la conjecture de Goldbach d'une grande complexité

Un extrait du livre collectif "les Nombres" aux éditions Vuibert [19], page 404, provenant de la section concernant les preuves d'indépendance logique :
"On peut mentionner la conjecture de Goldbach. Plus généralement, on peut penser à tout énoncé portant sur les nombres naturels et comprenant un ensemble fini de quantificateurs universels suivi d'un noyau sans quantificateur, ce qui est par exemple le cas de toute équation diophantienne ou de sa négation. Tant qu'un tel problème n'est pas résolu, on peut se demander s'il est indépendant de ZFC[17]. Pour ce type de problème, un résultat d'indépendance a une signification très différente de ceux concernant l'hypothèse du continu ou l'hypothèse de Suslin : une preuve de son indépendance implique automatiquement sa vérité. Si par exemple, l'hypothèse de Riemann était fausse, il devrait y avoir un contre-exemple dont la validité pourrait être vérifiée, sur la base de ZFC. Ainsi, l'indépendance ne pourrait survenir que si la conjecture était vraie. Pour démontrer que Goldbach est vraie, il faudrait démontrer qu'elle n'est pas réfutable selon ZFC."

Un extrait du livre "le défi de Hilbert" de J.J.Gray [18]: Un autre problème, également mentionné par Hilbert, qui peut se ramener à une équation diophantienne, est la conjecture de Goldbach. Elle en devient l'affirmation qu'une certaine équation diophantienne n'a pas de solution. Si le dixième problème de Hilbert avait admis une réponse positive, la conjecture de Goldbach aurait été réfutée - une connexion que Hilbert n'avait certainement pas soupçonnée. Davis, Mattiassevitch et Robinson montrèrent que même l'hypothèse de Riemann peut être reformulée comme une question Diophantienne (ce qui ne la rend pas plus facile pour autant). Julia Robinson disait ceci à propos du dixième problème de Hilbert : "Je souhaitais toujours à chacun de mes anniversaires et d'année en année que le dixième problème de Hilbert soit résolu. Pas par moi, mais simplement qu'il soit résolu. J'avais le sentiment que je ne pourrais accepter de mourir sans connaître la réponse". On raconte d'autre part qu'Hadamard et la Vallée-Poussin qui ont prouvé indépendamment le TNP sont morts très âgés. Allez, je l'avoue, toutes ces recherches n'ont qu'un but : augmenter, autant que faire se peut, ma longévité !

Enfin, un extrait des oeuvres mathématiques d'Evariste Galois trouvées sur Gallica p.405 : "le principal avantage de la nouvelle théorie [18] que nous venons d'exposer est de ramener les congruences à la propriété (si utile dans les équations ordinaires) d'admettre précisément autant de racines qu'il y a d'unités dans l'ordre de leur degré. La méthode pour avoir toutes ces racines sera très simple. Premièrement, on pourra toujours préparer la congruence donnée $Fx = 0$, et le moyen de le faire est évidemment le même que pour les équations ordinaires. Ensuite, pour avoir les solutions entières, il suffira, ainsi que M. Libri paraît en avoir fait le premier la remarque, de chercher le plus grand facteur commun à $Fx = 0$ et à $x^{p-1} = 1$. Si maintenant on veut avoir les solutions imaginaires du second degré, on cherchera le plus grand facteur commun à $Fx = 0$ et à $x^{p^\nu - 1} = 1$. C'est surtout dans la théorie des permutations, où l'on a sans cesse besoin de varier la forme des indices, que la considération des racines imaginaires des congruences paraît indispensable. Elle donne un moyen simple et facile de reconnaître dans quel cas une équation primitive est soluble par radicaux, comme je vais essayer d'en donner en deux mots une idée [...] Ainsi, pour chaque nombre de la forme p^ν, on pourra former un groupe de permutations tel que toute fonction des racines invariable par ces permutations devra admettre une valeur rationnelle quand l'équation de degré p^ν sera

[17] mis pour axiomatique de Zermelo-Fraenkel avec l'axiome du choix.
[18] consistant à associer à une équation ce que l'on appelle son groupe de Galois.

primitive et soluble par radicaux"[19].

Pour finir, je voudrais reproduire dans cette annexe un extrait d'une superbe biographie de Galois par Alexandre Astruc, publiée aux éditions Flammarion en 1994 car je crois que l'on gagnerait à faire circuler de telles phrases.

Astruc écrit que "communiquer ses découvertes, être reconnu par ses pairs, telles sont les idées fixes de tout savant, et Galois ne fait pas exception à cette règle". Un peu plus loin, il cite intégralement la préface de Galois à ses "deux mémoires d'analyse pure". La fin de cette préface préfigure le partage actuel de la connaissance via internet notamment et cette notion de partage m'est chère.

"On doit prévoir que, traitant des sujets aussi nouveaux, hasardé dans une voie aussi insolite, bien souvent des difficultés se sont présentées que je n'ai su vaincre. Aussi, dans ces deux mémoires et surtout dans le second qui est plus récent, trouvera-t-on souvent la formule : "Je ne sais pas." La classe des lecteurs dont j'ai parlé au commencement[20] ne manquera pas d'y trouver à rire. C'est que malheureusement on ne se doute pas que le livre le plus précieux du plus savant serait celui où il dirait tout ce qu'il ne sait pas, c'est qu'on ne se doute pas qu'un auteur ne nuit jamais tant à ses lecteurs que quand il dissimule une difficulté. Quand la concurrence, c'est à dire l'égoïsme, ne règnera plus dans les sciences, quand on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux Académies des paquets cachetés, on s'empressera de publier les moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera : "Je ne sais pas le reste.""

Annexe 1 : Extrait de la section première des Recherches Arithmétiques de Gauss

1. Si un nombre a divise la différence des nombres b et c, b et c sont dits *congrus* suivant a, sinon *incongrus*. a s'appellera le module ; chacun des nombres b et c, *résidus* de l'autre dans le premier cas, et *non résidus* dans le second.

Les nombres peuvent être positifs ou négatifs, mais entiers. Quant au module il doit évidemment être pris absolument, c'est à dire, sans aucun signe.

Ainsi -9 et $+16$ sont *congrus* par rapport au module 5 ; -7 est *résidu* de 15 par rapport au module 11, et *non résidu* par rapport au module 3.

Au reste 0 étant divisible par tous les nombres, il s'ensuit qu'on peut regarder tout nombre comme congru avec lui-même par rapport à un module quelconque.

2. Tous les résidus d'un nombre donné a suivant le module m sont compris dans la formule $a + km$, k étant un entier indéterminé. Les plus faciles des propositions que nous allons exposer peuvent sans peine se démontrer par là ; mais chacun en sentira la vérité au premier aspect.

Nous désignons dorénavant la congruence de deux nombres par ce signe $\equiv$, en y joignant, lorsqu'il sera nécessaire, le module renfermé entre parenthèses ; ainsi $-16 \equiv 9\ (mod\ 5)$, $-7 \equiv 15\ (mod\ 11)$[2].

3. THEOREME : *Soient m nombres entiers successifs a, a+1, a+2, ..., a+m-1 et un autre A, un des premiers sera congru avec A, suivant le module m, et il n'y en aura qu'un.*
[*Démonstration*]

4. Il suit de là que chaque nombre aura un résidu, tant dans la suite $0, 1, 2, ..., (m-1)$, que dans celle-ci $0, -1, -2, ..., -(m-1)$; nous les appellerons résidus minima ; et il est clair qu'à moins que 0 ne soit résidu, il y en aura toujours deux, l'un positif, l'autre négatif. S'ils sont inégaux, l'un d'eux sera $< \frac{m}{2}$; s'ils sont égaux, chacun d'eux $= \frac{m}{2}$ sans avoir égard au signe ; d'où il suit qu'un nombre quelconque a un résidu qui ne surpasse pas la moitié du module, et que nous appellerons résidu minimum absolu.

Par exemple -13 suivant le module 5, a pour résidu minimum positif 2, qui est en même temps minimum absolu, et -3 pour résidu minimum négatif ; $+5$ suivant le module 7, est lui-même son résidu minimum positif ; -2 est le résidu minimum négatif et en même temps le minimum absolu.

Annexe 2 : une citation extraite des Recherches Arithmétiques de Gauss (p.416)

Le problème où l'on se propose de distinguer les nombres premiers des nombres composés, [...], est connu comme un des plus importants et des plus utiles de toute l'Arithmétique ; [...]. En outre, la dignité de la science semble demander que l'on recherche avec soin tous les secours nécessaires pour parvenir à la solution d'un problème si élégant et si célèbre.

[2] Nous avons adopté ce signe à cause de la grande analogie qui existe entre l'égalité et la congruence. C'est pour la même raison que Legendre, dans des mémoires que nous aurons souvent occasion de citer, a employé le signe même de l'égalité, pour désigner la congruence ; nous en avons préféré un autre, pour prévenir toute ambiguité.

Annexe 2 : Extraits de la section Quatrième *"Des Congruences du second degré"* des Recherches Arithmétiques

On ne fait ici que recopier des extraits de la section Quatrième des Recherches Arithmétiques qu'il faudrait bien maîtriser pour pouvoir démontrer que l'existence d'un décomposant de Goldbach pour chaque nombre pair découle de l'existence d'au moins une solution pour un certain système de congruences (ou incongruences, c'est quasiment l'opposé) quadratiques, cette dernière existence découlant quant à elle du théorème d'or appliqué aux nombres adéquats. Les articles les plus difficiles, mais peut-être les plus utiles pour notre problème sont **les articles** 104 **et** 105 puis 147**,** 148 **et** 149.

page 69, article 94 : THÉORÈME. Un nombre quelconque m étant pris pour module, il ne peut y avoir dans la suite $1, 2, 3 \ldots m-1$, plus de $\frac{1}{2}m+1$ nombres, quand m est pair, et plus de $\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}$, quand m est impair, qui soient congrus à un carré.

page 70, article 96 : Le nombre premier p étant pris pour module, la moitié des nombres $1, 2, 3 \ldots p-1$, sera composée de résidus quadratiques, et l'autre moitié de non-résidus, c'est-à-dire qu'il y aura $\dfrac{1}{2}(p-1)$ résidus, et autant de non-résidus.

page 72, article 98 : THÉORÈME. Le produit de deux résidus quadratiques d'un nombre premier p est un résidu ; le produit d'un résidu et d'un non-résidu est non-résidu ; enfin le produit de deux non-résidus est résidu.
1°. Soient A et B les résidus qui proviennent des carrés a^2, b^2, ou soient $A \equiv a^2$ $(mod\ p)$ et $B \equiv b^2$, on aura $AB \equiv a^2b^2$, c'est-à-dire qu'il sera un résidu.
2°. Quand A est résidu, ou que $A \equiv a^2$, mais que B est non-résidu, AB est non-résidu. Soit en effet, s'il se peut $AB \equiv k^2$ et $\frac{k}{a}$ $(mod\ p) \equiv b$, on aura $a^2B \equiv a^2b^2$ et partant $B \equiv b^2$, contre l'hypothèse.
Autrement. Si l'on multiplie par A les $\frac{p-1}{2}$ nombres de la suite $1, 2, 3 \ldots p-1$, qui sont résidus, tous les produits seront des résidus quadratiques, et ils seront tous incongrus. Or si l'on multiplie par A un nombre B non-résidu, le produit ne sera congru à aucun des précédents : donc, s'il était résidu, il y aurait $\frac{1}{2}(p+1)$ résidus incongrus, parmi lesquels ne serait pas 0, ce qui est impossible (n° 96).
3°. Soient A et B deux nombres non-résidus, en multipliant par A tous les nombres qui sont résidus dans la suite $1, 2, 3, \ldots p-1$, on aura $\frac{p-1}{2}$ non-résidus, incongrus entr'eux (2°). Or le produit AB ne peut être congru à aucun de ceux-là ; donc s'il était non-résidu, on aurait $\frac{p+1}{2}$ non-résidus incongrus entr'eux ; ce qui est impossible (n° 96).
Ces théorèmes se déduisent encore plus facilement des principes de la section précédente. En effet, puisque l'indice d'un résidu est toujours pair, et celui d'un non-résidu toujours impair, l'indice du produit de deux résidus ou non-résidus sera pair, et partant, le produit sera lui-même un résidu. Au contraire, si l'un des facteurs est non-résidu, et l'autre résidu, l'indice sera impair, et le produit non-résidu.
On peut aussi faire usage des deux méthodes pour démontrer ce THÉORÈME[9] : *la valeur de l'expression* $\frac{a}{b}$ $(mod\ p)$*, sera un résidu, quand les nombres a et b seront tous les deux résidus ou non-résidus. Elle sera un non-résidu, quand l'un des nombres a et b sera résidu et l'autre non-résidu.* On le démontrerait encore en renversant les théorèmes précédents.

page 73, article 99 : Généralement, le produit de tant de facteurs qu'on voudra est un résidu, soit lorsque tous les facteurs en sont eux-mêmes, soit lorsque le nombre de facteurs non-résidus est pair ; mais quand le nombre des facteurs non-résidus est impair, le produit est non-résidu. On peut donc juger facilement si un nombre composé est résidu ou non ; pourvu qu'on sache ce que sont ses différents facteurs. Aussi dans la Table II, nous n'avons admis que les nombres premiers. Quant à sa disposition, les modules sont en marge[10], en tête les nombres premiers successifs ; quand l'un de ces derniers est résidu, on a placé un trait dans l'espace qui correspond au module et à ce nombre ; quand il est non-résidu, on a laissé l'espace vide.

page 73, article 100 : Si l'on prend pour module la puissance p^n d'un nombre premier, p étant $>$ 2, une moitié des nombres non-divisibles par p et $<$ p^n seront des résidus, et l'autre des non-résidus ; c'est-à-dire

[9] Ici, je mets les petites capitales à ce mot bien qu'elles ne soient pas présentes dans les Recherches Arithmétiques dans la mesure où la démonstration de ce théorème n'est pas fournie.
[10] On verra bientôt comment on peut se passer des modules composés.

qu'il y en aura $\frac{p-1}{2}.p^{n-1}$ de chaque espèce.
En effet, si r est un résidu, il sera congru à un carré dont la racine ne surpasse pas la moitié du module (n° 94) ; et l'on voit facilement qu'il y a $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$ nombres $< \frac{p^n}{2}$ et non-divisibles par p. Ainsi il reste à démontrer que les carrés de tous ces nombres sont incongrus, ou qu'ils donnent des résidus différents. Or si deux nombres a et b non-divisibles par p et plus petits que la moitié du module, avaient leurs carrés congrus, on aurait $a^2 - b^2$ ou $(a+b)(a-b)$ divisible par p^n, en supposant $a > b$, ce qui est permis. Mais cette condition ne peut avoir lieu, à moins que l'un des deux nombres $(a-b)$, $(a+b)$ ne soit divisible par p^n, ce qui est impossible, puisque chacun d'eux est plus petit que p^n, ou bien que l'un étant divisible par p^μ, l'autre le soit par $p^{\nu-\mu}$ ou chacun d'eux par p ; ce qui est encore impossible, puisqu'il s'ensuivrait que la somme $2a$ et la différence $2b$, et partant a et b eux-mêmes seraient divisibles par p, contre l'hypothèse. Donc enfin parmi les nombres non-divisibles par p et moindres que le module, il y a $\frac{p-1}{2}p^{n-1}$ résidus, et les autres, en même nombre, sont non-résidus.

page 74, article 101 : Tout nombre non-divisible par p, qui est résidu de p, sera aussi résidu de p^n ; celui qui ne sera pas résidu de p ne le sera pas non plus de p^n.
La seconde partie de cette proposition est évidente par elle-même ; ainsi si la première n'était pas vraie, parmi les nombres plus petits que p^n et non-divisibles par p, il y en aurait plus qui fussent résidus de p qu'il n'y en aurait qui le fussent de p^n, c'est-à-dire plus de $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$. Mais on peut voir sans peine que le nombre des résidus de p qui se trouvent entre 1 et p^n, est précisément $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$.
Il est tout aussi facile de trouver effectivement un carré qui soit congru à un résidu donné, suivant le module p^n, si l'on connaît un carré congru à ce résidu suivant le module p.
Soit en effet a^2 un carré congru au résidu donné A, suivant le module p^μ, on en déduira, de la manière suivante, un carré $\equiv A$, suivant le module p^ν, ν étant $> \mu$ et non plus grand que 2μ. Supposons que la racine du carré cherché soit $\pm a + xp^\mu$; et il est aisé de s'assurer que c'est là la forme qu'elle doit avoir. Il faut donc qu'on ait $a^2 \pm 2axp^\mu + x^2p^{2\mu} \equiv A \ (mod\ p^\nu)$, ou comme $2\mu > \nu$, on aura $\pm 2axp^\mu \equiv A - a^2 \ (mod\ p^\nu)$. Soit $A - a^2 = p^\mu.d$, on aura $\pm 2ax \equiv d \ (mod\ p^{\nu-\mu})$; donc x sera la valeur de l'expression $\pm\frac{d}{2a} \ (mod\ p^{\nu-\mu})$. Ainsi étant donné un carré congru à A, suivant le module p, on en déduira un carré congru à A, suivant le module p^2 ; de là au module p^4, au module p^8, etc.
Exemple. Etant proposé le résidu 6 congru au carré 1, suivant le module 5, on trouve le carré 9^2 auquel il est congru suivant le module 25, 16^2 auquel il est congru suivant le module 125, etc.

page 75, article 102 : Quant à ce qui regarde les nombres divisibles par p, il est clair que leurs carrés seront divisibles par p^2, et que partant tous les nombres qui seront divisibles par p et non par p^2, seront non-résidus de p^n. Et en général, si l'on propose le nombre p^kA, A n'étant pas divisible par p, il y aura trois cas à distinguer :
1°. Si $k \geq n$, on aura $p^kA \equiv 0 \ (mod\ p^n)$, c'est-à-dire qu'il sera résidu.
2°. Si $k < n$ et impair, p^kA sera non-résidu.
3°. Si $k < n$ et pair, p^kA sera résidu ou non-résidu de p^n suivant que A sera résidu ou non-résidu de p.

page 76, article 103 : Comme nous avons commencé (n° 100) par exclure le cas où $p = 2$, il faut ajouter quelque chose à ce sujet. Quand 2 est module, tous les nombres sont résidus, et il n'y en a point de non-résidus. Quand le module est 4, tous les nombres impairs de la forme $4k+1$ sont résidus, et tous ceux de la forme $4k+3$ sont non-résidus. Enfin, quand le module est 8 ou une plus haute puissance de 2, tous les nombres impairs de la forme $8k+1$ sont résidus, et les autres, ou ceux de la forme $8k+3$, $8k+5$, $8k+7$ sont non-résidus ;

page 77, article 104 : Pour ce qui regarde le nombre de valeurs différentes, c'est-à-dire incongrues suivant le module, que peut admettre l'expression $V = \sqrt{A} \ (mod\ p^n)$, pourvu que A soit un résidu de p^n, on déduit facilement de ce qui précède, les conclusions suivantes. Nous supposons toujours que p est un nombre premier et, pour abréger, nous considérons en même temps le cas où $n = 1$.
1°. Si A n'est pas divisible par p, V n'a qu'une seule valeur pour $p = 2$ et $n = 1$; ce sera $V \equiv 1$; il en a deux quand p est impair, ou bien quand on a $p = 2$ et $n = 2$; et, si l'une est $\equiv \nu$, l'autre sera $\equiv -\nu$; il en a quatre pour $p = 2$ et $n > 2$; et si l'une est $\equiv \nu$, les autres seront $\equiv \nu + 2^{n-1}, -\nu + 2^{n-1}, -\nu$.
2°. Si A est divisible par p, mais non par p^n, soit $p^{2\mu}$ la plus haute puissance de p qui divise A, car

cette puissance doit être paire (n° 102), et $A = ap^{2\mu}$; il est clair que toutes les valeurs de V doivent être divisibles par p^μ, et que tous les quotients donnés par ces divisions seront les valeurs de l'expression $V' = \sqrt{a}\ (mod\ p^{n-2\mu})$; on aura donc toutes les valeurs différentes de V, en multipliant par p^μ, toutes celles de V' contenues entre 0 et $p^{n-\mu}$. Elles seront, par conséquent,
$\nu p^\mu, \nu p^\mu + p^{n-\mu}, \nu p^\mu + 2p^{n-\mu}, \ldots \nu p^\mu + (p^\mu - 1)p^{n-\mu}$,
ν étant une valeur quelconque de V : suivant donc que V' aura 1, ou 2, ou [11] valeurs, V en aura p^μ, ou $2p^\mu$ ou $4p^\mu$ (1°).
3°. Si A est divisible par p^n, on voit facilement, en posant $n = 2m$ ou $= 2m - 1$, suivant que n est pair ou impair, que tous les nombres divisibles par p^m sont des valeurs de V, et qu'il n'y en a pas d'autres ; mais les nombres divisibles par p^m sont $0, p^m, 2p^m \ldots (p^{n-m} - 1)p^m$, dont le nombre est p^{n-m}.

page 78, article 105 : Il reste à examiner le cas où le module m est composé de plusieurs modules premiers. Soit $m = abc\ etc.$, a, b, c, *etc.* étant des nombres premiers différents. Il est clair d'abord que si n est résidu de m, il le sera aussi des différents nombres, a, b, c, *etc.*, et que partant il sera non-résidu de m, s'il est non-résidu de quelqu'un de ces nombres. Réciproquement, si n est résidu des différents nombres a, b, c, *etc.*, il le sera de leur produit m ; en effet, si l'on a $n \equiv A^2, B^2, C^2, etc.$, suivant les modules a, b, c, *etc.*, respectivement (n° 32), on aura $n \equiv N^2$, suivant tous ces modules, et conséquemment suivant leur produit.
Comme on voit facilement que la valeur de N résulte de la combinaison d'une valeur quelconque de A, ou de l'expression $\sqrt{n}\ (mod\ a)$, avec une valeur quelconque de B, avec une valeur quelconque de C, *etc*, que les différentes combinaisons donneront des valeurs différentes, et qu'elles les donneront toutes ; le nombre des valeurs de N sera égal au produit des nombres de valeurs de A, B, C, *etc.* que nous avons appris à déterminer dans l'article précédent.

page 78, article 106 : On voit par ce qui précède, qu'il suffit de reconnaître si un nombre donné est résidu ou non-résidu d'un nombre premier donné, et que tous les cas reviennent à celui-là.
Un nombre quelconque A, non divisible par un nombre premier $2m + 1$, est résidu ou non-résidu de ce nombre premier suivant que $A^m \equiv +1 ou \equiv -1\ (mod\ 2m + 1)$.

page 80, article 109 : en effet, il est évident que si r est un résidu, $\frac{1}{r}\ (mod\ p)$ en sera un aussi.

(Les **articles** 108 **à** 124 **des pages** 79 **à** 91 traitent des cas particuliers 1, -1, 2, -2, 3, -3, 5, -5, 7 et -7.)

page 81, article 111 : Si donc r est résidu d'un nombre premier de la forme $4n + 1$, $-r$ le sera aussi, et tous les non-résidus seront encore non-résidus en changeant les signes[12]. Le contraire arrive pour les nombres premiers de la forme $4n + 3$, dont les résidus deviennent non-résidus, et réciproquement quand on change le signe (n° 98).
Au reste on déduit facilement de ce qui précède cette règle générale : -1 est résidu de tous les nombres qui ne sont divisibles ni par 4, ni par aucun nombre de la forme $4n + 3$. Il est non-résidu de tous les autres.(N°s 103 *et* 105).

page 81, article 112 : Passons maintenant aux résidus $+2$ et -2.
Si dans la table II on prend tous les nombres premiers dont le module est $+2$, on trouvera $7, 17, 23, 31, 41, 47, 71, 73, 79, 89, 97$. Or on remarque facilement qu'aucun d'eux n'est de la forme $8n + 3$ ou $8n + 5$.
Voyons donc si cette induction peut devenir une certitude.
Observons d'abord que tout nombre composé de la forme $8n + 3$ ou $8n + 5$ renferme nécessairement un facteur premier de l'une ou l'autre forme ; en effet les nombres premiers de la forme $8n + 1$ et $8n + 7$ ne peuvent former que des nombres de la forme $8n + 1$ ou $8n + 7$. Si donc notre induction est généralement vraie, il n'y aura aucun nombre de la forme $8n + 3$, $8n + 5$, dont le résidu soit $+2$. Or il est bien certain qu'il n'existe aucun nombre de cette forme et au-dessous de 100, dont le résidu soit $+2$; mais s'il y en avait au-dessus de cette limite, supposons que t soit le plus petit de tous ; t sera de la forme $8n + 3$ ou $8n + 5$, et $+2$ sera son résidu ; mais il sera non-résidu de tous les nombres semblables plus petits. Soit $a^2 \equiv 2\ (mod\ t)$, on pourra toujours prendre a impair et $< t$, car a a au moins deux valeurs positives plus

[11] ici, je crois qu'il manque un mot, le chiffre 4 ?
[12] Ainsi quand nous parlerons d'un nombre, en tant qu'il sera résidu ou non-résidu d'un nombre de la forme $4n + 1$, nous pouvons ne faire aucune attention à son signe, ou lui donner le signe $\pm$.

petites que t, dont la somme $= t$, et dont par conséquent l'une est paire et l'autre impaire (N°s 104, 105). Cela posé, soit $a^2 = 2 + ut$ ou $ut = a^2 - 2$, a^2 sera de la forme $8n + 1$, et par-conséquent ut de la forme $8n - 1$; donc u sera de la forme $8n + 3$ ou $8n + 5$ suivant que t sera de la forme $8n + 5$ ou $8n + 3$; mais de l'équation $a^2 = 2 + tu$, on tire la congruence $a^2 \equiv 2(mod\ u)$, c'est-à-dire que $+2$ serait aussi résidu de u. Il est aisé de voir qu'on a $u < t$; il s'ensuivrait que t ne serait pas le plus petit nombre qui eût $+2$ pour résidu, ce qui est contre l'hypothèse ; d'où suit enfin une démonstration rigoureuse de cette proposition que nous avions déduite de l'induction.
En combinant cette proposition avec celles du n° 111, on en déduit les théorèmes suivants :
I. $+2$ est non-résidu, et -2 est résidu de tous les nombres premiers de la forme $8n + 3$.
II. $+2$ et -2 sont non-résidus de tous les nombres premiers de la forme $8n + 5$.

page 82, article 113 : Par une semblable induction on tirera de la Table II, pour les nombres premiers dont le résidu est -2, ceux-ci : $3, 11, 17, 19, 41, 43, 59, 67, 73, 83, 89, 97$[13]. Parmi ces nombres il ne s'en trouve aucun de la forme $8n + 5$ ou $8n + 7$; cherchons donc si de cette induction nous pouvons tirer un théorème général. On fera voir de la même manière que dans l'article précédent, qu'un nombre composé de la forme $8n + 5$ ou $8n + 7$, doit renfermer un facteur premier de la forme $8n + 5$ ou de la forme $8n + 7$; de sorte que si notre induction est généralement vraie, -2 ne peut être résidu d'aucun nombre de la forme $8n + 5$ ou $8n + 7$; or s'il peut y en avoir de tels, soit t le plus petit de tous, et qu'on ait $-2 = a^2 - tu$. Si l'on prend, comme plus haut, a impair et $< t$, u sera de la forme $8n + 5$ ou $8n + 7$ suivant que t sera de la forme $8n + 7$ ou $8n + 5$; mais de ce qu'on a $a < t$ et $ut = a^2 + 2$, il est facile de déduire que u est $< t$; et comme -2 serait aussi résidu de u, il s'ensuivrait que t ne serait pas le plus petit nombre dont -2 est le résidu, ce qui est contre l'hypothèse. Donc -2 sera nécessairement non-résidu de tous les nombres de la forme $8n + 5$ ou $8n + 7$.
En combinant cette proposition avec celles du n° 111, on en déduit les théorèmes suivants :
I. -2 et $+2$ sont non-résidus de tous les nombres premiers de la forme $8n + 5$; comme nous l'avons déjà trouvé.
II.-2 est non-résidu et $+2$ résidu de tous les nombres premiers de la forme $8n + 7$.
Au reste, nous aurions pu prendre a pair dans les deux démonstrations ; mais alors il eût fallu distinguer le cas où a est de la forme $4n + 2$, de celui où il est de la forme $4n$; d'ailleurs la marche est absolument la même et n'est sujette à aucune difficulté.

page 83, article 114 : Il nous reste encore à traiter le cas où le nombre premier est de la forme $8n + 1$; mais il échappe à la méthode précédente et demande des artifices tout-à-fait particuliers.
Soit, pour le module premier $8n+1$, une racine primitive quelconque a, on aura (n° 62) $a^{4n} \equiv -1$ $(mod\ 8n+1)$; cette congruence peut se mettre sous la forme $(a^{2n} + 1)^2 \equiv 2a^{2n}$ $(mod\ 8n + 1)$, ou $(a^{2n} - 1)^2 \equiv -2a^{2n}$; d'où il suit que $2a^{2n}$ et $-2a^{2n}$ sont résidus de $8n + 1$; mais comme a^{2n} est un carré non-divisible par le module, $+2$ et -2 seront aussi résidus (n° 98).

page 84, article 116 : Au reste on tire facilement de ce qui précède la règle générale suivante : $+2$ est résidu de tout nombre qui n'est divisible ni par 4 ni par aucun nombre premier de la forme $8n + 3$ ou $8n+5$, et non-résidu de tous les autres, par exemple, de tous ceux de la forme $8n+3$, $8n+5$, tant premiers que composés.

page 91, article 125 : Tout nombre premier de la forme $4n + 1$ soit positif, soit négatif, est non-résidu de quelques nombres premiers, et même de nombres premiers plus petits que lui (il est évident qu'il faut éviter $+1$).

page 95, article 129 : Théorème. Si a est un nombre premier de la forme $8n+1$, il y aura nécessairement au-dessous de $2\sqrt{a}$ un nombre premier dont a est non-résidu.

page 95, article 130 : Maintenant que nous avons démontré que tout nombre premier de la forme $4n+1$ positif ou négatif, est toujours non-résidu d'un nombre premier au moins plus petit que lui...

page 98, au milieu du article 132 : mais, avant tout, il faut observer que tout nombre de la forme $4n + 1$ ne renfermera aucun facteur de la forme $4n + 3$, ou en renfermera un nombre pair parmi lesquels

[13] En considérant -2 comme le produit de $+2$ par -1 ; voyez n° 111.

il pourra y en avoir d'égaux ; tandis que tout nombre de la forme $4n+3$ doit en renfermer un nombre impair. Le nombre des facteurs de la forme $4n+1$ reste indéterminé.

pages 108 et suiv., articles 146 à 150 : Au moyen du théorème fondamental [14] et des propositions relatives à -1, ± 2, on peut toujours déterminer si un nombre donné quelconque est résidu ou non-résidu d'un nombre premier donné.

Ensuite, dans l'**article 146**, Gauss généralise et explique la méthode permettant, étant donnés deux nombres quelconques P et Q, de trouver si l'un d'eux est résidu ou non-résidu de l'autre. Pour cela, il étudie la relation qui lie Q à chaque puissance de premier qui intervient dans la factorisation de P. Ce qui retient l'attention, c'est le début du point III de cet article 146, qui explique comment s'effectue le passage du second degré au premier degré :
On cherchera de la manière suivante la relation d'un nombre quelconque Q à un nombre premier a impair : quand $Q > a$, on substituera à Q son *résidu minimum positif* suivant le module a, ou, ce qui est quelquefois avantageux, son *résidu minimum absolu*, qui aura avec a la même relation que Q.
Or si l'on résoud Q, ou le nombre pris à sa place, en facteurs premiers p, p', p'', *etc.*, auxquels il faut joindre le facteur -1, quand Q est négatif, il est évident que la relation de Q à a dépendra de la relation des facteurs p, p', p'', *etc.* à a : de sorte que, si parmi eux il y en a $2m$ non-résidus de a, on aura QRa[15] ; mais s'il y en a $2m+1$, on aura QNa. Au reste, on voit facilement que si parmi les facteurs p, p', p'', *etc.*, il y en a un nombre pair d'égaux entre eux, on peut les rejeter, puisqu'ils n'influent en rien sur la relation de Q à a.

Dans les **articles** 147**,** 148 **et** 149, Gauss résoud le problème suivant : Etant proposé un nombre quelconque A, on peut trouver certaines formules qui contiennent tous les nombres premiers à A dont A est résidu, ou tous ceux qui sont diviseurs des nombres de la forme $x^2 - A$, x^2 étant un carré indéterminé. Nous appellerons simplement ces nombres *diviseurs* de $x^2 - A$; l'on voit facilement ce que sont les *non-diviseurs*. Mais pour abréger nous ne considérerons que les diviseurs qui sont impairs et premiers à A, les autres cas se ramenant sans peine à celui-là.

On recopie intégralement ces trois articles qui nous semblent très liés à l'idée que l'on cherche à développer.

Suite de l'article 147, page 110 : Soit d'abord A un nombre premier positif de la forme $4n+1$, ou négatif de la forme $4n-1$. Suivant le théorème fondamental, tous les nombres premiers qui, pris positivement, sont résidus de A, seront diviseurs de $x^2 - A$; mais tous les nombres premiers non-résidus de A seront non-diviseurs de $x^2 - A$, si pourtant on en excepte 2, qui est toujours diviseur. Soient r, r', r'', *etc.*, tous les résidus de A qui sont plus petits que lui, et n, n', n'', *etc.*, tous les non-résidus ; alors tout nombre premier contenu dans une des formes $Ak+r$, $Ak+r'$, $Ak+r''$, *etc.*, sera diviseur de $x^2 - A$; mais tout nombre premier contenu dans une des formes $Ak+n$, $Ak+n'$, *etc.*, sera non-diviseur de $x^2 - A$, k étant un nombre entier indéterminé. Nous appellerons les premières *formes des diviseurs* de $x^2 - A$ et les dernières *formes des non-diviseurs*. Le nombre de chacune d'elles sera égal au nombre de résidus r, r', *etc.* ou de non-résidus n, n', *etc.*, et partant, $(n^o\ 96) = \frac{1}{2}(A-1)$. Or si B est un nombre composé impair et que l'on ait ARB, tous les facteurs premiers de B seront contenus dans une des premières formes, et par conséquent, B lui-même ; donc tout nombre composé impair qui sera contenu dans la forme des non-diviseurs sera non-diviseur de $x^2 - A$; mais on ne peut pas dire que les non-diviseurs de $x^2 - A$ sont tous compris dans la forme des non-diviseurs, car en supposant B non-diviseur de $x^2 - A$, et si le nombre de ces facteurs est pair, B sera compris dans quelque forme de diviseurs (n° 93).
Ainsi, soit $A = -11$; on trouvera que les formes des diviseurs de $x^2 + 11$ sont $11k+1$, 2, 3, 4, 5, 9, et que celles des non-diviseurs sont $11k+2$, 6, 7, 8, 10. Ainsi -11 sera résidu de tous les nombres premiers contenus dans une des premières formes et non-résidu de ceux qui sont contenus dans une des dernières.
On peut trouver des formes semblables pour les diviseurs et les non-diviseurs de $x^2 - A$, quel que soit A ; mais on voit aisément qu'on n'a à considérer que les valeurs de A qui ne sont divisibles par aucun carré ; car si $A = a^2A'$, tous les diviseurs de $x^2 - A$ premiers avec A, seront diviseurs de $x^2 - A'$, et de même pour les non-diviseurs. Or nous distinguerons trois cas : 1°. quand A est de la forme $4n+1$ ou $-(4n-1)$; 2°. quand A est de la forme $4n-1$ ou $-(4n+1)$; 3°. quand A est pair ou de la forme $\pm(4n+2)$.

[14] communément appelé actuellement la *"loi de réciprocité quadratique"*.
[15] Gauss utilise la lettre R pour signifier *"est résidu quadratique de"* et la lettre N pour signifier *"est non-résidu quadratique de"*.

page 111, article 148 : *Premier cas.* Quand A est de la forme $4n+1$ ou $-(4n-1)$. On résoudra A en facteurs premiers a, b, c, d, *etc.*, en affectant du signe $+$ ceux de la forme $4n+1$, et du signe $-$ ceux de la forme $4n-1$ qui seront en nombre pair ou impair, suivant que A sera de la forme $4n+1$ ou $-(4n-1)$ (n° 132). On distribuera en deux classes les nombres plus petits que A et premiers avec lui ; en mettant dans la première ceux qui ne sont non-résidus d'aucun diviseur de A, ou qui sont non-résidus d'un nombre pair de ces diviseurs, et dans la seconde ceux qui sont non-résidus d'un nombre impair des mêmes diviseurs. Désignons les premiers par r, r', r'', *etc.* et les seconds par n, n', n'', *etc.* ; alors $Ak+r$, $Ak+r'$, *etc.* sont les formes des diviseurs de x^2-A, et $Ak+n$, $Ak+n'$, *etc.* celles des non-diviseurs. C'est-à-dire que tout nombre premier, excepté 2, sera diviseur ou non-diviseur de x^2-A, suivant qu'il sera contenu dans l'une des premières ou l'une des dernières formes.
En effet, si p est un nombre premier résidu ou non-résidu d'un des facteurs de A, ce facteur sera résidu ou non-résidu de p (théor. fond.) ; donc si parmi les facteurs de A, il y en a m dont p soit non-résidu, il y en aura autant qui seront non-résidus de p, et partant, lorsque p sera contenu dans l'une des premières formes, m sera pair et ARp, et lorsque p sera contenu dans une des dernières, p sera impair et ANp.
Exemple. Soit $A=+105=(-3)\times(+5)\times(-7)$[16] ;
les nombres r, r', r'', *etc.* sont :
1, 4, 16, 46, 64, 79, qui ne sont non-résidus d'aucun facteur. ;
2, 8, 23, 32, 53, 92, qui sont non-résidus de 3 et 5 ;
26, 41, 59, 89, 101, 104,..... 3 et 7 ;
23, 52, 73, 82, 97, 103,..... 5 et 7 ;
les nombres n, n', n'', *etc.* sont :
11, 29, 44, 71, 74, 86, non-résidus de 3 ;
22, 37, 43, 58, 67, 88,..... de 5 ;
19, 31, 34, 61, 76, 94,..... de 7 ;
17, 38, 47, 62, 68, 83,..... de 3, 5 et 7 ;
On déduit facilement de la théorie des combinaisons et des $n^{os}(32,96)$ que la multitude des nombres r, r', *etc.* sera

$$t\Big(1+\frac{l(l-1)}{1.2}+\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{1.2.3.4}+etc.\Big)$$

et celle des nombres n, n', *etc.*

$$t\Big(l+\frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3}+\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)(l-4)}{1.2.3.4.5}+etc.\Big)$$

l désignant le nombre des facteurs a, b, c, d, *etc.*, t étant
$=2^{-l}(a-1)(b-1)(c-1)etc.$, et chaque série devant être continuée jusqu'à ce qu'elle s'arrête d'elle-même. (En effet il y a t nombres résidus de a, b, c, d, *etc.*, $t.\frac{l.(l-1)}{1.2}$ non-résidus de deux de ces facteurs, etc. Mais pour abréger, nous sommes forcés de ne pas donner plus de développement à la démonstration). Or chacune des séries a pour somme $l.2^{l-1}$; car la première provient de
$1+\frac{l-1}{1}+\frac{(l-1)(l-2)}{1.2}+\frac{(l-1)(l-2)(l-3)}{1.2.3}+etc.$ en prenant le premier terme, puis la somme du second et du troisième, puis la somme du quatrième et du cinquième, etc. : la seconde provient aussi de la même série, en joignant le premier terme au second, le troisième au quatrième, etc. Il y a donc autant de formes de diviseurs de x^2-A, que de formes de non-diviseurs ; et ils sont en nombre $2^{l-1}.t$ de chaque espèce, ou $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)etc.$

page 113, article 149 : Nous pouvons traiter ensemble le second et le troisième cas. En effet on pourra toujours poser $A=(-1)Q$, ou $=(+2)Q$, ou $=(-2)Q$, Q étant un nombre de la forme $4n+1$ ou $-(4n-1)$. Soit généralement $A=\alpha Q$, de sorte que α soit ou -1 ou ± 2. Alors A sera résidu de tout nombre dont α et Q seront tous deux résidus, ou tous deux non-résidus : au contraire il sera non-résidu de tout nombre dont l'un d'eux seulement sera non-résidu. De là on déduit sans peine les formes des diviseurs et des non-diviseurs de x^2-A. Si $\alpha=-1$; nous partagerons tous les nombres plus petits que $4A$ et premiers avec lui, en deux classes. La première renfermera ceux qui sont dans quelque forme des diviseurs de x^2-Q, et en même temps de la forme $4n+1$, et aussi ceux qui sont dans quelque forme des non-diviseurs de x^2-Q et en même temps de la forme $4n-1$: la seconde renfermera tous les autres. Soient r, r', r'', *etc.* les premiers et n, n', n'', *etc.* les derniers ; A sera résidu de tous les nombres premiers contenus dans une

[16] Cela peut surprendre d'utiliser ainsi des nombres négatifs dans la factorisation mais Gauss explique qu'il affecte systématiquement les nombres premiers de la forme $4n+3$ du signe $-$ et ceux de la forme $4n+1$ du signe $+$ à cause de leur comportement démontré par le théorème fondamental.

des formes $4Ak+r$, $4Ak+r'$, $4Ak+r''$, *etc.*, et non-résidu de tous les nombres premiers contenus dans une des formes $4Ak+n$, $4Ak+n'$, $4Ak+n''$, *etc.* Si $\alpha = \pm 2$, nous distribuerons tous les nombres plus petits que $8Q$ et premiers avec lui en deux classes : la première renfermera tous ceux qui sont contenus dans quelque forme des diviseurs de $x^2 - Q$, et qui sont de la forme $8n+1$ ou $8n+7$, pour le signe supérieur, et de la forme $8n+1$ ou $8n+3$ pour le signe inférieur ; cette classe comprendra aussi tous ceux qui sont contenus dans quelque forme de non-diviseurs de $x^2 - Q$ et qui sont, pour le signe supérieur, de la forme $8n+3$, $8n+5$, et pour le signe inférieur, de la forme $8n+5$, $8n+7$, et la seconde tous les autres. Alors désignant les nombres de la première classe par r, r', r'', *etc.*, ceux de la seconde par n, n', n'', *etc.*, $\pm 2Q$ sera résidu de tous les nombres premiers contenus dans les formes $8Qk+r$, $8Qk+r'$, $8Qk+r''$, *etc.* et non-résidu de tous ceux contenus dans les formes $8Qk+n$, $8Qk+n'$, $8Qk+n''$, *etc.* Au reste, on peut démontrer facilement qu'il y a autant de formes de diviseurs qu'il y en a de non-diviseurs.
Exemple. On trouve ainsi que 10 est résidu de tous les nombres premiers contenus dans les formes $40K+1$, $+3$, $+9$, $+13$, $+27$, $+31$, $+37$, $+39$, et non-résidu de tous les nombres premiers contenus dans les formes $40K+7$, $+11$, $+17$, $+19$, $+21$, $+23$, $+29$, $+33$.

page 114, article 150 : Ces formes ont plusieurs propriétés assez remarquables ; nous n'en citerons cependant qu'une seule. Si B est un nombre composé premier avec A, tel qu'un nombre $2m$ de ses facteurs premiers soient compris dans quelque forme de non-diviseurs de $x^2 - A$, B sera contenu dans quelque forme de diviseurs de $x^2 - A$; mais si le nombre de facteurs premiers de B contenus dans quelque forme de non-diviseurs de $x^2 - A$ est impair, B sera aussi contenu dans quelque forme de non-diviseurs. Nous omettons la démonstration, qui n'a rien de difficile[17]. Il suit de là que non-seulement tout nombre premier ; mais aussi tout nombre composé impair et premier avec A est non-diviseur dès qu'il est contenu dans une des formes de non-diviseur ; car nécessairement quelque facteur premier de ce nombre sera non-diviseur.

page 116, article 152 : Jusqu'à présent nous n'avons traité que la congruence simple $x^2 \equiv A(mod\ m)$, et nous avons appris à reconnaître les cas où elle est résoluble. Par le n° 105, la recherche des racines elles-mêmes est ramenée au cas où m est un nombre premier, ou une puissance d'un nombre premier ; et par le n° 101, ce dernier cas est ramené à celui où m est un nombre premier. Quant à celui-ci, en comparant ce que nous avons dit (n°s 61 et suiv.) avec ce que nous enseignerons sect. V et VIII, on aura presque tout ce qui peut se faire par les méthodes générales. Mais dans les cas où elles sont applicables, elles sont infiniment plus longues que les méthodes indirectes que nous exposerons dans la section VI, et partant elles sont moins remarquables par leur utilité dans la pratique que par leur beauté.

Annexe 3 : Deux extraits de la lettre de Carl Frédéric Gauss à Sophie Germain du 30 avril 1807 (extrait des Oeuvres philosophiques de Sophie Germain, 1879, p. 274-282)

Voici une autre proposition relative aux residus quarrés, dont la demonstration est moins cachée : je ne l'ajoute pas, pour ne pas vous derober le plaisir de la developper vous-même, si vous la trouverez digne d'occuper quelques moments de votre loisir.
Soit p un nombre premier. Soient les $p-1$ nombres inférieurs à p partagés en deux classes :
$A.....1, 2, 3, 4....\frac{1}{2}(p-1)$
$B.....\frac{1}{2}(p+1), \frac{1}{2}(p+3), \frac{1}{2}(p+5), ...p-1$ Soit a un nombre quelconque non divisible par p. Multipliés tous les nombres A par a; prenés-en les moindres residus selon le module p, soient, entre ces residus, α appartenants à A, et β appartenants à B, de sorte que $\alpha + \beta = \frac{1}{2}(p-1)$. Je dis que a è residu quarré de p lorsque β è pair, non residu lorsque β è impair.

Le second extrait est davantage *"connu"*

Le goût pour les sciences abstraites en général et surtoût pour les mysteres des nombres est fort rare : on ne s'en étonne pas ; les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se decelent dans toute leur

[17] On suppose donc que Gauss l'a faite, dans une quelconque marge...

beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos moeurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches epineuses, sait neansmoins franchir ces entraves et penétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talens tout à fait extraordinaires, le génie supérieur. En effet, rien ne pourroit me prouver d'une manière plus flatteuse et moins équivoque, que les attraits de cette science, qui ont embelli ma vie de tant de jouissances, ne sont pas chimériques, que la predilection, dont vous l'avez honorée.

Annexe : un extrait de la biographie *Poincaré : philosophe et mathématicien* d'Umberto Bottazzini aux éditions Belin Pour la Science

Au sujet du raisonnement par récurrence : le terrain le plus naturel et le plus favorable pour cette étude est l'arithmétique élémentaire, c'est à dire les opérations mettant en jeu des nombres entiers. Quand nous analysons des opérations telles que l'addition et la multiplication, nous nous rendons compte qu'un type de raisonnement se *retrouve à chaque pas*, c'est la démonstration *par récurrence* : on établit d'abord un théorème pour n égal à 1 ; on montre ensuite que, s'il est vrai de $n-1$, il est vrai de n, et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers. C'est là le raisonnement mathématique par excellence, déclare Poincaré. Sa particularité est qu'il contient, sous une forme condensée, une infinité de syllogismes, et qu'il permet de passer du particulier au général, du fini à l'infini, concept qui apparaît dès les premiers pas de l'arithmétique élémentaire et sans lequel il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général, mais uniquement des énoncés particuliers. D'où nous vient ce raisonnement pas récurrence, s'interroge Poincaré ? Certainement pas de l'expérience. Celle-ci peut nous suggérer que la règle est vraie pour les dix ou les cent premiers nombres, mais elle est désarmée face à l'infinité de tous les nombres naturels. Le principe de contradiction (on dirait aujourd'hui le raisonnement par l'absurde) est aussi impuissant : il nous permet d'obtenir certaines vérités, mais non d'en enfermer une infinité en une seule formule. Cette règle (le raisonnement par récurrence), inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique a priori, conclut Poincaré. L'irrésistible évidence avec laquelle ce principe s'impose n'est autre que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible.

Annexe 2 : Extraits des articles 101 et 103 des Recherches Arithmétiques

page 74, article 101 : Tout nombre non-divisible par p, qui est résidu de p, sera aussi résidu de p^n ; celui qui ne sera pas résidu de p ne le sera pas non plus de p^n.
La seconde partie de cette proposition est évidente par elle-même ; ainsi si la première n'était pas vraie, parmi les nombres plus petits que p^n et non-divisibles par p, il y en aurait plus qui fussent résidus de p qu'il n'y en aurait qui le fussent de p^n, c'est-à-dire plus de $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$. Mais on peut voir sans peine que le nombre des résidus de p qui se trouvent entre 1 et p^n, est précisément $\frac{1}{2}p^{n-1}(p-1)$.
Il est tout aussi facile de trouver effectivement un carré qui soit congru à un résidu donné, suivant le module p^n, si l'on connaît un carré congru à ce résidu suivant le module p.
Soit en effet a^2 un carré congru au résidu donné A, suivant le module p^μ, on en déduira, de la manière suivante, un carré $\equiv A$, suivant le module p^ν, ν étant $> \mu$ et non plus grand que 2μ. Supposons que la racine du carré cherché soit $\pm a + xp^\mu$; et il est aisé de s'assurer que c'est là la forme qu'elle doit avoir. Il faut donc qu'on ait $a^2 \pm 2axp^\mu + x^2p^{2\mu} \equiv A \ (mod\, p^\nu)$, ou comme $2\mu > \nu$, on aura $\pm 2axp^\mu \equiv A - a^2 \ (mod\, p^\nu)$. Soit $A - a^2 = p^\mu.d$, on aura $\pm 2ax \equiv d \ (mod\, p^{\nu-\mu})$; donc x sera la valeur de l'expression $\pm\frac{d}{2a} \ (mod\, p^{\nu-\mu})$.
Ainsi étant donné un carré congru à A, suivant le module p, on en déduira un carré congru à A, suivant le module p^2 ; de là au module p^4, au module p^8, etc.
Exemple. Etant proposé le résidu 6 congru au carré 1, suivant le module 5, on trouve le carré 9^2 auquel il est congru suivant le module 25, 16^2 auquel il est congru suivant le module 125, etc.

page 76, article 103 : Comme nous avons commencé (n° 100) par exclure le cas où $p = 2$, il faut ajouter quelque chose à ce sujet. Quand 2 est module, tous les nombres sont résidus, et il n'y en a point de non-résidus. Quand le module est 4, tous les nombres impairs de la forme $4k+1$ sont résidus, et tous ceux de la forme $4k+3$ sont non-résidus. Enfin, quand le module est 8 ou une plus haute puissance de 2, tous les nombres impairs de la forme $8k+1$ sont résidus, et les autres, ou ceux de la forme $8k+3$, $8k+5$, $8k+7$ sont non-résidus ;

1 Extraits de *Comprendre les mathématiques* de Claude-Paul Bruter

p. 9
Ces ouvrages, formellement bons par ailleurs, mais où tout est mécaniquement et froidement démontré et enchaîné pour satisfaire à une vocation de rigueur qui, certes, répond à une nécessité, mais a perdu ses racines.

[Les savants] se sont toujours efforcés de faire connaître autour d'eux la manière dont ils comprenaient les événements, d'autant plus que cette manière, à tort ou à raison, leur semblait être en progrès par rapport aux savoirs antérieurs.

p. 10
L'un des rôles majeurs de l'éducation est de former l'esprit des jeunes gens pour qu'ils soient mieux à même, notamment par leur équilibre intérieur, de supporter les souffrances, de venir à bout des épreuves quelle qu'en soit la nature, d'apporter leur contribution pour réduire autant que faire se peut, à l'échéance la plus brève possible, les désagréments que notre humanité peut connaître.
Une telle formation suppose qu'on développe et élargisse la sensibilité de l'être, et non point qu'on la restreigne, qu'on développe et élargisse à travers cette sensibilité aiguisée le souci de comprendre, et non point qu'on fige l'intelligence dans les limites d'un domaine de pensée borné. L'intuition de Poincaré lui a fait pressentir des évolutions dont il s'est alarmé. Il a craint que l'enseignement, en particulier celui des mathématiques, ne se dirige vers des formes qui émousse la sensibilité plutôt qu'elles ne l'exercent, comme cela lui paraît nécessaire.

p. 29
Pourtant, l'homme a besoin du rêve pour concevoir de meilleures organisations, il a besoin de s'évader, par moments, de la réalité et de reposer son psychisme afin de reprendre assez de forces intérieures pour pouvoir affronter à nouveau les difficultés quotidiennes. L'homme est ici un enfant.
Les constructions ou modèles mathématiques apparaissent alors parfois comme des jouets, inoffensifs, initiatiques et curatifs, avec lesquels les hommes peuvent faire travailler leur imagination, se donner de l'importance et une raison d'être, construire des mondes parfois baroques, dévoiler des fantasmes qui peuplent leur esprit et dont ils se délivrent par le jeu. Sans doute ces jouets n'ont-ils pas exactement les mêmes fonctions chez les adultes et chez les enfants. Mais les uns et les autres partagent à leur égard des réactions communes dans la mesure où ils pratiquent les mêmes opérations mentales et de la même manière.
Ces réactions, parce qu'elles sont d'ordre affectif, marquent les individus : découragement et parfois rejet de la part de ceux qui éprouvent quelque difficulté, quelles qu'en soient les raisons, à comprendre et interpréter le discours mathématique, enthousiasme au contraire de la part d'autres, tenaces, stimulés par la difficulté à vaincre, joyeux de l'avoir surmontée, excités par le merveilleux d'une démonstration où la perfection du raisonnement n'a pas voilé l'éclat de l'étincelle divinatoire, épanouis enfin par la beauté de la perspective des théorèmes réunis en une théorie harmonieuse.

Un autre aspect sémantique de la notion d'application se rencontre également dans la littérature : les termes "projection", "injection", "immersion", "surjection" et "submersion" le révèlent en partie. On s'amusera un instant, bien sûr, de l'aspect facétieux du mathématicien que pourrait révéler le choix d'une terminologie "aquatique". A vrai dire, ce choix est particulièrement heureux car l'image marine est l'une des meilleures qui soit pour évoquer un milieu topologique, souple et indifférencié, au sein duquel un objet peut être "plongé" - autre terme mathématique. Cette terminologie souffre pourtant d'une insuffisance : elle se rapporte en effet au caractère local de l'application ; elle en évoque plus difficilement l'effet global. Globalement, la projection, la submersion, aplatit, plaque l'objet de départ sur l'espace d'arrivée, de sorte que l'objet plaqué a au plus la même dimension que celle de l'espace d'arrivée (il ne s'agit pas ici d'une dimension au sens métrique du terme, mais du nombre de directions suffisantes pour établir un repère à partir duquel on peut situer tout point de l'espace). Au contraire, la dimension de l'objet source est conservée si l'on procède à une immersion de cet objet. Reste le cas où la dimension de l'objet source est égale à celle de l'espace d'arrivée : parmi les applications de ce type figurent notamment les changements de repères qui permettront d'examiner l'objet sous des angles et à partir de points de vue différents. Ces changements de repères sont très utilisés pour obtenir des présentations simples et éclairantes des objets,

permettant de les classer facilement, de mettre en évidence certaines propriétés. Les submersions plus générales permettent de procéder à des découpes en tranches : leur dimension est égale à la différence entre les dimensions des espaces source et image.
On voit ici apparaître les notions essentielles de singularité et d'extrémalité, profondément liées l'une à l'autre. Pour des raisons d'ordre physique et même métaphysique, ces notions sont d'une extrême fécondité et d'une grande importance. Elles apparaissent dans l'œuvre de Fermat, et joueront un rôle de plus en plus manifeste dans le développement des mathématiques.
Sur le plan psychologique, la singularité possède une double propriété : elle est attirante par son originalité, dérangeante par son étrangeté. Sur le plan physique, elle possède aussi une double propriété : elle est à la fois un obstacle et, par cela même, un élément autour duquel se structure et s'organise son voisinage. La singularité renferme ainsi toute l'ambiguïté du monde. La prise de conscience des propriétés de la singularité nous permet de mieux accepter le caractère ambigu de ce monde, caractère contre lequel il devient absurde de s'insurger, qu'il est finalement vain de vouloir combattre.
C'est la géométrie qui permet d'établir un lien entre singularité et extrémalité, via la notion de bord d'un objet. Le bord est en effet la partie de l'objet où la dimension s'affaiblit : si le couteau est globalement un objet de dimension 3, la surface du manche est de dimension 2, la partie coupante de la lame est une ligne de dimension 1, et même, si l'on a affaire à un couteau-scie, les extrémités des dents de la scie sont des points de dimension 0. Le bord du couteau est composé de toutes ces parties de dimensions inférieures à 3. Cette définition topologique du bord coïncide ici avec la définition métrique : si l'on parvient à définir une notion de distance entre points du couteau, ce bord se confond avec le lieu des points du couteau les plus écartés, situés sur des droites traversant le couteau. Ces points extrêmes qui définissent le bord sont également singuliers, particuliers, rares parmi l'infinité des points qui forment le domaine du couteau.
La reconnaissance de la prégnance, en mathématiques, des concepts d'extrémalité et de singularité, la prise de conscience de l'importance de leur rôle dans l'activité des mathématiciens sont récentes. Pourtant, il s'agit encore ici de notions naturelles, inscrites dans notre physiologie, son organisation, son mode de fonctionnement, dont l'emploi, primitivement inconscient, est sous l'empire de la nécessité intérieure. On voit ici la présence de la rationalité cachée, implicite, dans le processus qui conduit à l'emploi intuitif de ces concepts fondamentaux, puis à leur mise en lumière.
Ces niveaux profonds, où s'exerce de manière non simpliste la rationalité physique, parce qu'ils sont difficilement atteints par l'analyse consciente et complète, sont parfois hâtivement dénommés "irrationnels", dans le meilleur des cas du ressort de l'intuition. L'intuition, "forme de connaissance immédiate qui ne recourt pas au raisonnement", est malgré tout l'expression d'un processus rationnel qui, dans un premier temps, dépasse nos capacités de perception et d'analyse. Tels des panneaux qui jalonnent une piste, des étapes de ce processus peuvent émerger au niveau conscient, pouvant guider l'activité de l'esprit dans sa recherche de la rationalité sous-jacente, à l'origine même de ces indicateurs de rationalité.
Ce point de vue de Sirius, sous-tendu en premier lieu par un souci d'universalité, présente l'avantage de promouvoir la réponse à la question : dans quelle mesure une vérité locale a-t-elle une valeur plus générale ? Cette question en appelle d'autres : il faut en effet s'entendre au préalable sur l'étendue de cette généralité, et pour cela définir avec précision le cadre le plus large à l'intérieur duquel on pourra, de manière pertinente, travailler. Une fois cette mise en forme accomplie, qui permet d'élaguer les propriétés secondaires et de mettre en évidence les propriétés fondatrices et principales, reprend le travail proprement constructif du mathématicien. Toute l'histoire du progrès des mathématiques est profondément marquée par l'influence déterminante de la construction de ces théories chaque fois plus englobantes. C'est en définitive par leur intermédiaire que des propriétés d'apparence particulières révèlent leur signification générale, et finalement parviennent à être démontrées.

Ces propriétés générales s'imposent au mathématicien : la familiarité avec les cas particuliers lui permet de voir aussitôt la structure sous-jacente aux exemples qu'il manipule, ses articulations principales qu'il traduit sous forme d'axiomes. Il n'y a en l'occurrence rien d'irrationnel dans cette démarche ; tout au contraire, elle est l'expression d'une rationalité très claire et en quelque sorte naturelle. La nécessité et le bon sens imposent de montrer aux collègues l'organisation discrète de l'univers à l'intérieur duquel ils travaillent. La meilleure intelligence de cet univers, observé de plus loin mais avec un regard pénétrant, permet de mieux déceler et mettre au jour les chemins qui courent entre les propositions.
Proposons cette comparaison : cet univers des idées est semblable dans sa genèse à celui d'un univers géographique, à une planète dont nous essayons de préciser le relief. Par temps clair, ou parce que nous sommes proches et dotés de très bons instruments, pics, cols et vallées se font voir d'emblée sous un jour cohérent, une sorte de nécessité interne implique leur présence en tel lieu, leur étendue. Il arrive fréquemment que les conditions d'observation ne soient pas aussi favorables. Mais l'observateur averti, doté d'une expérience professionnelle, d'une grande patience et d'une grande concentration, repère des

indices, de plus en plus nombreux au fil du temps, de sorte que le paysage géographique dont il veut percer les secrets finit, petit à petit, par prendre forme. Des pans de cet univers se mettent en place, la position de tel indice étant induite, s'expliquant par celle de tel autre. Un seuil de reconstitution atteint, le voile se déchire et le paysage apparaît en toute clarté.
Par intuition, nous désignons un ensemble d'activités mentales qui comprend l'observation et la réminiscence de faits analogues et d'indices. Ceux-ci suggèrent l'existence de telle propriété, dont on finit par conjecturer la présence. Ce sont les premiers éléments d'un puzzle que des raisons morphologiques locales vont permettre de reconstituer. En l'occurrence, la culture mathématique du chercheur, ses compétences dans d'autres domaines, la maîtrise et la souplesse qu'il a acquises dans l'exercice du raisonnement, faisant appel à des raisons plus ou moins diverses et lointaines, à des comparaisons entre situations a priori étrangères les unes aux autres, lui permettent de deviner, de remarquer ou simplement de souligner la présence de telle ou telle propriété, et finalement d'exposer les raisons de son existence.
On peut alors soutenir que l'intuition est une manifestation très fine et très élaborée de la rationnalité profonde de l'être. Les qualités intrinsèques, la formation, et en particulier l'exercice sont à la source du déploiement de cette intuition.
L'image géographique que nous avons prise n'est pas innocente. Elle témoigne du caractère spatial de notre activité mentale. Elle prend en compte des considérations de nature géométrique dans le déroulement même de cette activité : le raisonnement n'est autre, souvent, que la description de l'enchaînement de morphologies s'emboîtant à la manière des pièces d'un puzzle. Cette vision décrit le raisonnement achevé. Le raisonnement actif, opératoire, créateur, est un processus constructif qui déplace les pièces, les retourne parfois de manière inattendue, les déforme, les relie, vérifie et justifie la possibilité de leur accouplement. Ce qui amène à distinguer deux types de démonstration : celle qui ne fait que s'appuyer sur des résultats connus, de la déduction desquels on justifie l'assertion proposée ; celle qui non seulement utilise le procédé précédent, mais s'appuie aussi sur un mode original de construction, auquel la démonstration doit son caractère excitant, fascinant, sa beauté propre. Le développement de la topologie est caractéristique de ce point de vue, comme le montrent par exemple les travaux de Thurston et Poenaru qui fourmillent de constructions originales. C'est à ce niveau sans doute que l'on se rapproche le plus de l'irrationalité. L'irruption de cette nouvelle manière de faire détruit une routine mentale, une tendance à l'ankylose de l'esprit. C'est à ce moment-là que l'on savoure le fin plaisir apporté par l'astuce, sorte d'aiguillon habile qui excite et fait rire l'esprit.
La construction permet d'insuffler la vie aux mathématiques ; quant au raisonnement, il est le ciment qui donne à l'édifice intellectuel sa solidité.
Nous avons maintenant en main assez d'éléments pour pouvoir aborder ici de manière brève, et pour conclure, ce thème pédagogique : comment développer, chez l'enfant, la rationalité dans ses formes directes ou subtiles ? A l'évidence, l'étude des mathématiques favorisera la formation des procédures de raisonnement. Cette étude suppose que l'on ne se contente pas, comme on le fait malheureusement depuis quelques années, d'enseigner des recettes aux élèves. Une telle cuisine scolaire est insipide, et sans grand intérêt pour la formation de l'esprit. Il est indispensable que ces élèves rencontrent des démonstrations vraies, parviennent à les maîtriser, d'abord pour s'exercer au raisonnement brut, mais également pour développer l'intuition. Comme Poincaré l'a souligné, l'exercice de la géométrie est plus apte à favoriser l'expression de l'intuition : c'est en effet en géométrie élémentaire que l'on rencontre le plus aisément ces constructions originales et pourtant faciles qui entraînent l'esprit à l'élaboration de petits puzzles mentaux attrayants. Une société ne saurait, sans risque grave pour sa pérennité, renoncer à ces jouets éducatifs millénaires, et dont les qualités ont été éprouvées au fil des siècles.

p. 79
Cette procédure qui consiste, étant donné une difficulté, à prendre de la hauteur, à adopter en quelque sorte un point de vue de Sirius pour mieux dominer la situation, doit-elle être considérée comme une démarche rationnelle ou non ? Donnons d'abord quelques exemples élémentaires où, cachée sous des habits bien différents, cette procédure est employée. Nous la rencontrons en premier lieu dans l'algèbre : celle de l'arithmétique, où l'on a commencé par remplacer les nombres par des lettres et raisonner sur des expressions littérales ; celle des espaces fonctionnels où les fonctions polynomiales, à travers la géométrie algébrique et l'arithmétique, ont joué un rôle central. Nous rencontrons à nouveau cette procédure en théorie des nombres, au moment où la création des nombres complexes, plus généralement lors de la création des nombres par la méthode des extensions. Les prémisses de cette procédure apparaissent également dans la conception, entrevue par N. Oresme ou Kant, d'espaces multidimensionnels.
Il est clair que, dans ces situations, l'observation répétée de cas possédant la même formulation est une invite naturelle à établir des formulations générales, des énoncés qui transcendent les cas particuliers. La démarche de l'esprit, autant fondée sur l'analogie que sur la synthèse, est une démarche de bon sens.

2 Extraits de *La construction des nombres* de Claude-Paul Bruter

p. 25
Provenant de Sur la nature des mathématiques, Paris, Gauthier-Villars, 1973
Etant donné un objet O' défini sur un ensemble E', et vérifiant les propriétés $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$, trouver un objet défini sur un ensemble E contenant E', vérifiant non seulement les propriétés précédentes $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ mais de plus des propriétés $P'_{n+1}, P'_{n+2}, \ldots, P'_{n+m}$ et tel que la restriction de O à E' soit O'.

p. 34
Or le mode de construction de cet ensemble conduit à définir une notion d'ordre, et l'on montre facilement que : $\mathbb{N}$ est un ensemble muni d'un ordre total, d'une loi de composition additive, associative et commutative, possédant un élément neutre, et grâce à laquelle des opérations telles que $32 + 24 = 56$ ont un sens. On dit que $\mathbb{N}$ a la structure de demi-groupe commutatif, et non pas de groupe puisqu'en dehors de l'élément neutre, aucun élément ne possède de symétrique.

p. 216
Et quelles leçons de modestie et d'humilité, mais aussi d'optimisme, ne peut-on tirer de cette lenteur à accepter et à comprendre quelques-unes des plus simples de nos constructions ! Que les physiciens, perplexes, voire inquiets, tourmentés, qui s'interrogent sur l'intelligibilité du monde subatomique, veuillent bien se pénétrer de ces leçons, se rassurer, prendre patience : une longue adaptation de la pensée à nos constructions mentales, aux observations nouvelles, est parfois nécessaire jusqu'au moment où, la familiarité aidant, l'assimilation parvient à son terme, l'adéquation entre la construction et le fait sensible atteint un degré tel que la construction, aussi rudimentaire et imparfaite soit-elle, apparaît comme naturelle, comme imposée par la nécessité ; alors la construction fait sens, l'obscurité s'estompe, le paysage devient lumineux, et l'intelligibilité s'affirme.
"Le monde est un animal" disait Platon. Comme il est fascinant d'observer le développement de l'univers symbolique et grouillant construit par les physiciens et les mathématiciens ! A partir de quelques germes discrets de monades, à l'infini il s'auto-reproduit, envahissant l'espace, le meublant sans arrêt dans des directions de plus en plus nombreuses, de plus en plus denses, dessinant des figures de plus en plus enchevêtrées et tordues. Une longue préparation est nécessaire avant que ne soient libérées ces croissances fulgurantes. Pas à pas travaille d'abord la pensée. Puisque, lorsque les temps sont mûrs, apparaît la notion, le concept, la construction, et, sous le nom de théorème, le fait et son explication, qu'on appelle aussi démonstration.

p. 217
Avec Gauss sur les entiers, puis avec Cauchy sur les polynômes, par l'intermédiaire de relations d'équivalence, définies de manière algébrique de manière à être compatibles avec la structure des ensembles originels de nombres, on a pris l'habitude de couper ceux-ci en tranches égales ; chaque tranche est projetée sur un seul "point", qu'on peut désigner par un seul symbole, et qu'on peut appeler aussi "nombre nouveau". Un ensemble O_1 de tels nouveaux nombres possède une structure héritée de celle de l'ensemble originel O_0 considéré. Mais il faut souligner que chaque nouveau nombre, chaque tranche, hérite également en quelque sorte de cette structure interne. Evidemment, les structures filles ne sont pas forcément identiques en tout point aux structures mères, ni même entre elles, le fisc, en somme, étant passé par là.
En introduisant, sur O_1 maintenant, une relation d'équivalence convenable, on fabrique un nouvel ensemble de nombres O_2. Pour peu que O_0 soit un ensemble infini, on peut prolonger parfois jusqu'à l'infini ce processus de descente, de création de nombres structurés. Le procédé connaît un début d'emploi en physique où chaque nombre nouveau caractérise un état particulaire plus fin, structuré par un groupe de symétries, souvent un groupe de rotations.
Le progrès dans cette voie réside dans l'établissement de relations d'équivalence engendrant des tranches inégales. On peut commencer par supposer, par exemple, comme dans les pavages irréguliers de Penrose, la présence de deux types de tranches, et même, pour aller au plus simple, supposer que ces tranches forment un découpage périodique de l'ensemble de nombres considéré. On peut alors imaginer que la fabrication des tranches, leur localisation, dépendent de conditions extérieures qui fixent le découpage, d'une section particulière donc du fibré des contraintes. L'histoire de la construction des nombres n'a

certainement pas atteint son terme.

p. 219
Mais on peut s'interroger : pourquoi s'arrêter en si bon chemin, et ne pas appeler tout simplement nombre tout élément d'un ensemble muni d'une ou de plusieurs lois d'opérations, présentant entre elles des liens de compatibilité nécessaire, dont la nature et le mode opératoire sont, bien sûr, parfaitement définis, ou encore, plus généralement, pourquoi ne pas considérer que tout ensemble sur lequel opère un algorithme est un ensemble de nombres ?

p. 222
Le dernier point sera consacré, à travers la question de la validité du modèle numérique, à l'examen du bien-fondé du platonisme. Celui-ci postule l'existence d'un schéma préétabli selon lequel le monde est organisé, et qui s'exprime en termes mathématiques.
Il est clair que le platonisme vient en droite ligne du pythagorisme. Cette forme d'idéologie a joué et continue de jouer un rôle moteur et positif très important dans le développement des sciences, des mathématiques et de la physique en particulier. Aussi ne serait-il guère politique d'essayer de montrer que les hommes de science qui se réclament du platonisme sont encore imprégnés de ce mode de pensée qui fut celui de l'enfance de l'humanité, émerveillée par un monde peuplé de personnages héroïques, représentatifs, symboliques, mais aussi refuges auprès desquels s'ébauchent les premiers apprentissages de la vie sociale.

La célèbre formule "tout est nombre" fait partie du corpus des conceptions pythagoriciennes. Les capacités croissantes des ordinateurs, la richesse potentielle des représentations numériques que nous avons rencontrées, confortent sur le plan pratique les adeptes néopythagoriciens. La réalité est sans doute plus nuancée. Un nombre est un absolu instantané, statique. Le monde est beaucoup plus flou, il est constamment changeant. Aussi les nombres, qui sont des représentations, ne peuvent-ils fournir, en général, sur le plan pratique cela s'entend, que des approximations. Le "tout est nombre", qui a certes sa vérité sur les plans théorique et abstrait, devrait pour le moins être nuancé ; il serait plus exact d'énoncer, d'ailleurs de manière peut-être trop optimiste, "presque tout peut être approché par le nombre".

A quoi j'ajoute pour ma part, "je ne sais plus du tout ce qu'est un nombre, mais je sais m'en servir...".

3 Dans *Comment l'esprit vient aux savants* de Claude Brezinski

p. 9
Albert Einstein : Je cherche quand je veux, je trouve quand je peux.

Jérôme K. Jérôme : Après avoir cherché sans trouver, il arrive qu'on trouve sans chercher.

p. 20
Jack Lang : "Il faut être provoqué par les pensées des autres". Cette phrase s'applique à toute activité créatrice et, bien sûr, à la recherche scientifique.

p. 33
Mark Kac (Enigmas of chance, University of California Press, Berkeley, 1987, p. 39).
Il y a grossièrement deux sortes de créativité mathématique. La première, semblable à la conquête d'un pic montagneux, consiste à résoudre un problème demeuré ouvert et qui a attiré l'attention de nombreux mathématiciens. L'autre est l'exploration d'un nouveau territoire.

p. 53
Claude Bernard (Introduction à l'étude de la médecine expérimentale, J.B.Baillière et fils, Paris, 1865, p. 66-67).

Il n'y a pas de règles à donner pour faire naître dans le cerveau, à propos d'une observation donnée, une idée juste et féconde... Son apparition a été toute spontanée, et sa nature est toute individuelle. C'est un sentiment particulier, un quid proprium qui constitue l'originalité, l'invention ou le génie de chacun. Une idée neuve apparaît comme une relation nouvelle ou inattendue que l'esprit aperçoit entre les choses... Mais comme les sens, les intelligences n'ont pas toutes la même puissance ni la même acuité, et il est des rapports subtils et délicats qui ne peuvent être sentis, saisis et dévoilés que par des esprits plus perspicaces, mieux doués ou placés dans un milieu intellectuel qui les prédispose d'une manière favorable... Mais il est aussi des faits qui ne disent rien à l'esprit du plus grand nombre, tandis qu'ils sont lumineux pour d'autres. Il arrive même qu'un fait ou une observation reste très longtemps devant les yeux d'un savant sans rien lui inspirer ; puis tout à coup vient un trait de lumière, et l'esprit interprète le même fait tout autrement qu'auparavant et lui trouve des rapports tout nouveaux. L'idée neuve apparaît alors avec la rapidité de l'éclair comme une sorte de révélation subite ; ce qui prouve bien que dans ce cas, la découverte réside dans un sentiment des choses qui est non seulement personnel mais qui est même relatif à l'état actuel dans lequel se trouve l'esprit.

p. 61
Ivan Pavlov (cité dans E. Saparina, éd. Mir Moscou, 1987, p. 220-221).
Que voudrais-je souhaiter à la jeunesse de ma Patrie consacrée à la science ?
Avant tout, de l'esprit de suite. Je ne pourrai jamais parler sans émotion de cette condition primordiale d'une féconde activité scientifique. De l'esprit de suite, encore de l'esprit de suite, toujours de l'esprit de suite. Dès le début de votre travail, habituez-vous à un rigoureux esprit de suite dans l'accumulation des connaissances. Etudiez l'abc de la science avant d'essayer d'en atteindre les sommets. N'entreprenez jamais ce qui suit avant d'avoir assimilé ce qui précède. Ne tentez jamais de cacher les lacunes de vos connaissances, même par les hypothèses les plus hardies. Pour attrayants que soient les reflets chatoyants de cette bulle de savon, elle ne peut manquer de crever, et il ne vous restera rien d'autre qu'un pénible sentiment de confusion.
Cultivez en vous la retenue et la patience. Apprenez à faire les corvées dans la science. Etudiez, comparez, accumulez les faits. Quelle que soit la perfection de l'aile de l'oiseau, elle ne pourrait jamais s'élever sans s'appuyer sur l'air. Les faits sont l'air du savant. Sans eux, vous ne pourrez jamais prendre votre essor. Sans eux, vos "théories" resteront de vains efforts.
Mais, en étudiant, en expérimentant, en observant, tâchez de ne pas rester à la surface des faits. Ne vous transformez pas en archivistes des faits. Essayez de pénétrer le mystère de leur apparition. Cherchez opiniâtrement les lois qui les régissent.
Deuxièmement, je vous souhaite de la modestie. Ne croyez jamais que vous savez déjà tout. Et quelle que soit l'estime que l'on ait pour vous, ayez toujours le courage de vous dire : je suis un ignorant.
Ne laissez pas l'orgueil s'emparer de vous. Sinon vous vous obstinerez là où il faut tomber d'accord, vous refuserez un conseil utile et une aide amicale, vous perdrez le sens de l'objectivité...
Troisièmement, je vous souhaite la passion. Rappelez-vous que la science exige d'un homme sa vie entière... La science demande de gros efforts et une passion ardente. Soyez passionné dans votre travail et dans vos recherches.

p. 74
Louis Leprince-Ringuet (Les rayons cosmiques, Albin Michel, paris, 1945, p. 367).
Pour être à même de découvrir, il faut choisir une direction, s'y tenir longtemps avec ténacité, et ne la quitter que pour de très sérieuses raisons : tout choix est limitatif, cette limitation fait que l'on connaît parfois assez mal les autres branches de la science.

p. 114, 115
Pour que se produise l'illumination, il faut penser sans arrêt à son problème, il ne faut jamais le perdre de vue. Les opinions concordent sur ce point. Ainsi celle de Buffon (Histoire naturelle, générale et particulière, avec la description du cabinet du Roy. Matières générales, tome 1, premier discours, édition de l'imprimerie nationale, Paris 1749).
L'invention dépend de la patience ; il faut voir, regarder longtemps son sujet ; alors il se déroule et se développe peu à peu ; vous sentez un petit coup d'électricité qui vous frappe la tête et en même temps vous saisit le cœur : voilà le moment du génie.

Isaac Newton :
Si j'ai fait quelque découverte, c'est en pensant sans cesse au sujet qui m'occupait, en l'envisageant sous

toutes ses faces ; la recherche d'une vérité cachée m'en a souvent découvert d'autres auxquelles je n'eusse jamais songé. Une découverte en amène une autre, et l'on est étonné soi-même des aperçus qui naissent d'un examen sérieux et attentif... Je tiens le sujet de ma recherche constamment devant moi, et j'attends que les premières lueurs commencent à s'ouvrir devant moi, lentement, peu à peu, jusqu'à ce qu'elles se changent en une clarté pleine et entière.

Ivan Pavlov :
Le matin, levez-vous avec votre problème devant vos yeux. Déjeunez avec lui. Allez au laboratoire avec lui. Prenez votre déjeuner de midi avec lui. Rentrez chez vous le soir avec lui. Dînez avec lui. Gardez-le avec vous après dîner. Allez au lit avec lui. Rêvez-en.

Ainsi donc, quel que soit leur domaine, les scientifiques ont toujours en tête le problème qui les préoccupe. C'est ainsi que la solution peut leur apparaître tout d'un coup dans des situations bizarres où l'esprit peut vagabonder à loisir. Ainsi Jacques Monod disant un lundi matin à une collaboratrice : "j'ai pensé à ça hier, en escaladant un rocher à Fontainebleau".

p. 118
Jean Guitton (Le travail intellectuel, Aubier-Montaigne, Paris, 1986)
La règle d'or du travail intellectuel peut se traduire ainsi ; "Ne tolère ni de demi-travail, ni de demi-repos. Donne-toi tout entier ou détends-toi absolument. Qu'il n'y ait jamais en toi de mélange des genres !"

p.122
William Shockley (prix Nobel de Physique 1956)
Une conclusion vitale atteinte en pensant à la pensée est que la créativité est associée à l'échec. L'esprit qui crée une association d'idées relativement nouvelle et ordonnée a habituellement erré par des chemins détournés apparemment infructueux et a enduré des désappointements. Cependant les travaux entrepris qui mènent à ces frustrations sont une part essentielle de la créativité. Entreprendre de tels travaux permet à l'esprit compétent de se rendre compte des concepts qui sont les attributs clés de la situation chaotique à laquelle on est confronté. La méthodologie de l'échec créatif utilise un ensemble d'outils de pensée scrutatrice qui, même si ses premiers efforts échouent, rendent le chercheur conscient des attributs clés du problème. Ainsi, penser à la pensée encourage à la tolérance de ses limitations humaines inévitables et permet à l'individu d'être plus créatif en reconnaissant que ses échecs sont souvent des cubes utilisables pour acquérir de la puissance intellectuelle dans une nouvelle situation.

Yukawa (prix Nobel de Physique 1949 pour sa découverte théorique de l'existence du méson)
Les erreurs, bien sûr, ne sont en aucune façon gaspillées... selon le vieux dicton "l'erreur est la mère du succès". J'ai moi-même souvent travaillé dur du matin jusqu'au crépuscule seulement pour jeter à la corbeille, en désespoir de cause, ce que j'avais fait. Quantitativement, ce que je garde parce que quelque chose peut en sortir est incomparablement plus petit que ce que j'ai jeté et cependant c'est cela, je crois, qui sert de base à la création.

p. 123
Jules Tannery : Chaque découverte vient à son heure ; elle est rendue possible par celles qui l'ont précédée. C'est, à chaque instant, ce que l'on sait qui suggère les questions et les moyens d'y répondre.
Bien des propositions nouvelles ont été acquises par l'observation, surtout dans la Théorie des nombres... Bien entendu ces calculs ne se font pas au hasard ; ils sont dirigés par une pensée, une analogie, un pressentiment que leurs résultats vérifient ou modifient. Le mathématicien attend parfois le résultat du calcul où il est plongé avec la même impatience que le physicien, le résultat d'une expérience cruciale... Une partie du génie d'invention consiste pour le mathématicien, à imaginer de nouveaux problèmes où il puisse pénétrer avec les méthodes dont il dispose... Dans les diverses sciences, la matière et les instruments diffèrent, la marche de l'invention est la même. Mêmes essais, mêmes tâtonnements, même patience active et tendue, pour ainsi dire, vers un objet qui s'éclaire parfois, mêmes espoirs trompés, même finesse et même imagination pour saisir les analogies, les liens cachés, les rapports inattendus.

Henri Poincaré : On ne parvient au général que par le particulier ; cela est vrai même dans les sciences exactes ; car, si elles procèdent dans la démonstration du général au particulier, elles doivent dans l'invention

suivre la marche inverse, comme les sciences d'observation elles-mêmes.

Emile Borel : L'invention proprement dite, l'invention vraiment féconde consiste, en mathématiques comme dans les autres sciences, dans la découverte d'un point de vue nouveau pour classer et interpréter les faits.

Michel de Rozière : Sans doute les faits sont indispensables ; mais il ne faut pas oublier cependant que des faits isolés, en quelque nombre qu'ils soient, ne sont pas de la science, pas plus que des fragments ou des molécules de marbre ne sont des statues ; ce qui la constitue, ce sont les rapports des faits entre eux, c'est leur dépendance d'un principe commun.

p. 127
Lewis Carroll (cité par J.Gattégno dans sa biographie *Lewis Carroll, une vie*, Seuil, Paris, 1974, p. 150)
Je doute fort qu'il existe dans tout l'univers de la science un domaine aussi fascinant pour l'explorateur, aussi riche en trésors cachés, aussi fertile en surprises délicieuses, que celui des mathématiques pures. Leur charme réside principalement, selon moi, dans la certitude absolue de leurs résultats ; car c'est bien ce à quoi aspire l'intellect humain, par dessus tous les trésors de l'esprit !... La plupart des autres sciences sont en perpétuel changement, les vérités sans prix d'une génération se voient traitées de paradoxes par la suivante et balayées par celle d'après, qui n'y voit que sottises et puérilités.

p. 129
Autres domaines créatifs : Somerset Maugham
Les histoires viennent à moi directement. Je suis convaincu que le subconscient effectue le travail réellement difficile. Vous créez de façon originale à partir du subconscient et ensuite, les réécritures et les révisions suivent avec le polissage et les extensions jusqu'à ce que vous soyez convaincu que vous ayez, par le travail conscient de l'esprit, fait du mieux que vous pouviez.

Concorcet : La marche de la science est lente, et s'effectue par paliers
Il est des obstacles qui ne peuvent être vaincus que par le temps, des travaux dont rien ne peut accélérer le succès et pour lesquels il faut une volonté longtemps soutenue, longtemps dirigée vers le même but, autant que des moyens vastes et les efforts combinés d'un grand nombre de savants.

p. 131
Albert Szent-Györgyi (découvreur de la vitamine C)
La condition préalable à la découverte scientifique est une société qui n'exige pas du savant d'être "utile", mais qui lui accorde la liberté nécessaire à la méditation et au travail minutieux et consciencieux sans lequel la création est impossible... Le vrai savant est prêt à supporter les privations, et si besoin est, la faim, plutôt que de se laisser dicter la direction que son travail doit prendre.

p. 132
Albert Einstein
Je sais, de par ma propre et douloureuse recherche, qu'il est difficile, dans la quête de la vérité, d'avancer avec certitude, si peu que ce soit ; il y a tant d'impasses avant d'arriver à comprendre ce qui est vraiment significatif !
Le chemin direct s'est révélé comme étant le seul praticable. La seule chose qui soit incompréhensible est d'avoir été obligé de tâtonner si longtemps avant de trouver ce qui était tout proche.

Henri Lebesgue
...Tout homme qui trouve quelque chose de vraiment important est dépassé par sa propre découverte ; il ne la comprend pas lui-même, et seulement partiellement, qu'en y réfléchissant ensuite longuement.

P. Lecomte du Noüy
Car il ne suffit pas au savant de voir. Il doit convaincre. Et pour cela, il doit s'astreindre à employer, a posteriori, les méthodes classiques ; il doit, après avoir d'un coup d'aile survolé la forêt vierge, construire la route qui permettra au touriste de se rendre au même point.

4 Avant-propos du livre *Symétrie et mathématique moderne* d'Hermann Weyl

René Descartes : Discours de la Méthode
Regulae ad directionem ingenii
Règle 10 (regula decima) :
"Ut ingenium fiat sagax, exerceri debet
Pour être intelligent, il faut travailler.
Non statim in difficilioribus
Il ne faut pas s'occuper tout de go des choses difficiles
Artes levissimas et simplicissimas
Etudier d'abord les arts les plus communs et les plus simples
Ceux surtout qui sont régis par l'ordre..."
Et quelles sont donc ces arts gymniques de l'intellect :
"ceux des ouvriers qui tissent la toile et font les tapis, ceux des femmes qui font de la broderie ou de la dentelle ainsi que toutes les combinaisons de nombres, et toutes les opérations de l'arithmétique ; tous ces arts exercent l'esprit de façon admirable".

5 Dans *Deux et deux font-ils quatre ?* De Didier Nordon

une citation d'Alain Connes p. 45
Quand on effectue un long calcul algébrique, la durée nécessaire est souvent très propice à l'élaboration dans le cerveau de la représentation mentale des concepts utilisés. C'est pourquoi l'ordinateur, qui donne le résultat d'un tel calcul en supprimant la durée, n'est pas nécessairement un progrès. On croit gagner du temps, mais le résultat brut d'un calcul sans la représentation mentale de sa signification n'est pas un progrès.

6 Dans *Pour l'honneur de l'esprit humain* de Jean Dieudonné

p. 19
Comme chez beaucoup de savants, la vie du mathématicien est dominée par une insatiable curiosité, un désir de résoudre les problèmes étudiés qui confine à la passion, et arrive à le faire presque totalement s'abstraire de la réalité ambiante ; les distractions ou bizarreries des mathématiciens célèbres n'ont pas d'autre origine. C'est que la découverte d'une démonstration ne s'obtient en général qu'après des périodes de concentration intense et soutenue qui se renouvellent parfois pendant des mois ou des années avant que le résultat cherché ne soit atteint. Gauss lui-même a reconnu avoir cherché le signe d'une expression algébrique pendant plusieurs années, et Poincaré, à qui on demandait comment il était arrivé à ses découvertes, répondait "en y pensant souvent" ; il a d'ailleurs décrit dans le détail le déroulement de ses réflexions et tentatives qui l'ont conduit à l'un de ses plus beaux résultats, la découverte des fonctions fuchsiennes.
La possibilité de disposer d'assez de temps pour se livrer à ses travaux est donc ce que recherche avant tout un mathématicien, et c'est pourquoi, depuis le XIXe siècle, ce sont les carrières d'enseignement dans les universités ou les écoles techniques, où le nombre d'heures de cours est relativement faible et les vacances longues, qui ont leur préférence. L'importance de la rémunération n'arrive qu'en seconde ligne, et l'on a vu récemment, aux Etats-Unis entre autres, des mathématiciens abandonner des situations lucratives dans l'industrie pour revenir dans l'Université, au prix d'un sérieux abattement de salaire.

7 Alain Connes : Conférence *Le grand soir* à la Fondation Cartier

Le spectre provient de l'interaction entre l'atome et la radiation.

8 Dans *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique* d'Henri Poincaré

p. 10
Une citation de Hermite : "En mathématiques, nous sommes davantage des serviteurs que des maîtres". Bien que la vérité ne nous soit pas encore connue, elle préexiste et nous impose inéluctablement le chemin que nous devons suivre sous peine de nous égarer.

p. 37
Inventer, c'est choisir.
Cette conclusion très remarquable apparaît d'autant plus frappante si nous la comparons avec ce que Paul Valéry écrit : "Il faut être deux pour inventer. L'un forme les combinaisons, l'autre choisit, reconnaît ce qu'il désire, et ce qui lui importe dans l'ensemble des produits du premier". Ce qu'on appelle "génie" est bien moins l'acte de celui-ci - l'acte qui combine - que la promptitude du second à comprendre la valeur de ce qui vient de se produire et à saisir ce produit".
On voit combien le mathématicien et le poète sont d'accord sur ce point de vue fondamental : l'invention consiste en un choix.

p. 48
Le critique littéraire Emile Faguet écrivait : "Un problème se révèle soudain quand on ne l'étudie plus et probablement parce qu'il n'est plus étudié ; quand on ne s'attend plus qu'à se reposer, à se détendre pour une courte période ; fait qui prouverait - et il est à craindre que les paresseux puissent en faire mauvais usage - que le repos est la condition de l'œuvre.

p. 49
Devons-nous alors accepter la thèse de Buffon selon laquelle le génie pourrait n'être qu'une longue patience ?

p. 51
Ceci une fois reconnu, nous ne pouvons plus penser au conscient comme étant subordonné à l'inconscient. Au contraire, il déclenche son action et définit plus ou moins la direction générale dans laquelle cet inconscient doit travailler.

p. 57
Pascal, dans *L'art de persuader*, remarque le fait évident que, de même qu'il n'est pas possible de tout démontrer, il est également impossible de tout définir, et cela pour la même raison. Il existe des idées primitives qu'il est impossible de définir.

p. 59
1) préparation
2) incubation
3) illumination (après une période de repos)
4) vérification et finition
Vérification : Le sentiment d'absolue certitude qui accompagne l'inspiration correspond en général à la réalité ; mais il peut arriver qu'il nous ait trompés. Il faut vérifier s'il en est ainsi par l'intervention de notre raison proprement dite, tâche qui appartient à notre conscient.
Finition : pour exposer les résultats avec précision.

Selon moi, importance du “bain d’idées”.

p. 60
Nous en arrivons donc à la conclusion qui semble paradoxale à laquelle, du reste, il nous faudra apporter une correction comme nous l’avons fait dans le cas de Newton que cette intervention de notre volonté, c’est-à-dire d’une des plus hautes facultés de notre âme, se produit dans une partie assez mécanique du travail, où elle est en quelque sorte subordonnée à l’inconscient, bien que le surveillant.

9 Dans *L’étrange beauté des mathématiques* de David Ruelle

p. 35
Utiliser la force brute
ou bien
Trouver une idée astucieuse qui rend le problème facile. Pour la plupart des mathématiciens, c’est la bonne méthode. Dans le cas présent, l’idée astucieuse est de comprendre que le théorème du papillon appartient à la géométrie projective plutôt qu’à la géométrie euclidienne.

p. 67
Chapitre intitulé Structures
De ce que nous avons vu, il ressort que les mathématiques possèdent une nature double. D’une part, elles peuvent être développées en utilisant un langage formel, des lois de déduction strictes et un système d’axiomes. Tous les théorèmes peuvent être obtenus et vérifiés mécaniquement. C’est ce que nous appellerons l’aspect *formel* des mathématiques. D’autre part, la pratique des mathématiques repose sur des idées, comme l’idée de Klein sur les différentes géométries. C’est ce que nous pouvons appeler l’aspect *conceptuel* ou *structurel*.
Un exemple de considération structurelle nous est apparu lors de l’étude du “théorème du papillon” au chapitre 4. Nous avons alors vu combien il est important de savoir à quel type de géométrie appartient un théorème, lorsqu’il s’agit de le démontrer. Mais le concept de géométrie projective n’est pas explicite dans les axiomes qui sont généralement utilisés pour les fondements des mathématiques. Dans quel sens la géométrie projective est-elle présente dans les axiomes de la théorie des ensembles ? Quelles sont les structures qui donnent un sens aux mathématiques ? Dans quel sens la statue est-elle présente dans le bloc de pierre avant que le ciseau du sculpteur ne l’en dégage ?
Avant de discuter les structures, il convient de regarder d’un peu plus près les *ensembles* qui jouent un rôle si fondamental dans les mathématiques modernes. Passons d’abord en revue quelques notions intuitives, quelques notations et la terminologie de base. L’ensemble $S = \{a, b, c\}$ est une collection d’objets appelés “éléments de l’ensemble S”. L’ordre dans lequel les éléments sont présentés n’a pas d’importance. Pour exprimer que a est un élément de S, on écrit $a \in S$. Les ensembles $\{a\}$ et $\{b, c\}$ sont des *sous-ensembles* de $\{a, b, c\}$. L’ensemble $\{a, b, c\}$ est fini (il contient 3 éléments), mais il existe aussi des ensembles infinis. Par exemple, l’ensemble $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ des entiers naturels, ou l’ensemble des points sur un cercle sont des ensembles infinis. Etant donné des ensembles S et T, supposons que pour chaque élément x de S, un (unique) élément $f(x)$ de T soit donné. Nous disons alors que f est une *application* de S dans T. On peut également dire que f est une *fonction* définie sur S et avec des valeurs dans T. On peut, par exemple, définir une application de l’ensemble $\{0, 1, 2, ...\}$ des entiers naturels dans lui-même, telle que $f(x) = 2x$. D’autres applications ou fonctions des entiers naturels avec des valeurs dans les entiers naturels sont données par $f(x) = xx = x^2$ ou $f(x) = x...x = x^n$.
Le concept général de fonction (ou d’application) a émergé lentement dans l’histoire des mathématiques, mais il est au centre de notre compréhension actuelle des structures mathématiques.
Les mathématiciens ont essayé de manière répétée de définir avec précision et généralité les structures qu’ils emploient. Le programme d’Erlangen de Klein est un pas dans cette direction. Les structures considérées par Klein étaient géométriques, associées chacune à une famille d’applications : congruences (pour la géométrie euclidienne), transformations affines (pour la géométrie affine), transformations projectives, et ainsi de suite. Le très idéologique Bourbaki donne une définition des structures fondée sur les ensembles. Je vais essayer de donner une description informelle de l’idée de Bourbaki. Supposons que nous voulions comparer des objets de taille différente. Nous écrivons $a \leq b$ pour indiquer que a est inférieur ou égal à b. (Certaines conditions doivent être satisfaites, par exemple si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$). Nous voulons donc définir une structure d’ordre ($\leq$ est appelé un ordre). Pour ce faire, nous avons besoin d’un

ensemble S d'objets $a, b, \ldots$ que nous allons comparer. Ensuite, nous pouvons également introduire un autre ensemble T formé de paires d'éléments (a, b) de S : les paires pour lesquelles $a \leq b$. (Nous serons peut-être amenés à considérer également d'autres ensembles, pour imposer la condition que si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c \ldots$). En bref, nous considérons un certain nombre d'ensembles S, T, dans une certaine relation (T est constitué de paires d'éléments de S) et cela définit une relation d'ordre sur l'ensemble S. D'autres structures sont définies de manière semblable sur l'ensemble S en introduisant à chaque fois divers ensembles qui se trouvent dans une relation particulière vis-à-vis de S. Supposons, par exemple, que l'ensemble S a une structure qui permet d'additionner ses éléments, c'est-à-dire que pour chaque couple d'éléments a, b, il existe un troisième élément c pour lequel nous pouvons écrire $a + b = c$. La structure à définir sur S devra prendre en considération un nouvel ensemble T constitué de triplets d'éléments de S : les triplets (a, b, c) pour lesquels $a + b = c$. Les traités de mathématiques donnent la définition de nombreuses structures comme *structure de groupe*, *topologie de Hausdorff*, etc. Ces structures sont à la base de l'algèbre, de la topologie, et des mathématiques modernes en général.

Dotons l'ensemble S d'une relation d'ordre, de même pour l'ensemble S'. Supposons que nous avons un moyen d'associer à chaque élément $a, b, \ldots$ de S un élément $a', b', \ldots$ de S'. En langage mathématique, nous dirons que nous avons une application de S dans S' envoyant les éléments $a, b, c, \ldots$ de S sur les éléments $a', b', c', \ldots$ de S'. Supposons que si $a \leq b$ alors $a' \leq b'$, c'est-à-dire que l'application conserve l'ordre. Utilisons une flèche pour indiquer cette application de S dans S' :

$$S \to S'$$

.
De manière plus générale, on écrit souvent $S \to S'$ pour indiquer le passage d'un ensemble avec une certaine structure à un ensemble qui possède une structure similaire, tout en respectant cette structure (dans l'exemple ci-dessus, c'est la structure d'ordre qui est respectée). En langage technique, la flèche est dite représenter un *morphisme* (Par exemple, si S et S' ont une structure où des éléments peuvent être additionnés, et le morphisme envoie les éléments $a, b, c, \ldots$ de S vers les éléments $a', b', c', \ldots$ de S', alors $a + b = c$ doit entraîner $a' + b' = c'$). Si nous considérons des ensembles sans structure additionnelle, les morphismes $S \to S'$ ne sont autres que les applications de S dans S'.
Une idée naturelle est de considérer maintenant tous les ensembles avec un certain type de structure et tous les morphismes correspondant : on parle alors de *catégorie*. Il y a donc une catégorie des ensembles dont les morphismes sont les applications, une catégorie des ensembles ordonnés, où les morphismes sont les applications que préservent l'ordre, une catégorie des groupes, etc. Dans cette manière de voir les choses, il est utile de pouvoir appliquer les objets d'une catégorie dans les objets d'une autre catégorie, tout en préservant les morphismes. Lorsque c'est le cas, on dit qu'on a un *foncteur* d'une catégorie vers une autre. Les catégories et les foncteurs ont été introduits vers 1950 par Eilenberg et MacLane et sont rapidement devenus des objets conceptuels importants en topologie et en algèbre. On peut considérer les catégories et les foncteurs comme la base idéologique d'une partie importante des mathématiques de la fin du XXe siècle, utilisés de manière systématique par des mathématiciens comme Grothendieck.

En résumé, nous pouvons dire que les structures et leurs relations apparaissent comme une préoccupation constante, en arrière-plan idéologique dans d'importants domaines des mathématiques de la fin du XXe siècle. Certaines questions seront systématiquement posées, certaines constructions seront systématiquement tentées. Dans une certaine mesure, nous avons donc répondu à la question de découvrir les éléments conceptuels de base des mathématiques. La réponse est donnée en terme de structures, de morphismes et peut-être de catégories, de foncteurs et de concepts apparentés. Et la qualité de cette réponse peut être jugée par la richesse des résultats obtenus.
A ce point de notre parcours, il me faut corriger une impression fausse que je viens peut-être de donner, selon laquelle la pensée mathématique d'aujourd'hui serait dominée par les catégories, les foncteurs et ainsi de suite. Nous pouvons seulement dire qu'il existe une tendance générale à vouloir clarifier les aspects conceptuels et à ne pas se contenter de calculer sans comprendre. Cependant, les considérations structurelles peuvent être minimales. Pour donner un exemple de mathématiques d'un style différent, je voudrais mentionner le travail de Paul Erdös (le nom est hongrois et se prononce "Erdeuche"). Erdös était un mathématicien très atypique, qui voyageait sans cesse et ne dépendait pas d'une institution fixe. Sa contribution aux mathématiques est variée et importante. Il avait la très belle idée qu'il existe un Livre "dans lequel Dieu conserve les démonstrations parfaites des théorèmes mathématiques" (accessoirement, Erdös ne croyait pas en Dieu qu'il appelait *Le Fasciste suprême)*. Sous l'influence d'Erdös, une approximation fascinante du Livre a été écrite, intitulée *Proofs from the Book* ("Démonstrations ex-

traites du Livre"). Cet ouvrage est d'une lecture relativement facile et donne une vue résolument non bourbakiste des mathématiques. Les considérations structurales n'en sont pas absentes mais elles restent à l'arrière-plan. Paul Erdös était un de ces mathématiciens qui s'acharnent à trouver la solution d'un problème, mathématiciens très différents des constructeurs de théories comme André Weyl ou Alexandre Grothendieck. Pour bien résoudre des problèmes, il faut aussi être un mathématicien conceptuel, et avoir une bonne compréhension des structures. Mais les structures restent des outils pour celui qui résoud des problèmes, et non l'objet principal de son étude.

Conclusion

- **Hilbert** :

  Wir mussen wissen, wir werden wissen (pas d'ignorabimus en mathématiques.)

- **Poincaré** :

  Le terrain le plus naturel et le plus favorable pour cette étude est l'arithmétique élémentaire, c'est à dire les opérations mettant en jeu des nombres entiers. Quand nous analysons des opérations telles que l'addition et la multiplication, nous nous rendons compte qu'un type de raisonnement se "retrouve à chaque pas", c'est la démonstration "par récurrence" : "on établit d'abord un théorème pour n égal à 1 ; on montre ensuite que, s'il est vrai de $n-1$, il est vrai de n, et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers." C'est là le "raisonnement mathématique par excellence". Sa particularité est "qu'il contient, sous une forme condensée, une infinité de syllogismes", et qu'il permet de passer du particulier au général, du fini à l'infini, concept qui apparaît dès les premiers pas de l'arithmétique élémentaire et sans lequel "il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général", mais uniquement des énoncés particuliers.

Conclusion

- **Poincaré** :

  D'où nous vient ce "raisonnement pas récurrence" ?

  Certainement pas de l'expérience. Celle-ci peut nous suggérer que la règle est vraie pour les dix ou les cent premiers nombres, mais elle est désarmée face à l'infinité de tous les nombres naturels. Le principe de contradiction (on dirait aujourd'hui le raisonnement par l'absurde) est aussi impuissant : il nous permet d'obtenir certaines vérités, mais non d'en enfermer une infinité en une seule formule. "Cette règle (le raisonnement par récurrence), inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique a priori. L"'irrésistible évidence" avec laquelle ce "principe" s'impose n'est autre que "l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible"... *(extrait de la biographie "Poincaré : mathématicien et philosophe" d'Umberto Bottazzini, éd. Belin Pour la Science)*

Ci-dessous un extrait d'une conférence de Serge Haroche "La physique quantique" à l'Université de tous les savoirs en 2000 (DV, 16/2/2014)

Lien vers la conférence :
http ://www.canal-u.tv/video/universite$_d e_t ous_l es_s avoirs/la_p hysique_q uantique_s erge_h aroche$.1065

En raison des imperfections de la cavité, d'une certaine rugosité du miroir, de temps en temps, un photon va s'échapper, et partir dans l'environnement. Dès que le photon est parti, c'en est fini de la cohérence quantique. Le premier photon qui s'échappe sert d'espion pour vous dire que vous êtes dans un chemin et pas dans l'autre. Le temps que le premier photon va mettre à disparaître est extrêmement court. Si vous avez un milliard de photons et un temps de relaxation d'une milliseconde, il vous faudra un milliardième de millisecondes pour que le premier photon s'échappe et la cohérence quantique aura disparu. On comprend que les cohérences macroscopiques disparaissent très très vite pour des champs macroscopiques et on ne peut faire des expériences que si n n'est pas trop grand. On a fait une telle expérience qui "saisit la décohérence au vol". Les cohérences quantiques sont extrêmement fragiles, elles s'évanouissent dès qu'un quantum s'est perdu dans l'environnement.

A relier à ceci, paru le 27 janvier 2014 :
http ://www2.cnrs.fr/presse/communique/3415.htm

Notes sur En cherchant Majorana d'Etienne Klein
(Denise Chemla - 26/12/2013)

(p.54) Mais le mécanisme de cette radioactivité est incompréhensible dans le cadre de la physique classique. Et c'est là que Gamow et Majorana franchissent un seuil. Selon les lois classiques, il est impossible qu'une particule alpha sorte d'un noyau atomique, qui représente pour elle une cuvette aux parois infranchissables, autrement dit une "barrière de potentiel". Ce que Gamow comprend et que Majorana démontre formellement, c'est qu'une telle interdiction peut être déjouée par les lois quantiques. Appliquées à une particule alpha prétendument prisonnière d'un noyau, elles lui permetttent d'apparaître... à l'extérieur du noyau ! Elles lui offrent en effet une probabilité non nulle de traverser la barrière de potentiel. Initialement confinée, la particule alpha se déplace très vite, ne cesse d'abord de se cogner et de rebondir sur la paroi intérieure du noyau ; puis, après de multiples tentatives infructueuses, profitant du jeu des probabilités et de la multiplicité des occasions, elle finit par passer au travers - d'où le terme d'"effet tunnel" inventé par Gamow.

Mon interprétation : je suis une particule alpha et j'ai une probabilité infime d'échapper à ma condition, à force de m'être cognée à CG, et de réussir peut-être à la démontrer, par "effet tunnel" ! ! !

(p.108) Majorana dans son dernier article émet l'hypothèse que certaines particules dépourvues de charge électrique pourraient être leur propre antiparticule - une hypothèse à l'origine de recherches menées aujourd'hui sur des particules fascinantes et fantomatiques, les neutrinos.

(P.110) L'équation de Dirac recèle quelque chose d'étrange : certaines des solutions de son équation correspondent à des particules d'énergie... négative ! Or toutes les particules connues sont dotées d'une énergie positive, y compris lorsqu'elles sont immobiles, puisque leur énergie est alors égale à leur énergie de masse mc^2. Si ces particules d'énergie négative existaient, elles auraient donc une masse négative. Cela impliquerait que, sous l'action d'une force, elles se déplaceraient dans le sens contraire à celui des particules ordinaires, toutes dotées d'une masse positive.[...] Ce nouvel objet microscopique est l'"antiparticule de l'électron", qui sera bientôt baptisée le "positron". Dirac démontre en outre qu'un électron et un positron ne peuvent apparaître qu'ensemble, c'est à dire par paire, un peu comme des frères jumeaux.

(p.112) Majorana montre d'abord, de façon très élégante, qu'on peut déduire l'équation de Dirac d'un principe plus fondamental, en fait plus symétrique, que celui dont est parti le théoricien anglais. Il montre ensuite qu'on peut donner une autre forme à cette équation et qu'alors certaines de ses solutions correspondent à des particules qui sont... leur propre antiparticule ! Majorana pour cela identifie d'autres matrices que celles de Dirac satisfaisant aux règles de la même algèbre (de Clifford), les "matrices de Majorana" dont toutes les composantes sont des nombres imaginaires purs (de partie réelle nulle), ce qui permet à la nouvelle équation ainsi obtenue d'avoir des solutions réelles (au sens où elles ne sont pas complexes). Ces solutions réelles correspondent à des particules qui sont leur propre antiparticule.

Mon interprétation : Les particules qui sont leur propre antiparticule sont les nombres premiers. Les électrons et les positrons qui vont par deux correspondent à mes caractères de divisibilité dans les grilles. On n'aura qu'à affecter aux nombres jusqu'à $n/2$ des électrons seulement et aux nombres de $n/2$ à n les positrons correspondants.

Extraits de *Et si le temps n'existait pas ?* de Carlo Rovelli (DC 24/11/13)

(p. 13) Enfant, je lisais les fables d'un écrivain italien pour enfants, Gianni Rodari. L'une d'elles raconte l'histoire de Giovannino et de la route qui ne mène nulle part. Giovannino vivait dans un village où il y avait une route qui, d'après tout le monde, ne menait nulle part. Mais Giovannino était curieux et têtu et, malgré ce que tout le monde disait, il voulait aller voir. Il y alla, et bien sûr il trouva un château et une princesse, qui le couvrit de pierres précieuses. Quand il rentra au village, ainsi nanti, tout le monde se précipita sur la route, mais personne n'y trouva plus le moindre trésor.

J'ai lu cet extrait jeudi soir ; le matin-même, avec les élèves de CE1 que j'ai en classe, nous avions lu dans leur manuel de lecture une autre histoire de Gianni Rodari, celle de l'enfant qui posait ses questions à l'envers "Pourquoi les tiroirs ont-ils des tables ?".

(p. 67 et 68) La vieille idée aristotélicienne et cartésienne voit l'espace comme relation.

Une théorie complète de la gravitation quantique ne sera probablement construite qu'en abandonnant complètement l'idée newtonienne de l'espace comme entité. L'espace n'est pas une entité dans laquelle les objets sont localisés : l'entité "espace" n'existe pas. [...] Ce sont les relations qui constituent l'espace.

La base même de la science est donc la pensée critique : la conscience forte que nos visions du monde sont toujours partielles, subjectives, imprécises, provinciales et simplistes. Il faut sans cesse chercher à comprendre mieux. A ouvrir des horizons. A trouver un point de vue plus large. Cela n'est ni commode ni naturel car, d'une certaine façon, nous sommes prisonniers de nos pensées. Il est par définition impossible de sortir de notre propre pensée. On ne peut pas la regarder du dehors et la modifier. C'est de l'intérieur de nos erreurs qu'il faut travailler pour découvrir *où* nous sommes en train de nous tromper. Cela revient, pour utiliser une belle et célèbre image, à reconstruire son bateau tout en naviguant. La science, c'est cela : un effort continu pour reconstruire et restructurer notre propre pensée alors même que nous sommes en train de penser.

(p. 81 et 82) Dès mon arrivée, Wheeler est venu me voir dans le Bed and breakfast où j'avais trouvé à me loger. Nous avons pris le petit-déjeuner ensemble et puis il m'a accompagné dans une longue promenade à travers le campus. Je lui ai expliqué les résultats de nos calculs, tandis que lui me racontait ses histoires extraordinaires : Bohr, la bombe atomique... "Tu vois, Carlo, me disait-il, quand Einstein est arrivé ici la première fois, fuyant l'Allemagne nazie, je suis allé le chercher au petit matin, comme je viens de le faire avec toi, et nous nous sommes promenés le long du même parcours...". Pourquoi le voisinage, même indirect, des hommes qui ont laissé le plus de traces dans notre pensée nous donne-t-il tant d'émotion ? Ce sont des hommes comme les autres, bien sûr, avec leurs faiblesses et leur humanité comme tout le monde, mais la fascination que nous avons éprouvée pour leurs idées leur confère une aura qui nous enchante. Ils nous ont ouvert des chemins que nous avons le privilège de pouvoir suivre, et de ce fait éveillent admiration, gratitude et affection.

(p. 94 et 95) Revenons-en aux principes. Ce qu'il faut comprendre pour commencer, c'est que lorsque deux événements se déroulent en des endroits suffisamment éloignés, il n'y a pas de sens, en général, à dire lequel des deux arrive *le premier*. Et il n'y a pas de sens non plus à demander ce qui arrive *en ce moment précis* dans la galaxie d'Andromède, par exemple. La raison en est que le temps ne s'écoule pas partout de la même manière. Nous avons notre temps, et la galaxie d'Andromède a le sien, et de manière générale ces deux temps ne peuvent pas être mis en relation.

La seule chose qu'on puisse faire, c'est échanger des signaux, mais ceux-ci vont prendre des millions d'années pour faire l'aller-retour entre ici et Andromède. Imaginez un extra-terrestre qui nous envoie un signal depuis Andromède. Nous recevons ce message *aujourd'hui* et nous y répondons immédiatement. Nous pouvons dire que le moment où l'extra-terrestre a envoyé le signal se place *avant* aujourd'hui, et que le moment où il recevra la réponse viendra *après* aujourd'hui. Mais pendant les millions d'années qui s'écoulent entre l'envoi du signal par l'extra-terrestre et sa réception de notre réponse, il n'existe pas de moment particulier sur Andromède qui corresponde à cet "aujourd'hui" sur la Terre.

Tout cela pour dire que nous ne devons pas penser au temps comme s'il existait une horloge cosmique rythmant la vie de l'univers. Nous devons y penser comme à quelque chose de local : chaque objet dans l'univers possède son propre temps. La façon dont les temps de chacun s'articulent lorsque des objets se

rencontrent ou échangent des signaux peut être décrite précisément. Mais pour le faire, dans la description mathématique du monde, on ne parle pas de “temps” et d”’espace”, mais d’une union des deux appelée “espace-temps”.

(p. 106) Quand un scientifique formule une idée, il tend généralement à croire qu’elle est correcte. Si personne d’autre n’approuve, il continuera souvent à croire qu’il a raison et que les autres ont tort... mais il aura quelques doutes. S’il découvre que quelqu’un d’autre a trouvé la même idée indépendamment de lui, la tentation de croire que “nous” avons raison et que les autres “ne comprennent rien” devient irrésistible...

Ci-dessous Un extrait de la biographie "Poincaré : philosophe et mathématicien" d'Umberto Bottazzini aux éditions Belin Pour la Science.

Au sujet du raisonnement par récurrence : le terrain le plus naturel et le plus favorable pour cette étude est l'arithmétique élémentaire, c'est à dire les opérations mettant en jeu des nombres entiers. Quand nous analysons des opérations telles que l'addition et la multiplication, nous nous rendons compte qu'un type de raisonnement se "retrouve à chaque pas", c'est la démonstration "par récurrence" : "on établit d'abord un théorème pour n égal à 1 ; on montre ensuite que, s'il est vrai de $n-1$, il est vrai de n, et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers." C'est là le "raisonnement mathématique par excellence", déclare Poincaré. Sa particularité est "qu'il contient, sous une forme condensée, une infinité de syllogismes", et qu'il permet de passer du particulier au général, du fini à l'infini, concept qui apparaît dès les premiers pas de l'arithmétique élémentaire et sans lequel "il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général", mais uniquement des énoncés particuliers. D'où nous vient ce "raisonnement pas récurrence", s'interroge Poincaré ? Certainement pas de l'expérience. Celle-ci peut nous suggérer que la règle est vraie pour les dix ou les cent premiers nombres, mais elle est désarmée face à l'infinité de tous les nombres naturels. Le principe de contradiction (on dirait aujourd'hui le raisonnement par l'absurde) est aussi impuissant : il nous permet d'obtenir certaines vérités, mais non d'en enfermer une infinité en une seule formule. "Cette règle (le raisonnement par récurrence), inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique a priori, conclut Poincaré". L"'irrésistible évidence" avec laquelle ce "principe" s'impose n'est autre que "l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible"...

Deux citations d'Euler, dans "Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs" :

"Cette règle, que je vais expliquer, est à mon avis d'autant plus importante qu'elle appartient à ce genre dont nous pouvons nous assurer de la vérité, sans en donner une démonstration parfaite." Et plus loin, "Ces choses remarquées, il ne sera pas difficile de faire l'application de cette formule à chaque nombre proposé et de se convaincre de sa vérité, par autant d'exemples qu'on voudra développer. Et comme je dois avouer que je ne suis pas en état d'en donner une démonstration rigoureuse, j'en ferai voir sa justesse par un assez grand nombre d'exemples.".

Hardy écrit quant à lui dans son autobiographie Apologie d'un mathématicien :

"Je pense que la réalité mathématique existe en dehors de nous, que notre fonction est de la découvrir ou de l'observer et que les théorèmes que nous démontrons et que nous décrivons avec grandiloquence comme nos créations sont simplement les notes de nos observations."

Ci-dessous, quelques extraits de Mathématiques en liberté, de Pierre Cartier, Jean Dhombres, Gerhard Heinzmann et Cédric Villani (DV, 11/4/2014)

(p.26 Pierre Cartier) En exagérant un peu, on pourrait presque définir les mathématiques de cette tradition grecque comme une science dans laquelle on peut se débarrasser du maître. Je veux dire que l'objet des mathématiques, c'est de pouvoir faire seul. La fameuse expression de Cantor : "l'essence des mathématiques, c'est la liberté" est tout à fait pertinente en ce sens que faire des mathématiques, c'est se les approprier, sans pour autant déposséder qui que ce soit.

(p.28 Cédric Villani) C'est l'une des caractéristiques des mathématiques, le fait de se donner une base très resserrée au départ, en ayant en même temps pour ambition de décrire une grande variété de phénomènes.

(p.37 Dominique Lambert) On croit Galilée quand il note que "le grand livre de la nature est écrit en caractères mathématiques" parce que son approche est efficace.

(p.39 Dominique Lambert) Or que font les mathématiciens sinon définir des ensembles d'objets sur lesquels on réalise des opérations où l'on recherche des invariants ?

(p.41 Cédric Villani) La complexité qui nous entoure est complètement affolante si on essaie de se la représenter. [...]
Pour y parvenir, on va simplifier toutes les lignes, tous les chemins, que l'on va remplacer par une droite, une sorte de représentation extrêmement simple ; pour des formes un peu plus complexes, on a le triangle... Et petit à petit, on s'approche de la complexité du monde qui nous entoure, en essayant de se reposer sur un ensemble d'axiomes simples, de règles simples, de règles logiques qui nous permettent de nous y retrouver un peu, de mettre un peu d'ordre dans un monde qui est complètement brutal tant il est indéchiffrable.[...]
On fait une théorie, on observe si ça décrit bien, on change son point de vue et ainsi de suite.

(p.45 Jean Dhombres) Galilée a éliminé tout le "bruit" autour du phénomène. Les mathématiques jouent avec le réel, par la volonté à la fois de pouvoir décrire au plus simple et de pouvoir agir, à la façon d'une expérimentation.

(p.48 Gerhard Heinzmann) Le mathématicien est un homme qui crée un langage qu'il comprend.

(p.62 Jean Dhombres) Fourier ne voulut pas effacer l'étape de calcul, car c'eut été [...] empêcher de comprendre ce que Karl Popper appelle la "logique de la découverte".

(p.69 Henri Poincaré) Ce que nous demandons au mathématicien, c'est de nous aider à voir.

(p.107 Pierre Cartier) André Weyl a aussi prôné l'idée de considérer Gauss ou Euler comme nos contemporains, comme nos collègues de l'autre côté du couloir. Autrement dit, il faut fréquenter les classiques.

(p.121 Pierre Cartier) Ma force, c'était ma conviction que les mathématiques modernes, en particulier l'algèbre, fourniraient des outils nouveaux.

(p.146 Cédric Villani) A mon niveau, le travail de synthèse de ce qu'ont fait les autres influence beaucoup ma production personnelle.

Annexe 1 : Articles 75 à 78 des Recherches arithmétiques de Carl-Friedrich Gauss

75. Avant d'abandonner ce sujet, nous présenterons quelques propositions qui ne nous paraissent pas indignes d'attention, à cause de leur simplicité.
Le produit de tous les termes de la période d'un nombre quelconque est $\equiv 1$ *quand leur nombre ou l'exposant auquel appartient le nombre dont il s'agit est impair, et* $\equiv -1$ *quand il est pair.*
Par exemple, pour le module 13, la période de 5 est composée des termes $1, 5, 12, 8$ dont le produit $480 \equiv -1$ $(mod\ 13)$, suivant le même module, la période de 3 est composée des termes $1, 3, 9$, dont le produit $27 \equiv 1$ $(mod\ 13)$.
Soit t l'exposant auquel le nombre appartient ; on peut toujours trouver (n°71) une base pour laquelle l'indice du nombre soit $\frac{p-1}{t}$. Or l'indice du produit de tous les termes sera

$$(1 + 2 + 3 + etc. + t - 1)\frac{p-1}{t} = \frac{(t-1)(p-1)}{2};$$

donc il sera $\equiv 0$ $(mod\ p-1)$, quand t est impair et $\equiv \frac{p-1}{2}$ quand t est pair. Dans le premier cas, le produit est $\equiv 1$ $(mod\ p)$; dans le second, $\equiv -1$ $(mod\ p)$.

76. Si le produit du théorème précédent est une racine primitive, sa période comprendra tous les nombres $1, 2, 3, 4, \ldots p-1$, dont le produit sera par conséquent toujours $\equiv -1$; car $p-1$ est toujours pair, excepté dans le cas où $p = 2$, et alors on a indifféremment $+1$ ou -1. Ce théorème élégant qu'on énonce ordinairement de cette manière : *Le produit de tous les nombres plus petits qu'un nombre premier étant augmenté de l'unité, est divisible par ce nombre premier,* a été publié par *Waring* qui l'attribue à *Wilson* (*Meditationes Algeb. Ed. 3, p. 380*) ; mais aucun des deux n'a pu le démontrer, et *Waring* avoue que la démonstration lui en semble d'autant plus difficile qu'il n'y a point de *notation* par laquelle on puisse exprimer un nombre premier ; pour nous, nous pensons que la démonstration de cette sorte de vérités doit être puisé dans les principes plutôt que dans la notation. *Lagrange* en a depuis donné une démonstration (*Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin, 1771)*, dans laquelle il s'appuie sur la considération des coefficients que l'on trouve en développant le produit

$$(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+p-1):$$

et il fait voir qu'en supposant ce produit

$$= x^{p-1} + Ax^{p-2} + Bx^{p-3} + etc. + Mx + N,$$

les coefficients A, B, etc. M sont divisibles par p ; or

$$N = 1.2.3\ldots p-1$$

Maintenant si $x = 1$, le produit est divisible par p, mais alors il sera $\equiv 1 + N$ $(mod\ p)$ donc $1 + N$ est divisible par p.
Enfin Euler *(Opusc. analyt. T.1, p.329)* en a donné une démonstration qui rentre dans celle que nous venons d'exposer ; ainsi puisque de tels hommes n'ont

pas cru ce sujet indigne de leurs méditations, nous espérons qu'on ne nous désapprouvera pas d'offrir encore ici une autre manière de démontrer ce théorème.

77. Nous dirons que deux nombres sont *associés*, comme l'a fait *Euler*, lorsque leur produit sera congru à l'unité. Cela posé, par la section précédente, tout nombre positif moindre que p, aura toujours un nombre associé moindre que p et il n'en aura qu'un ; or il est facile de prouver que parmi les nombres $1, 2, 3, -1$, il n'y a que 1 et $p-1$ qui soient eux-mêmes leurs associés, car ceux qui jouiront de cette propriété seront donnés par la congruence $x^2 \equiv 1$ qui ne peut avoir que 2 racines 1 et $p-1$. Supprimant donc ces deux nombres, les autres $2, 3, 4 \ldots p-2$, seront associés deux à deux, donc leur produit sera $\equiv 1$; enfin multipliant par $p-1$, le produit de tous $1.2.3.4 \ldots p-1 \equiv p-1 \equiv -1$.
Par exemple, pour $p = 13$, les nombres $2, 3, 4, 5, \ldots 11$ s'associent de la manière suivante : 2 avec 7, 3 avec 9, 4 avec 10, 5 avec 8, 6 avec 11 ; donc $2.3.4 \ldots 11 \equiv 1$, et partant..... $1.2.3 \ldots 12 \equiv 12 \equiv -1$.

78. Le théorème de *Wilson* peut être rendu plus général en l'énonçant comme il suit : *Le produit de tous les nombres premiers avec un nombre donné A et moindres que ce nombre, est congru suivant A, à l'unité prise positivement ou négativement.* L'unité doit être prise négativement quand A est de la forme p^m ou $2p^m$, p étant un nombre premier différent de 2, ou encore quand $A = 4$; et positivement dans tous les autres cas. Le théorème de Wilson est contenu dans le premier cas. *Exemple.* Pour $A = 15$, le produit des nombres $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ est $\equiv 1$ (*mod* 15). Nous supprimons, pour abréger, la démonstration. Nous observerons seulement qu'on peut y parvenir comme dans l'article précédent, excepté que la congruence $x^2 \equiv 1$ peut avoir plus de 2 racines, ce qui demande certaines considérations particulières. On pourrait aussi la tirer de la considération des indices, comme dans le n°75, si l'on y joint ce que nous dirons tout à l'heure des modules composés.

Annexe 2 : Article 41 des Recherches arithmétiques de Carl-Friedrich Gauss

Dans l'article 41 des Recherches arithmétiques de Gauss, on retrouve la notion de permutations et on pense aux travaux de Galois à venir.

41. *Si p est un nombre premier, et qu'on ait p choses parmi lesquelles il peut s'en trouver un certain nombre d'égales entre elles, pourvu que toutes ne le soient pas : le nombre des permutations de ces choses sera divisible par p.*

Par exemple, cinq choses A, A, A, B, B peuvent se disposer de dix manières différentes.

La démonstration de ce théorème se déduit facilement de la théorie connue des permutations. En effet, supposons que parmi ces p choses, il y en ait a égales à A, b égales à B, c égales à C etc., de sorte qu'on ait $a + b + c + etc = p$, les nombres a, b, c,etc. pouvant aussi désigner l'unité. Le nombre de permutations sera $= \dfrac{1.2.3 \ldots p}{1.2 \ldots a.1.2 \ldots b.1.2 \ldots c.etc.}$; or le numérateur est évidemment divisible

par le dénominateur, puisque le nombre des permutations est entier ; mais il est divisible par p, tandis que le dénominateur, qui est composé de facteurs plus petits que p, n'est pas divisible par p (n°15) ; donc le nombre des permutations sera divisible par p.

Nous espérons cependant que la démonstration suivante ne déplaira pas à quelques lecteurs.

Lorsque dans deux permutations l'ordre des choses ne différera qu'en ce que celle qui tient la première place dans l'une, en occupe une différente dans l'autre, mais que du reste toutes les autres choses, à partir de celle-là, suivent le même ordre dans chacune des permutations, de manière que la dernière de l'une se trouve placée immédiatement avant la première, dans l'autre ; nous les appellerons permutations semblables[3]. Ainsi $ABCDE$ et $DEABC$, $ABAAB$ et $ABABA$ seront semblables.

Or comme chaque permutation est composée de p choses, il est clair qu'on pourra en trouver $p-1$ semblables à une quelconque d'entre elles, si l'on met successivement à la seconde, à la troisième place, etc., la chose qui occupait la première ; donc si aucunes de ces permutations semblables ne sont identiques, il est évident que le nombre total des permutations sera égal à p fois le nombre des permutations dissemblables, et conséquemment sera divisible par p. Supposons que deux permutations semblables $PQ\ldots TV\ldots, V\ldots YZPQ\ldots T$ puissent être identiques, et que P qui occupe la première place dans la première, occupe la $n+1^{ième}$ dans la seconde : on aura dans la dernière série le $n+1^{ième}$ terme égal au 1er, le $n+2^{ième}$ égal au 2ième, etc., d'où résulte que le $2n+1^{ième}$ est encore égal au premier et par conséquent le $3n+1^{ième}$, et généralement le $kn+m^{ième}$ égal au $m^{ième}$ (où quand $kn=m>p$, il faut imaginer qu'on reprenne toujours par le commencement, la série $V\ldots T$, à moins qu'on ne retranche de $kn+m$, le multiple de p, qui en approche le plus en moins). Cela posé, si on détermine k de manière que $kn \equiv 1\ (mod\ p)$, ce qui peut toujours se faire, puisque p est premier, il suivra de là que généralement le $m^{ième}$ terme serait égal au $m+1^{ième}$, c'est à dire qu'un terme quelconque serait égal au suivant, ou que tous les termes seraient égaux entre eux, ce qui est contre l'hypothèse.

[3]Si l'on écrivait en cercle les permutations semblables, de manière que la dernière chose touchât la première, il n'y aurait aucune différence entre elles, parce qu'aucune place ne peut s'appeler la première ni la dernière.

INTRODUCTION

Les manuscrits de Galois ont été remis à Joseph Liouville par Auguste Chevalier : Liouville a légué sa bibliothèque et ses papiers à l'un de ses gendres, M. de Blignières [1]. Mme de Blignières s'occupe pieusement de classer les innombrables papiers de son mari et de son illustre père. Elle a recherché et su retrouver (non sans peine) les manuscrits de Galois : ceux-ci, ainsi que d'autres papiers importants, seront donnés à l'Académie des Sciences : Mme de Blignières a bien voulu, en attendant, m'autoriser à examiner les manuscrits de Galois et à en publier des extraits : je lui exprime ici ma profonde reconnaissance.

Je dois aussi des remercîments à M. Paul Dupuy, dont tous les géomètres connaissent la belle Notice sur la vie d'Évariste Galois, publiée dans les *Annales scientifiques de l'École Normale* [2]. M. Dupuy a bien voulu procéder à un premier classement des manuscrits qui m'avaient été remis et en séparer ceux qui appartiennent incontestablement à Galois, dont il connaît bien l'écriture.

Les lignes qui suivront, les quelques fragments ou notes que je pourrai publier n'ajouteront rien à la gloire de Galois : elles ne sont qu'un hommage rendu à cette gloire dont l'éclat n'a fait que grandir depuis la publication de Liouville.

Cette publication a été faite de la façon la plus judicieuse ; mais, soixante ans plus tard, on est tenu à moins de réserve. Les mathématiciens s'intéresseront toujours à Galois, à l'homme et à ses écrits : il est de ceux dont on voudrait tout savoir.

Je m'occuperai tout d'abord des œuvres posthumes et des papiers qui s'y rapportent. Pour la plupart de ces papiers, on possède la copie de Chevalier ; d'ailleurs l'écriture de Galois est, d'ordinaire, parfaitement lisible et même assez élégante ; mais elle est parfois abrégée, hâtive ; les ratures et les surcharges abondent ; j'aurai à signaler quelques mots et quelques phrases illisibles.

L'importance de l'œuvre de Galois sera mon excuse pour la minutie de certains détails, où j'ai cru devoir entrer, et qui va jusqu'au relevé de fautes d'impression, dont le lecteur attentif ne peut manquer de s'apercevoir. Je ne me dissimule pas ce que cette minutie, en elle-même, a de puéril.

Les œuvres posthumes occupent les pages 408-444 du Tome XI (1846) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* et les pages 25-61 des *Œuvres mathématiques d'Évariste Galois publiées sous les auspices de la Société mathématique de France* [3]. C'est, sauf avis contraire, à ce dernier Ouvrage que se rapportent tous les renvois.

Lettre à Auguste Chevalier

(pages : 25-32).

Dimensions du papier : 31×20. La lettre, datée deux fois, au commencement et à la fin (29 mai 1832), contient sept pages : le bas de la septième, au-dessous de la signature, a été coupé sur une longueur d'environ 8^{cm}.

Le verso de la dernière page contient le brouillon de deux lettres, d'ailleurs biffées, dont l'une porte une date, biffée aussi ; on lit 14 mai 83 ; il est vraisemblable que Galois a écrit sa lettre à Chevalier sur la première feuille venue, une feuille sur laquelle il avait griffonné une quinzaine de jours auparavant.

Ces brouillons sont disposés d'une façon assez singulière : ils comportent des phrases entières, puis des lignes, blanches au milieu avec un mot au commencement et un mot à la fin : ces mots sont souvent illisibles, tant parce qu'il est impossible de leur attribuer un sens que par suite des ratures : celles-ci vont de haut en bas ; il en est ainsi dans plusieurs des manuscrits de Galois ; ici, elles semblent faites avec une barbe de plume, ou un bout de bois, qu'il aurait trempé dans l'encre ; le premier brouillon de lettre est à gauche, le second à droite et se continue dans une autre direction ; Galois a fait tourner son papier d'un angle droit. Voici ce que j'ai pu lire :

brisons là sur cette affaire je vous prie
Je n'ai pas assez d'esprit pour suivre
une conversation de ce genre
mais je tâcherai d'en avoir assez pour
converser avec vous comme je le faisais
avant que rien soit arrivé. Voilà
Mr le *(illis.)*
en a qui
doit vous qu'à
moi et ne plus penser à des choses
qui ne (*illis.*) exister et qui
n'existeront jamais

14 mai 83

J'ai suivi votre conseil et j'ai réfléchi
à qui s'est
passé sous quelque
dénomination que ce puisse [4] être *(illis.)* par s'établir
entre nous. Au reste Mr soyez (?)
persuadé qu'il n'en aurait sans doute

jamais été davantage ; vous supposez
mal et vos regrets sont mal fondés.
La vraie amitié n'existe guère
qu'entre des personnes de même sexe
Surtout des
amis. Sans doute
le vide qu l'absence
de tout sentiment de ce genre....
(illis.) confiance... mais elle a été
très *(illis.)* [5] ..... vous m'avez
vu triste z demandé
le motif ; je vous ai répondu que
j'avais des peines ; qu'on m'avait fait
éprouver. J'ai pensé que vous prendriez
celà comme toute personne devant
laquelle on laisse tomber une parole
pour *(illis.)* on n'est
pas
le calme de mes idées me laisse
la liberté de juger avec beaucoup
de réflexion les personnes que je vois
habituellement ; c'est ce qui fait que
j'ai rarement le regret de m'être
trompé ou laissé influencer à leur égard.
Je ne suis pas de votre avis pour
les *(illis.)* plus que
les (?) exiger
ni se vous remercie
sincèrement de tous ceux ou vous
voudrez bien descendre en ma
faveur.

J'ai collationné le manuscrit avec le texte imprimé : il n'est guère utile de parler de quelques changements de notation, sans aucune importance, qui remontent à Liouville, de dire que Galois a écrit bulletin ferussac et non Bulletin de Férussac, ou encore de signaler, page 29 des Œuvres, ligne 24, la substitution du mot "équation" au mot "réduction" que le sens indique suffisamment et qu'on lit dans le manuscrit et

dans le texte de Liouville. Le point le plus intéressant est que le théorème de Legendre (page 30, ligne 31),

$$\mathrm{FE}' + \mathrm{EF}' - \mathrm{FF}' = \frac{\pi}{2}$$

est écrit par Galois non sous la forme qui précède, mais comme il suit :

$$\mathrm{E}'\mathrm{F}'' - \mathrm{E}''\mathrm{F}' = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$$

Mémoire sur les conditions de résolubilité par radicaux

(pages 33-50) [6].

Dans les quelques lignes d'introduction au Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux que Galois avait biffées (d'ailleurs très légèrement) et que Chevalier a conservées avec raison, Galois dit que le Mémoire est extrait d'un Ouvrage qu'il a présenté à l'Académie il y a un an. Le manuscrit de Galois n'est pas un extrait, c'est le texte même qui a été remis à l'Académie. Qu'il en soit ainsi, c'est ce que Chevalier avait signalé dans une note (page 33 des Œuvres, note 2) ainsi conçue :

> J'ai jugé convenable de placer en tête de ce Mémoire la préface qu'on va lire, bien que je l'aie trouvée biffée dans le manuscrit. Ce manuscrit est précisément celui que l'auteur présenta à l'Académie.

La dernière phrase de cette note, qui figure dans la copie de Chevalier et sur l'épreuve dont j'ai parlé, a disparu du texte définitif. Liouville a-t-il voulu effacer la légère contradiction entre le texte et la note, a-t-il cru devoir se conformer au désir de Galois, qui semble avoir souhaité qu'on ignorât que ce Mémoire était celui-là même qu'il avait présenté à l'Académie ; a-t-il jugé lui-même que, pour des raisons de convenance envers l'Académie, cette ignorance était préférable ? C'est là, en vérité, des questions dont la réponse importe bien peu, non plus que la petite inexactitude du mot extrait. Il importe beaucoup plus que le texte du Mémoire de Galois ne se soit pas égaré, comme le précédent, et qu'il ait pu être remis à l'auteur, qui y a fait plusieurs remaniements : ceux-ci, le plus souvent, peuvent se distinguer par l'écriture. La conjecture de Chevalier, à savoir que "Galois a relu son Mémoire pour le corriger avant d'aller sur le terrain" (note de la page 40), est tout à fait vraisemblable.

La première page de la couverture, qui subsiste, est fort sale, tachée d'encre, couverte de gribouillages, de bouts de calcul, à l'encre ou au crayon, au recto et au verso, dans tous les sens ; quelques-unes des formules laissent supposer que Galois, en les traçant, pensait à quelque point de la théorie des fonctions elliptiques ; d'autres se rapportent à une suite récurrente.

En haut et à droite du recto on lit (écriture de Liouville) "Rapport du 4 juillet 1831" ; puis, en titre, d'une écriture qu'il serait probablement possible d'identifier :

MM. Lacroix

Poisson

commissaires

le 17 j^{er} 1831

le tout suivi d'un paraphe ; en face du nom de Poisson, il y a le mot *vu*, d'une grosse écriture, celle de Poisson sans doute.

Au verso, entre des taches et des calculs, Galois a écrit

> Oh ! chérubins.

On peut bien supposer que cette apostrophe s'adresse à MM. Lacroix et Poisson.

Le manuscrit contient onze pages (38×25) ; la marge occupe la moitié de chaque page ; elle contient plusieurs notes et additions, dont les unes remontent peut-être à la première rédaction, dont les autres ont été sans doute ajoutées par Galois, lorsqu'il a revu son travail pour la dernière fois telle est assurément celle qu'a signalée Chevalier, le tragique "je n'ai pas le temps".

En marge de la seconde page, on trouve ces quatre noms :

V. Delaunay,
N. Lebon,
F. Gervais,
A. Chevalier

et une liste de onze noms, soigneusement biffés.

Je dois, en passant, signaler, page 34 des *Œuvres*, l'omission de deux lignes, qui figurent dans le manuscrit et dans le texte de Liouville ; elles devraient terminer l'avant-dernier alinéa :

..., en général par quantité rationnelle une quantité qui s'exprime en fonction rationnelle des coefficients de la proposée.

Dans la marge de la troisième page du manuscrit, en face du lemme III (page 36), se trouve la note an crayon que voici :

La démonstration de ce lemme n'est pas suffisante ; mais il est vrai, d'après le n° 100 du Mémoire de Lagrange, Berlin, 1775.

Au-dessous, Galois a écrit :

Nous avons transcrit textuellement la démonstration que nous avons donnée de ce lemme dans un Mémoire présenté en 1830. Nous y joignons comme document historique la note suivante qu'a cru devoir y apposer M. Poisson.

On jugera.

Puis, plus bas :

Note de l'auteur.

Galois voulait évidemment que la note de Poisson [7] et son propre commentaire fussent publiés. Au surplus, les notes de Poisson et de Galois figurent dans la copie de Chevalier et dans l'épreuve. Liouville les a supprimées finalement, pour des raisons évidentes.

La note de la page 37 des *Œuvres* est en face du lemme IV et semble d'une encre différente de celle du texte; mais il ne me paraît nullement certain que ce soit une addition de la dernière heure : je crois que Galois a dû, à cette dernière heure, remanier et développer hâtivement la démonstration de ce lemme IV ; elle ne comportait probablement, dans le texte primitif, que quatre ou cinq lignes ; elle est maintenant écrite, partie dans la marge, partie dans le blanc qui restait au bas de la page, d'une écriture serrée, nerveuse : au reste, un mot injurieux, biffé, et qui est de la même encre que le "chérubins" de la couverture ne laisse guère de doute sur l'impatience que ce passage a fait éprouver à l'auteur.

La note de la page 38 des *Œuvres* est en marge, en face de la proposition I. À la suite de cette note, avec l'indication "à reporter dans les définitions", se trouve ce qui est imprimé pages 35 et 36, à partir de la ligne 22 (Les substitutions sont) jusqu'à la ligne 3 (la substitution ST) ; ce passage est en face du texte imprimé du milieu de la page 38 au milieu de la page 39.

En marge de la page suivante (cinquième) du manuscrit, le scholie II [8] (page 40) est immédiatement précédé de ces indications, qui sont biffées :

Ce qui caractérise un groupe. On peut partir d'une des permutations quelconques du groupe.

Vraisemblablement, c'est après avoir écrit et biffé ces lignes que Galois s'est décidé à écrire le passage "à reporter dans les définitions". Un peu plus bas est la note "je n'ai pas le temps", puis cinq lignes biffées, mais qui sont d'une écriture calme et remontent peut-être à la première rédaction, les voici :

Car si l'on élimine $f(V, r) = 0$ et $F(r) = 0, F(r)$ étant du degré premier p, il ne peut arriver que de deux choses l'une : ou le résultat de l'élimination sera de même degré en V que $f(V, r)$ ou il sera d'un degré p fois plus grand.

Ce passage biffé doit évidemment être rapproché des indications données dans le premier alinéa de la note de la page 40. Ces indications sont de Liouville ; la note de Chevalier était ainsi conçue :

Vis-à-vis la démonstration de ce théorème, dans le manuscrit j'ai trouvé ceci

"Il y a quelque chose..."

C'est ainsi qu'elle figure dans l'épreuve. Les six premières lignes de la note de la page 40 sont donc de Liouville.

Au reste, Liouville a été visiblement préoccupé de cet endroit (proposition II) du texte de Galois : il a jugé un moment convenable de reprendre l'hypothèse primitive de Galois (p premier) et d'éclaircir

complètement la démonstration dans ce cas, par une note que je crois devoir transcrire, non pas qu'elle puisse apprendre quelque chose au lecteur, mais parce qu'elle me semble une trace touchante des soins et des scrupules que Liouville apportait dans sa publication ; le renvoi correspondrait à la ligne 20 de la page 40 des *Œuvres* :

Ceci mérite d'être expliqué avec quelque détail.

Désignons par, $\psi(V) = 0$ l'équation dont l'auteur parle, et soient $f(V,r), f_1(V,r), \ldots, f_{i-1}(V,r)$ les facteurs irréductibles dans lesquels, $\psi(V)$ devient décomposable par l'adjonction de r, en sorte que,

$$\psi(V) = f(V,r)f_1(V,r)\ldots f_{i-1}(V,r).$$

Comme r est racine d'une équation irréductible, on pourra dans le second membre remplacer r par $r', r'', \ldots, r^{\mu-1}$. Ainsi $\psi(V)^\mu$ est le produit des i quantités suivantes

$$\begin{array}{cc} f(V,r) & f(V,r')\ldots f(V,r^{(\mu-1)}) \\ f_1(V,r) & f_1(V,r')\ldots f_1(V,r^{(\mu-1)}) \\ f_{i-1}(V,r) & f_{i-1}(V,r')\ldots f_{i-1}(V,r^{(\mu-1)}) \end{array},$$

dont chacune, symétrique en $r, r', \ldots, r^{(p-1)}$ et par suite exprimable en fonction rationnelle de V indépendamment de toute adjonction, doit diviser $\psi(V)^\mu$ et se réduire en conséquence a une simple puissance du polynôme $\psi(V)$ qui cesse de se résoudre en facteurs lorsqu'on n'adjoint pas les auxiliaires r, r', etc. J'ajoute que le degré de la puissance est le même pour toutes. En effet, les équations $f(V,r') = 0, \quad f_1(V,r) = 0, \ldots, f_{i-1}(V,r) = 0$ qui dérivent de $\psi(V) = 0$ et dont les racines sont fonctions rationnelles les unes des autres ne peuvent manquer d'être du même degré. En faisant donc

$$f(V,r)f(V,r')\ldots f(V,r^{(p-1)}) = \psi(V)^\mu,$$

on en conclura $p = i\mu$. Mais p est premier et $i > 1$; donc on a $i = p$, d'où $\mu = t$, et enfin

$$\psi(V) = f(V,r)f(V,r')\ldots f(V,r^{(p-1)}).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

J. Liouville.

Assurément, en rédigeant cette note, Liouville se conformait au précepte d'être "transcendantalement clair" qu'il a rappelé dans l'avertissement aux Œuvres mathématiques de Galois. Il s'est aperçu ensuite en réfléchissant davantage, que la proposition II n'impliquait pas que le nombre p fût premier et il a soigneusement noté les différences essentielles entre les deux rédactions successives de l'auteur. Qu'il ait reculé devant les explications nécessaires pour donner à la pensée de Galois toute la clarté qu'il faudrait, cela, aujourd'hui, n'a aucun inconvénient.

Page 41 des Œuvres, les lettres μ, ν remplacent les lettres p, n dont s'est servi Galois ; pareil changement a été fait dans la lettre à Chevalier ; ces petites modifications, destinées à éviter des confusions possibles, sont de Liouville : les lettres p, n figurent encore dans l'épreuve.

Les lignes 7, 8, 9 de la même page sont une addition marginale, mais qui ne semble pas de la dernière heure. Cette addition est suivie de la nouvelle rédaction de la proposition III, datée de 1832, sur laquelle l'attention est appelée dans la note qui est au bas de la page qui nous occupe. Ici encore, Liouville est intervenu ; la note de Chevalier était ainsi conçue.

Dans le manuscrit de Galois l'énoncé du théorème qu'on vient de lire se trouve en marge et vis-à-vis de la démonstration qu'il en avait écrite d'abord. Celle-ci est effacée avec soin ; l'énoncé précédent porte la date 1832 et montre par la manière dont il est écrit que l'auteur était extrêmement pressé : ce qui confirme l'assertion que j'ai avancée dans la note précédente.

C'est donc Liouville qui a déchiffré et intercalé le texte primitif de la proposition III.

La phrase (il suffit ... substitutions), placée entre parenthèses au bas de la page 43 des *Œuvres* et en haut de la page 44, est une note marginale.

Page 46, ligne 24, Galois a simplement écrit *"Journal de l'École, XVII"*.

Il y a dans les manuscrits de Galois une feuille (double) qui est une sorte de brouillon de la proposition V ; ce brouillon a passé en grande partie dans la rédaction du Mémoire [9].

Avant de parler du manuscrit contenant le fragment imprimé dans les dernières pages des *Œuvres*, je dois dire un mot d'une feuille détachée [10] en partie déchirée, qui, par le format du papier, la couleur de l'encre et la forme de l'écriture, paraît avoir appartenu au cahier dont ce manuscrit faisait partie. Elle contient une rédaction antérieure de la proposition I et de sa démonstration, rédaction qui semble avoir été écrite au moment même où Galois venait de trouver cette démonstration : l'énoncé de la proposition fondamentale est, presque textuellement, le même que dans le Mémoire sur des conditions de résolubilité, puis viennent seize lignes barrées que je reproduis :

Considérons d'abord un cas particulier. Supposons que l'équation donnée n'ait aucun diviseur rationnel et que toutes ses racines se déduisent rationnellement de l'une quelconque d'entre elles. La proposition sera facile à démontrer.

En effet, dans notre hypothèse, toute fonction des racines s'exprimera en fonction d'une seule racine et sera de la forme $\phi x, x$ étant une racine. Soient

$$x \quad x_1 = f_1 x \quad x_2 = f_2 x \ldots x_{m-1} = f_{m-1} x$$

les m racines. Écrivons les m permutations

$$\begin{array}{cccc} x & f_1 x & f_2 x \ldots f_{m-1} x \\ x_1 & f_1 x_1 & f_2 x_1 \ldots f_{m-1} x_1 \\ x_2 & f_1 x_2 & f_2 x_2 \ldots f_{m-1} x_2 \\ & \text{— — — — —} & \\ x_{m-1} & f_1 x_{m-1} & f_2 x_{m-1} \ldots f_{m-1} x_{m-1} \end{array}$$

Le reste de la démonstration suivait, contenu dans une douzaine de lignes qui sont devenues les lignes 13-26 de la page 39 des *Œuvres* : on distingue assez bien les x surcharges des V de la rédaction définitive ; ces douze lignes sont d'ailleurs réunies en marge par un trait, avec l'indication : *à reporter plus loin.* Galois a changé d'idée ; il trouve *maintenant* inutile de s'arrêter au cas particulier ; mais il semble que ce cas particulier lui ait été d'abord nécessaire, car les douze lignes que je viens de dire sont suivies de celles-ci :

Le théorème est donc démontré dans l'hypothèse particulière que nous avons établie.

Revenons au cas général.

Ces trois lignes sont biffées avec un soin particulier, Galois est en possession de la démonstration générale, sous la forme simple et définitive ; il est joyeux ; il couvre de hachures les seize lignes puis les trois lignes dont il n'a plus besoin. Vient ensuite la vraie démonstration, les deux dernières lignes de la page 38 des *Œuvres* et le commencement de la page 39, jusqu'à : "je dis que ce groupe de permutations jouit de la propriété énoncée". Puis l'indication, en marge, à demi déchirée : *mettre ici la partie sautée*, et les lignes 24, 25 de la page 39 des *Œuvres*.

Ne semble-t-il pas qu'on assiste à un moment essentiel dans le développement de la pensée de Galois ? L'émotion s'accroît encore à la lecture des lignes du bas de la feuille, couvertes de ratures et de surcharges, et où le nom propre a disparu dans un trou, produit d'une tache et de l'usure :

Je dois observer que j'avais d'abord démontré le théorème autrement, sans penser à me servir de cette propriété très simple des équations, propriété que je regardais comme une conséquence du théorème. C'est la lecture d'un Mémoire
qui m'a suggéré

La fin de la ligne est indéchiffrable : après *suggéré*, il y a des mots, l'un au-dessus de l'autre, qui sont biffés, peut-être *cette* surmonté de *la pensée*, puis, dans la partie la plus usée du papier, *assertion* ou *analyse*, ou autre chose, et enfin, plus bas, je crois lire *que je dois.* Quant au nom propre, les quelques traits qui subsistent, à côté du trou, ne confirment pas la supposition qui vient de suite à l'esprit (page 37, ligne 11), que ce nom est celui d'Abel.

Sur la marge de cette curieuse feuille, se trouvent encore quelques formules, à demi effacées, qui correspondent visiblement aux lemmes II et III.

---

1. Célestin de Blignières (1823-1905), ancien Élève de l'École Polytechnique, a été l'un des disciples directs d'Auguste Comte, l'un des plus distingués sans doute et vraiment capable, par l'étendue de son esprit et de son savoir, de comprendre pleinement la doctrine du maître. Mais l'indépendance de son caractère et l'originalité de son esprit l'ont empêché de s'enrôler dans l'un ou l'autre des partis du Positivisme. Il plaisantait parfois de son isolement et se

qualifiait de bligniériste : on lui doit une intéressante Exposition de la Philosophie et de la Religion positives (Paris, Chamerot, 1857).

Pendant neuf ans (1874-1883), un commerce de pensée, très actif, s'établit entre Liouville et M. de Blignières. De ce commerce, dont l'un et l'autre ont beaucoup joui, M. de Blignières a gardé jusqu'à sa mort un souvenir singulièrement vif et présent.

2. Tome XIII (1896) de la 3e série. Cette Notice a été reproduite, avec le portrait de Galois, dans les *Cahiers de la quinzaine* [2e cahier de la 5e série (1903)].
3. Paris, Gauthier-Villars, 1897.
4. La lecture des quatre premiers mots de cette ligne est douteuse.
5. Il y a une tache d'encre sur le mot ; on distingue nettement les deux dernières lettres *ée*.
6. J'ai eu à ma disposition le manuscrit de Galois, la copie de Chevalier et une épreuve, corrigée de la main de Liouville, mais ou ne figurent pas toutes les modifications apportées aux notes : j'aurai l'occasion de parler plusieurs fois de cette épreuve.
7. Grâce à l'obligeance de Mme de Blignières, j'ai pu comparer l'écriture de cette note avec celle de Poisson, dans une lettre à Liouville; aucun doute ne peut subsister.
8. Les numéros I, II des scholies (p. 39 et 40) ne sont pas dans le manuscrit.
9. Je ne pense pas qu'il y ait intérêt à publier ce brouillon.
10. C'est M. P. Dupuy qui a appelé mon attention sur cette feuille. Quelques autres débris apportent un peu de lueur sur la suite des idées de Galois : ils seront publiés dans un second article.

wikisource Manuscrits de Galois, édition Tannery 1908, Papiers inédits de Galois

Étant donnée une équation algébrique, à coefficients quelconques, numériques ou littéraux, reconnaître si ses racines peuvent s'exprimer en radicaux, telle est la question dont nous offrons une solution complète.

Si maintenant vous me donnez une équation que vous aurez choisie à votre gré et que vous désiriez connaître si elle est ou non soluble par radicaux, je n'aurai rien à y faire que de vous indiquer le moyen de répondre à votre question, sans vouloir charger ni moi ni personne de le faire. En un mot les calculs sont impraticables.

Il paraîtrait d'après cela qu'il n'y a aucun fruit à tirer de la solution que nous proposons.

En effet, il en serait ainsi si la question se présentait ordinairement sous ce point de vue. Mais, la plupart du temps, dans les applications de l'analyse algébrique, on est conduit à des équations dont on connaît d'avance toutes les propriétés : propriétés au moyen desquelles il sera toujours aisé de répondre à la question par les règles que nous exposerons. Il existe, en effet, pour ces sortes d'équations, un certain ordre de considérations métaphysiques qui planent sur tous les calculs, et qui souvent les rendent inutiles. Je citerai, par exemple, les équations qui donnent la division des fonctions elliptiques et que le célèbre Abel a résolues. Ce n'est certainement pas d'après leur forme numérique que ce géomètre y est parvenu. Tout ce qui fait la beauté et à la fois la difficulté de cette théorie, c'est qu'on a sans cesse à indiquer la marche des calculs et à prévoir les résultats sans jamais pouvoir les effectuer. Je citerai encore les équations modulaires.

| Première page.|

Deux Mémoires d'Analyse pure suivis d'une dissertation
sur la classification des problèmes par Évariste Galois.

| Deuxième page.|

Table des matières.

Mémoire sur les conditions pour qu'une équation soit soluble par radicaux.

Mémoire sur les fonctions de la forme $\int X dx$, X étant une fonction de x.

Dissertation sur la classification des problèmes de Mathématiques et sur la nature des quantités et des fonctions transcendantes.

| Troisième page ([1]).|

Ampère

Cauchy

Gauss

Hachette

Jacobi

Lacroix

Legendre

Poinsot

Poisson

Sturm

Vernier

Richard

Bulletin des Sciences

École normale

École Polytechnique

Institut. [24]

Abel paraît être l'auteur qui s'est le plus occupé de cette théorie. On sait qu'après avoir cru trouver la résolution des équations (générales) du cinquième degré ([2]), ce géomètre a démontré l'impossibilité de cette résolution. Mais, dans le mémoire allemand publié à cet effet, l'impossibilité en question n'est prouvée que par des raisonnements relatifs au degré des équations auxiliaires et à l'époque de cette publication, il est certain qu'Abel ignorait les circonstances particulières de la résolution par radicaux. Je n'ai donc parlé de ce mémoire qu'afin de déclarer qu'il n'a aucun rapport avec ma théorie.

[*Passage biffé* : Depuis, une lettre particulière adressée par Abel à M. Legendre annonçait qu'il avait eu le bonheur de découvrir une règle pour reconnaître si une équation est [ou était] résoluble par radicaux ; mais la mort anticipée de ce géomètre ayant privé la science de ses recherches, promises dans cette lettre, il n'en était pas moins nécessaire de donner une solution de ce problème qu'il m'est bien pénible de posséder, puisque je dois cette possession à une des plus grandes pertes qu'aura (?) faites la science.

Dans tous les cas, il me serait aisé de prouver que j'ignorais même le nom d'Abel, quand j'ai présenté à l'Institut mes premières recherches sur la théorie des équations et que la solution d'Abel n'aurait pu paraître avant la mienne.]

Deux Mémoires d'Analyse pure par E. Galois

Préface.

Cecy est un livre de bonne foy.
Montaigne.

Les calculs algébriques ont d'abord été peu nécessaires au progrès des Mathématiques, les théorèmes fort simples gagnaient à peine à être traduits dans la langue de l'analyse. Ce n'est guère que depuis Euler que cette langue plus brève est devenue indispensable à la nouvelle extension que ce grand géomètre a donnée à la Science. Depuis Euler les calculs sont devenus de plus en plus nécessaires et aussi ([3]) de plus en plus difficiles à mesure qu'ils s'appliquaient à des objets de science plus avancés. Dès le commencement de ce siècle, l'algorithme avait atteint un degré de complication tel que tout progrès était devenu impossible par ce moyen, sans l'élégance que les géomètres modernes ont d'imprimer à leurs recherches et au moyen de laquelle l'esprit saisit promptement et d'un seul coup un grand nombre d'opérations.

Il est évident que l'élégance si vantée et à si juste titre n'a pas d'autre but.

Du fait bien constaté que les efforts des géomètres les plus avancés ont pour objet l'élégance on peut donc conclure avec certitude qu'il devient de plus en plus nécessaire d'embrasser plusieurs opérations à la fois, parce que l'esprit n'a plus le temps de s'arrêter aux détails.

Or je crois que les simplifications produites par l'élégance des calculs (simplifications intellectuelles, s'entend ; de matérielles il n'y en a pas) ont leur limite ; je crois que le moment arrivera où les transformations algébriques prévues par les spéculations des analystes ne trouveront plus ni le temps ni la place de se reproduire ; à tel point qu'il faudra se contenter de les avoir prévues : je ne veux pas dire qu'il n'y a plus rien de nouveau pour l'analyse sans ce secours : mais je crois qu'un jour, sans cela, tout serait épuisé.

Sauter à pieds joints sur les calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est, suivant moi, la mission des géomètres futurs ; telle est la voie où je suis entré dans cet ouvrage.

Il ne faut pas confondre l'opinion que j'émets ici, avec l'affectation que certaines personnes ont d'éviter en apparence toute espèce de calcul, en traduisant par des phrases fort longues ce qui s'exprime très brièvement par l'algèbre, et ajoutant ainsi à la longueur des opérations, les longueurs d'un langage qui n'est pas fait pour les exprimer. Ces personnes sont en arrière de cent ans.

Ici rien de semblable ([4]) ; ici l'on fait l'analyse de l'analyse : ici les calculs les plus élevés [les fonctions elliptiques ([5])] exécutés jusqu'à présent sont considérés comme des cas particuliers, qu'il a été utile, indispensable de traiter, mais qu'il serait funeste de ne pas abandonner pour des recherches plus larges. Il sera temps d'effectuer des calculs prévus par cette haute analyse et classés suivant leurs difficultés, mais non spécifiés dans leur forme, quand la spécialité d'une question les réclamera.

La thèse générale que j'avance ne pourra être bien comprise que quand on lira attentivement mon ouvrage qui en est une application, non que le point de vue théorique ait précédé l'application ; mais je

me suis demandé, mon livre terminé, ce qui le rendait si étrange à la plupart des lecteurs, et rentrant en moi-même, j'ai cru observer celle tendance de mon esprit à éviter les calculs dans les sujets que je traitais, et qui plus est, j'ai reconnu une difficulté insurmontable à qui voudrait les effectuer généralement dans les matières que j'ai traitées.

On doit prévoir que, traitant des sujets aussi nouveaux, hasardé dans une voie aussi insolite, bien souvent des difficultés se sont présentées que je n'ai pu vaincre. Aussi, dans ces deux mémoires et surtout dans le second qui est le plus récent, trouvera-t-on souvent la formule "je ne sais pas". La classe des lecteurs dont j'ai parlé au commencement ([6]), ne manquera pas d'y trouver à rire. C'est que, malheureusement, on ne se doute pas que le livre le plus précieux du plus savant serait celui où il dirait tout ce qu'il ne sait pas, c'est qu'on ne se doute pas qu'un auteur ne nuit ([7]) jamais tant à ses lecteurs que quand il dissimule une difficulté. Quand la concurrence c'est-à-dire l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, quand on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académies des paquets cachetés, on s'empressera de publier les moindres observations, pour peu qu'elles soient nouvelles, et en ajoutant "je ne sais pas le reste".

De Ste Pélagie X^{bre} 1831
Evariste Galois.

Sciences mathématiques
Discussions sur les progrès de l'analyse pure

De toutes les connaissances humaines, on sait que l'Analyse pure est la plus immatérielle, la plus éminemment logique, la seule qui n'emprunte rien aux manifestations des sens. Beaucoup en concluent qu'elle est, dans son ensemble, la plus méthodique et la mieux coordonnée. Mais c'est erreur. Prenez un livre d'Algèbre, soit didactique, soit d'invention, et vous n'y verrez qu'un amas confus de propositions dont la régularité contraste bizarrement avec le désordre du tout. Il semble que les idées coûtent déjà trop à l'auteur pour qu'il se donne la peine de les lier et que son esprit épuisé par les conceptions qui sont la base de son ouvrage, ne puisse enfanter une même pensée qui préside à leur ensemble.

Que si vous rencontrez une méthode, une liaison, une coordination, tout cela est faux et artificiel. Ce sont des divisions sans fondement, des rapprochements arbitraires, un arrangement tout de convention. Ce défaut pire que l'absence de toute méthode arrive surtout dans les ouvrages didactiques, la plupart composés par des hommes qui n'ont pas l'intelligence de la science qu'ils professent.

Tout cela étonnera fort les gens du monde, qui en général ont pris le mot Mathématique pour synonyme de régulier.

Toutefois, on sera étonné si l'on réfléchit qu'ici comme ailleurs la science est l'œuvre de l'esprit humain ([8]), qui est plutôt destiné à étudier qu'à connaître, à chercher qu'à trouver la vérité. En effet on conçoit qu'un esprit qui aurait puissance pour percevoir d'un seul coup l'ensemble des vérités mathématiques non pas à nous connues, mais toutes les vérités possibles, pourrait les ([9]) déduire régulièrement et comme machinalement de quelques principes combinés par des méthodes uniformes ; alors plus d'obstacles, plus de ces difficultés que le savant rencontre dans ses explorations ([10]). Mais il n'en est pas ainsi ; si ([11]) la tâche du savant est plus pénible et partant plus belle, la marche de la science est moins régulière : la science progresse par une série de combinaisons où le hasard ne joue pas le moindre rôle ; sa vie est brute et ressemble à celle des minéraux qui croissent par juxtaposition. Cela s'applique non seulement à la science telle qu'elle résulte des travaux d'une série de savants, mais aussi aux recherches particulières à chacun d'eux. En vain les analystes voudraient-ils se le dissimuler ([12]) : ils ne déduisent pas, ils combinent, ils comparent ([13]) ; quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant de côté et d'autre qu'ils y sont tombés.

Les ouvrages didactiques doivent partager avec les ouvrages d'invention ce défaut d'une marche sûre toutes les fois que le sujet qu'ils traitent ([14]) n'est pas autrement soumis à nos lumières. Ils ne pourraient donc prendre une forme vraiment méthodique que sur un bien petit nombre de matières. Pour la leur donner, il faudrait une profonde intelligence de l'analyse et l'inutilité de l'entreprise dégoûte ceux qui pourraient en supporter la difficulté.

Il serait en dehors de la gravité de cet écrit d'entrer dans une pareille lutte avec des sentiments personnels d'indulgence ou d'animosité à l'égard des savants. L'auteur des articles évitera également ces deux écueils. Si un passé pénible le garantit du premier, un amour profond de la science, qui la lui fait respecter dans ceux qui la cultivent, assurera contre le second son impartialité.

Il est pénible dans les sciences de se borner au rôle de critique : nous ne le ferons que contraint et forcé. Quand nos forces nous le permettront, après avoir blâmé, nous indiquerons ce qui à nos yeux sera

mieux. Nous aurons souvent ainsi l'occasion d'appeler l'attention du lecteur sur les idées nouvelles qui nous ont conduit dans l'étude de l'analyse. Nous nous permettrons donc de l'occuper de ces idées, dans nos premiers articles, afin de n'avoir point à y revenir.

Dans des sujets moins abstraits, dans les objets d'art, il y aurait un profond ridicule à faire précéder un ouvrage de critique par ses propres œuvres : ce serait avouer par trop naïvement ce qui est presque toujours vrai au fond, que l'on se prend pour le type auquel on rapporte les objets pour les juger : mais ici, il ne s'agit pas d'exécution, il s'agit des idées les plus abstraites qu'il soit donné à l'homme de concevoir ; ici critique et discussion deviennent synonymes, et discuter, c'est mettre aux prises ses idées avec celles des autres.

Nous exposerons donc, dans quelques articles, ce qu'il y a de plus général, de plus philosophique, dans des recherches que mille circonstances ont empêché de publier plus tôt. Nous les présenterons seules, sans complications d'exemples et de hors-d'œuvre, qui chez les analystes noyent d'ordinaire les conceptions générales. Nous les exposerons surtout avec bonne foi, indiquant sans détour la voie qui nous y a conduit, et les obstacles qui nous ont arrêté. Car nous voulons que le lecteur soit aussi instruit que nous des matières que nous aurons traitées. Quand ce but aura été rempli, nous aurons conscience d'avoir bien fait, sinon par le profit qu'en retirera directement la science, du moins par l'exemple donné, d'une bonne loi qu'on n'a pas trouvée jusqu'à ce jour.

Ici comme dans toutes les sciences chaque époque a en quelque sorte ses questions du moment : il y a des questions vivantes qui fixent à la fois les esprits les plus éclairés comme malgré eux et sans que [*illis.*] ait présidé à ce concours. Il semble souvent que les mêmes idées apparaissent à plusieurs comme une révélation. Si l'on en cherche la cause il est aisé de la trouver dans les ouvrages de ceux qui nous ont précédés où ces idées sont présentes à l'insu de leurs auteurs.

La science n'a pas tiré, jusqu'à ce jour, grand parti de cette coïncidence observée si souvent dans les recherches des savants. Une concurrence fâcheuse, une rivalité dégradante en ont été les principaux fruits. Il n'est pourtant pas difficile de reconnaître dans ce fait la preuve que les savants ne sont pas plus que d'autres faits pour l'isolement, qu'eux aussi appartiennent à leur époque et que tôt ou tard ils décupleront leurs forces par l'association. Alors que de temps épargné pour la science !

Beaucoup de questions d'un genre nouveau occupent maintenant les analystes. C'est à découvrir un lien entre ces questions que nous nous attacherons ([15]).

Tout voir, tout entendre, ne perdre aucune idée.
29 7bre 1831

Sciences.
Hiérarchie. Ecoles

La hiérarchie est un moyen même pour l'inférieur.

Quiconque n'est pas envieux ou a de l'ambition a besoin d'une hiérarchie factice pour vaincre l'envie ou les obstacles.

Jusqu'à ce qu'un homme ait dit : la science c'est moi, il doit avoir un nom à opposer à ceux qu'il combat. Si non, son ambition passera pour de l'envie.

Avant d'être roi il faut être aristocrate. Machiavel.

L'intrigue est un jeu. Si l'on mérite ce qu'on brigue, on y gagne tout. Si non, on perd la partie.

On combat les professeurs par l'institut, l'institut par le passé, un passé par un autre passé.

Voici la [*illis.*] de Victor Hugo. Renaissance, moyen âge, enfin, moi.

C'est à ce besoin de combattre un homme par un autre homme, un siècle par un autre siècle, qu'on doit attribuer les réactions littéraires ou scientifiques, qui ne sont pas de longue durée, Aristote, Ptolémée, Descartes, Laplace.

[*Une ligne illisible.*]

Ce jeu use celui qui s'en sert. Un homme qui n'est pas dévoué se fait éclectique.

Un homme qui a une idée peut choisir entre, avoir, sa vie durant, une réputation colossale d'homme savant, ou bien se faire une école, se taire et laisser un grand nom dans l'avenir. Le premier cas a lieu s'il

pratique son idée sans remettre, le second s'il la publie. Il y a un troisième moyen juste milieu entre les deux autres. C'est de publier et de pratiquer, alors on est ridicule.

---

1. Cette liste se trouve à droite ; à gauche est une autre liste de noms, à peu près les mêmes : tous ces noms sont biffés, sauf ceux de Sturm, de Richard et un autre que je n'ai pu déchiffrer. Parmi les noms de cette première liste, qui ne figurent pas dans la seconde, je distingue ceux de :
   Blanchet, Leroy, Poullet de l'Isle, Francœur.
2. Même erreur est arrivée en 1828 à l'auteur (il avait seize ans). Ce n'est pas la seule analogie frappante entre le géomètre norvégien mort de faim, et le géomètre français condamné à vivre ou à mourir, comme on voudra, sous les verrous d'une prison.
   (Note de l'éditeur.)
3. Je suis le texte de Chevalier ; il y a dans le manuscrit de Galois un mot illisible.
4. Chevalier, dans sa copie, a supprimé cette phrase : "Ici rien de semblable" et a placé cet alinéa avant le précédent. C'est ainsi qu'il est, en effet, placé dans le texte de Galois ; mais, d'une part, les mots "Ici rien de semblable" ne sont nullement biffés dans le manuscrit ; ils ont, au contraire, été ajoutés en interligne ; d'autre part, ils sont précédés d'un astérisque suivi d'un trait (assez peu distinct) dont l'extrémité indique sans doute la place où l'alinéa doit être placé ; à cette place, les mots supprimés par Chevalier ont un sens très clair ; ils n'en ont pas quand on laisse le second alinéa avant le premier : c'est évidemment la raison pour laquelle Chevalier les a supprimés.
5. On sait assez que le second Mémoire est perdu : toutefois, il subsiste un morceau (non daté) où Galois traite de la division de l'argument dans les fonctions elliptiques et dont le contenu correspond assez bien à l'indication du texte ; on peut donc supposer que ce morceau pouvait rentrer dans l'ensemble que Galois voulait publier. Il sera publié dans un second article.
6. Voici la phrase à laquelle Galois fait allusion : "Tout ce qui précède, je l'ai dit pour prouver que c'est sciemment que je m'expose à la risée des sots."
7. Texte de Chevalier ; on ne distingue que la lettre n ; le reste du mot est un trou.
8. Mot peu lisible, omis par Chevalier.
9. Un mot illisible, je suis le texte de Chevalier.
10. C'est le texte de Chevalier. Le passage est illisible ; je ne puis lire "rencontre" ; après "explorations" qui est douteux, il y a les mots, douteux aussi : "et qui souvent sont imaginaires" et ceux-ci, bien nets : "Mais aussi plus de rôle au savant". Chevalier a supprimé ce qui ne s'accordait pas avec son texte.
11. Chevalier a écrit : "et la. . . ".
12. Je suis le texte de Chevalier ; il y a ici, en interligne, une phrase dont le copiste n'a pas tenu compte, malgré son intérêt ; malheureusement, elle est en partie illisible : j'y distingue à peu près ce qui suit : "toute immatérielle qu'elle [*illis.*] l'analyse n'est pas plus en notre pouvoir que d'autre [*illis.*]."
13. Autre addition, en interligne, supprimée par Chevalier : "il faut l'épier, la sonder, la solliciter [la vérité]".
14. Dans le manuscrit : "qu'il traite".
15. Passage biffé.

ÉCRITS MATHÉMATIQUES INÉDITS.

En dehors des quelques fragments que l'on trouvera plus loin, les écrits mathématiques de Galois que Liouville n'a pas publiés contiennent une cinquantaine de feuilles détachées ([1]) pleines de calculs qui, pour la plupart, concernent la théorie des fonctions elliptiques et remontent sans doute à un moment où Galois étudiait les Mémoires de Jacobi ([2]), quatre pages sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, quelques calculs, avec un commencement de rédaction, sur les intégrales eulériennes ([3]), huit lignes, dont plusieurs mots sont déchirés, qui paraissent se rapporter au groupe alterné et n'avoir pas grand intérêt, un cahier dont la plupart des pages sont blanches et dont je dirai tout à l'heure deux mots, enfin une vingtaine de lignes sur le théorème d'Abel.

Ces vingt lignes peuvent être regardées comme un résumé de la célèbre "Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes" ([4]), qui est datée de 1829 ; elles occupent les deux tiers de la première page d'une feuille double de même format (30 x 15) que la lettre à Chevalier. On lit en haut de la page :

Théorie des fonctions de la forme $\int X\,\mathrm{d}x, X$ étant une fonction algébrique de x.

Les mots "fonctions de la...", jusqu'à la fin, sont biffés et Galois a écrit au-dessus

intégrales dont les différentielles est algébrique.

Le premier titre est presque identique à ceux qui ont été signalés précédemment (p. 17 et p. 23). dont l'un porte la mention "septembre 1831". L'énoncé du théorème d'Abel (qui n'est pas nommé) est précédé des mots "Lemme fondamental". Après la démonstration on lit

Remarque. Dans le cas où

Le reste de la page, les deux pages qui suivent sont en blanc ([5]). Ces quelques lignes sont-elles tout ce qui reste du troisième *Mémoire qui concerne les intégrales*, que Galois résume dans la lettre à Chevalier ? Ce troisième Mémoire a-t-il été rédigé ? Je rappelle quelques termes de la lettre

On pourra faire avec tout cela trois Mémoires.

Le premier est écrit, et... je le maintiens... . . . tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête.

Le premier est écrit semble indiquer que les autres ne sont pas rédigés. *On pourra faire avec tout cela trois Mémoires* porte à penser que Galois laissait des notes, dont on ne peut plus espérer aujourd'hui qu'elles soient retrouvées. Une seule chose est certaine, c'est que, la veille de sa mort, *il avait tout cela dans la tête.*

Le cahier est du format 20 x 15 ; on lit sur la couverture : Notes de mathématiques, quatorze pages, seulement, sont utilisées. On trouve dans ce cahier et, parfois, sur la même page, deux sortes d'écriture : pour l'une, il n'y a pas de doute, c'est bien celle de Galois, avec son allure habituelle. L'autre, beaucoup moins lisible, est droite. Je me suis demandé si Galois ne s'était pas amusé à déformer son écriture ; mais M. Paul Dupuy, après un examen attentif des deux écritures, a constaté qu'elles révélaient des habitudes très différentes : elles ne sont pas de la même personne.

Au reste, ce cahier, par son contenu, n'offre qu'un intérêt médiocre. Les pages qui sont de Galois contiennent quelques remarques sur les asymptotes des courbes algébriques et un court essai sur les principes de l'Analyse, dont je citerai quelques lignes ; elles caractérisent un état d'esprit qui résultait sans doute de l'enseignement que Galois avait reçu ; on n'oubliera pas qu'il n'était sans doute alors qu'un écolier, un écolier qui, peut-être, avait approfondi déjà des problèmes singulièrement difficiles.

Après avoir expliqué comment il juge la méthode de Lagrange, où le développement de Taylor tient le rôle essentiel, préférable à la méthode qui consiste à partir de la notion de dérivée considérée comme la limité de l'expression

$$\frac{f(X)-f(x)}{X-x},$$

limite qui ne peut être constamment nulle ou infinie, et comment le raisonnement de Lagrange ne tient pas debout, il propose de lui substituer le suivant :

Considérons d'abord une fonction $\phi(z)$ qui devienne nulle pour la valeur 0 de la variable. Je dis que l'on pourra toujours déterminer un seul nombre positif et fini n de manière que $\dfrac{\phi(z)}{z^n}$ ne soit ni nulle ni infinie, à moins que $\dfrac{\phi(z)}{z^n}$ ne soit nul quand $z = 0$, pour toute valeur finie de n.

Car si $\dfrac{\phi(z)}{z^n}$ n'est pas nul quand $z = 0$ pour toute valeur finie de n, soit m une valeur telle que $\dfrac{\phi(z)}{z^m}$ ne soit pas nul quand $z = 0$. Si $\dfrac{\phi(z)}{z^m}$ acquiert alors une valeur finie, la proposition est démontrée. Sinon $\dfrac{\phi(z)}{z^m}$ étant infini et $\phi(z)$ nul pour $z = 0$, en faisant croître n depuis $n = 0$ jusqu'à $n = m$, les valeurs de $\dfrac{\phi(z)}{z^m}$ pour $z = 0$ devront être infinies à partir d'une certaine limite. Soit p cette limite. $\dfrac{\phi(z)}{z^p}$ ne sera pas infini pour $z = 0$ mais $\dfrac{\phi(z)}{z^{p+\mu}}$ le sera, quelque petite que soit la quantité μ. Donc $\dfrac{\phi(z)}{z^\mu}$ ne saurait être nul pour $z = 0$. La proposition est donc démontrée.

De cette proposition ainsi "démontrée", Galois conclut qu'une fonction $\phi(s)$, qui ne devient pas infinie pour $z = 0$, peut se mettre sous la forme

$$\phi(z) = A + Bz^n + Cz^m + \ldots + Pz^p + z^k\Psi(z),$$

où les exposants positifs $n, m, \ldots, p, k$ vont en croissant, l'exposant k étant aussi grand qu'on veut et la fonction $\Psi(z)$ n'étant ni nulle ni infinie pour $z = 0$.

De la formule du binôme il déduit ensuite le développement de Taylor.

Quant aux fragments qui suivent, j'ai cru devoir les reproduire tels quels, avec une exactitude minutieuse, en conservant l'orthographe, la ponctuation ou l'absence de ponctuation, sans les quelques corrections qui se présentent naturellement à l'esprit. Cette minutie m'était imposée pour les quelques passages où la pensée de Galois n'était pas claire pour moi ; sur cette pensée, les fragments informes que je publie jetteront peut-être quelque lueur. Je me suis efforcé de donner au lecteur une photographie sans retouche.

J. T.

[Première feuille] ([6]).

Permutations. Nombres de lettres m.

Substitutions. Notation.

Période. Substitutions inverses. Substitutions semblables. Substitutions circulaires. Ordre. Autres substitutions.

Groupes. Groupes semblables. Notation.

Théorème I. Les Permutations communes à deux groupes forment un groupe.

Théorème II. Si un groupe est contenu dans un autre, celui-ci sera la somme d'un certain nombre de groupes semblables au premier, qui en sera dit un *diviseur*.

Théorème III. Si le nombre des permutations d'un groupe est divisible par p (p étant premier), ce groupe contiendra une substitution dont la période sera de p termes.

Réduction des groupes, dépendants ou indépendants. Groupes irréductibles.

Des groupes irréductibles en général.

Théorème. Parmi les permutations d'un groupe, il y en a toujours une où une lettre donnée occupe une place donnée, et, si l'on ne considère dans un groupe irréductible que les permutations où une même lettre occupe une même place et qu'on fasse abstraction de cette lettre, les permutations qu'on obtiendra ainsi formeront un groupe. Soit n le nombre des permutations de ce dernier mn ([7]).

Nouvelle démonstration du théorème relatif aux groupes alternes.

Théorème. Si un groupe contient une substitution complète de l'ordre m et une de l'ordre $m - 1$, il sera irréductible.

Discussion des groupes irréductibles. Groupes, primitif et non primitif. Propriété des racines ([8]).

On peut supposer que le groupe ne contienne que des substitutions paires.

Il y aura toujours un système conjugué complet de m permutations quand $m = 4n$ et $4n + 1$, un système conjugué complet de $\frac{m}{2}$ permutations quand $m = 4n + 2$.

Donc $t = m - 2$ dans le premier cas, $t = (m - 2)/2$ dans le second ([9]).

[Deuxième feuille.]

Application à la théorie des fonctions et des équations algébriques. Fonctions semblables. Combien il peut y avoir de fonctions semblables entre elles. Mr Cauchy. Groupes appartenant aux fonctions. Théorème plus général, quand $m > 4$. Quelles sont les fonctions qui n'ont que m valeurs, ou qui ne contenant que des substitutions paires, n'ont que $2m$ valeurs.

Théorème. Si une fonction de m indéterminées est donnée par une équation de degré inférieur à m dont tous les coefficients soient des fonctions symétriques permanentes ou alternées de ces indéterminées, cette fonction sera elle même symétrique, quand $m > 4$.

Théorème. Si une fonction de m indéterminées est donnée par une équation de degré m dont tous les coefficients, etc. ; cette fonction sera symétrique permanente ou alternée par rapport à toutes les lettres ou du moins par rapport $m - 1$ d'entre elles.

Théorème. Aucune équation algébrique de degré supérieur à 4 ne saurait se résoudre ni s'abaisser.

Du cas où une fonction des racines de l'équation dont le groupe est G est connue.

Théorème. Soit H le groupe d'une fonction ϕ des racines, G est

un diviseur de H, ϕ ne dépendra plus que d'une ([10]) équation du $n^{ième}$ degré.

On peut ramener à ce cas celui où on supposerait plusieurs fonctions connues.

Premier cas. Quand le groupe appartenant à la fonction connue est réductible. Cas où une seule permutation lui appartient.

2e cas. Quand le groupe appartenant à la fonction est irréductible non primitif.

3e cas. Quand le groupe appartenant à la fonction est primitif m étant premier ([11]).

4e cas. Quand le groupe appartenant à la fonction est primitif et que $m = p^2$.

5e cas. Quand le groupe est primitif $m - 1$ étant premier ou le carré d'un nombre premier ([12]).

Note sur les équations numériques.

Ce qu'on entend par l'ensemble des permutations d'une équation.

Du cas où cet ensemble constitue un groupe.

Il n'y a qu'une circonstance où nous ayons reconnu que cela doit nécessairement avoir lieu. C'est celui où toutes les racines sont des fonctions rationnelles d'une quelconque d'entre elles.

Démonstration.

C'est improprement, etc. Du reste, tout ce que nous avons dit est applicable à ce changement près. 1°. théorème. Si une équation jouit de la propriété énoncée, toute fonction des racines invariable par les $m - 1$ substitutions conjuguées sera connue, et réciproquement. 2° Théorème découlant de la réciproque précédente ([13]). Toute équation dont les racines seront des fonctions rationnelles de la première ; jouira de la même propriété. 3° Corollaire. Si a est une racine imaginaire d'une pareille équation et que fa en soit la conjuguée, fx sera en gén´ral la conjuguée d'une racine quelconque imaginaire, x.

On peut passer aisément de ce cas à celui où une racine étant connue, quelques unes en dépendent par des fonctions rationnelles. Car soient

$$x, \quad \phi_1 x, \quad \phi_2(x), \ldots$$

Ces racines, si l'on prend, etc.

Il est aisé de voir que la même méthode de décomposition s'applique au cas où dans l'ensemble des permutations d'une équation, n mêmes lettres occupent toujours n mêmes places (abstraction faite de l'ordre) quand une seule de ces lettres occupe une de ces places, et il n'est pas nécessaire pour cela que l'ensemble de ces permutations constitue un groupe.

([14])

On appelle groupe un système de permutations tel que etc. Nous représenterons cet ensemble par G.

GS est le groupe engendré lorsqu'on opère sur tout le groupe G la substitution S. Il sera dit semblable ;

Un groupe peut être fort différent d'un autre et avoir les mêmes substitutions. Ce groupe en général ne sera pas GS.

Groupe réductible est un groupe dans les permutations duquel n lettres ne sortent pas de n places fixes. Tel est le groupe

$$\begin{array}{ccc} abcde & abdec & abecd \\ bacde & badec & baecd \end{array}$$

Un groupe irréductible, etc.

Un groupe irréductible est tel qu'une lettre donnée occupe une place donnée. Car, supposons qu'une place ne puisse appartenir qu'à n lettres. Alors toute place occupée par l'une de ces lettres jouira de la même propriété. Donc etc.

Groupe irréductible non-primitif est celui où l'on a n places et n lettres telles que une des lettres ne puisse occuper une de ces places, sans que les n lettres n'occupent les n places.

On voit que les lettres se partageront en classes de n lettres telles que les n places en question ne puissent être occupées à la fois que par l'une de ces places ([15]). d'où

$$TS' = STS' = T - 1ST$$

Sur l'autre face du même fragment, on lit :

Si l'on représente les n lettres par n indices

$$1.2.3 \ldots n$$

toute permutation pourra être représentée

$$\phi 1 \quad \phi 2 \quad \phi 3 \ldots \phi n$$

ϕ étant une fonction convenablement choisie la substitution par laquelle on passe de la première perm. à l'autre sera $(k, \phi k)$, k désignant un indice quelconque.

Au lieu de représenter les lettres par des nombres on pourrait représenter les places par des nombres.

. . . . . .

équations ([16]). Nous nous contenterons donc d'avoir exposé les définitions indispensables pour l'intelligence de la suite et nous allons montrer la liaison qui existe entre les deux théories.

§ 2. Comment la théorie des Équations dépend de celle des Permutations.

6. Considérons une équation à coefficients quelconques et regardons comme rationnelle toute quantité qui s'exprime rationnellement au moyen des coefficients de l'équation, et même au moyen d'un certain nombre d'autres quantités irrationnelles adjointes que l'on peut supposer connues a priori.

Lorsqu'une fonction des racines ne change pas de valeur numérique par une certaine substitution opérée entre les racines, elle est dite invariable par cette substitution. On voit qu'une fonction peut très bien être invariable par telle ou telle substitution entre les racines, sans que sa forme l'indique. Ainsi, si $F(x) = 0$ est l'équation proposée, la fonction $\phi[F(a), F(b), \ldots]$, (ϕ étant une fonction quelconque, $a, b, c \ldots$ les racines) sera une fonction de ces racines invariable par toute substitution entre les racines, sans que sa forme l'indique généralement.

Or c'est une question dont il ne paraît pas qu'on ait encore la solution, de savoir si, étant donnée une fonction de plusieurs quantités numériques, on peut trouver un groupe qui contienne toutes les substitutions par lesquelles cette fonction est invariable, et qui n'en contienne pas d'autres.

Il est certain que cela a lieu pour des quantités littérales, puisqu'une fonction de plusieurs lettres invariables par deux substitutions est invariable par leur produit. Mais rien n'annonce que la même chose ait toujours lieu quand aux lettres on substitue des nombres.

On ne peut donc point traiter toutes les équations comme les équations littérales. Il faut avoir recours à des considérations fondées sur les propriétés particulières de chaque équation numérique. C'est ce que je vais tâcher de faire

Des cas particuliers des équations ([17])

Remarquons que tout ce qu'une équation numérique peut avoir de particulier, doit provenir de certaines relations entre les racines. Ces relations seront rationnelles dans le sens que nous l'avons entendu, c'est à dire qu'elles ne contiendront d'irrationnelles que les coefficients de l'équation et les quantités adjointes. De plus ces relations ne devront pas être invariables par toute substitution opérée sur les racines, sans quoi on n'aurait rien de plus que dans les équations littérales.

Ce qu'il importe donc de connaître, c'est par quelles substitutions peuvent être invariables des relations entre les racines, ou ce qui revient au même, des fonctions des racines dont la valeur numérique est déterminable rationnellement.

A ce sujet, nous allons démontrer un théorème de la dernière importance dans cette matière et dont l'énoncé suit : "*Étant donnée une équation avec un certain nombre de quantités adjointes, il existe toujours un certain groupe de permutations dont les substitutions sont telles* ([18]) que toute fonction des racines invariable par ces substitutions est rationnellement connue, et telle réciproquement qu'une fonction ne peut être rationnellement déterminable, à moins d'être invariable par ces substitutions que nous nommerons substitutions de l'équation." *(Dans le cas des équations littérales, ce groupe n'est autre chose que l'ensemble de toutes les permutations des racines, puisque les fonctions symmétriques sont seules connues).*

Pour plus de simplicité, nous supposerons dans la démonstration de notre théorème, qu'il ait été reconnu pour toutes les équations de degrés inférieurs ; ce qu'on peut toujours admettre puisqu'il est évident pour les équations du second degré.

Admettons donc la chose pour tous les degrés inférieurs à m ; pour la démontrer dans le $m^{ième}$, nous distinguerons quatre cas :

1er Cas. L'équation se décomposant en deux ou en un plus grand nombre de facteurs.

Soit $U = 0$ l'équation, $U = VT, V$ et T étant des fonctions dont les coefficients se déterminent rationnellement au moyen des coefficients de la proposée et des quantités adjointes.

Je vais faire voir que, dans l'hypothèse, on pourra trouver un groupe qui satisfasse à la condition énoncée.

Remarquons ici que dans ces sortes de questions, comme il ne s'agit que, des substitutions par lesquelles des fonctions sont invariables, si un groupe satisfait à la condition, tout groupe qui aurait les mêmes substitutions y satisfera aussi. Il convient donc de partir toujours d'une permutation arbitraire, mais fixe, afin de déterminer les groupes que l'on aura à considérer. De cette manière, on évitera toute ambiguïté.

Cela posé, dans le cas actuel, il est clair que si l'on adjoignait à l'équation $U = 0$, toutes les racines de l'équation $V = 0$, l'équation $U = 0$ se décomposerait en facteurs dont l'un serait $T = 0$, et les autres seraient les facteurs simples de V.

Soit H le groupe que l'on obtient en opérant sur une permutation arbitraire A des racines de l'équation $U = 0$, toutes les substitutions qui sont relatives à l'équation $T = 0$ quand on lui adjoint les racines de $V = 0$.

Soit K le groupe que l'on obtient en opérant sur toutes les substitutions qui sont relatives à $V = 0$ quand on ne lui adjoint que les quantités adjointes primitivement à la proposée.

Combinez en tous sens toutes les substitutions du groupe H avec celles du groupe K. Vous obtiendrez un groupe réductible que je dis jouir de la condition exigée relativement à la question proposée.

En effet toute fonction invariable par les substitutions du groupe K ([19] [20])

Soit donc $\phi(H)$ une certaine fonction invariable par les substitutions du groupe H et non par celles du groupe G. On aura donc

$$\phi(H) = f(r)$$

la fonction y ne contenant dans son expression que les quantités antérieurement connues.

Éliminons algébriquement r entre les équations

$$r^p = A \quad f(r) = z$$

On aura une équation irréductible du $p^{ième}$ degré en z. (Sinon z serait fonction de r^p : ce qui est contre l'hypothèse). Maintenant soit S une des substitutions du groupe G qui ne lui soient pas communes à H. On voit que $\phi(HS)$ sera encore racine de l'équation ci-dessus en z, puisque les coefficients de cette équation sont invariables par la substitution S.

On aura donc

$$\phi(HS) = f(\alpha r)$$

α étant une des racines de l'unité.

Ces deux équations

$$\phi(H) = f(r) \quad \phi(HS) = f(\alpha r)$$

donneront par l'élimination de r une relation entre

$$\phi(H) \quad \phi(HS) \quad \text{et } \alpha$$

indépendante de r, et la même relation aura par conséquent lieu entre

$$1 + \phi(H) \quad \text{et} \quad \phi(HS^2)$$

Donc : comme

$$\phi(HS) = f(\alpha r)$$

on en déduit

$$\phi(HS^2) = f(\alpha^2 r)$$

et ainsi de suite, jusqu'à

$$\phi(HS^p) = f(r) = \phi(H)$$

Ainsi la connaissance de la seule quantité r, donne à la fois toutes les fonctions correspondantes aux groupes

$$H, HS, HS^2, ...$$

la somme de ces groupes est évidemment G, puisque toute

Étant donnée ([21]) une équation avec tant de quantités adjointes que l'on voudra, on peut toujours trouver quelque fonction des racines qui soit numériquement invariable par toutes les substitutions d'un groupe donné et ne le soit pas par d'autres substitutions.

Si le groupe d'une équation se décompose en n groupes semblables H, HS, HS ([22]), et qu'une fonction $\phi(H)$ soit invariable par toutes les substitutions du groupe H par aucune autre substitution du groupe G, cette fonction est racine d'une équation irréductible du $n^{ième}$ degré dont les autres racines sont $\phi(HS)$, ...

Note ([23]).

On appelle équations non-primitives les équations qui, étant, par exemple du degré mn se décomposent en m facteurs du degré n au moyen d'une seule équation du degré m. Ce sont les Equations de Mr Gauss. Les équations primitives sont celles qui ne jouissent pas d'une pareille simplification. Je suis, à l'égard des Equations primitives, parvenu aux résultats suivants :

1° Pour qu'une équation primitive de degré m soit résoluble par radicaux, il faut que $m = p^\nu, p$ étant un nombre premier

2° Si l'on excepte le cas de $m = 9$ et $m = p^p$, l'équation devra être telle que deux quelconques de ses racines étant connues, les autres s'en déduisent rationnellement.

3° Dans le cas de $m = p^p$, deux des racines étant connues, les autres doivent s'en déduire du moins par un seul radical du degré p.

4° Enfin dans le cas de $m = 9$, l'équation doit être du genre de celles qui déterminent la trisection des fonctions Elliptiques.

La démonstration de ces propositions est fondée sur la théorie des permutations. ([24])

Addition au mémoire sur la résolution des équations.

Lemme I. Soit un groupe G de $mt.n$ permutations, qui se décompose en n groupes semblables à H. Supposons que le groupe H se décompose en t groupes de m permutations, et semblables à K.

Si, parmi toutes les substitutions du groupe G, celles du groupe H sont les seules qui puissent transformer l'une dans l'autre quelques substitutions du groupe K, on aura $n \equiv 1 \pmod{m}$ ou $tn \equiv t \pmod{m}$.

Lemme II. Si μ est un nombre premier, et p un entier quelconque on aura

$$(x-p)(x-p^2)(x-p^3)\dots(x-p^{\mu-1}) \equiv \frac{x^\mu - 1}{x-1} \left(\text{mod } \frac{p^\mu - 1}{p-1}\right).$$

Ces deux lemmes permettent de voir dans quel cas un groupe primitif de degré p^ν (où p est premier) peut appartenir à une équation résoluble par radicaux.

En effet, appelons G un groupe qui contient toutes les substitutions linéaires possibles par les $\dfrac{p^\nu - 1}{p-1}$ lettres. (Voyez le mémoire cité.) Soit, s'il est possible, L un groupe qui divise G et qui se partage lui-même en p groupes semblables à K, K ne comprenant pas deux permutations où une lettre occupe la même place. On peut prouver 1° que s'il y a dans le groupe G et hors du groupe L, quelque substitution S qui transforme l'une dans l'autre quelques substitutions du groupe K, cette substitution sera de r termes, r étant un diviseur de $p-1$.

D'après cela, comme le nombre de permutations du groupe G est $\dfrac{p^\nu - 1}{p-1}.(p^\nu - p^{\nu-1})(p^\nu - p^{\nu-2})\dots(p^\nu - p^2)(p^\nu - p)$

d'après le lemme I, on devra avoir ([25])

$$(p^\nu - p^{\nu-1})(p^\nu - p^{\nu-2})\dots(p^\nu - p^2)(p^\nu - p) \equiv p^k r \left(mod\ \frac{p^\nu - 1}{p-1}\right)$$

D'où l'on voit que ν doit être un nombre premier ([26]). (Lemme II)

$$pr \equiv \nu \left(mod\ \frac{p^\nu - 1}{p-1}\right)$$

On en déduit quand $\nu > 2 \quad pr = \mu$, savoir $p = \nu$, puisque p et μ sont premiers.

Ainsi, le théorème que j'avais énoncé dans mon mémoire sera vrai dans tout autre cas que dans celui où p serait élevé à la puissance p.

Toujours devra-t-on avoir $r = 1$, et $L = H$. Ainsi même dans le $p^{p^{ième}}$ degré le groupe de l'équation réduite du degré $\frac{p^p - 1}{p - 1} =$ devra être de $\frac{p^p - 1}{p - 1} p$ permutations. La règle est donc encore fort simple dans ce cas.

il faut comme on voit 1° que $\nu = 1$; 2° que le groupe de la réduite soit de $\frac{p^p - 1}{p - 1} p =$ permutations

([27])

Dans un mémoire sur la théorie des Equations, j'ai fait voir comment on peut résoudre une équation algébrique de degré premier m, dont les racines sont $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, quand on suppose connue la valeur d'une fonction des racines qui ne demeure invariable que par les substitutions de la forme (x_h, x_{ak+b}). Or il arrive, par un hasard que nous n'avions pas prévu, que la Méthode proposée dans ce mémoire s'applique avec succès à la division d'une fonction elliptique de première classe en un nombre premier de parties égales. Nous pourrions, à la rigueur, nous contenter de donner cette division, et le problème de la section des fonctions de première classe pourrait être considéré comme résolu.

Mais, afin de rendre cette solution plus générale, nous nous proposerons de diviser une fonction elliptique de première classe en m parties égales, m étant $= p^n$ et p premier.

Pour cela nous étendons d'abord la méthode exposée dans le mémoire cité, au cas où le degré de l'équation serait une puissance de nombre premier. Nous supposerons toujours que les racines soient $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, et que l'on connaisse la valeur d'une fonction de ces racines qui ne demeure invariable que pour des substitutions de la forme $(k, ak + b)$.

Dans cette expression, k et $ak + b$ signifieront les restes minima de ces quantités par rapport à m. Parmi les substitutions de cette forme, que, pour abréger, nous appelerons substitutions linéaires, il est clair que l'on ne peut admettre que celles où a est premier avec m, sans quoi une même $ak+b$ remplacerait à la fois plusieurs k.

Cela posé, passons à la resolution de la classe d'équations indiquée.

§ 1. *Résolution de l'équation algébrique de degré p^n en y supposant connue la valeur d'une fonction qui n'est invariable que par des substitutions linéaires.*

La congruence $k = ak+b$ n'étant pas soluble pour plus d'une seule valeur, on voit clairement que la fonction qu'on suppose connue n'est invariable par aucune substitution dans laquelle deux lettres garderaient un même rang.

Si donc, mutatis mutandis, on applique à ce cas les raisonnements employés dans le mémoire cité, on vérifiera l'énoncé de la proposition qui suit :

"Étant supposée connue la valeur de la fonction en question, une racine s'exprimera toujours au moyen de deux autres, et l'égalité qu'on obtiendra ainsi sera invariable par les substitutions telles que $(k, ak+b)$."

Soit donc $x_2 = f(x_1, x_0)$ on en déduira en général,

$$x_{2a+b} = f(x_{a+b}, x_b),$$

équation qui, appliquée de toutes manières, donnera l'expression d'une quelconque des racines de deux autres quelconques, si l'on a soin d'y substituer successivement les expressions des racines qui entrent dans cette équation.

Cela posé, prennons une fonction symmétrique Φ des racines $x_0, x_p, x_{2p}, x_{3p}, \ldots, x_{(p^{n-1}-1)p}$; il vient

$$\Phi(x_0, x_p, x_{2p}, \ldots) = \Phi_0$$

$$\Phi(x_1, x_{p+1}, x_{2p+1}, \ldots) = \Phi_1$$

$$\Phi(x_2, x_{p+2}, x_{2p+2}, \ldots) = \Phi_2$$

$$- - - - - - - -$$

$$\Phi(x_{p-1}, x_{2p-1}, \ldots) = \Phi_{p-1}$$

et supposons qu'en général $\Phi_{k+p} = \Phi_{p-1}$ Toute fonction des quantités Φ, qui sera invariable par les substitutions linéaires de ces quantités, sera évidemment une fonction invariable par les substitutions linéaires

de $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$. Ainsi l'on connaitra à priori toute fonction des quantités, $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{p-1}$, invariable par les substitutions linéaires de ces quantités. On pourra donc 1° former l'équation dont ces quantités sont racines (puisque toute fonction symmétrique est à plus forte raison invariable par les substitutions) ; 2° résoudre cette équation.

Il suit de là, qu'on pourra toujours, au moyen d'une équation de degré p, algébriquement soluble, diviser l'équation proposée en facteurs dont les racines seront respectivement

$$x_0, x_p, x_{2p}, x_{3p}, \ldots$$

$$x_1, x_{p+1}, x_{2p+1}, x_{3p+1}, \ldots$$

$$- - - - - - - - - -$$

Comme dans chaque facteur on aura l'expression d'une racine au moyen de deux autres, par exemple, dans le premier,

$$f(x_p, x_0) = x_{2p}$$

et que cette expression sera invariable par toute substitution linéaire, on voit que chaque facteur pourra se traiter comme l'équation donnée, et que le problème, s'abaissant successivement, sera enfin résolu.

On peut en conséquence regarder comme solubles les équations dans lesquelles on connaîtrait la valeur d'une fonction des racines qui ne serait invariable que par des substitutions linéaires, quand le degré de l'équation est une puissance de nombre premier.

Nous pouvons donc passer à la solution du problème général de la section des transcendantes de première classe, puisque, toute fraction étant la somme de fractions dont les dénominateurs sont des puissances de nombres premiers, il suffit d'apprendre à diviser ces transcendantes en p^n parties égales.

§ 2. *Division des transcendantes de première espèce en $m = p^n$ parties égales.*

Nous déterminerons chaque transcendante par le sinus de son amplitude. On pourrait de la même manière prendre le cosinus ou la tangente, et il n'y aurait rien à changer à ce que nous allons dire.

Nous désignerons par (x, y) le sinus de la transcendante somme des transcendantes dont les sinus sont x et y. Si x est le sinus d'une transcendante, $(x)^k$ désignera celui d'une transcendante k fois plus grande.

Il est clair que $(x, -y)$ sera le sinus de la différence des transcendantes qui ont pour sinus, d'après la notation indiquée pour les sommes.

Cela posé, nous commencerons par une remarque sur la nature des quantités qui satisfont à l'équation $(x)^m = 0$.

Si l'on désigne par p l'une de ses racines, il est clair que $(p)^k$ en sera une autre. L'on aura donc une suite de racines exprimée par $p, (p)^2, (p)^3, \ldots, (p)^{m-1}$. Le nombre des racines étant $> m$, soit q une des racines qui ne sont pas comprises dans cette suite, $(q)^l$ sera une autre racine différente de q et des premières. Car, si l'on avait $(p)^k = (q)^t$ on en déduirait $q = (q)^g, g$ étant un nombre entier.

Prenant donc les deux suites $p, (p)^2, \ldots$ et $q, (q)^2, \ldots$ on trouvera pour la formule générale des racines de l'équation $(x)^m = 0$, cette expression

$$((p)^k, (q)^l)$$

Cela posé, supposons que l'on donne à résoudre l'équation $(x)^m = \sin A$, m étant impair et toujours de la forme p^n. Si x est une des racines, il est clair que toutes les autres seront

$$(x, (p)^k, (q)^l)$$

Posons donc en général

$$(x, (p)^k, (q)^l) = x_{k,l}$$

en faisant $x = x_{00}$ nous en déduirons généralement

$$(x_{2a+b,2c+d} - x_{a+b,c+d}) = (x_{a+b,c+d} - x_{b,d})$$

d'où

$$(x_{2a+b,2c+d} = ((x_{a+b,c+d})^2, x_{b,d})$$

Or il est aisé de tirer de cette égalité une expression rationnelle de $x_{2a+b,2c+d}$ en fonction de $x_{a+b,c+d}$ et de $x_{b,d}$. Car si ϕ est l'arc correspondant à l'un quelconque des sinus qui satisfont à l'équation $(x)^m = \sin A$ pour avoir $\cos\phi$ en fonction de $\sin\phi$, il suffit de chercher le plus grand commun diviseur entre les équations $x^2 + y^2 = 1$ et $f(y) = \cos A, f(y)$ étant le cosinus de la transcendante m fois plus grande que celle dont le cosinus est y. On trouverait de même $\Delta\varphi$ en fonction rationnelle de $\sin\ \varphi$.

Ou pourra donc, par les formules connues, exprimer

$$x_{2a+b,2c+d} = f(x_{a+b,c+d}, x_{b,d})$$

en fonction rationnelle de $x_{a+b,c+d}$ et de $x_{b,d}$

Ce principe posé, démontrons la proposition suivante :

"Toute fonction rationnelle de $x_{0,0}, x_{1,0}, x_{0,1}, \ldots$ invariable par les substitutions de la forme $(x_{k,l}, x_{ak+b,cl+d})$ immédiatement connue."

En effet, on pourra d'abord rendre cette fonction fonction de $x_{0,0}, x_{1,0}, x_{0,1}$ seuls, par l'élimination des autres racines. Cette fonction ne changerait pas de valeur si à la place de $x_{0,0}, x_{1,0}, x_{0,1}, \ldots$ on mettait $x_{0,0}, x_{1,0}, x_{k,l}$, k n'étant pas nul.

Or, comme toute racine de la forme $x_{0,1}$ s'exprime en fonction rationnelle de $x_{0,0}$, et $x_{0,l}$, il s'ensuit que toute fonction symmétrique des racines dans lesquelles le premier indice n'est pas nul sera connue en fonction rationnelle et entière de $x_{0,0}$ et de $x_{0,l}$. Donc la fonction que nous considérions tout à l'heure ne variant pas quand on met pour $x_{1,0}$ l'une quelconque des racines dont le premier indice n'est pas nul, cette fonction sera une fonction de $x_{0,0}$, et de $x_{0,l}$, seuls. On éliminera encore $x_{0,1}$ de cette fonction qui deviendra fonction de $x_{0,0}$ et enfin une quantité connue.

Le principe est donc démontré.

Cela posé soit F une fonction symmétrique de certaines racines de l'équation proposée. Posons

$$F(x_{0,0}, x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots) = y_0$$

$$F(x_{1,0}, x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots) = y_1$$

$$F(x_{2,0}, x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots) = y_2$$

Prenons une fonction de $y_0, y_1, y_2 \ldots$ invariable par les substitutions linéaires de ces quantités. Il est clair que cette fonction sera une fonction des racines x invariable par toute substitution telle que ([28]) $(x_{k,l,ak+b,ck+d})$. Cette fonction sera donc connue. On pourra donc, par la méthode que j'ai indiquée, trouver les valeurs de $y_0, y_1, y_2 \ldots$ et par conséquent décomposer l'équation proposée en facteurs dont l'un ait pour racines $x_{0,0}, x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots$

On trouverait de même un facteur de la même équation dont les racines seraient $x_{0,0}, x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots$. On pourra donc en cherchant le plus grand commun diviseur de ces deux facteurs avoir $x_{0,0}$, qui est l'une des solutions cherchées. Il en serait de même des autres racines. ([29])

Note 1. sur l'intégration des équations linéaires.

Soit l'équation linéaire à coefficients variables

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \ldots + S\frac{dy}{dx} + Ty = V$$

Pour l'intégrer supposons que nous connaissions n solutions

$$y = u_1 \quad , = u_, \ldots, = u_n$$

de cette équation privée de second membre. La solution complète

$$y = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots + \alpha_n u_n$$

qui convient à l'équation privée de second membre, satisfera encore quand on supposera ce second membre, si au lieu de regarder $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ comme constantes, on les considère comme déterminées par les équations suivantes en $\frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \ldots \frac{dx_n}{dx}$

$$(1)\begin{cases} u_1\frac{d\alpha_1}{dx}+u_2\frac{d\alpha_2}{dx}+u_3\frac{d\alpha_3}{dx}+\ldots+u_n\frac{d\alpha_n}{dx}=0 \\ \frac{du_1}{dx}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}\frac{d\alpha_2}{dx}+\frac{du_3}{dx}\frac{d\alpha_3}{dx}+\ldots+\frac{du_n}{dx}\frac{d\alpha_n}{dx}=0 \\ \frac{d^2u_1}{dx^2}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d^2u_2}{dx^2}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d^2u_3}{dx^2}\frac{d\alpha_3}{dx}+\ldots+\frac{d^2u_n}{dx^2}\frac{d\alpha_n}{dx} \\ \ldots \\ \frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d^{n-1}u_2}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d^{n-1}u_3}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_3}{dx}+\ldots+\frac{d^2u_n}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_n}{dx}=V \end{cases}$$

Il importe d'abord de reconnaître si le dénominateur commun aux valeurs tirées de ces équations peut ou non être nul.

Pour cela j'observe que ce dénominateur est le même que celui des n équations suivantes résolues par rapport à $PQ\ldots ST$

$$(2)\quad\begin{cases} \frac{d^nu_1}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}u_1}{dx^{n-2}}+\ldots+S\frac{du_1}{dx}+Tu_1=0 \\ \frac{d^nu_2}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}u_2}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}u_2}{dx^{n-2}}+\ldots+S\frac{du_2}{dx}+Tu_2=0 \\ \frac{d^nu_3}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}u_3}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}u_3}{dx^{n-2}}+\ldots+S\frac{du_3}{dx}+Tu_3=0 \\ \ldots \\ \frac{d^nu_n}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}u_n}{dx^{n-2}}+\ldots+S\frac{du_n}{dx}+Tu_n=0 \end{cases}$$

Or ces équations doivent être parfaitement déterminées, puisque la forme d'une équation différentielle dépend uniquement de celle de l'équation intégrale.

Donc le dénominateur en question n'est jamais nul.

Mais on peut de plus le calculer d'avance. Soit D le dénominateur. Il est aisé de voir que l'on aura

$$\frac{dD}{dx}=D_n+D_{n-1}+D_{n-2}+D_{n-3}+\ldots+D_1$$

$D1$ étant ce que devient D quand on y substitue partout $\frac{d^nu}{dx^n}$ à la place de $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$, $Dn-1$ ce que devient D quand on y met $\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ au lieu de $\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}$ et ainsi de suite enfin $D1$ ce que devient D par la substitution de $\frac{du}{dx}$ la place de u

Et comme toutes les parties sont nulles excepté D_n il reste

$$\frac{dD}{dx}=D_n$$

Mais on a d'ailleurs

$$P=-\frac{D_n}{D}$$

Puisque $-Dn$ est le numérateur de l'expression de P tirée de (2).

Donc $D=e^{-\int Pdx}$ valeur cherchée du dénominateur.

On pourrait de cette dernière formule déduire celle que nous avons trouvée plus haut, en considérant une équation linéaire de l'ordre n, comme remplaçant n équations simultanées seulement du premier ordre. Quant à la détermination des numérateurs des quantités inconnues, et à l'examen du cas où l'on n'aurait qu'une partie des solutions de la question, nous n'entrerons pas dans ces détails auxquels le lecteur suppléera au moyen des principes émis plus haut.

RECHERCHE SUR LES SURFACES DU 2d DEGRÉ ([30]).

Problème ([31]). Étant données dans un parallélépipède les trois arêtes $m, m', m"$, et les angles $\theta, \theta', \theta''$, que font entre elles respectivement m' et $m"$, m et $m"$, trouver l'expression des angles de la diagonale avec les arêtes.

Soit $m = OM, m' = OM', m" = OM"$. Si l'on cherche l'angle POM que la diagonale OP forme avec OM, on aura dans le triangle OPM

$$\cos POM = \frac{m^2 + OP^2 - \overline{PM}^2}{2m.OP}$$

Mais on a par la géométrie

$$\overline{OP}^2 = m^2 + m'^2 + 2m'm'' \cos\theta + 2mm'' \cos\theta' + 2mm' \cos\theta'$$
$$\overline{PM}^2 = m'^2 + m''^2 + 2m'm'' \cos\theta$$

d'où l'on tire

$$m^2 + \overline{OP}^2 - \overline{PM}^2 = 2m(m + m'' \cos\theta' + m'' \cos\theta'')$$

et enfin

$$\cos POM = \frac{m + m'' \cos\theta' + m' \cos\theta''}{OP}$$

On trouvera de même pour les cosinus des angles $M'OP$ et $M"OP$

$$\frac{m + m'' \cos\theta + m \cos\theta''}{OP} \qquad \text{et} \qquad \frac{m'' + m' \cos\theta + m \cos\theta'}{OP}$$

Le problème est donc résolu.

Problème. Trouver pour des axes quelconques la condition de perpendicularité d'une droite et d'un plan.

Prenons à partir de l'origine et suivant certaine direction $OP = 1$. Appelons $m, m', m"$ les coordonnées du point P. Les équations de toute droite parallèle à OP, seront de la forme

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{m'} = \frac{z-c}{m''}$$

Les quantités $m, m', m"$ étant liées par la relation

$$1 = m^2 + m'^2 + m''^2 + 2m'm'' \cos\theta + 2mm' \cos\theta''$$

Cherchons de même l'équation d'un plan perpendiculaire à OP.

Il est évident que si on appelé x, y, z les coordonnées de ce plan, et que l'on projette orthogonalement sur OP ces coordonnées la somme des projections devra être constante. Or on connaît, par le problème précédent, les cosinus des angles de la droite OP avec les axes. L'équation du plan sera donc.

$$\begin{aligned}(m + m' \cos\theta'' + m'' \cos\theta')x + (m' + m \cos\theta'' + m'' \cos\theta)y \\ + (m'' + m \cos\theta' + m' \cos\theta)z + p = 0\end{aligned}$$

Et il est remarquable que le premier membre de cette équation exprime aussi la distance à ce plan d'un point quelconque dont les coordonnées sont x, y, z. Ce qui est évident puisque ce premier membre n'est autre chose que la somme des projections des coordonnées d'un point sur la droite OP, augmentée de la distance du plan à l'origine.

Cela posé, soit l'équation d'une surface du second degré rapportée à des axes obliques

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = \phi(x, y, z) = 0$$

Lorsqu'on cherche l'équation du plan qui divise également toutes les cordes parallèles à une droite donnée, on substitue l'équation $\phi(x, y, z) = 0$ à la place de x, y, z,

$$x + \rho m \quad y + \rho m' \quad z + \rho m''$$

et les racines de l'équation en ρ qu'on obtient ainsi, expriment les distances du point (x, y, z) aux deux points où une corde parallèle à la droite $\frac{x}{m} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{m''}$ menée par le point (x, y, z) coupe la surface du

second degré. Ces deux distances devant être égales et de signe contraire, il suffira de faire dans l'équation en ρ le second terme nul pour avoir l'équation du plan diamétral.

Or l'équation en ρ est en faisant

$$M = \phi(m, m', m'')$$

$$\begin{aligned} MP = (Am + B''m' + B'm'')x \quad & +(A'm' + b''m + Bm'')y \\ & +(A''m'' + B'm + Bm')z + Cm + C'm' + C''m'' \end{aligned}$$

de la forme

$$\rho^2 + 2P\rho + Q = 0$$

Si l'on cherche l'équation d'un plan principal, il faudra de plus que le plan représenté par $P = 0$ soit perpendiculaire à la droite $\frac{x}{m} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{m''}$ et par conséquent que son équation soit de la forme

$$\begin{aligned} (m + m' \cos\theta'' + m'' \cos\theta')x + (m' + m \cos\theta'' + m'' \cos\theta)y \\ + (m'' + m \cos\theta' + m'' \cos\theta)z + p = S = 0 \end{aligned}$$

Il faudra donc que les coefficients de MP et ceux de S soient proportionnels et que l'on ait

$$\frac{MP}{S} = \text{const} = s$$

La quantité étant telle que l'on ait

$$\begin{aligned} (A - s)m + (B'' - s \cos\theta'')m' + (B' - s \cos\theta')m'' = 0 \\ (A' - s)m' + (B'' - s \cos\theta'')m + (B - s \cos\theta)m'' = 0 \\ (A'' - s)m'' + (B' - s \cos\theta')m + (B - s \cos\theta)m'' = 0 \end{aligned}$$

On en déduit l'équation en s,

$$\begin{aligned} 0 =& (A - s)(B - s \cos\theta)^2 + (A' - s)(B' - s \cos\theta')^2 + (A'' - s)(B'' - s \cos\theta'')^2 \\ & - (A - s)(A' - s)(A'' - s) - 2(B - s \cos\theta)(B' - s \cos\theta'') \end{aligned}$$

qui est du troisième degré parce qu'en effet il existe trois plans principaux.

Mais la quantité s et l'équation qui la détermine jouissent d'une propriété fort remarquable que personne jusqu'ici ne paraît avoir observée.

Supposons que l'on transforme les coordonnées en exprimant les anciennes coordonnées d'un point en fonction des nouvelles. Si on substitue les valeurs de x, y, z en x', y', z' dans la fonction $\varphi(x, y, z)$ on obtient une fonction $\varphi'(x', y', z')$ d'une autre forme, et qui est telle que dans la fonction φ on substitue les anciennes coordonnées d'un point déterminé, et dans la fonction φ' les nouvelles, les deux résultats ainsi obtenus sont égaux.

Cela posé reprenons l'expression de s, $s = \frac{MP}{S}$ la quantité M étant le résultat de la substitution des coordonnées du point pris sur une droite fixe à une distance $= 1$ de l'origine c'est à dire d'un point fixe, dans l'équation de la surface, ne variera pas quand on transformera les coordonnées.

La quantité P exprimant la demi-somme des distances d'un point (x, y, z) à la surface distances comptées suivant une droite fixe, est aussi invariable par la transformation des coordonnées. Enfin la quantité S exprimant la distance d'un point à un plan déterminé, ne saurait non plus varier.

La quantité s est donc elle même invariable pour un même plan principal, et l'équation qui donne ses trois valeurs aura des coefficients invariables. Or en la développant, on a

$$\begin{aligned} & (1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'' + 2\cos\theta\cos\theta\cos\theta'')s^3 \\ & - s^2[A \sin^2\theta + A' \sin^2\theta' + A'' \sin^2\theta'' + 2b(\cos\theta' \cos\theta'' - \cos\theta) \\ & + 2B'(\cos\theta \cos\theta'' - \cos\theta') + 2B''(\cos\theta \cos\theta' - cos\theta'')] \\ & + s(A'A'' + AA'' + AA' - 2AB \cos\theta 2A'B' \cos\theta' - 2A''B'' \cos\theta'' \\ & - B^2 - B'^2 - B''^2 + 2B'B'' \cos\theta \\ & + 2BB'' \cos\theta' + 2BB' \cos\theta'') + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0 \end{aligned}$$

Divisant tous les coefficients par le premier ou par le dernier on aura trois fonctions des constantes qui entrent dans l'équation de la surface, invariables par la transformation des coordonnées. Si l'on suppose cos θ, cos θ' et cos θ" nuls on aura pour tous les systèmes d'axes où cela peut être c'est à dire d'axes rectangulaires,les équations

$$A + A' + A'' = \text{const}$$

$$B^2 + B'^2 + B''^2 - A'A'' - AA''AA' = \text{const}$$

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = \text{const}$$

Également si l'on suppose encore dans l'équation en s, B, B', B" nuls, c'est à dire qu'on suppose la surface rapportée à des diamètres conjugués, en divisant toute l'équation par le dernier terme, on trouvera pour tous les systèmes semblables

$$\frac{1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta' - \cos^2\theta'' + 2\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''}{AA'A''} = \text{const}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{A'A''} + \frac{\sin^2\theta'}{AA''} + \frac{\sin^2\theta''}{AA'} = \text{const}$$

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{A'} + \frac{1}{A''} = \text{const}$$

Et comme $\frac{1}{A}, \frac{1}{A'}, \frac{1}{A''}$ expriment dans ce cas les carrés des diamètres, on retrouve ici les théorèmes connus.

FIN.

---

1. Trois de ces feuilles comportent du texte ; une se rapporte à la théorie de la transformation, une autre au théorème d'addition pour la fonction sin am, déduit de la formule fondamentale de trigonométrie sphérique, la troisième au théorème d'addition pour la fonction $\Pi(u, a)$.

2. Les papiers que m'a remis Mme de Blignières contiennent un brouillon, couvert de ratures et de corrections, qui est de la main de Liouville, et qui porte en tête : Lettre d'Alfred Galois à M. Jacobi, 17 novembre 1847. Voici cette lettre :
   Monsieur,
   J'ai l'honneur de vous envoyer, en vous priant d'en agréer l'hommage, un exemplaire de la première Partie des Œuvres mathématiques de mon frère. Il y a près d'un an qu'elle a paru dans le Journal de M. Liouville, et, si je ne vous l'ai pas adressée plus tôt, c'est que, sans cesse, j'espérais pouvoir vous faire remettre d'un jour à l'autre l'Ouvrage complet, dont la publication s'est trouvée retardée par diverses circonstances. Au reste, cette première Partie renferme ce que mon pauvre Évariste a laissé de plus important et nous n'avons guère à y ajouter que quelques fragments arrachés au désordre de ses papiers. Ainsi on n'a rien retrouvé concernant la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes ; on voit seulement qu'il s'était livré la plume à la main à une étude approfondie de vos Ouvrages. Quant à la théorie des équations, M. Liouville et d'autres géomètres que j'ai consultés affirment que son Mémoire, si durement repoussé par M. Poisson, contient les bases d'une doctrine très féconde et une première application importante de cette doctrine. "Ce travail, me disent-ils, assure pour toujours une place à votre frère dans l'histoire des Mathématiques." Malheureusement étranger à ces matières, j'écoute avec plaisir de telles paroles : si votre précieux suffrage, qu'Évariste aurait ambitionné par-dessus tout, venait les confirmer, ce serait pour ma mère et pour moi une bien grande consolation ; il deviendrait pour notre Évariste un gage d'immortalité, et je croirais que mon frère n'est pas entré tout entier dans la tombe. Etc., etc.

3. En posant
   $$[m, n] = \int_0^1 (1-x)^{m-1} x^{m-1}\, \mathrm{d}x,$$
   Galois part de la relation $[m+1, n] = \frac{m}{m+n}[m, n]$;
   il en déduit, en désignant par p un nombre entier positif quelconque,
   $$[m, n] = \frac{[p, m]}{[p, m+n]}[m+p, n],$$
   puis
   $$[m, n] = \lim_{p\to\infty} \frac{[p, m] \times [p, n]}{[p, m+n]};$$

remplaçant $[p,n]$ par $\dfrac{1}{p^n}\displaystyle\int_0^p (1-\int xp)^{\mu-1}x^{n-1}\,\mathrm{d}x$, et en passant à la limite, il obtient $[m,n]=\dfrac{\Gamma m\Gamma n}{\Gamma(m+n)}$.
Il établit ensuite la relation

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{x-1}\,\mathrm{d}x=\phi(n)-\phi(1),$$

où

$$\phi(n)=\frac{d\log\Gamma(n)}{dn},$$

en partant de ce que l'on a, pour $m=1$,

$$\frac{d\log[m,n]}{dm}=\frac{\int_0^1\log(1-x)x^{n-1}\,\mathrm{d}x}{\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x}=\int_0^1\log(1-x)nx^{n-1}\,\mathrm{d}x,$$

d'où, en intégrant le dernier membre par parties,

$$\phi(1)-\phi(n+1)=-\int_0^1\frac{x^n-1}{x-1}dx.$$

4. Œuvres d'Abel, édition Sylow, t. I, p. 515.
5. La feuille a été pliée ; sur la moitié de la quatrième page, on trouve quelques calculs relatifs à l'intégrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(x^2-2\alpha x+\gamma^2)(x^2-2\beta x+\gamma^2)}}$$

où Galois fait la substitution

$$x+\frac{\gamma^2}{x}=2z$$

6. Ce fragment occupe deux feuilles, écrites sur les deux faces, du format 23 x 18.
7. Cette phrase elliptique a été ajoutée dans une fin de ligne et dans l'interligne au-dessous.
8. La première page finit ici ; les six lignes qui suivent sont au verso.
9. Un peu plus bas, on lit : Discussion des groupes irréductibles ; le texte de la page est couvert de calculs, écrits en renversant la page de haut en bas.
10. Les mots mis ici entre crochets sont barrés ; au reste tout ce passage, à partir de "Du cas ou" jusqu'à "plusieurs fonctions connues" est couvert de ratures et de surcharges ; on lit, par exemple, sous une rature : "Si D est le commun diviseur à ce groupe et à celui de la fonction supposée" ; tout ce passage est un renvoi placé au bas de la page, de façon à être substitué à trois lignes qui sont barrées, et dont voici le texte :
Du cas où une fonction des racines est censée connue. Remarque. On peut réduire à ce cas celui où on supposerait plusieurs connues.
11. Au-dessous en interligne :
Jusqu'ici on avait cru
12. Les deux fragments qui suivent sont sur l'autre face de la feuille ; ils sont séparés par un blanc laissé au milieu de la page ; au-dessus de l'avant-dernière ligne du premier passage et dans le blanc, on trouve les mots suivants dont le premier est couvert d'une rature et dont les autres sont bâtonnés ; la lecture du mot Présenté est douteuse.

Mémoire
la théorie des fonctions et sur celle
des équations littérales.
Présenté à l'Institut par
E. Galois.
Octobre 1829.

13. Mots placés en interligne et presque illisibles ; on pourrait aussi bien lire *remarque* que *réciproque*.
14. Une feuille du format 23 x 17, écrite sur les deux faces.
15. En renversant la page, on trouve quelques lignes relatives à la décomposition d'un groupe, que l'absence de contexte rend inintelligibles, puis le commencement d'une question, qu'on retrouve en entier sur un petit fragment de papier, comme il suit :
Étant donnée une substitution S et deux permutations A et A' on demande une substitution S' telle que la lettre située au k^{ième} rang dans A' prenne le $\phi k^{\text{ième}}$ rang dans AS, la lettre située au $k^{ième}$ rang dans A' prenne le $\phi k^{\text{ième}}$ dans $A'S'$.
Supposons le problème résolu. Soit $A'=AT$, on aura évidemment

$$A'S'=AST$$

16. Ce fragment comporte trois feuilles du format 20×15, du même papier que le fragment M ; la troisième feuille, dont il est question dans une note ultérieure, est intacte ; les deux autres sont déchirées, à droite, de haut en bas ; il manque quelques lettres et, parfois, des mots entiers ; d'où les crochets que l'on trouvera dans le texte imprimé. La déchirure a pu se faire en détachant les trois feuilles d'un cahier pareil à celui qui porte le titre "Notes de mathématiques" et dont j'ai parlé plus haut.
Cet essai est sans doute antérieur à la rédaction du Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux, et de la feuille relative à la proposition I de ce Mémoire, dont j'ai parlé précédemment (p. 11) ; les deux rédactions sont interrompues ; pour l'une et l'autre, la fin de la page reste blanche ; l'essai n'a pas été achevé.

17. Ces mots sont mis en marge.

18. La page se termine au mot “telles”, le reste se continue sur deux feuilles distinctes ; l’une de ces deux feuilles est écrite sur le recto et le verso, c’est celle dont le texte est imprimé ci-dessus ; l’autre feuille n’est écrite que sur le recto, jusqu’au milieu de la page : le verso contient quelques calculs relatifs à la résolution algébrique de l’équation du troisième degré. Les deux feuilles contiennent le même texte jusqu’à la fin de l’alinéa “sont seules connues”. A partir de ces mots, on lit dans la seconde feuille :
Mais, avant de développer la démonstration complète de cette proposition, nous ferons voir qu’il suffit de la donner dans le cas où l’équation proposée ne se décompose pas en facteurs dont les coefficients se déduisent rationnellement de ses coefficients et des quantités qui lui sont adjointes, plus brièvement, dans le cas où l’équation n’a pas de diviseurs rationnels. Admettons en effet que la chose ait été démontrée dans ce cas, et supposons qu’une équation se décompose en deux facteurs qui n’aient eux-mêmes aucun diviseur rationnel.

19. Un fragment qui semble un morceau déchiré (hauteur, 9") d’une feuille de papier du même format contient le texte suivant, d’un côté : Soit G un groupe correspondant à l’équation $\psi = 0$ et $A, B, C...$ les permutations du groupe G. Pour obtenir un pareil groupe, il faut opérer sur une permutation A toutes les substitutions de l’équation ψ. Nous supposons que la permutation A contienne toutes les racines de $F(x) = 0$. Prenons une fonction $\Phi(A\Sigma)$ invariable par les substitutions Σ relatives aux racines de ϕ,
et de l’autre côté :
qui correspondent aux substitutions indiquées quand aux racines de l’équation ϕ on substitue leurs expressions en fonction de celles de ψ. Je dis qu’il viendra un groupe de permutations qui relativement à la proposée $F(x) = 0$ satisfera à la condition exigée. En effet, toute fonction des racines invariable par les substitutions de ce groupe pourra d’abord s’exprimer en fonction des seules racines de l’équation ψ. De plus, comme cette fonction transformée sera encore invariable par les substitutions de l’équation ψ on voit que sa valeur numérique

20. Feuille déchirée (18 x 17), écrite sur les deux faces.

21. Cet énoncé est écrit sur un morceau de papier (10 x 18) ; l’écriture, parfois malaisée à déchiffrer en raison des ratures et des surcharges, trahit une certaine nervosité ; au-dessous, Galois a mis son nom, écrit à main posée, avec une certaine complaisance.

22. Il n’est guère utile de dire qu’il faut lire HS' ; ce passage est à demi effacé.

23. Une seule page de format 20 x 15. Ce fragment et le suivant doivent être rapprochés de l’*Analyse d’un Mémoire sur la résolution algébrique des équations*, qui a été publiée dans le *Bulletin de Férussac (Œuvres*, p. 11), et dont les premières lignes sont identiques à celles du fragment M.

24. Une feuille (18 x 15), écrite des deux côtés.

25. Relativement au premier membre de la congruence qui suit, je dois signaler l’énoncé que voici, écrit sur la première page d’une feuille double (22 x 18) : Le produit
$$(p^\nu - p)(p^\nu - p^2)(p^\nu - p^3)\dots(p^\nu - p^{\nu-1})$$
n’admet point de facteur premier $\dfrac{p^\nu - 1}{\partial(p-1)}$, ∂ étant le plus grand commun diviseur entre ν et $p-1$, à moins que $\nu = 2$.
Cet énoncé est placé au milieu de calculs dont quelques-uns concernent la transformation des fonctions elliptiques. Sur les autres pages, d’autres formules se rapportent à l’équation $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d'u}{dt'}$ aux fonctions trigonométriques, à la résolution des équations binômes, à la décomposition des fonctions trigonométriques en produits ou en fractions simples, etc.

26. Dans la ligne qui suit et, un peu plus loin, dans l’égalité $p = \nu$, la lettre ν a été mise en surcharge sur la lettre μ ; ensuite, la correction n’a pas été faite. Au reste, la lecture de ce fragment est, par endroits, assez difficile.

27. Trois feuilles (20 x 15) écrites sur les deux faces.

28. Il faut lire sans doute
$$(x_{k,l,ak+b,cl+d}).$$

29. Deux pages et demie d’une feuille double (23 x 18).

30. Malgré son caractère élémentaire, j’ai cru devoir publier cette note, qui n’est pas sans intérêt pour l’histoire de la Géométrie analytique et de la théorie des invariants. En raison de son contenu, on peut supposer qu’elle remonte au temps où Galois était élève de M. Richard, dans la classe de Mathématiques spéciales, ou au moment où il sortait de cette classe pour entrer à l’École Normale. Toutefois, la première supposition semble devoir être écartée : s’il en avait eu connaissance, M. Richard aurait sans doute fait pénétrer dans son enseignement les idées de son élève, qui se seraient diffusées immédiatement. Quoi qu’il en soit, cette note a, comme le morceau précédent, l’aspect d’une copie d’écolier, avec la signature en haut et à gauche ; elle ressemble tout à fait à quelques-unes des copies de Galois, que M. Richard avait conservées et données à Hermite. M. Émile Picard a retrouvé ces copies de Galois dans les papiers d’Hermite ; il a bien voulu me les remettre pour qu’elles soient jointes au précieux trésor que Mme de Blignières donne à l’Académie des Sciences. L’une de ces copies contient un petit travail, que Galois a sans doute fait librement et remis à son maître, et où son esprit philosophique se manifeste déjà ; j’en extrais cette curieuse réflexion :
Un auteur me dit : “l’arithmétique est la base de toutes les parties des Mathématiques, puisque c’est toujours aux nombres qu’il faut ramener les résultats des calculs.” D’après la dernière phrase de l’auteur, il serait plus naturel de croire que l’arithmétique est le terme et le complément de l’Analyse ; et c’est ce qui a lieu.
Toutes ces copies, comme la présente note, sont sur du papier de format 23 x 18.

31. Il y a une figure en marge, dans le texte de Galois.

Transcription de la traduction de Laugel en français de l'article de Bernhard Riemann (Denise Vella-Chemla, 24.6.2017)

wikisource Note de Riemann

SUR LE NOMBRE DES NOMBRES PREMIERS INFERIEURS A UNE GRANDEUR DONNEE

Monatsberichte der Berliner Akademie, novembre 1859.
Oeuvres de Riemann, 2ième édition, pages 145-155.

Je ne crois pouvoir mieux exprimer mes remerciements à l'Académie pour la distinction à laquelle elle m'a fait participer en m'admettant au nombre de ses Correspondants qu'en faisant immédiatement usage du privilège attaché à ce titre pour lui communiquer une étude sur la fréquence des nombres premiers. C'est un sujet qui, par l'intérêt que Gauss et Dirichlet lui ont voué pendant de longues années, ne me semble peut-être pas indigne de faire l'objet d'une telle Communication.

Je prendrai pour point de départ dans cette étude la remarque faite par Euler[1] que le produit

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum \frac{1}{n^s}$$

lorsque p prend pour valeur tous les nombres premiers et n tous les nombres entiers. La fonction de la variable complexe s, qui sera représentée par ces deux expressions, tant qu'elles convergent, je la désignerai par $\zeta(s)$. Toutes deux convergent qu'autant que la partie réelle de s est supérieure à 1. Néanmoins il est facile de trouver pour la fonction une expression qui reste toujours valable.

En faisant usage de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\prod(s-1)}{n^s}$$

on obtient d'abord

$$\prod(s-1)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$$

Si maintenant l'on considère l'intégrale

$$\int \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

prise dans le sens positif de $+\infty$ à $+\infty$ et autour d'un domaine de grandeurs qui contient à son intérieur la valeur 0 mais qui ne contient aucune autre valeur de discontinuité de la fonction sous le signe d'intégration, on obtient aisément pour la valeur de cette intégrale

$$(e^{-\pi si} - e^{\pi si}) \int_0^\infty \frac{x^{s-1}dx}{e^x-1}$$

en faisant l'hypothèse que dans la fonction multiforme

$$(-x)^{s-1} = e^{(s-1)log(-x)}$$

le logarithme de $-x$ est déterminé de telle sorte qu'il soit réel pour x négatif. On aura donc

$$2\ sin\ \pi s \prod(s-1)\zeta(s) = i \int_0^\infty \frac{(-x)^{s-1}dx}{e^x-1}$$

l'intégrale étant définie de la manière indiquée ci-dessus.

Cette équation donne maintenant la valeur de la fonction $\zeta(s)$ pour chaque valeur complexe de s et nous enseigne que cette fonction est uniforme, qu'elle est finie pour toutes les valeurs finies de s, sauf 1, et aussi qu'elle s'évanouit lorsque s est égal à un entier pair négatif[2].

Lorsque la partie réelle de s est négative, l'intégrale, au lieu d'être prise dans le sens positif autour du domaine de grandeurs assigné, peut être prise dans le sens négatif autour du domaine de grandeurs qui contient toutes les grandeurs complexes restantes, car l'intégrale, pour des valeurs dont le module est infiniment grand est alors infiniment petite. Mais, à l'intérieur de ce domaine, la fonction sous le signe d'intégration ne devient discontinue que lorsque x est égal à un multiple entier de $\pm 2\pi i$ et l'intégrale, par

conséquent, est égale à la somme des intégrales prises dans le sens négatif autour de ces valeurs. Mais l'intégrale relative à la valeur $n2\pi i$ égale $(-n2\pi i)^{s-1}(-2\pi i)$; on obtient donc

$$2sin\ \pi s \prod(s-1)\zeta(s) = (2\pi)^s \sum n^{s-1}[(-i)^{s-1} + i^{s-1}]$$

c'est-à-dire une relation entre $\zeta(s)$ et $\zeta(s-1)$ qui, en vertu de propriétés connues de la fonction $\prod$ peut aussi s'exprimer ainsi : la quantité

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

reste inaltérée lorsque s est remplacé par $1-s$.

Cette propriété de la fonction m'a engagé à introduire, au lieu de l'intégrale $\prod(s-1)$, l'intégrale $\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)$ dans le terme général de la série $\sum\frac{1}{n^s}$, ce qui fournit une expression très commode de la fonction $\zeta(s)$. On a en effet

$$\frac{1}{n^s}\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = \int_0^\infty e^{-n^2\pi x}x^{\frac{s}{2}-1}dx;$$

et, par conséquent, si l'on pose

$$\sum_1^\infty e^{-n^2\pi x} = \psi(x)$$

on a

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx;$$

ou bien, puisque

$$2\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\left[2\psi\left(\frac{1}{x}\right)+1\right]^{[3]},$$

on a encore

$$\prod\left(\frac{s}{2}-1\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x)x^{\frac{s}{2}-1}dx + \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \psi(x)\left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx$$

Je pose maintenant

$$s = \frac{1}{2} + ti$$

et

$$\prod\left(\frac{s}{2}\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = \xi(t)$$

en sorte que

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty \psi(x)x^{-\frac{3}{4}}cos\left(\frac{1}{2}t\ log\ x\right)dx,$$

ou encore

$$\xi(t) = 4\int_1^\infty \frac{d\left[x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right]}{dx}x^{-\frac{1}{4}}cos\left(\frac{1}{2}t\ log\ x\right)dx$$

Cette fonction est finie pour toutes les valeurs finies de t et peut être développée suivant les puissances de t^2 en une série qui converge très rapidement. Puisque, pour une valeur de s dont la partie réelle est plus grande que 1, $log\ \zeta(x) = -\sum log(1-p^{-s})$ reste fini et que ce même fait a lieu pour les logarithmes des facteurs restants de $\xi(t)$, la fonction $\xi(t)$ peut seulement s'évanouir lorsque la partie imaginaire de t se trouve comprise entre $\frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2}i$. Le nombre de racines de $\xi(t)=0$ dont les parties réelles sont comprises entre 0 et T est environ égal à

$$\frac{T}{2\pi}log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$$

car l'intégrale $\int d\ log\ \xi(t)$ prise le long d'un contour décrit dans le sens positif, comprenant à son intérieur l'ensemble des valeurs de t dont les parties imaginaires sont comprises entre $\frac{1}{2}i$ et $-\frac{1}{2}i$ et les parties réelles entre 0 et T est égale (abstraction faite d'une partie fractionnaire de même ordre de grandeur que la

grandeur $\frac{1}{T}$) à $(T log\ \frac{T}{2\pi} - T)i$; or cette intégrale est égale au nombre de racines de $\xi(t) = 0$ situées dans ce domaine, multiplié par $2\pi i$. On trouve, en effet, entre ces limites un nombre environ égal à celui-ci, de racines réelles, et il est très probable que toutes les racines sont réelles[4].

Il serait à désirer, sans doute, que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude.

Si l'on désigne par α toute racine de l'équation $\xi(\alpha) = 0$, on peut exprimer $log\ \xi(t)$ par

$$\sum log\left(1 - \frac{t^2}{\alpha^2}\right) + log\ \xi(0)$$

En effet, puisque la densité des racines de grandeur t augmente seulement avec t comme le fait $log\ \frac{t}{2\pi}$, cette expression converge et pour t infini ne devient infinie que comme l'est $t\ log\ t$; elle diffère de $log\ \xi(t)$ par conséquent d'une fonction de t^2 qui, pour t fini, reste finie et continue et qui, divisée par t^2, sera infiniment petite pour t infini.

Cette différence, par suite, est une constante dont la valeur peut être déterminée en posant $t = 0$.

A l'aide de ces principes auxiliaires, nous pouvons maintenant déterminer le nombre des nombres premiers qui sont inférieurs à x.

Soit $F(x)$ ce nombre lorsque x n'est pas exactement égal à un nombre premier, et soit $F(x)$ ce nombre augmenté de $\frac{1}{2}$ lorsque x est premier, de telle sorte que, pour une valeur de x, pour laquelle $F(x)$ varie par un saut brusque, on ait,

$$F(x) = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

Si, maintenant, dans l'expression

$$log\ \zeta(s) = -\sum log(1 - p^{-s}) = \sum p^{-s} + \frac{1}{2}\sum p^{-2s} + \frac{1}{3}\sum p^{-3s}$$

on remplace p^{-s} par $s\int\limits_p^\infty x^{-s-1}dx, p^{-2s} = s\int\limits_{p^2}^\infty x^{-s-1}dx, \ldots$, on obtient

$$\frac{log\ \zeta(s)}{s} = \int\limits_1^\infty f(x)x^{-s-1}dx,$$

où l'on a désigné par $f(x)$ l'expression $F(x) + \frac{1}{2}F(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}F(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots$

Cette équation a lieu pour toute valeur complexe $a + bi$ de s, pourvu que $a > 1$. Mais lorsque, sous ces hypothèses, l'équation suivante

$$g(s) = \int\limits_0^\infty h(x)x^{-s}d\ log\ x$$

a lieu, l'on peut, à l'aide du théorème de Fourier, exprimer la fonction h par la fonction g. Cette équation, quand $h(x)$ est réel et que

$$g(a + bi) = g_1(b) + ig_2(b)$$

se décompose en les deux suivantes :

$$g_1(b) = \int\limits_0^\infty h(x)x^{-a}\cos(b\log x)d\log x,$$

$$ig_2(b) = -i\int\limits_0^\infty h(x)x^{-a}\sin(b\log x)d\log x.$$

Lorsque l'on multiplie les deux équations par

$$[\cos(b\log y) + i\sin(b\log y)]\,db,$$

et que l'on intègre de $-\infty$ à $+\infty$, l'on obtient, en vertu du théorème de Fourier, dans les seconds membres des deux équations $\pi h(y)y^{-a}$, et, par conséquent, en ajoutant les deux équations et multipliant par iy^a, on a

$$2\pi i h(y) = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} g(s)y^s ds,$$

où l'intégration doit être prise de telle sorte que la partie réelle de s reste constante[5].

Cette intégrale représente, pour une valeur de y pour laquelle a lieu une variation par saut brusque de la fonction, la valeur moyenne des valeurs de la fonction h de chaque côté du saut. Avec les modes de détermination exposés ci-dessus, la fonction $f(x)$ possède cette même propriété, et l'on a donc, d'une manière générale,

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\log\zeta(s)}{s} y^s ds$$

On peut maintenant substituer à $log\ \zeta$, l'expression trouvée précédemment[6]

$$\frac{s}{2}\log\pi - \log(s-1) - \log\prod\frac{s}{2} + \sum_{\alpha}\log\left[1+\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha^2}\right] + \log\xi(0)$$

Mais les intégrales de chaque terme de cette expression, prises jusqu'à l'infini, ne convergent pas ; il sera donc convenable de transformer l'équation précédente à l'aide d'une intégration par parties en

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{d\frac{\log\zeta(s)}{s}}{ds} x^s ds$$

Comme

$$-\log\prod\frac{s}{2} = \lim\left[\sum_{n=1}^{n=m}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right) - \frac{s}{2}\log m\right],$$

pour $m=\infty$, et que, par suite

$$-\frac{d\frac{1}{s}\log\prod\left(\frac{s}{2}\right)}{ds} = \sum_{1}^{\infty}\frac{d\frac{1}{s}\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)}{ds},$$

tous les termes de l'expression de $f(x)$, à l'exception de

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s^2}\log\xi(0)x^s ds = \log\xi(0),$$

prennent alors la forme

$$\pm\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left[\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right]}{ds}x^s ds.$$

Mais on a maintenant

$$\frac{d\left[\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right]}{d\beta} = \frac{1}{(\beta-s)\beta}$$

et, lorsque la partie réelle de s est plus grande que la partie réelle de β,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^s ds}{(\beta-s)\beta} \quad = \frac{x^\beta}{\beta} \quad = \int_{\infty}^{x} x^{\beta-1}dx,$$

ou bien

$$= \int_{0}^{x} x^{\beta-1}dx,$$

selon que la partie réelle de β est négative ou positive. On a donc, dans le premier cas,

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d\left[\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)\right]}{ds}x^s ds$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{1}{s}\log\left(1-\frac{s}{\beta}\right)x^s ds$$

$$=\int\limits_{\infty}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx+\text{const.},$$

et, dans le second cas,

$$=\int\limits_{0}^{x}\frac{x^{\beta-1}}{\log x}dx+\text{const.}$$

Dans le premier cas, la constante d'intégration peut être déterminée en faisant tendre la partie réelle de β vers l'infini négatif.

Dans le second cas, l'intégrale de 0 à x prend des valeurs qui diffèrent de $2\pi i$, lorsque l'intégrale relative à des valeurs complexes est prise dans le sens positif ou dans le sens négatif, et elle sera, prise dans ce dernier sens, infiniment petite lorsque le coefficient de i dans la valeur de β est égal à l'infiniment grand positif ; mais ce fait aura lieu, dans le premier cas, lorsque le coefficient est égal à l'infiniment grand négatif.

Ceci nous enseigne comment $log(1-\frac{s}{\beta})$ doit être déterminé dans le premier membre de manière à faire disparaître la constante d'intégration.

En portant ces valeurs dans l'expression de $f(x)$ on obtient

$$f(x)=Li(x)-\sum_{\alpha}\left[Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right]$$

$$+\int_{x}^{\infty}\frac{1}{x^2-1}\frac{dx}{x\log x}+\log\xi(0),$$

[7],[8]

où, dans la série $\sum\limits_{\alpha}$ on donnera à α pour valeurs toutes les racines positives (ou à parties réelles positives) de l'équation $\xi(\alpha)=0$ en les rangeant par ordre de grandeur. On peut alors, après une discussion plus approfondie de la fonction ξ, démontrer aisément que lorsque les termes sont rangés, comme il est prescrit ci-dessus, dans la série

$$\sum\left[Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right],$$

celle-ci converge vers la même limite que l'expression

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-bi}^{a+bi}\frac{d\frac{1}{s}\sum\log\left[1+\frac{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}{\alpha^2}\right]}{ds}x^s ds,$$

lorsque la grandeur b croît sans limites. Mais, si l'on changeait cet ordre des termes de la série, on pourrait obtenir pour résultat n'importe quelle valeur réelle.

A l'aide de $f(x)$ l'on obtient $F(x)$ par inversion de la relation

$$f(x)=\sum\frac{1}{n}F\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

ce qui donne l'équation

$$F(x)=\sum(-1)^{\mu}\frac{1}{m}f\left(x^{\frac{1}{m}}\right),$$

où m doit être remplacé successivement par tous les nombres qui ne sont divisibles par aucun carré excepté 1 et où μ désigne le nombre des facteurs premiers de m.

Si on limite $\sum_\alpha$ à un nombre fini de termes, la dérivée de l'expression $f(x)$ c'est-à-dire, abstraction faite d'une partie qui décroît très rapidement lorsque x croît,

$$\frac{1}{\log x} - 2\sum_\alpha \frac{\cos(\alpha \log x) x^{-\frac{1}{2}}}{\log x},$$

fournit une expression approchée pour la densité des entiers premiers + la moitié de la densité des carrés, + le tiers de celle des cubes, + ... des entiers premiers inférieurs à x.

La formule approchée connue $F(x) = Li(x)$ n'est, par conséquent, exacte qu'aux grandeurs près de l'ordre de $x^{\frac{1}{2}}$ et fournit une valeur un peu trop grande ; car les termes non périodiques[9] dans l'expression de $F(x)$ sont, abstraction faite de grandeurs qui ne croissent pas indéfiniment avec x,

$$Li(x) - \frac{1}{2}Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}Li\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{5}Li\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6}Li\left(x^{\frac{1}{6}}\right) - \frac{1}{7}Li\left(x^{\frac{1}{7}}\right) + \dots$$

Du reste, la comparaison, entreprise par Gauss et Goldschmidt[10], de $Li(x)$ avec le nombre de nombres premiers inférieurs à x et poursuivie jusqu'à $x =$ trois millions a révélé que ce nombre, à partir de la première centaine de mille, est toujours inférieur à $Li(x)$ et que la différence des valeurs, soumises à maintes oscillations, croît néanmoins toujours avec x[11]. Mais la fréquence et la réunion plus dense par endroits des nombres premiers, si l'on peut s'exprimer ainsi, sous l'influence des termes périodiques, avaient déjà attiré l'attention, lors du dénombrement des nombres premiers, sans que l'on eût aperçu la possibilité d'établir une loi à ce sujet.

Il serait intéressant dans un nouveau dénombrement, d'étudier l'influence de chaque terme périodique contenu dans l'expression donnée pour la totalité des nombres premiers. Une marche plus régulière que celle donnée par $F(x)$ serait obtenue à l'aide de la fonction $f(x)$ qui, cela se reconnaît déjà très évidemment dans la première centaine, coïncide en moyenne avec $Li(x) + log\ \xi(0)$.

Notes

1. Leonhard Euler, *Introductio in analysin infinitorum.* Bd. 1. Lausanne 1748, p. 221-252, ch. 15 (*De Seriebus ex evolutione Factorum ortis*).

2. [Note du trad.] Ce mode d'existence de la fonction $\zeta(s)$ se reconnaît en se servant de la seconde forme de cette fonction

$$2\zeta(s) = \pi i \prod(-s) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^{s-2}}{e^{x-1}} dx$$

et en remarquant, en outre, que $\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2}$, dans le développement suivant les puissances ascendantes de x, ne contient que des puissances impaires.

3. Riemann se réfère à Carl Gustav Jacob Jacobi, *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum.* Königsberg 1829, p. 184, § 65, Nr. 6. La formule utilisée n'est pas donnée ici explicitement ; Jacobi la déduit à un autre endroit dans *Suite des notices sur les fonctions elliptiques.*, in Journal de Crelle 3 (1828), p. 303-310.

4. Cette phrase constitue le premier énoncé de "l'hypothèse de Riemann".

5. Note du trad. L'énoncé de ce théorème manque de rigueur. Les deux équations traitées séparément comme il est indiqué, les limites d'intégration $0, \infty$ se rapportant à $log\ x$, donnent

$$\pi y^{-\alpha}\left[h(y) \pm h\left(\frac{1}{y}\right)\right],$$

et, par conséquent, fournissent en premier lieu par leur somme la formule du texte.

6. Le manuscrit Lien du Clay Mathematical Institute (p. 4) et les *Gesammelte Werke* (p. 141) introduisent encore un $\sum_\alpha$ devant l'avant-dernier logarithme. Dans les *Monatsberichte* le signe somme manque :

$$\frac{s}{2} log\ \pi - log(s-1) - log \prod \frac{s}{2} + log\left(1 + \frac{(s-\frac{1}{2})^2}{\alpha\alpha}\right) + log\ \xi(0)$$

7. Note HME 1974, p. 31. Riemann écrit $log\ \xi(0)$ à la place de $-log\ 2$, mais puisqu'il utilise ξ pour noter une fonction différente à savoir la fonction $\xi(\frac{1}{2} + it)$, son $\xi(0)$ dénote $\xi(\frac{1}{2}) \neq \frac{1}{2}$. Cette erreur a été détectée

du vivant de Riemann par Angelo Genocchi (1817-1889), *Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite*, in Annali di Matematica Pura ed Applicata 3 (1860), p. 52-59.

8. Note du trad. La fonction $Li(x)$ doit être définie pour les valeurs réelles de x qui sont plus grandes que 1 par l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{log\ x} \pm \pi i$$

où l'on doit prendre le signe supérieur ou bien le signe inférieur, selon que l'intégration est prise relativement à des valeurs complexes dans le sens positif ou bien dans le sens négatif. De là l'on déduit aisément le développement donné par Scheibner (Schlömilch's Zeitschrift, t. V)

$$Li(x) = log\ log\ x - \Gamma'(1) + \sum_{1,\infty}^{x} \frac{(log\ x)^n}{n.n!},$$

qui est valable pour toutes les valeurs de x, et présente une discontinuité pour les valeurs réelles négatives (comparer la correspondance entre Gauss et Bessel).

Si l'on poursuit le calcul indiqué par Riemann, on trouve dans la formule $log\ \frac{1}{2}$ au lieu de $log\ \xi(0)$. Il est très possible que ceci ne soit qu'un *lapsus calami*, ou une faute d'impression, $log\ \xi(0)$ au lieu de $log\ \zeta(0)$; en effet, $log\ \zeta(0) = \frac{1}{2}$.

9. Note H.M.E. En toute rigueur, les termes $Li(x^{\frac{1}{2}+\alpha i})$ ne sont pas périodiques mais oscillatoires.

10. Carl Wolfgang Benjamin Goldschmidt (1807-1851), un élève de Gauss.

11. Lettre de Carl Friedrich Gauss à Johann Franz Encke (1791-1865) du 24 décembre 1849.

Extrait de la biographie *Alan Turing ou l'énigme de l'intelligence* d'Andrew Hodges (DC 30/12/13)

(p. 218) Ce n'était pas le seul parallèle entre les travaux de Claude Shannon et ceux d'Alan Turing. Il existait entre eux comme une sorte de réciprocité. Alan, dont le point fort était plutôt la logique des machines, s'était néanmoins plongé dans l'étude de l'information.

Shannon, de son côté, s'était également intéressé au concept de machine logique. Alan lui fit lire ses *Nombres calculables* et ils parlèrent d'une idée très présente dans l'article de Turing, à savoir la reproduction mécanique du cerveau. De 1936 à 1938, Shannon avait travaillé sur l'analyseur différentiel du Massachussetts Institute of Technology et, ayant étudié la neurologie au même titre que les mathématiques et la logique, il avait vu dans cette recherche un premier pas vers la machine pensante. Ils se rendirent compte qu'ils partageaient une même conception des choses : le cerveau n'avait rien de sacré, et si une machine parvenait un jour à faire aussi bien qu'un cerveau, alors elle serait effectivement douée de la faculté de *penser*. Ni l'un ni l'autre ne proposait cependant de moyen d'y arriver.

C'était là, au moins, un sujet dont ils pouvaient parler librement. Alan s'étonna un jour : "Shannon ne veut pas entrer seulement des *données* dans un cerveau, il veut lui donner de la *culture* ! Il veut lui faire écouter de la *musique* !". Une autre fois, à la cantine, alors qu'il dissertait sur les possibilités d'une "machine pensante", sa voix haut perchée commença à dominer le brouhaha général des jeunes cadres dynamiques en quête de promotion au sein des Bell Labs. Tous l'entendirent bientôt affirmer : "Non, ce qui m'intéresse, ce n'est pas de mettre au point un cerveau puissant. Je ne cherche rien d'autre qu'un cerveau médiocre, dans le genre de celui du président de l'American Telephone and Telegraph Company.". La salle entière fut pétrifiée, mais Alan continua nonchalamment à exposer son idée : fournir à la machine toutes les données concernant les cours de la bourse et les matières premières puis lui poser simplement la question : "J'achète ou je vends ?". Le téléphone sonna ensuite tout l'après-midi dans son laboratoire et l'on ne cessa de lui demander qui diable il pouvait bien être.

Note : Alan Turing avait inventé bien avant l'heure le trading haute-fréquence...

Extraits de "La nature de la physique" de Richard Feynman aux éditions du Seuil Points Science

(p.198) Les amplitudes de probabilité sont très étranges, et la première chose à laquelle vous pensez c'est que les idées étranges et nouvelles sont évidemment des idées à dormir debout. Pourtant, tout ce qu'on peut déduire des théories sur l'existence des amplitudes de probabilité en mécanique quantique, si étranges soient-elles, marche à cent pour cent, pour la longue liste de particules étranges. Je ne crois donc pas que lorsque nous aurons découvert la composition des entrailles du monde nous nous apercevrons que ces idées sont fausses. Cette partie, je crois, est juste, mais je ne fais que deviner : je vous explique là comment je devine.

D'un autre côté, je crois que la théorie de l'espace continu est fausse, car nous obtenons ces infinités et d'autres difficultés, et nous restons avec des questions sur ce qui détermine la taille de toutes les particules. J'ai plutôt l'impression que les simples idées de la géométrie, étendues à un espace infiniment petit, sont fausses. Là, bien sûr, je me borne à faire un trou, sans vous dire ce qu'il faut mettre à la place. Si je vous le disais, je terminerais ce cours avec une loi nouvelle.

(p.215) Je voudrais vous donner une autre preuve du fait que les mathématiques ne sont qu'une affaire de structure. Lorsque j'étais à l'université Cornell, la population estudiantine m'étonnait beaucoup ; je n'y voyais qu'une masse d'imbéciles, étudiants en économie domestique, etc. (surtout des filles), d'où émergeaient, de place en place, quelques individus raisonnables. A la cafétéria, pendant que je mangeais avec les autres étudiants, j'écoutais les conversations en cherchant vainement à y déceler la moindre bribe d'intelligence. C'est ainsi que je fis un jour une découverte extraordinaire, ou qui, du moins, me parut telle.

Imaginez ma surprise. Un soir, je me trouvais assis à côté de deux filles, et j'écoutais leur conversation. L'une disait : "Pour faire une ligne droite, tu augmentes à chaque rang de la même quantité. Tu vois, quand tu fais la même augmentation à chaque rang, ça donne une ligne droite." Quel beau principe de géométrie analytique, me dis-je. Au fur et à mesure que la conversation se poursuivait, j'étais de plus en plus étonné. Car il ne m'avait jamais semblé que le cerveau féminin fût capable de comprendre la géométrie analytique.

Et ça continuait : "Si tu as deux lignes qui viennent chacune dans un sens, pour savoir quand elles vont se croiser, c'est simple. Par exemple, si pour la ligne qui va vers la droite, tu augmentes d'un à chaque fois et si pour la ligne qui va vers la gauche, tu augmentes de trois et si au départ, il y avait vingt points, etc." J'en étais baba ; ma parole, elle allait trouver l'intersection ! Jusqu'à ce que je m'aperçoive qu'il s'agissait de tricot, et qu'elles étaient en train de s'expliquer des motifs de jacquard !

Ce jour-là, j'ai appris une chose : que le cerveau féminin est capable de comprendre la géométrie analytique. Ceux qui prétendent - bien que ce soit manifestement contredit tous les jours - que les femmes sont tout aussi capables de pensée rationnelle que les hommes, pourraient bien ne pas avoir tout à fait tort. Peut-être nos difficultés viennent-elles simplement de ce que nous n'avons pas encore trouvé le moyen de communiquer avec des cerveaux féminins. Mais quand on y arrive, il y a toujours quelque chose à en tirer.

(p.249) Tout cela peut paraître un peu confus car je décris en même temps plusieurs théories alternatives. L'important est de noter que, à l'époque, nous les avions toutes en tête, comme autant de possibilités. Il y avait plusieurs solutions au problème de l'électrodynamique classique, chacune pouvant servir comme une bonne base de départ pour vaincre les difficultés de l'électrodynamique quantique.

$$A = \sum_i m_i \int \left(\dot{X}^i_\mu \dot{X}^i_\mu\right)^{\frac{1}{2}} d\alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum e_i e_j \int \int \delta\left(I^2_{ij}\right) \dot{X}^i_\mu \dot{X}^j_\mu d\alpha_i d\alpha_j \qquad (1)$$

avec

$$I_{ij} = X^i_\mu(\alpha_i) - X^j_\mu(\alpha_j)$$

Je voudrais aussi mettre l'accent sur ceci que, pendant cette période, je m'habituai à adopter un point de vue physique différent de la vision traditionnelle. Dans la vision traditionnelle, les phénomènes sont discutés en détail quant à leur évolution dans le temps. Par exemple, vous connaissez le champ à tel instant ; une équation différentielle vous donne ensuite le champ à l'instant suivant, et ainsi de suite - c'est la méthode que j'appellerais hamiltonienne, la méthode de l'évolution différentielle. Dans notre démarche (par exemple dans l'équation (1) qui exprime l'action), nous avons au contraire une description globale

de la trajectoire dans l'espace et le temps. Le comportement de la nature est défini par une certaine propriété d'ensemble des trajectoires spatio-temporelles. Pour une action telle que (1), les équations obtenues à l'aide du principe variationnel portant sur les coordonnées $X^i_\mu(\alpha_i)$ sont très difficilement ramenées à la forme hamiltonienne. Si l'on souhaite n'utiliser comme variables que les coordonnées des particules, on peut, certes, parler des trajectoires et de leurs propriétés - mais la trajectoire d'une particule à un moment donné est affectée par la trajectoire d'une autre à un autre moment. Si donc vous essayez de donner une définition différentielle, indiquant quel est l'état présent des particules et comment cet état affectera le futur, vous n'y arriverez pas avec des particules uniquement car le comportement passé (et non seulement l'état présent) d'une particule va affecter ce futur.

Il faut donc toute une comptabilité avec des variables supplémentaires pour garder la trace du comportement passé des particules. Ces variables sont précisément celles qu'on appelle d'habitude les amplitudes du champ, et il faudra indiquer aussi quel est le champ présent si vous voulez savoir ce qui se passera plus tard. Mais du point de vue global que donne le principe de moindre action sur tout l'espace-temps, le champ disparaît, ou n'est plus que l'ensemble des variables nécessaires à la comptabilité imposée par la méthode hamiltonienne.

(p.283) Ce que nous avons découvert dans les cent dernières années est tellement différent, tellement obscur, que seules les mathématiques peuvent nous permettre d'avancer.

Monte Davis (journaliste pour la revue Omni) : Est-ce à dire que seuls un très petit nombre de gens sont capables de participer au progrès de la science, ou même simplement de comprendre ce qui se fait ?

A moins qu'on ne trouve un moyen d'aborder les problèmes qui les rende plus facilement compréhensibles. Peut-être suffit-il de les enseigner plus tôt ? Vous savez, ce n'est pas vrai que les maths dites "abstraites" soient si difficiles. Prenez le cas de la programmation sur ordinateurs, avec toute la logique délicate que ça suppose. Voilà bien le genre de choses que les parents autrefois croyaient réservées aux grosses têtes ; aujourd'hui ça fait partie de la vie courante et c'est devenu un moyen de gagner sa vie comme un autre : il suffit que leurs enfants mettent la main sur un calculateur pour s'en enticher et en tirer des choses folles et merveilleuses.

(M.D.) : Sans parler de la publicité pour des cours de programmation qu'on voit un peu partout !

Exactement. Je ne pense pas qu'il y ait d'un côté un petit nombre d'individus bizarres, capables de comprendre les maths, et de l'autre, les gens normaux. Les maths sont une des découvertes de l'humanité; ça ne peut pas dépasser en complication ce que les hommes peuvent comprendre. J'ai lu un jour dans un livre de calcul cette phrase : "ce qu'un fou a fait, d'autres fous peuvent le faire." Nos théories sur la nature peuvent sembler abstraites et effrayantes à ceux qui ne les ont pas étudiées ; mais il ne faut pas oublier que ce sont d'autres fous qui les ont faites.

Il faut aussi faire la part d'une certaine emphase, d'une tendance à rendre cela beaucoup plus profond que ça n'est. L'autre jour, je lisais, avec mon fils, qui est en train d'étudier la philosophie, un passage de Spinoza... Le raisonnement était absolument enfantin, mais c'était enrobé dans un tel méli-mélo d'attributs, de substances et autres balivernes, qu'au bout d'un moment nous avons éclaté de rire. Là, vous devez trouver que j'exagère. Quand même, rire d'un philosophe de la taille de Spinoza ! Mais c'est que Spinoza n'a aucune excuse. A la même époque il y avait Newton, il y avait Harvey qui étudiait la circulation sanguine, il y avait un tas de gens qui, grâce à leurs méthodes d'analyse, faisaient avancer la science. Prenez n'importe laquelle des propositions de Spinoza : transformez-la en la proposition contraire et regardez autour de vous ; je vous défie de pouvoir dire laquelle est juste. Les gens se sont laissé impressionner parce que Spinoza avait eu le courage d'aborder les questions importantes ; mais à quoi sert-il d'avoir du courage si ça ne débouche sur rien ?

Dans vos fameux manuels, les philosophes et leurs commentaires sur la science en prennent pour leur grade...

Ce n'est pas tant la philosophie que la cuistrerie qui m'insupporte ! Si seulement les philosophes pouvaient ne pas se prendre tellement au sérieux ; si seulement ils pouvaient dire : "Voilà ce que je pense ; mais Von Machin pensait autrement et c'était pas mal envoyé non plus." Mais non ! Ils profitent du fait que, peut-être, il n'y a pas de particule fondamentale ultime pour nous exhorter à en rester là ; et les voilà

qui pontifient : “Votre pensée ne va pas assez au fond des choses, laissez-moi vous donner une définition préalable du monde.” Eh bien, non ! Je suis bien décidé à explorer le monde sans en avoir de définition !

(p.291) Ce qui caractérise les bons scientifiques, c’est que, quoi qu’ils fassent, ils ne sont pas aussi sûrs d’eux que la plupart des autres. Ils arrivent à vivre avec le doute installé en eux ; ils peuvent penser “peut-être...” et agir quand même, tout en sachant que ce n’est *que* “peut-être”. Les gens trouvent en général cela très dur : ils y voient une marque de détachement et de froideur ! Il s’agit au contraire d’une forme de compréhension chaleureuse et profonde. Cela veut dire être capable de creuser là où, provisoirement, on est convaincu de trouver la solution ; et puis si quelqu’un arrive et dit : “Avez-vous vu ce qu’ils ont trouvé, là-bas ?”, être capable de répondre : “Zut, je suis à côté de la plaque.” Ca arrive tous les jours !

Ci-dessous un extrait de l'Essai d'Albert Einstein Comment je vois le monde (p.34 de l'édition Champs Sciences chez Flammarion) (DC, 30/11/2013)

Il ne suffit pas d'apprendre à l'homme une spécialité. Car il devient ainsi une machine utilisable mais non une personnalité. Il importe qu'il acquière un sentiment, un sens pratique de ce qui vaut la peine d'être entrepris, de ce qui est beau, de ce qui est moralement droit. Sinon, il ressemble davantage, avec ses connaissances professionnelles, à un chien savant qu'à une créature harmonieusement développée. Il doit apprendre à comprendre les motivations des hommes, leurs chimères et leurs angoisses pour déterminer son rôle exact vis-à-vis des proches et de la communauté.

Ces réflexions essentielles livrées à la jeune génération, grâce au contact vivant avec les professeurs, ne s'écrivent absolument pas dans les manuels. Ainsi s'exprime et se forme d'abord toute culture. Quand je conseille ardemment « Les Humanités », c'est cette culture vivante que je recommande, et non pas un savoir desséché, surtout en histoire et en philosophie.

Les excès du système de compétition et de spécialisation prématurée sous le fallacieux prétexte d'efficacité, assassinent l'esprit, interdisent toute vie culturelle et suppriment même les progrès dans les sciences d'avenir. Il importe enfin, pour la réalisation d'une parfaite éducation, de développer l'esprit critique dans l'intelligence du jeune homme. Or la surcharge de l'esprit, par le système de notes, entrave et transforme nécessairement la recherche en superficialité et absence de culture.

L'enseignement devrait être ainsi : celui qui le reçoit le recueille comme un don inestimable mais jamais comme une contrainte pénible.

(p. 158 Principes de la recherche)

Mais regardons à nouveau ceux qui ont trouvé grâce aux yeux de l'ange. Ils se révèlent singuliers, peu communicatifs, solitaires et malgré ces points communs se ressemblent moins que ceux qui ont été expulsés. Qu'est-ce qui les a conduits au Temple (de la Science) ? La réponse n'est pas facile à fournir et ne peut assurément pas s'appliquer uniformément à tous. Mais d'abord en premier lieu, avec Schopenhauer, je m'imagine qu'une des motivations les plus puissantes qui incitent à une œuvre artistique ou scientifique consiste en une volonté d'évasion du quotidien dans sa rigueur cruelle et sa monotonie désespérante, en un besoin d'échapper aux chaînes des désirs propres éternellement instables. Cela pousse les êtres sensibles à se dégager de leur existence personnelle pour chercher l'univers de la contemplation et de la compréhension objectives. Cette motivation ressemble à la nostalgie qui attire le citadin loin de son environnement bruyant et compliqué vers les paisibles paysages de la haute montagne, où le regard vagabonde à travers une atmosphère calme et pure, et se perd dans les perspectives reposantes semblant avoir été créées pour l'éternité.

A cette motivation d'ordre négatif s'en associe une autre plus positive. L'homme cherche à se former de quelque manière que ce soit, mais selon sa propre logique, une image du monde **simple et claire**.

Ainsi surmonte-t-il l'univers du vécu parce qu'il s'efforce dans une certaine mesure de le remplacer par cette image. Chacun à sa façon procède de cette manière, qu'il s'agisse d'un peintre, d'un poète, d'un philosophe spéculatif ou d'un physicien. A cette image et à sa réalisation, il consacre l'essentiel de sa vie affective pour acquérir ainsi la paix et la force qu'il ne peut pas obtenir dans les limites trop restreintes de l'expérience tourbillonnante et subjective.

La méthode du théoricien implique qu'il utilise comme base dans toutes les hypothèses ce qu'on appelle des principes, à partir desquels il peut déduire des conséquences. Son activité se divise donc essentiellement en deux parties. Il doit rechercher d'abord ces principes et ensuite développer les conséquences qui leur sont inhérentes. Pour l'exécution de ce second travail, il reçoit à l'école un outillage excellent. Si donc la première de ces tâches est déjà accomplie dans un certain domaine ou pour un certain ensemble de relations, il ne manquera pas de réussir par un travail et un raisonnement persévérants. Mais la première clef de ces tâches, c'est-à-dire celle d'établir les principes qui serviront de base à sa déduction, se présente de manière toute différente. Car ici il n'existe pas de méthode qu'on puisse apprendre ou systématiquement appliquer pour atteindre un objectif. Le chercheur doit plutôt épier, si l'on peut dire, dans la nature ces principes généraux, pendant qu'il dégage à travers les grands ensembles de faits expérimentaux des traits généraux et certains, qui peuvent être explicités nettement.

[...]
En plus, objectivement, mon exercice d'aujourd'hui pourrait trouver une justification en ce sens : ne serait-il point intéressant de connaître ce que pense de sa science un homme qui, sa vie durant, s'est exercé de toute son énergie à en éclaircir et à en perfectionner les éléments de base ? Sa façon d'appréhender l'évolution ancienne et contemporaine pourrait influencer terriblement ce qu'il attend de l'avenir et donc ce qu'il vise comme objectif immédiat. Mais c'est là le destin de tout individu qui se donne passionnément au monde des idées.

[...]
Cette conception exerçait sur moi une véritable fascination sans que j'y trouve une base possible pour une théorie nouvelle.

[...]
La **simplicité** me conseillait de...

[...]
Cette évidence ne coïncidait pas avec la vieille expérience m'affirmant que tous les corps subissent dans un champ de gravitation la même accélération. Ce principe, dont la formulation se traduit par l'égalité des masses inertes et des masses pesantes, m'apparut alors dans sa signification essentielle. Au sens le plus fort du terme, je le découvris et son existence m'amena à deviner qu'il incluait probablement la clef pour une intelligence meilleure et plus profonde de l'inertie et de la gravitation.

[...]
Par conséquent, je devais fonder une théorie dont les équations garderaient leur forme dans le cas de transformations non linéaires de coordonnées. J'ignorais, à ce moment de ma recherche, si elle s'appliquerait à des transformations de coordonnées tout à fait ordinaires (continues), ou bien seulement à certaines.

Je remarquais vite qu'avec l'introduction, exigée par le principe d'équivalence, des transformations non linéaires, l'explication simplement physique des coordonnées devait disparaître, c'est-à-dire que je ne pouvais plus attendre que les différences de coordonnées expriment les résultats immédiats des mesures réalisées avec des règles et des horloges idéales. Cette évidence me gênait terriblement car pendant longtemps, je n'arrivais pas à situer la place réelle et nécessaire des coordonnées en physique. Je n'ai vraiment résolu ce dilemme qu'en 1912.

[...]
Ces erreurs de jugement durèrent deux années de travail singulièrement ardu. Je reconnus enfin que je m'étais trompé à la fin de 1915...

[...]
Exemple : un archéologue d'une future civilisation découvre un traité de géométrie d'Euclide, mais sans figures. Par la lecture des théorèmes, il reconstituera bien l'emploi des mots "point", "droite", "plan". Il reconstruira aussi la chaîne des théorèmes et même, d'après les règles connues, il pourra en inventer de nouveaux. Mais cette élaboration de théorèmes restera pour lui un vrai jeu avec des mots, tant qu'il ne "pourra pas se figurer quelque chose" avec les expressions "point", "droite", "plan", etc. Mais s'il le peut et seulement s'il le peut, la géométrie deviendra pour lui un réel contenu. Le même raisonnement s'applique à la mécanique analytique et en général à toutes les sciences logico-déductives.

Qu'est-ce que je veux dire par "pouvoir se figurer quelque chose avec les expressions "point", "droite", "plan", etc." ? D'abord je précise qu'il faut exprimer la matière des expériences sensibles auxquelles ces mots renvoient. Ce problème extra-logique restera le problème clef que l'archéologue ne pourra résoudre que par intuition, puisant dans ses expériences pour y chercher s'il y trouverait quelque chose d'analogue à ces expressions primitives de la théorie et de ces axiomes, bases mêmes des règles du jeu. Voilà comment, absolument, il faut poser la question de l'existence d'une chose représentée abstraitement.

[...]
Les méthodes inductives, d'usage dans la Science, correspondant en réalité à la jeunesse de la Science, sont éliminées pour une méthode déductive précautionneuse. Une combinaison théorique de ce genre doit présenter un haut degré de perfection pour pouvoir déboucher sur des conséquences qui, en dernière analyse, seront confrontées à l'expérience. Là encore, le juge suprême, avouons-le, reste le fait expérimental ;

mais la reconnaissance par le fait expérimental évalue aussi le travail terriblement long et complexe et souligne les ponts établis entre les immenses conséquences vérifiables et les axiomes qui les ont permis. Le théoricien doit exécuter ce travail de Titan avec la claire certitude qu'il n'a d'autre ambition de préparer peut-être l'assassinat de sa propre théorie. On ne doit jamais critiquer le théoricien quand il entreprend un tel travail et le taxer de fantaisiste. Il faut estimer cette fantaisie. Car elle représente pour lui le seul itinéraire qui mène au but. Assurément il ne s'agit pas d'une plaisanterie, mais d'une patiente recherche en vue des possibilités **logiquement les plus simples**, et en vue de leurs conséquences.

[...]
Aussi Kepler devait-il avoir une singulière conviction en ces lois pour qu'il puisse, des dizaines d'années durant, y consacrer toutes ses forces par un travail obstiné et suprêmement compliqué.

[...]
Il est seul. Nul ne le soutient ni ne le comprend.

[...]
Mais Newton veut répondre à la question précise : existe-t-il **une règle simple** ?

[...]
Ces lois concernent le mouvement en tant qu'ensemble. Elles ne répondent pas à la question : "Comment de l'état de mouvement d'un système découle le mouvement qui lui succède immédiatement dans la durée ?".

[...]
L'effort vers la connaissance, par sa nature propre, nous pousse en même temps à l'intelligence de l'extrême variété de l'expérience et à la maîtrise de la **simplicité** économique des hypothèses fondamentales. L'accord final de ces objectifs représente dans le premier moment de nos recherches un acte de foi. Sans cette foi, la conviction de la valeur indépendante de la connaissance n'existerait pas, cohérente et indestructible.

Cette attitude profondément religieuse de l'homme scientifique face à la vérité rejaillit sur toute sa personnalité. En effet, en deux domaines les résultats de l'expérience et les lois de la pensée commandent par eux-mêmes. Et donc le chercheur, en principe, ne se fonde sur aucune autorité dont les décisions ou les communications pourraient prétendre à la vérité. D'où le violent paradoxe suivant : un homme livre toute son énergie à des expériences objectives et il se transforme, dès qu'on l'envisage en sa fonction sociale, en un individualiste extrême qui, théoriquement du moins, ne se fierait qu'à son propre jugement. On pourrait presque dire que l'individualisme intellectuel et la recherche scientifique naissent ensemble historiquement, et que depuis ils ne se séparent plus.

Or l'homme scientifique présenté ainsi, qu'est-il d'autre qu'une simple abstraction, invisible dans le monde réel, mais comparable à l'*homme oeconomicus* de l'économie classique ? Or, dans la réalité, la science concrète, celle de notre quotidien, ne se serait jamais créée et maintenue vivace si cet homme de science n'était apparu, au moins dans ses grandes lignes, dans un grand nombre d'individus et pendant de longs siècles.

Evidemment, je ne considère pas automatiquement comme un homme scientifique celui qui sait se servir d'instruments et de méthodes jugés scientifiques. Je ne pense qu'à ceux dont l'esprit se révèle vraiment scientifique.

« Mon intérêt passionné pour la justice sociale et la responsabilité sociale s'opposa toujours curieusement à mon inaptitude marquée pour tout désir d'association directe avec les hommes et les femmes. Je suis un cheval pour le harnais individuel, nullement taillé pour le tandem ou l'attelage. Je n'ai jamais appartenu de tout cœur à aucun pays ni à aucun Etat, ni à mes amis, ni même à ma propre famille. Ces liens s'accompagnent toujours d'un vague éloignement, et l'envie de me retirer en moi-même s'est accrue avec les années. Un tel isolement est parfois amer, mais je ne regrette pas d'y être coupé de la compréhension ou de la sympathie des autres. J'y perds quelque chose à coup sûr, mais en revanche je me libère des coutumes, des opinions ou des préjugés d'autrui et ne suis point tenté de fonder ma sérénité d'esprit sur de si mouvantes assises ».

Logiquement, il y a une alternative à cette conclusion. Dans le jargon technique, cela s'appelle des "variables cachées" et la démarche conceptuelle est la suivante : la probabilité, en physique quantique, c'est comme la probabilité de gagner au loto ! Elle vient du fait qu'on ne connaît pas un certain nombre de facteurs (les "variables cachées") ; si on les connaissait, on gagnerait toujours au Loto. Pour le dire autrement, la physique quantique n'est pas la fin de l'histoire...

Cette autre vision des choses est parfaitement logique, mais personne n'est encore parvenu à proposer des variables cachées qui tiennent la route, c'est-à-dire qui ne soient pas en contradiction avec l'un ou l'autre principe fondamental de la physique (en particulier avec le principe de relativité).

"Max, croyez-vous vraiment que la lune n'est pas là quand personne ne la regarde ?"

Les mathématiques
et la pensée en mouvement

Alain Connes [1]

Le but de mon exposé, c'est de vous faire sentir deux choses : la première, c'est que je vais vous raconter un certain nombre d'histoires, sur des mathématiciens, et la deuxième, c'est de vous faire comprendre que les mathématiques sont une fabrique de concepts, mais de concepts absolument fondamentaux et de concepts qui ont trait, si vous voulez, à la vie, et qui ne sont pas du tout confinés a des calculs avec des nombres, ou des choses comme ça ; on a trop souvent l'impression que le mathématicien est quelqu'un qui fait des calculs ; bien sûr, ça lui arrive de faire des calculs, mais ce que je vais essayer de vous faire comprendre, justement, dans cet exposé, c'est à quel point justement, la technique mathématique débouche de temps en temps sur des concepts fondamentaux, sur des idées fondamentales, et ce sont des idées qu'on peut expliquer simplement et qui ont trait à la vie, c'est-à-dire si vous voulez, elles sont aussi importantes, je pense, pour des gens qui font des sciences humaines que pour des gens qui vont faire des sciences dures. Voilà, donc, il y aura une galerie de portraits. On va commencer par Galois.

Et si vous voulez, Galois, c'est le prototype du mathématicien qui a eu une vie absolument incroyable : il est né en 1811, et il avait 17 ans lorsqu'il a fait ses choses les plus importantes. Et ce qui s'est produit donc, il y a eu une succession d'incompréhensions, en fait. Si vous voulez, en 1829, Abel meurt. Et en gros, c'est Galois qui reprend le flambeau des idées d'Abel. Mais en fait, je me suis bien renseigné avec des spécialistes d'Abel. Abel était venu à Paris, mais il est absolument impossible qu'il ait rencontré Galois : Galois était trop jeune quand Abel est venu à Paris ; j'avais toujours imaginé qu'ils s'étaient rencontrés dans un café parisien, qu'ils avaient discuté tous les deux. Apparemment, ce n'est pas possible. Donc quand il avait 17 ans, Cauchy qui était un académicien, avait déjà fait en 1829, deux exposés sur les travaux de Galois, à l'Académie, au mois de mai et au mois de juin. Ca, c'était donc

1. Conférence du CPES (Cycle Pluridisciplinaire d'Etudes Supérieures), PSL (Paris Sciences et Lettres), le 12 novembre 2015.
Transcription de la conférence par Denise Vella-Chemla (31.1.2019).

en 1829. Et au mois de juillet 1829, le père de Galois se suicide parce qu'il avait été la victime d'une campagne de calomnie, qui avait été faite contre lui, et en plus, Galois échoue pour la deuxième fois à l'école polytechnique. Donc c'était la deuxième fois qu'il se présentait à l'école polytechnique. A l'époque, l'école polytechnique était au top des grandes écoles, donc c'est la deuxième fois qu'il échoue. C'est là qu'il y a eu la scène apparemment où il a balancé le chiffon à la tête de l'examinateur de mathématiques, parce que l'examinateur ne comprenait pas les explications de Galois sur le logarithme.

Mais heureusement, Galois est reçu à l'école normale. Et en janvier 1830, il y a une lettre de Cauchy à l'Académie qui dit qu'il va parler sur Galois. Ce serait donc pour la troisième fois, et puis finalement Cauchy renonce, et je pense, enfin on pense, et les historiens pensent, si vous voulez, qu'il s'était mis d'accord avec Galois parce qu'il y avait un Grand Prix de l'Académie qui devait être donné en 1830 et Cauchy avait convaincu Galois de réécrire son article, de réécrire ses articles et de se présenter pour ce grand prix. Alors là, ce qui s'est passé, c'était absolument dramatique parce que l'académicien qui devait rapporter sur l'article de Galois, c'était Joseph Fourier. C'est un très très grand mathématicien et Fourier apparemment, il était en haut de ses escaliers chez lui, il s'est pris les pieds dans sa robe de chambre et il a dégringolé l'escalier, il est mort. Donc, gros problème, gros problème, et si vous voulez, il y a eu un tel désordre à ce moment-là, que le manuscrit de Galois a été perdu. Alors, non seulement Galois n'a pas eu le prix, qu'il aurait peut-être mérité, le prix a été donné à Jacobi et Abel, bien sûr deux mathématiciens immenses. Jacobi était un mathématicien allemand, Abel était mort, il était mort en 1829, le prix a été donné à Abel à titre posthume.

Mais si vous voulez, Galois ne pouvait pas se plaindre de ne pas avoir eu son grand prix ; par contre, il pouvait se plaindre, à l'époque, il n'y avait pas de photocopieuse. Donc il avait écrit son manuscrit ; à l'époque, vous écriviez le manuscrit et puis c'était fini. Il l'avait donné à l'Académie mais manuscrit perdu. Donc il s'était plaint à plusieurs reprises à l'Académie, mais manuscrit perdu. Et donc en 1830, le grand prix a été donné en juin 1830 et en juillet 1830, c'est les Trois Glorieuses. C'est Les Trois Glorieuses, et Galois a été à l'école normale et là, il râlait parce que, à l'école normale, les élèves étaient confinés, ils ne pouvaient pas aller sur les barricades. Par contre, les élèves de l'école polytechnique, eux, ils pouvaient, donc alors là, Galois a commencé à vraiment se révolter. C'est très très bizarre, si vous voulez, bon, il avait

à peine 18 ans. Donc il a commencé à se révolter et il s'est révolté contre le directeur de l'école normale. Et après l'été, donc, il a commencé à militer plus ou moins, et de fil en aiguille, il a réussi à se faire renvoyer de l'école Normale. Donc, il a été renvoyé de l'école Normale en janvier 1831, et il y a quelque chose d'incroyablement ironique, qui est que Galois était à la rue, si vous voulez, il n'avait plus de salaire parce qu'à l'époque, à l'époque et c'est encore le cas maintenant, les élèves de l'école Normale recevaient un petit salaire. Donc il était à la rue et alors pour gagner un peu d'argent, il avait créé un cours d'algèbre, cours d'algèbre qui réunissait un certain nombre de gens qui venaient l'écouter parce que c'était un magnifique mathématicien malgré son très jeune âge. Et l'ironie totale, c'est que son cours d'algèbre, il le donnait dans la rue qui maintenant, c'est une rue attenante à la Sorbonne, qui s'appelle la rue Victor Cousin. Pourquoi est-ce que c'est ironique ? C'est ironique parce que la personne qui a signé le renvoi de l'école Normale de Galois s'appelle Victor Cousin. Alors il y a quelques années, pour les 200 ans de la naissance de Galois, j'ai eu à donner l'exposé à l'Académie des Sciences sur Galois. Et à ce moment-là, j'ai voulu que tout le monde se mettent d'accord pour rebaptiser la rue Victor Cousin en rue Galois. Bon, ça n'a pas été possible, mais il faudrait quand même, c'est incroyable.

Donc voilà ce qui s'est passé. Alors après, donc, il faut bien dire que Galois, il est mort à 20 ans. Et les deux dernières années de sa vie, il n'a pas beaucoup fait de maths. C'est incroyable, c'est absolument incroyable. Et ce qui s'est produit, c'est qu'une fois qu'il a été renvoyé de l'école normale, il y avait quand même un autre académicien qui lui voulait du bien, il s'appelait Poisson. Et en mathématiques, il y a une formule bien connue qu'on appelle la formule de Poisson. Et si vous voulez, Poisson l'avait convaincu de réécrire son manuscrit et de le présenter à l'Académie. Donc Galois s'était exécuté. Il avait réécrit son manuscrit. Il avait travaillé, etc. Et entre temps, bien sûr, après Les Trois Glorieuses, tout le monde commençait à être extrêmement déçu par le nouveau pouvoir. Et Galois faisait partie de ces gens-là. Donc la première chose qu'il a faite, c'est pas très, pas très malin, enfin bon. Il était dans un banquet qui fêtait la libération d'opposants au pouvoir. Et alors, il était dans ce banquet, et il avait levé son verre à Louis-Philippe. Alors, tous les gens se disaient "il est complètement fou !" : il était dans un banquet contre Louis-Philippe et il levait son verre à Louis-Philippe. Et dans la main, il avait un couteau. D'abord, les gens n'avaient pas compris pourquoi il levait son verre à Louis-Philippe ; secundo, il y avait un espion qui était là et qui

avait vu qu'il avait un couteau à la main. Il avait été arrêté, ça c'était au mois de mai 1831, il avait été arrêté, et il avait été jugé assez vite. Il avait été jugé par un jury populaire. Mais comme il avait été jugé par un jury populaire, les gens avaient vu qu'il était un peu bizarre, bon, enfin, je veux dire, il ne se défendait pas, en gros, il disait... Alors ils l'avaient acquitté. Je crois qu'il avait été acquitté en juin 1831. Et un mois après, il a reçu le rapport de Poisson sur son article. Alors là, catastrophe parce que Poisson disait que c'était sûrement une très très belle théorie, mais qu'il n'y avait pas assez de détails dans les démonstrations, etc. Donc il ne pouvait pas accepter l'article. Et Galois, quand il a reçu ce rapport, il a écrit à la main, dans la marge du rapport, il a écrit "Oh, chérubins !". Ca veut dire qu'il voyait que les gens ne comprenaient rien à ce qu'il faisait. A ce moment-là, il a un peu dérapé, c'est-à-dire que là, il s'est fait arrêter. Ca, c'était le 4 juillet qu'il a reçu le rapport de Poisson, il a été arrêté le 14 juillet à la tête d'une manifestation contre Louis-Philippe. Et là, il a été mis en prison pour de bon ; il a été mis dans une prison qui s'appelle Sainte-Pélagie ; et bon, il y a beaucoup d'entre vous sans doute, qui imaginent que s'ils étaient en prison, ils pourraient au moins réfléchir tranquilles avec des bouquins ; en fait, c'était pas du tout comme ça, parce que Galois, il était au milieu des condamnés et c'était absolument terrible parce que les autres condamnés l'obligeaient à boire de la liqueur très forte, etc. ; je veux dire que c'était absolument orthogonal à son... à ce qu'il faisait et en fait là, il a rencontré Nerval. Nerval l'a rencontré alors qu'il était en prison.

Et alors, c'est terrible, c'est terrible, parce que si vous voulez, Galois est resté en prison jusqu'au mois de mars de l'année d'après, 1832. Il n'avait pas 20 ans, toujours, euh, si, il avait 20 ans. Et en mars 1832, la raison pour laquelle il a été libéré, c'est qu'il y avait le choléra à Paris. Et qu'ils vidaient les prisons pour pas qu'il y ait trop de dégâts. Donc il a été mis dans une maison de santé et dans cette maison de santé, il est plus ou moins tombé amoureux d'une fille qui était là, sans se rendre compte qu'elle était déjà avec quelqu'un d'autre.

Et bon, tout ça a fini par un duel, d'accord. Et alors là, c'est pareil, si vous voulez, je suppose que chacun d'entre vous imagine que s'il était en devoir de se battre en duel, il aurait plus d'habileté que l'adversaire, donc ça irait quoi, il s'en sortirait. Malheureusement, le duel dans lequel Galois a été pris, il a essayé de s'en sortir avant. Il a essayé de dire que... Mais malheureusement, c'était un duel absolument terrible, c'était comme la roulette russe, c'était un

duel dans lequel il y avait deux revolvers dont l'un seulement des deux était chargé. Et il fallait qu'ils se les mettent sur le ventre. Donc il a eu, bien sûr, une balle dans le ventre. A l'époque, et même maintenant, c'était mortel, et les autres l'ont laissé sur place.

Il a été retrouvé par un paysan sur place, qui l'a emmené à l'hôpital et il est mort le jours après. Bon. Et il a laissé une liasse de papiers, c'est ce qu'il dit, c'est ce qu'il dit dans ses trucs, donc c'était... Alors il y a des gens qui vous feront croire qu'il a trouvé tous ses résultats la veille de son duel. C'est absolument pas vrai, je veux dire, évidemment, il avait continué à réfléchir et c'était au point... il avait dû tellement se forcer à continuer à faire des maths pendant qu'il était dans des circonstances abominables, que des gens qui l'ont vu à sa sortie de prison disaient qu'il avait l'air d'avoir 50 ans alors qu'il avait 20 ans. D'accord, donc c'est vous dire un peu la passion qui l'habitait, et c'est un miracle, finalement, c'est un miracle qu'on ait eu ses travaux.

C'est un miracle absolu qu'on ait eu ses travaux. Donc ça, c'est ce qu'il écrivait et qu'il a laissé dans sa lettre-testament. C'est sa lettre-testament qu'il avait laissée à son frère, et à son ami, il avait un ami aussi.

Et ce qui s'est produit, donc, c'est que 10 ans ont passé. Et par un hasard extraordinaire, Liouville, qui était un contemporain de Galois, qui avait simplement deux ans de plus que Galois, a retrouvé les papiers de Galois. Et il a compris que c'étaient des choses absolument géniales. Et il en a parlé à l'Académie. Donc si vous voulez, 10 ans après la mort de Galois, c'est Liouville que voilà. Bon là, évidemment, il est beaucoup plus vieux mais c'était un contemporain de Galois, c'était quelqu'un qui était né en 1809, donc deux ans avant Galois. Et donc, Liouville a compris l'extraordinaire force des travaux de Galois si vous voulez.

Alors il a écrit ça, mais ça, je vous le montre écrit correctement, donc c'est comme ça.

Il en a parlé à l'Académie. Et puis, graduellement, les travaux de Galois ont été compris. Et alors ce que je vais faire, je ne veux pas vous embêter avec des mathématiques trop compliquées, je vais simplement vous donner l'essence de la théorie de Galois. Je vais vous donner l'essence en vous donnant un exemple. Ce que dit Galois dans sa lettre-testament, c'est quelque-chose

d'incroyablement visionnaire, si vous voulez, ce qu'il dit, c'est :

"Tu sais mon cher Auguste, (il avait un ami qui s'appelait Auguste) *que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations depuis quelques temps ont étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté."*

Donc Galois a découvert cette théorie de l'ambiguïté. Et dans cette lettre, à la fin de sa vie, il dit que non seulement, il l'a appliquée à des équations polynomiales. Mais en fait, il l'a appliquée à la théorie des fonctions transcendantes. Personne ne sait ce qu'il avait exactement en tête. Ca, personne ne peut dire que l'on sait, maintenant, ce que Galois avait en tête.

Par contre, on sait très bien ce qu'il avait en tête pour les équations polynomiales.

Et donc, pour les équations polynomiales, je vais vous expliquer ce qu'est la théorie de l'ambiguïté. Donc ce que Galois a compris, si vous voulez, c'est quelque-chose d'assez extraordinaire, c'est que lorsque vous vous donnez une équation algébrique, par exemple, je vous ai donné une équation donc, on sait la résoudre. Vous savez que maintenant, je veux dire avec l'ordinateur, vous pouvez contrôler tout ça, vous pouvez tracer le graphe d'une fonction, vous pouvez résoudre une équation polynomiale, et tout ça. Mais l'ordinateur ne vous donnera jamais les zéros qu'avec une certaine précision, il ne vous donnera jamais les racines qu'avec une certaine précision.

Alors, ce que dit la théorie de Galois, elle dit quelque chose d'extraordinaire : elle dit que quand vous prenez une équation comme celle-là, qui est irréductible, c'est-à-dire qu'on ne peut pas la factoriser en un produit de 2 facteurs avec des coefficients rationnels par exemple. Donc lorsqu'une équation est irréductible, ce que dit la théorie de Galois, c'est qu'il y a un groupe qui opère sur les racines, ici sur les 5 racines, et qui fait qu'on ne peut pas, si vous voulez, isoler une racine. C'est-à-dire qu'il y a une ambiguïté entre les racines ; ce groupe, il fait tourner les racines. Et toute relation qui est vérifiée entre les racines, toute relation rationnelle qui est vérifiée entre les racines, par exemple, avec l'ordinateur, vous pouvez voir que cette relation, elle est presque vérifiée, le fait que $E = 4C^2 + 2D^2$, vous pouvez vérifier ça. En fait, ce que dit la théorie de Galois, c'est qu'il y a un groupe qui

permute ces racines, c'est-à-dire qu'elles peuvent bouger de l'une à l'autre. Et de telle sorte que si une relation comme ça a lieu, elle aura lieu pour les racines permutées. Et ce que dit la théorie de Galois, c'est que par ce groupe, vous pouvez transformer n'importe quelle racine en n'importe quelle autre. Alors ce que dit Galois après, en fait ce que je vous dis en particulier ici, c'est que c'est impossible d'avoir cette relation. Pourquoi est-ce impossible d'avoir cette relation ? Parce que si vous avez cette relation, vous voyez bien que les 5 racines, elles sont réelles. Ca, c'est pas du tout difficile à démontrer. Donc vous avez bien 5 racines qui sont réelles. Mais supposez que vous ayez une relation comme celle que j'ai écrite : $E = 4C^2 + 2D^2$. Eh bien à ce moment-là, comme E peut devenir n'importe laquelle des autres racines, C et D seront d'autres racines aussi. Et vous voyez bien que toutes les racines devraient être positives, puisque ce sont des sommes de carrés. Et donc ce n'est pas possible. Ce n'est pas possible. Donc, c'est extraordinaire !

Ca vous dit que sans calculer et sans se salir les mains, ni quoi que ce soit, on sait que cette relation n'est pas possible. C'est-à-dire qu'avec l'ordinateur, l'ordinateur va vous dire "Mais elle est vraie, elle est vraie !". Il va le dire avec des décimales et tout ça. Non ! Galois dit "c'est pas possible, cette relation n'est pas vraie !". Et elle n'est pas vraie par la pensée pure, c'est extraordinaire ! C'est quelque-chose d'extraordinaire ! Parce qu'il a compris que derrière une équation, il n'y a pas seulement la valeur numérique des racines. Non. Il y a les relations entre les racines qui peuvent exister, Et ce que fait la théorie de Galois, c'est de déceler exactement toutes les relations entre les racines. Et elles sont décelées par un groupe. Alors, ne croyez pas les gens qui vous diront que c'est Galois qui a inventé la théorie des groupes. Non, les gens comme Lagrange, etc., savaient ce que c'étaient que les groupes avant lui. Mais Galois est le premier mathématicien *moderne*. C'est-à-dire que c'est le premier mathématicien qui a eu cette fulgurance, si vous voulez, qui fait que certaines choses comme ça sont vraies sans qu'on ait à calculer ou quoi que ce soit, d'accord. On a une théorie abstraite, c'est une théorie de l'ambiguïté et résoudre une équation, c'est graduellement diminuer l'ambiguïté qu'il y a, pour que finalement, sur l'équation, on puisse affirmer telle racine, et telle racine, etc. D'accord. Donc c'est ça, la théorie de l'ambiguïté. Et ici, en l'occurrence, on peut calculer ce qu'est le groupe de Galois. Donc le groupe de Galois, vous voyez les 5 racines, elles sont indiquées ici. Le groupe de Galois, il va les permuter. Et puis, mais il les permute si vous voulez de manière transitive, c'est-à-dire que si on itère ces permutations, si par exemple, je

prends la racine qui est en-haut au milieu, elle va aller sur la première ; et après, si je regarde où va la première, elle va sur la dernière ; après, si je regarde la dernière, elle va sur l'avant-dernière ; si je regarde l'avant-dernière, elle va sur la seconde. Donc vous voyez que vous avez fait tout le tour d'accord.

Donc bon, et ça, c'est toujours vrai, c'est-à-dire que quelle que soit l'équation que vous preniez, Galois vous dit que si elle était réductible, il y a un groupe qui permute les racines. Alors il y a beaucoup de mathématiciens qui croient connaître la théorie de Galois, parce qu'ils disent que Galois a réussi à démontrer qu'une équation est résoluble par radicaux si et seulement si son groupe de Galois est résoluble. Mais en fait Galois, à 17 ans, avait bien mieux que ça, il avait... un théorème...

Je vais vous effrayer mais ne vous inquiétez pas, on va passer à un autre sujet tout de suite. Donc ce que Galois démontre, c'est que si on prend une équation qu'il appelle primitive. C'est une certaine définition technique, pour qu'elle soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'on puisse indexer les racines par un corps fini. C'est Galois qui a inventé les corps finis. C'est assez amusant parce que les Français sont pudiques, parce que les Anglo-Saxons appellent ces corps finis les *Galois fields*. Si on traduit en français, ça se traduit par corps de Galois. Mais en France, on n'utilise pas cette terminologie : on parle de corps fini. Et alors le théorème de Galois, qu'il avait quand il avait 17 ans, c'est que pour qu'une équation primitive soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit qu'on puisse indexer ses racines par un corps fini, de telle sorte que le groupe de Galois, alors là, tenez-vous bien, accrochez-vous, soit contenu dans le produit semi-direct du groupe affine du corps fini par le Frobenius, par les puissances du Frobenius. D'accord, d'accord, ok, bon.

(rires)

Et alors quand j'ai préparé mon exposé pour l'Académie, justement, je me suis aperçu qu'en fait, Galois connaissait un nombre incalculable de choses et qu'il connaissait par exemple, maintenant ce qu'on appelle la théorie de Sylow, qui est une théorie qui a été mise au point peut-être 50 ans après la mort de Galois. Donc c'est vous dire un peu à quel point il avait réussi à voir si loin. Et à la fin de mon exposé, je vous montrerai un texte de Grothendieck et c'est un texte qui est fondamental parce que ça s'applique merveilleuse-

ment au cas de Galois d'accord, et c'est un texte sur la créativité, sur la découverte et sur le fait que la vraie créativité, elle demande justement si vous voulez de retourner à cet esprit de l'enfant qui est à la fois libre, mais aussi qui n'accepte pas si vous voulez le poids des connaissances qu'on met sur lui. Donc on y reviendra à ça, d'accord.

Alors maintenant, j'en viens à un autre sujet, parce que je ne veux pas négliger la physique. Et à un autre sujet qui me tient à cœur aussi énormément et qui est celui, si vous voulez, d'un autre grand découvreur, dans le XXème siècle, si vous voulez, c'est la découverte de la mécanique quantique. Maintenant, on va passer à Heisenberg et à la mécanique quantique. Donc on fait une pause si vous voulez. Ce que j'ai essayé de faire, c'est de choisir des sujets qui vous montrent, chacun, une nouvelle notion qui a été découverte, soit en faisant de la recherche mathématique, soit en faisant une recherche sur la nature, sur la physique. Mais chacune de ces notions est une notion qui a un sens, qui a un sens absolument fondamental.

Donc, l'histoire d'Heisenberg, elle est en fait reliée à un lieu, et ce lieu, c'est une île qui en allemand s'appelle Helgoland ; en français, on traduit Heligoland. C'est une île des pays nordiques. Et c'est une île qui a une particularité, je ne sais plus si cette particularité est encore vraie de nos jours ; en tout cas, elle avait une particularité dans les années 1925, qui était qu'elle n'avait pas de pollen. Il n'y avait pas d'arbres, il n'y avait pas de sources de pollen. Alors, quel est le lien avec Heisenberg ? Le lien, c'est que Heisenberg était un étudiant en physique, enfin, un étudiant, il avait déjà de la bouteille... Il était à Göttingen, je pense. Et à un moment donné, c'était au mois de mai, il a été pris d'une allergie terrible, le rhume des foins si vous voulez. Donc il avait la tête enflée, enfin tout ça quoi, et donc à l'époque, le seul remède, on ne donnait pas d'anti-histaminiques, le seul remède, c'était de l'envoyer à Heligoland. Donc il a été envoyé sur cette île. On lui a dit "il faut arrêter de faire vos cours, etc." et on vous envoie sur cette île. Et il est arrivé sur cette île. Il était logé par une vieille dame dans une maison, peut-être une des baraques qui sont là-haut, là. Et puis à l'époque, il cherchait... *(petit bruit circonspect interrogatif).* A l'époque, il cherchait...

Il essayait de ... A l'époque, la mécanique quantique était à un stade préhistorique, c'est-à-dire qu'on avait décidé ce qu'on appelle certains principes, qui permettaient de calculer des énergies et tout ça, mais je veux dire que ce

n'était absolument pas une vraie théorie. Et Heisenberg réfléchissait sur un problème. En gros, son problème, ça prendrait trop de temps de l'expliquer, si vous voulez, l'idée, en gros, à l'époque, on concevait l'atome comme un petit système solaire. Mais ça ne marchait pas. Parce que ce qui se passe dans un système comme le système solaire, c'est que, par exemple si l'électron tournait autour du noyau, il émet de l'énergie, et donc en fait, son orbite devrait se ratatiner sur le noyau. Et ça, c'est pas ce qui se passe en réalité. Donc il y avait des choses comme ça qui ne collaient pas du tout. Et donc, Heisenberg a réfléchi là-dessus. Il est parti des résultats expérimentaux, ce qu'on appelle le principe de Ritz-Rydberg. Et puis bon, il avait ce calcul qu'il voulait faire et quand il était sur cette île, il a commencé à faire ce calcul. Il y avait des choses qu'il ne comprenait pas, tout ça. Et puis un matin, à 4h du matin, tout a marché ! Il a eu cette révélation extraordinaire ! Et au lieu d'aller se coucher, il est allé grimper sur un des pics rocheux *(rires)* qui sont au bord de l'île. Il s'est installé en haut, et il a attendu le lever du soleil. Et dans ses mémoires, il décrit de manière extraordinaire si vous voulez, cette illumination qu'il a eue et il dit vraiment, et c'est vrai, qu'il a eu tout d'un coup devant les yeux un immense paysage qui s'est dévoilé à ses yeux, mais c'était un paysage intellectuel, bien sûr ; ce paysage, c'était l'essence de la découverte qu'il a faite, si vous voulez, c'est quelque-chose d'incroyable ! Il a découvert que quand on fait des calculs, voilà Heisenberg, et on y reviendra à ça. Ce qu'il a découvert, c'est que vous voyez, quand vous faites de la physique, bon par exemple, vous écrivez $e = mc^2$ ou des trucs comme ça. Vous pourriez écrire $e = c^2$ fois m, c'est du kif-kif, ce sont des nombres. Bon, eh bien, je veux dire, ça ne change rien. Ce qu'Heisenberg a trouvé, c'est quelque-chose d'incroyable. Heisenberg a trouvé que si vous essayez de manipuler la position et le moment, on parle de la vitesse, mais il faut parler du moment : le moment, c'est le produit de la vitesse par la masse, d'accord ? Donc, si vous essayez de manipuler à la fois la position et le moment, au niveau microscopique d'un tout petit truc, d'un atome ou d'un truc comme ça, eh bien, vous pourrez toujours faire tout ce que vous voulez, vous n'arriverez jamais à mettre en défaut ce qu'on appelle le principe d'incertitude d'Heisenberg, d'accord, qui est que $\Delta x \Delta p$... Δx, c'est l'incertitude sur la position, Δp, c'est l'incertitude sur le moment. Eh bien ça, c'est toujours plus grand ou égal à $\hbar/2$, qu'est-ce que c'est que $\hbar$, c'est la constante que Planck avait introduite au début du siècle, pour expliquer certains phénomènes physiques.

Alors là, il faut que je vous raconte une petite histoire, à propos du prin-

cipe d'incertitude parce que bon, *(chuchotant)* je crois qu'il y a un bouquin d'ailleurs là-dessus, qui est pas mal, d'ailleurs... Mais en fait, sur le principe d'incertitude, si vous voulez vraiment ressentir en quoi ce principe a troublé les gens, il y a une histoire qu'il faut que je vous raconte. C'est que bien sûr, Einstein n'y croyait pas. Pourtant, Einstein est à l'origine de la théorie quantique, je veux dire, c'est Einstein qui a eu l'idée que le photon avait des niveaux d'énergie qui étaient quantiques. Donc Einstein n'y croyait pas. Donc Einstein avait imaginé un dispositif.

A l'époque donc, Heisenberg a trouvé son principe d'incertitude vers la fin des années 1920. A cette époque-là, il y avait ce qu'on appelait les congrès Solvay ; c'étaient des réunions de physiciens, en petit nombre, et bien sûr, ils discutaient entre eux.

Donc il y a eu un congrès Solvay, je crois que c'était en 1830, ou quelque-chose comme ça. Et donc Einstein avait imaginé la chose suivante ; il avait imaginé pour mettre en défaut le principe d'incertitude, mais pas sur la position et le moment, mais sur $\Delta t \Delta E$; c'est à dire que...*(soupir, soupir)*... le temps, c'est la variable duale de l'énergie, de même que la position est la variable duale du moment. Et le principe d'incertitude vous donne quelque chose de semblable pour $\Delta t \Delta E$. Quelque-chose comme $\hbar$ ou $\hbar/2$, ça dépend des unités. Donc Einstein ne croyait pas à ça. Et Einstein avait imaginé... Bien sûr, il faisait toujours la même chose, c'est-à-dire que quand il ne croyait pas à quelque chose, il imaginait une expérience de pensée. Une expérience de pensée, qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que je vais vous faire un dessin très grossier : mais en fait, on peut très bien imaginer que cette expérience soit rendue de plus en plus précise. D'accord ? Donc le dessin très grossier, c'était le suivant : *(dessinant le dispositif au tableau)* là, on va mettre un petit ressort, et puis ici, on va mettre une boîte. Et puis on va mettre comme un coucou quoi. Et puis avec, il y aura l'heure ici, d'accord ?

C'était ça son système, et puis là, il y a une espèce de truc. Et puis, là, il y a des... Voilà le système.

Alors quelle était l'idée d'Einstein ? L'idée d'Einstein, c'est que Δt, eh bien, on va le contrôler puisqu'on à l'heure ici, d'accord. Donc ça, c'est le t donc. Et ΔE maintenant ? Donc, qu'est-ce que ça veut dire, qu'est-ce que j'ai dit ici *(montrant un endroit du dessin)* ? Ca veut dire qu'il y aura un moment

donné où le coucou va faire “Touc !”. Il va émettre un photon. Et on saura à quelle heure il l’a émis puisqu’il y a ce truc qui marque l’heure, d’accord. Donc Δt, *(bruit pour exprimer qu’on ne sait pas quoi...)*. Alors maintenant ΔE. Eh bien le photon, ça, Einstein, il le sait, le photon, il pèse $h\nu$, où ν c’est la fréquence du photon. Donc ça, c’est e si vous voulez, c’est l’énergie. Donc quand le photon sort, ce truc-là, il devient un petit peu plus léger... *(voyant qu’il semble peut-être avoir un peu perdu la compréhension de son auditoire)* Est-ce que vous connaissez l’histoire du camion qui transportait des trous, non ? Vous ne la connaissez pas ? Il était en montagne, d’accord, puis à un moment donné, le chauffeur, il s’est senti plus lourd, il a reculé, il est tombé dans le trou, d’accord.

(rires).

Bon, je reprends, d’accord ? Donc, ici, une fois que le photon a été émis, d’accord, ce truc-là devient un petit peu plus léger, donc ça va, si vous voulez, l’aiguille, elle va monter un petit peu, et en regardant de combien elle est montée, on va connaître ΔE donc en fait, Einstein disait “bah on va connaître ΔE, on va connaître Δt, avec une précision aussi grande que l’on veut. Donc on aura pas le principe d’incertitude”. Alors il a dit ça. Et ça a fait terriblement peur à Bohr qui était en train de discuter avec eux, parce que Bohr croyait bien sûr au principe d’incertitude, ça lui a fait terriblement peur parce que... Quelle était la raison pour laquelle il avait peur ? La raison pour laquelle il avait peur, c’est que quand vous faites les calculs avec ce système, proposé par Einstein, ce qui va intervenir, c’est la constante de gravitation parce que vous voyez, l’horloge, quand elle monte un peu, elle est dans le champ gravitationnel, donc quand vous allez chercher de combien l’énergie a diminué, vous allez faire intervenir la constante de gravitation, donc évidemment, la constante de gravitation, elle rentre absolument pas dans le $\hbar$ de Planck etc. La théorie de Planck, elle est complètement disjointe de la gravitation. Donc Bohr se disait, c’est foutu !

Donc, il y a une photo extraordinaire, sur laquelle on voit Einstein sortir très fièrement de la salle de congrès Solvay et on voit Bohr qui le suit un peu comme un petit chien, et qui est, bon... Et alors ce qui s’est passé, c’est que ce n’est pas la fin d’histoire. La fin de l’histoire est absolument merveilleuse, parce que ce qui s’est passé, c’est que Bohr est rentré à son hôtel. Evidemment, il n’a pas dormi, il n’a pas dormi de la nuit parce que bon, je veux

dire... Il n'a pas dormi de la nuit, et il a trouvé la réponse... Et la réponse est fantastique. La réponse est absolument fantastique, parce que, si vous voulez, bon, ça paraissait impossible, impossible ! Pourquoi ? Parce que, comme je le disais, il y aura la constante de gravitation quand vous allez faire le calcul et ça, c'est impossible que ça marche ! C'est impossible qu'on retrouve le $\hbar$. D'où il sort ? Ce qu'a trouvé Bohr pendant la nuit, il a trouvé que le même Einstein, en fait, il avait pondu la relativité générale. *(Alain Connes écrit les formules à la craie au tableau).* A l'époque ! Ca, vous savez, maintenant, cette année, au mois de novembre, il va y avoir un tas de célébrations de la découverte de la relativité générale par Einstein. Ca fait exactement 100 ans. C'est pour ça qu'il va y avoir toutes ces célébrations. Donc ça fait exactement 100 ans. Et c'était donc une dizaine d'années, ou même plus, une quinzaine d'années avant l'histoire en question. Qu'est-ce que ça à voir avec le truc ?

Ce que ça a à voir avec le truc, c'est la chose suivante : c'est que ce que dit la relativité générale, elle dit que le passage du temps, si vous écrivez la métrique, vous avez ce qu'on appelle la métrique de Minkowski, en fait, qui est dûe à Poincaré, donc de l'espace-temps si vous voulez. Lorsque ça, c'est l'espace-temps de la relativité restreinte, et si vous regardez la métrique de l'espace-temps de la relativité générale, en première approximation, ce qui se passe, c'est que la métrique ne change pas pour les coordonnées usuelles : on est dans un espace euclidien. Par contre, elle change pour le passage du temps, et la manière dont elle change, c'est que le coefficient dt^2 est multiplié par 1+ deux fois le potentiel Newtonien $V(x, y, z)$.

Vous inquiètez pas, c'est pas... bon. Qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que le temps passe différemment selon l'altitude, ok ? Mais l'horloge, elle a changé d'altitude un petit peu *(Eclats de rires).* Donc son temps a passé différemment. Vous faites le calcul et vous retrouvez le principe d'incertitude d'Heisenberg. C'est incroyable ! Ca veut dire que Bohr, si Einstein n'avait pas découvert la relativité générale *(Eclats de rires)* une quinzaine d'années avant, il aurait eu raison, d'accord ?... Personne n'aurait cru que le principe d'incertitude était valable. Mais, à cause de la relativité générale, que lui-même avait inventée, il a été battu, il a été mis en défaut. Donc le lendemain matin, Bohr est rentré, triomphant, je veux dire, c'est extraordinaire ! C'est vraiment extraordinaire, mais si vous voulez, tout ça, c'est pour essayer de vous faire sentir le fait qu'aucune de ces notions n'a été acceptée au début. Pas du tout ! Absolument pas. Il y a toujours une résistance absolument

terrible, à des choses qui sont nouvelles comme ça... Et alors, ce qui est incroyable dans le quantique, ce qui est ahurissant dans le quantique, si vous voulez, et ça je pense que ce n'est pas vraiment passé dans les connaissances. Oui, alors, bon. J'en parlerai après de ça, j'en parlerai après. J'y reviendrai. Ce qui est incroyable dans le quantique, si vous voulez, c'est le fait que, et ça, ça vient du principe d'incertitude d'Heisenberg, c'est que, contrairement à la physique classique, quand vous faites une expérience dans le quantique, vous ne pouvez pas reproduire l'expérience. C'est quelque-chose de fondamental. Quand j'essayais de vous dire, si vous voulez, que j'allais vous expliquer des concepts ou des notions... Ce sont des notions qui font une telle cassure avec la vision classique, si vous voulez, que c'est énorme comme différence. Qu'est-ce que je veux dire par là ? Ce que je veux dire par là, c'est que si vous faites une expérience de nature quantique, par exemple vous envoyez un photon, et ce photon, il va passer par une toute petite fente qui est à peu près de la taille de sa longueur d'onde. Et après, vous allez le recevoir sur une cible. Eh bien, le fait que vous receviez le photon à un endroit x donné, cette expérience-là n'est pas reproductible. C'est-à-dire que vous pourrez refaire l'expérience avec autant de précision, donner les mêmes conditions initiales, etc., le résultat final ne sera pas le même. C'est incroyable, ça ! Et il ne sera pas le même à cause du principe d'incertitude de Heisenberg.

Alors, vous pouvez me dire "Bon bah d'accord bah bon moi, je m'en fiche, il y a un peu d'aléa, quoi ! Un aléa microscopique, je m'en fiche !". Mais non ! Maintenant, ce qui se produit, c'est que le fait qu'il y ait cette incertitude fondamentale, si vous voulez, eh bien, ça a été utilisé pour produire des nombres aléatoires. C'est-à-dire qu'il y a des Suisses qui ont fabriqué un appareil qui marche, maintenant c'est avec une lampe LED, vous savez les petites lampes LED là, comme ça. Alors ces petites lampes envoient des photons sur une cible, voilà. On regarde à quel endroit le photon arrive, il arrive sur l'un des carreaux de la cible. Et à partir de là, on fabrique un nombre et comme c'est un phénomène quantique, c'est-à-dire que c'est un phénomène qui n'est pas reproductible, ça produit des nombres aléatoires, qui sont tellement aléatoires que, même si un attaquant voulait reproduire la même chose, ça veut dire s'il connaissait toutes les données sur le système, il n'arriverait pas à reproduire le même nombre. Alors qu'avec un ordinateur, si vous fabriquez des nombres aléatoires, si l'attaquant connaît votre système de fabrication, il arrivera à les reproduire, les nombres aléatoires, d'accord ? Donc c'est phénoménal, c'est phénoménal ! Alors, de là, si vous voulez de

cette vérité extraordinaire, en fait, sort une idée, qu'on a commencé à exploiter et cette idée, c'est la suivante : vous voyez, nous, nous sommes habitués en physique a attribuer tout variabilité au passage du temps, c'est-à-dire que bon... Moi, je me souviens une fois mon prof, j'avais un prof, je ne sais plus si c'était en maths sup. Il m'a dit de passer au tableau, alors j'y passe.

Il m'interroge. Et puis, il me fait ça *(geste d'une courbe dessinée en l'air)* - Ouhouh ? ! *(rires)*. Moi, je regarde comme ça... Il me dit "Monsieur Connes, quelle est la variable ?". Alors, moi, je faisais de la cinématique. Je réfléchis... Et puis au bout d'un moment, je lui réponds : "c'est le temps !". C'était la bonne réponse ! Vous voyez, normalement, il y a un tas de choses qui sont variables. Et toute la physique est écrite en notant d/dt de quelque-chose égale quelque-chose d'autre... Toute la physique est écrite en fonction du temps. Et en fait, si on réfléchit suffisamment, au niveau conceptuel, on s'aperçoit en fait, que la mécanique quantique occasionne immédiatement des paradoxes, des paradoxes très très violents, très très forts, si vous voulez, et qui viennent précisément du fait qu'on attribue la variabilité au passage du temps.

Et il y a une idée fondamentale qui a du mal à passer, mais qu'on a essayé de vulgariser etc., et cette idée c'est en fait que la vraie variabilité, c'est la variabilité quantique et que le temps en fait, émerge de cette variabilité-là. Ca veut dire que le temps n'est qu'un phénomène secondaire, n'est qu'un phénomène émergent, qui résulte de la variabilité quantique, mais qui n'est pas du tout fondamental d'accord.

Alors pour essayer de faire passer cette idée, en fait, je ne vais pas vous donner tous les détails, on a écrit un livre, donc, avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, on a écrit un livre ensemble, qui s'appelle Le Théâtre quantique. Et dans ce livre, vous verrez une introduction à cette idée-là, qui est, on l'espère, compréhensible quoique un peu cryptique évidemment, c'est-à-dire qu'on ne donne pas tous les détails etc. Mais l'idée vient d'un autre mathématicien tout à fait extraordinaire Von Neumann.

Cest-à-dire après la découverte de Heiseberg, si vous voulez, après la grande découverte de Heisenberg, bien sûr, les mathématiciens ont formalisé ce que Heisenberg avait trouvé. Ca a pris du temps. Ce que Heiseberg avait trouvé, donc je vous le rappelle, c'était que vous ne pouvez pas permuter les lettres, les variables comme $e = mc^2$, vous ne pouvez pas écrire $e = c^2m$. On

ne peut pas faire ça, d'accord ? Alors il y a des gens qui vous diront "Ouh la la la la ! Qu'est-ce que ça va être compliqué tout ça !". Mais en fait, non, revenons à Heisenberg.

Vous voyez ces deux phrases, donc ça, c'est une anagramme qui a été trouvée par Jacques Perry-Salkow, qui est tout à fait extraordinaire et qui a été la naissance du bouquin que je vous ai montré. Mais que signifie une anagramme ? Elle signifie que si j'avais le droit de permuter les lettres, j'obtiendrai le même résultat : pas terrible ! *(rires)* $a2bcd$... Donc vous voyez, dans le commutatif, ça vous donne le même résultat. Mais bien sûr, nous sommes tous habitués à faire attention à l'ordre des lettres... Bien sûr, c'est le langage ! Le langage est fait pour ça. Et la découverte d'Heisenberg peut se dire incroyablement simplement : elle peut se dire en disant que Heisenberg, il a trouvé qu'il fallait faire attention à l'ordre des lettres, quand on fait des calculs avec les variables microscopiques, c'est merveilleux ! C'est quelque chose d'absolument merveilleux, d'accord ! Bon alors Von Neumann a élaboré là-dessus, il a trouvé qu'il fallait un formalisme mathématique qui s'appelle le formalisme des espaces de Hilbert, c'est un truc assez compliqué.

Alors, vous savez, dans mon introduction, j'ai dit que j'allais parler des algèbres de Von Neumann, d'accord. Alors justement là j'en parle, d'accord. Je ne vous donne pas trop de détails, bien sûr, pas trop de détails sur les types et tout ça. Mais maintenant, je vais vous parler d'un autre mathématicien, et qui a été le point de départ, vraiment de mon travail, de ma thèse, etc., et qui est l'outil qui a permis d'avoir, l'outil essentiel qui permet de donner un sens à cette idée que le temps, le passage du temps émerge à partir de l'aléa du quantique. Alors, la raison pour laquelle je vous montre sa photo, c'est que malheureusement il est mort, le 9 octobre, à l'âge de 91 ans ; sa photo a été prise quand il était venu à Bures-sur-Yvette il y a exactement 30 ans. Il a passé un an à Bures-sur-Yvette il y a 30 ans, et pourquoi c'est un personnage absolument extraordinaire ? C'est un personnage extraordinaire parce que par exemple, il était dans l'armée au moment de la guerre entre le Japon et les Etats-Unis, mais il était devenu sourd à l'âge de 2 ans. Donc il y a eu un moment donné où tous ses coréligionnaires couraient aux abris, quand il y avait un bombardement. Tomita ne bougeait pas, et quand ses coorélionnaires revenaient le voir, ils lui disaient "mais tu es fou ?...". Ils le secouaient, et il leur disait "Quel bombardement ?". C'était à ce point-là, il était connu comme ça. Et alors il y a eu un épisode où le gradé qui les commandait a dit

que lui ne serait pas de l'expédition qu'ils allaient faire parce que, comme il était sourd, ça posait plutôt un problème. Donc il est resté et tous les autres sont morts. Et apparemment, mais ça j'en suis moins sûr, apparemment, il était le suivant sur la liste des kamikazes au moment où la guerre s'est arrêtée.

Ensuite, il a eu un prof, il faut dire que peu après la guerre donc, quand il était à l'université, au lieu de faire des cours, enfin au lieu d'aller écouter les cours, les étudiants allaient planter des pommes de terre tellement il y avait la famine. Ils allaient planter des pommes-de-terre tout près de l'université. Donc il avait un prof. Il avait un prof pour faire sa thèse, son prof s'appelait Ono, et son prof, la première fois donc Tomita va voir son prof, parce qu'il voulait faire une thèse ; son prof prend un gros gros bouquin, je n'en ai pas amené avec moi. Le prof lui donne un livre, oh ! plus que ça, deux fois ça facile, d'accord, il le donne à Tomita et il lui dit "Lisez ce bouquin et revenez me voir quand vous aurez tout compris". Alors ça va, comme ça. Alors pendant 2 ans, ils ne se voient pas. Et puis au bout de 2 ans, par hasard, Tomita rencontre son prof dans les couloirs de l'université. Son prof se souvenait quand même : "alors ce bouquin, ça avance ?". Et Tomita lui répond "je l'ai perdu au bout d'une semaine..." *(rires)* C'était un type absolument génial. Il racontait des histoires qui étaient absolument géniales. Il a fait une découverte absolument géniale. Seulement, comme il était sourd, si vous voulez, c'était très très très difficile de communiquer avec lui. C'était vraiment très très difficile, la plupart du temps, il coupait son appareil. *(rires)*. Moi, ça a été le point de départ de mes travaux si vous voulez. Le départ de mes travaux, ça a été le fait que donc Tomita et puis après Takesaki, qui avait repris les travaux de Tomita, avait trouvé que bon, sur une algèbre de Von Neumann, comme Von Neumann les avait définies, il y avait une évolution mais qui dépendait d'un état. Et alors, ce que j'ai démontré dans ma thèse, c'est qu'en fait, elle ne dépendait pas d'un état et qu'il suffisait d'avoir la non-commutativité, c'est-à-dire qu'il suffisait d'avoir une algèbre, de faire des calculs dans lesquels vous faites attention à l'ordre des termes, pour qu'il y ait une évolution dans le temps, donc pour qu'il y ait un temps qui passe. Bon alors après, il y a eu un tas de conséquences de ça, bien entendu. Et en fait, l'essentiel de mes travaux a été si vous voulez de développer la géométrie pour des espaces qui contrairement aux espaces de Descartes, parce que Descartes si vous voulez, avait réussi à comprendre qu'il y avait une dualité entre la géométrie et l'algèbre car Descartes avait compris qu'on pouvait encoder un espace géométrique par des coordonnées et puis faire des calculs algébriques au lieu de

faire des calculs géométriques. Un exemple le plus simple possible : si vous voulez démontrer que les 3 médianes d'un triangle se coupent. Eh bien, il y a plusieurs manières de faire, mais la manière la plus simple, c'est de faire le calcul du barycentre. Vous prenez les coordonnées puis vous calculez le tiers de la somme des coordonnées. Quel est l'avantage de la démonstration algébrique sur la démonstration géométrique ? Vous pouvez bien sûr faire une démonstration géométrique du fait que les 3 médianes d'un triangle se rencontrent. Mais supposez que je vous demande de le démontrer en dimension n ? *(rires).* Alors que la démonstration algébrique, elle est évidente, vous faites $1/n$ fois la somme des coordonnées et puis c'est tout, ça vous donne le point d'intersection et puis c'est terminé. Donc vous voyez la puissance de ce va-et-vient, entre d'un côté la géométrie, et de l'autre côté l'algèbre. Alors ce qu'a découvert Heisenberg, c'est qu'il y avait des espaces incroyablement naturels dans lesquels justement, les coordonnées ne commutent pas. Et ces espaces correspondent aux observables sur un système microscopique.

Et donc moi, l'essentiel de mes travaux, ça a été de développer la géométrie, pour de tels espaces.

Alors comme le temps est encore assez court, au lieu de vous parler de mes travaux, je vais vous parler d'un autre mathématicien absolument extraordinaire, qui s'appelle Alexandre Grothendieck, et qui est mort il y a un an, et la raison pour laquelle je vais vous en parler, ce n'est pas parce que je veux vous décrire la théorie des topos, parce que ça, c'est une merveilleuse théorie mais ça ne passerait pas, je n'ai pas envie d'en parler. Après peut-être... Mais c'est surtout pour vous expliquer, pour vous montrer ce que Grothendieck dit sur la créativité et sur ce besoin absolument nécessaire de retrouver, lorsqu'on est devant un problème très très difficile, son âme d'enfant et cette espèce de, justement, d'ouverture, de sensibilité, etc. qui est en fait trop souvent complètement gommée, complètement effacée par le poids des connaissances. Donc voilà ce que dit Grothendieck, je vais le lire avec vous, et puis on s'arrêtera là. Donc voilà Grothendieck quand il était jeune. Il a eu, lui aussi, une vie extrêmement tumultueuse.

Donc voilà ce qu'il écrit. Il écrit :

Dans notre connaissance des choses de l'univers, qu'elles soient mathématiques ou autres, le pouvoir rénovateur en nous n'est autre que l'innocence.

C'est l'innocence originelle, que nous avons tous reçue en partage à notre naissance, et qui repose en chacun de nous, objet souvent de notre mépris, de nos peurs les plus secrètes. Elle seule, (donc cette innocence) *unit l'humilité* (bien sûr, la recherche est une école d'humilité, l'école quotidienne de l'humilité) *l'humilité et la hardiesse qui nous font pénétrer au cœur des choses et qui nous permettent de laisser les choses pénétrer en nous, et de nous en imprégner.* (Ca, c'est la première chose qu'il dit. Ensuite il dit :) *Ce pouvoir-là,* (Ca, c'est très très important, maintenant.) *Ce pouvoir-là n'est nullement le privilège de dons extraordinaires.*

Vous voyez, lorsque parfois on assiste à des expositions, sur les mathématiques, vous avez l'impression que ouh ! Ce sont des extraterrestres ces gens-là, non il ne faut pas du tout avoir cette peur, absolument pas. Il arrive au contraire trop souvent que les gens trop intelligents aient une réaction immédiate et que cette réaction immédiate en fait, soit fausse. C'est-à-dire ils vous disent "ça va pas marcher pour telle et telle raison...". En fait, s'ils avaient réfléchi plus, il se seraient aperçus que ça marche, d'accord. Donc ce que dit Grothendieck, c'est que donc :

Ce pouvoir là mais nullement le privilège de dons extraordinaires, d'une puissance cérébrale, disons hors du commun, pour assimiler et pour manier avec dextérité et avec aisance, une masse impressionnante de faits, d'idées et de techniques connues. Ces dons sont certes précieux et sources d'envie sûrement pour celui qui, comme moi, n'a pas été comblé ainsi à sa naissance au-delà de toute mesure...

Là, il est vraiment ironique, ironique, j'aime pas dire le plus grand parce que le plus grand, qu'est-ce que ça veut dire..., on ne peut pas comparer des choses différentes, mais il a eu une influence phénoménale sur les mathématiques du XXème siècle. Une influence phénoménale. Donc l'entendre lui, dire ça... c'est rassurant, disons ! *Ces dons sont certes précieux et sources d'envie sûrement pour celui qui comme moi n'a pas été comblé ainsi à sa naissance au-delà de toute mesure. Ce ne sont pas ces dons-là, pourtant, ni l'ambition même la plus ardente* (l'ambition ne suffit en rien) *l'ambition, servie par une volonté sans faille, qui font franchir ces cercles invisibles et impérieux qui enferment notre univers. Seule l'innocence les franchit, sans le savoir, ni sans s'en soucier, à l'instant où nous nous retrouvons seuls à l'écoute des choses, intensément absorbés dans un jeu d'enfant.*

Donc ce qu'il explique, c'est qu'il n'y a rien de plus fructueux que de se saisir d'une question et d'y réfléchir, mais de cette manière-là, d'une manière complètement indépendante du poids de la science, etc. d'accord. Bien sûr, bon, pour arriver au problème, il faut connaître un certain nombre de choses mais après, il faut y réfléchir comme ça. Et donc il continue en disant :

La découverte est le privilège de l'enfant. C'est du petit enfant que je veux parler, l'enfant qui n'a pas peur encore de se tromper, d'avoir l'air idiot, de ne pas faire sérieux...

Par exemple, tout à l'heure, il y aura des questions donc d'accord, attention à ça, il ne faudra pas avoir peur. Il y a même un proverbe chinois qui dit : "si je pose une question, j'ai l'air idiot pendant 5 secondes ; si je ne la pose pas, j'ai l'air idiot tout le reste de ma vie.". Donc voilà ce qu'il dit, donc, de ne pas faire sérieux, de ne pas faire comme tout le monde. Et c'est vrai quand-même qu'il y a une attitude typiquement française assez caractéristique dans une assemblée : on a peur de poser la question, sauf quand on connaît la réponse *(rires)*.

Il n'a pas peur non plus que les choses qu'il regarde aient le mauvais goût d'être différentes de ce qu'il attend d'elles, de ce qu'elles devraient être, ou plutôt de ce qu'il est bien entendu qu'elles sont, c'est-à-dire, ce que la majorité des gens vont lui avoir dit qu'elles seraient ; il ignore les consensus muets et sans faille, qui font partie de l'air que nous respirons, celui de tous les gens sensés et bien connus comme tels. Dieu sait s'il y en a eu, des gens sensés et bien connus comme tels, depuis la nuit des âges ; nos esprits sont saturés d'un savoir hétéroclite, enchevêtrement de peurs et de paresses, de fringales et d'interdits, d'informations à tout-venant et d'explications pousse-boutons...

Un exemple typique, c'est ce qu'on appelle l'effet papillon, le nombre de gens qui ont ressassé ça sans savoir que c'était une idiotie, c'est quelque-chose de considérable. Mais je veux dire, ça a perduré, ça a perduré longtemps d'accord. Alors je continue donc.

...espace clos où viennent s'entasser informations, fringales et peurs, sans que jamais s'y engouffre le vent du large, exception faite d'un savoir-faire de routine. Il semblerait que le rôle principal de ce savoir est d'évacuer une per-

ception vivante, une prise de connaissance des choses de ce monde.

C'est ça qui compte, c'est cette perception vivante. Par exemple, pour aimer les mathématiques, il faut en faire, bien sûr. Et peu importe le problème que vous regardez, mais ce qui est important, c'est que vous en fassiez, c'est pas que vous preniez comme... Si quelqu'un vous dit un théorème, par exemple, si vous voulez, il faut pas trop avoir la démonstration. Il faut la chercher par vous-même, même si vous ne la trouvez pas. Vous allez gagner. Pourquoi ? Parce que si vous la cherchez, par vous-même, quand on vous la dira, même si vous ne la trouvez pas, et bien vous direz "mais c'est bien sûr, c'était ça, et c'était ça !". Si vous ne la cherchez pas et si on vous la donne, ça rentre par une oreille et ça sort par l'autre, et puis vous aurez oublié au bout d'une demi-heure. Donc, c'est très très important d'**en faire**, d'accord. Donc donc... *Son effet est surtout celui d'une inertie immense.* Il parle du poids de ce savoir en commun, souvent écrasant.

Le petit enfant découvre le monde comme il respire. Le flux et le reflux de sa respiration lui font accueillir le monde en son être délicat et le font se projeter dans le monde qui l'accueille. L'adulte aussi découvre, en ces rares instants où il a oublié ses peurs et son savoir, quand il regarde les choses ou lui-même avec des yeux grand ouverts, avides de connaître, avec des yeux neufs, des yeux d'enfant.

J'espère que vous ressentez le plus important dans ce que j'ai dit. C'est que ça ne s'applique pas du tout qu'aux mathématiques ; c'est-à-dire que vous vouliez faire des sciences humaines, que vous vouliez faire de la linguistique, que vous vouliez faire quelque chose que ce soit, même peut-être de l'art, si vous voulez, c'est crucial que vous ayez compris le message. Et que vous ayez compris que, en particulier les mathématiques, elles ont une portée bien bien plus grande que de calculer avec des nombres, de calculer avec des chiffres, etc. C'est pas du tout ça, c'est une espèce de version de la philosophie qui est beaucoup plus dure parce qu'effectivement, pour arriver à un concept nouveau comme le concept de topos de Grothendieck, il a fallu des années et des années de réflexion... Mais ça donne des outils de pensée absolument fondamentaux. Et j'ai pas le temps d'en parler, mais le concept de topos, c'est un concept qui vous montre que la notion de vérité, quand on dit par exemple de manière courante de quelque chose que c'est vrai ou que c'est faux, eh bien, quand on regarde dans un topos, c'est un univers

qui est différent de l'univers, eh bien une chose peut être partiellement vraie partiellement fausse, elle peut être vraie pour un certain point de vue, elle peut être fausse pour un autre point de vue, etc. Donc ça donne un outil de pensée qui est incroyablement adapté en fait à la vie, à la politique, à 36 choses, mais qui n'est pas encore passé dans le domaine commun. C'est une notion qui est encore une notion dans le domaine mathématique, qui n'est pas encore passée dans le domaine commun. Et on y gagnerait énormément si vous voulez à, justement, à ce que toutes ces choses merveilleuses qui ont été découvertes, deviennent maintenant, fassent partie du domaine commun. Donc mon laïus allait dans ce sens-là d'accord, d'essayer de vous faire voir, de manière un peu surréaliste si vous voulez, qu'il existe ces choses magnifiques mais que bon bien sûr, il faut faire un effort pour les apprendre et un effort pour les connaître. Voilà.

Séance de questions à l'orateur

- Merci beaucoup. Questions. Peut-être, donc, on fait ce qu'on a dit. Si vous avez des questions, des précisions sur ce qui a été dit, donc, questions qu'il ne faut pas avoir peur de poser, moi, j'en ai quelques-unes, mais je suis sûr que vous en avez aussi...

- Vous avez parlé de l'effet papillon... Et que ça n'existait pas.

- Je n'ai pas dit que ça n'existait pas. Mais j'ai dit que c'était une vaste fumisterie. Parce que ce que je veux dire, c'est comme si on disait qu'il y a un papillon qui va voler, puis l'avion qui suit un autre avion ne va pas décoller ; il y a un effet d'amortissement qui est colossal. Bien sûr qu'on peut faire un système mathématique qui dépend de peu de variables et qui est tel que, quand on fait bouger un petit peu une variable, ça va changer les résultats. Mais de là à faire croire qu'un petit papillon qui vole à un endroit, il va créer, je ne sais pas moi, un ouragan à un autre endroit, c'est ridicule... Bon on peut rappeler d'où ça vient, ça vient du fait qu'il y a des équations différentielles en mathématiques, qui sont telles que si on change un tout petit peu les conditions initiales, ça change le résultat de manière considérable, de manière exponentiellement plus grande. Ca, c'est vrai. Mais c'est vrai dans un modèle particulier. C'est vrai dans un modèle, dans lequel il n'y a pas d'amortissement, comme il se produit dans la nature. Dans la nature, heureusement, il se produit des amortissements, parce que sinon, dans la na-

ture, on regarderait les papillons un peu partout, et puis on aurait la trouille *(rires)*. Heureusement que c'est comme ça. Mais c'est du bon sens, c'est du bon sens. Mais on a vu peut-être je ne sais pas combien de politiques ou des gens qui répétaient l'effet papillon sans rien comprendre, puisque s'ils avaient compris quoi que ce soit, ils se se seraient aperçus que c'était, hein, bon... C'est un exemple typique de gens qui répètent les choses sans les comprendre, simplement parce qu'ils se disent : "Ah ouais, c'est quelqu'un de puissant qui l'a dit, donc ça doit être vrai, quoi !"

- Merci.

- C'était une question sur le fait que vous aviez dit que souvent, les physiciens exprimaient tout en fonction du temps, et qu'on considérait souvent que c'était la variable...

- fondamentale.

- et vous disiez qu'en fait, il se trouve que la véritable variable, c'est la variable quantique, et je n'ai pas compris comment le temps découle de cette variable.

- Ca, c'est toute une histoire. En gros, c'est l'histoire de ma trajectoire. C'est-à-dire en fait ce qui se produit, mais c'est un peu expliqué dans le bouquin, mais c'est surtout bien expliqué dans un exposé que j'ai fait à l'IHES au mois de mai, et dont je pense qu'il doit être sur le site de l'IHES, il faut aller écouter cet exposé, je pourrais en dire deux mots. Mais bon, en gros, c'est que Von Neumann a créé les algèbres de Von Neumann comme étant des systèmes où on a une connaissance partielle de la réalité. Et avec le travail de Tomita, puis mes travaux pendant la thèse, on a compris que si on avait un système qui a une connaissance partielle de la réalité, à ce moment là, il y a un temps qui émerge. C'est-à-dire il y a une évolution dans le temps. Comme tout est quantique, et que la connaissance qu'on a de la réalité est effectivement partielle, c'est ça qui, avec les travaux que j'ai fait avec Carlo Rovelli, c'est ça qui devrait expliquer le passage du temps, c'est ce qu'on appelle le temps thermodynamique. Cette idée du temps thermodynamique, elle est bien expliquée dans notre bouquin à trois voix.

- Du coup, ma question rejoint un peu la question de Constantin tout à

l'heure. Donc du coup, la constante fondamentale, il n'y en a plus maintenant, puisque finalement, tout repose sur une variabilité quantique ?

- Il y a une chose dont je n'ai pas parlé mais j'avais des transparents dessus donc je peux les montrer effectivement. C'est important, c'est important, c'est cette idée de variables. Parce que finalement, on revient à l'idée de variables. Qu'est-ce que c'est qu'une variable, vous voyez ? Nous, ce qu'on nous apprend en classe, ce que c'est qu'une variable réelle... Une variable réelle, c'est une application qui va d'un ensemble X dans les réels. C'est comme ça qu'on nous dit ce qu'est une variable réelle. Or si on regarde cette définition d'une variable réelle, on s'aperçoit en fait, avec un petit raisonnement, on s'aperçoit qu'on ne peut pas avoir coexistence de ce qu'on appelle des variables continues, des variables qui prennent par exemple un intervalle de valeurs, et des variables discrètes, qui prennent des valeurs discrètes. *(Il dessine un intervalle et des points au tableau).* Et la raison pour laquelle on ne peut pas avoir coexistence, c'est que si on prend une variable continue, l'ensemble X doit au moins avoir la cardinalité du continu mais s'il a la cardinalité du continu, on ne peut pas avoir une variable discrète, parce qu'il y aura des points qui seront atteints trop de fois. On ne peut pas avoir ça. L'extraordinaire valeur du formalisme quantique, tel que Von Neumann l'a développé, c'est que dans le formalisme quantique, tout est résolu : c'est-à-dire que dans le formalisme quantique, en fait, une variable, c'est le spectre d'un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert, c'est un peu compliqué mais là, pour les opérateurs dans l'espace de Hilbert, on peut avoir des opérateurs qui ont un spectre discret et des opérateurs qui ont un spectre continu et qui coexistent. Et alors, ce qui est extraordinaire, c'est qu'en fait, ça rejoint exactement la pensée de Newton. C'est-à-dire que Newton, dans ses écrits, quand il essayait de définir ce que c'est qu'un infinitésimal par exemple, il a écrit exactement la bonne phrase, qui correspond au quantique. C'est-à-dire, il disait une variable est infinitésimale. D'abord il disait ce qu'était une variable. Or le formalisme quantique donne exactement la bonne réponse par rapport à Newton. Ca, c'est la première chose.

Et alors donc maintenant, ce qui se produit, c'est qu'une fois qu'on a ce formalisme, de ce que c'est qu'une variable, on s'aperçoit que bien sûr, les variables discrètes ne peuvent coexister avec les variables continues que par la non-commutativité, et on s'aperçoit que c'est cette non-commutativité qui crée le passage du temps, d'accord ? Donc en fait, le $\hbar$ existe toujours en fait,

la constante de Planck est toujours présente, mais ce qui est extrêmement frappant, c'est qu'on ne doit pas considérer le temps comme étant une donnée fondamentale, mais comme une donnée émergente, et que si on avait une connaissance absolue de tout, le temps ne passerait pas. C'est incroyable de penser ça, d'accord, c'est-à-dire que la raison pour laquelle on a l'impression que le temps passe, etc., c'est parce qu'on a une connaissance partielle de l'univers, d'accord. C'est ça qui est formidable si vous voulez avec ce jeu de la physique. Dans le livre qu'on a écrit avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, il faut que je vous dise que Danye Chéreau c'est mon épouse *(rires)*, ce qu'on fait, c'est qu'on a trouvé une phrase très frappante qu'on a utilisée pour exprimer l'idée que je viens de vous dire. On a dit "L'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine". Vous savez, Einstein avait dit "Dieu ne joue pas aux dés" donc voilà la réponse. La réponse du héros du bouquin à cette boutade d'Einstein, c'est que "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine". C'est-à-dire que c'est parce qu'il y a constamment ces petits trucs complètement aléatoires, pop ! pop ! pop ! qui se produisent, que le temps passe. La nature a une imagination phénoménale. Et c'est ce que donne l'instrument pour mesurer des nombres aléatoires, c'est incroyable, ça veut dire "il prend le pouls de la nature", pop ! Allez ça, c'est un nombre aléatoire, pop ! un autre... Vous pouvez toujours essayer de les reproduire. Bon eh bien ça, c'est incroyable, c'est la phrase qui le dit, c'est "l'aléa du quantique est le tic-tac de l'horloge divine".

- Pour essayer de mettre un petit peu ça au clair, du coup, si, admettons, bon, on peut toujours hypothétiser, si par exemple, justement, cette nature quantique était stable, si elle ne bougeait pas, le temps ne passerait pas ?...

- Eh bien, non, justement, elle n'arrête pas de bouger !

- Mais admettons qu'on imagine qu'elle ne bouge pas. Ca veut dire que le temps ne passerait pas ?...

- Ah oui ! Non, non, non, c'est pas ça ; si on la connaissait complètement, si on avait toute la connaissance, là le temps ne passerait pas. Le temps passe parce qu'on a une connaissance partielle, c'est la thermodynamique, d'accord. La thermodynamique, ça nous dit, la thermodynamique, par le génie de Boltzmann, il nous dit que l'entropie, par exemple, c'est la connaissance partielle des choses, d'accord. Donc le passage du temps est relié à ça, d'ac-

cord. Mais la nature n'arrête pas de bouger, hein, d'accord ? !... *(rires)*

- J'ai une question parce que vous dites que pour votre thèse, vous vous êtes inspiré de Tomita qui a montré donc la non-commutativité...

- Non, non, c'est pas ça. Bon oui oui, c'est un détail... ! *(rires francs)*

- Est-ce que vous pourriez juste expliquer ce qu'on appelle les types ?

- Ah oui, les types ! ! Bien sûr, bien sûr, tout à fait, ben les trois types... Alors, les trois types. Où est-ce qu'ils sont, les 3 types ? Le premier type, c'est lui... *(Il montre une photo, éclats de rires.)*

Les 3 types, donc : le type I, c'est un système quantique tel qu'en fait, l'espace de Hilbert du système quantique se casse en un produit tensoriel de deux espaces, c'est-à-dire que c'est vraiment le cas le plus simple qu'on puisse imaginer, et c'était ce dont les gens avaient imaginé que ce serait toujours le cas. Ils imaginaient toujours que quand on prenait un sous-système d'un système quantique, on pourrait casser l'espace de Hilbert en un produit tensoriel de deux, de telle sorte que le premier système corresponde au premier espace de Hilbert, aux opérateurs dans le premier espace de Hilbert, et l'autre aux opérateurs dans le deuxième espace de Hilbert. Alors ce que Von Neumann et Murray ont découvert, c'est qu'en fait, il y avait deux autres types. C'est-à-dire qu'il y avait une manière d'avoir des sous-systèmes quantiques qui ne correspondait pas du tout à un scindage de l'espace de Hilbert en un produit tensoriel. Alors le premier type, il y avait les dimensions réelles. Et puis le type III qui restait, c'étaient les autres. Et avant Tomita, on n'avait aucun outil pour attaquer le type III, d'accord. Donc ce que Tomita a trouvé, c'est que dans le type III, il y avait ce groupe $\sigma_{t\phi}$ et puis ce que j'ai trouvé dans ma thèse, moi, après, c'était que le groupe qu'avait trouvé Tomita, en fait, il était unique modulo les intérieurs, c'est-à-dire qu'il définissait une vraie évolution, indépendante de toute autre chose. Donc ça, ça a donné quantité d'invariants, etc., ça a permis de tout débloquer. D'accord ! Donc mais c'est incroyable parce que Von Neumann avait défini ces sous-systèmes quantiques de manière complètement euh, comment dire, c'est dans les écrits de Von Neumann, de manière complètement abstraite. Et jamais on aurait pu penser à l'époque de Von Neumann que ça aurait été relié au temps, au passage du temps, je veux dire, c'est absolument incroyable. Ca veut dire la profondeur

du quantique. Heisenberg a découvert que ça venait de la non-commutativité, Von Neumann l'a reformulé sous forme d'opérateurs dans l'espace de Hilbert, il s'est posé le problème des sous-systèmes, et de là sort le passage du temps, c'est fabuleux !

- Est-ce que vous pourriez nous expliquer pourquoi le principe de l'entropie résulte de la connaissance partielle qu'on a du monde ?

- Ca, c'est Boltzmann et le pauvre Boltzmann était tellement incompris à son époque qu'il a fini par se suicider. Il a eu une idée absolument... Il a fait graver sur sa tombe la formule qui est la suivante $S = k\ log\ n$. Ca, c'est gravé sur la tombe de Boltzmann. Il s'est suicidé près de Trieste. Cette formule, qu'est-ce qu'elle dit ? C'est une des formules les plus simples mais l'une des plus difficiles à comprendre. Qu'est-ce que c'est que l'entier n ? C'est le nombre de réalisations microscopiques d'un état macroscopique.

Il faut que je vous raconte un peu l'histoire : l'histoire, c'est à la période où les gens avaient découvert la machine à vapeur, et puis il y avait les locomotives et tout ça, et donc ce que les gens avaient découvert, c'était qu'il y avait un moyen de transformer la chaleur en énergie, en mouvement, en tout ce qu'on veut quoi. Et c'est comme ça que le chemin de fer a commencé, etc. Et ils s'étaient posé la question de ce qu'on appelait le rendement des machines et tout ça. Et donc bien sûr, si vous voulez, il y avait des quantités de chaleur dq donc qui étaient entre deux systèmes etc. Mais on s'était aperçu assez vite que si on prenait deux chemins différents pour aller d'un point à un autre, d'un état à un autre, l'intégrale de $\int dq$ si vous voulez, c'était pas préservé, c'est-à-dire qu'on ne peut pas définir la quantité de chaleur d'un objet. Par contre, on s'est aperçu que si on divisait dq par ce qu'on appelle la température absolue, eh bien ça, cette quantité-là si vous voulez, elle était bien définie, c'est-à-dire que quel que soit le chemin qu'on prenait, entre un état et un autre, l'intégrale de ce truc-là donnait le même résultat. Et c'est ça qui avait permis de définir l'entropie.

Mais cette entropie, elle était définie pour des systèmes macroscopiques qui étaient donnés par la température, la pression, le volume, enfin je sais pas quoi, si vous voulez un certain nombre de quantités macroscopiques, il n'y avait aucune interprétation, aucune, et ça s'appelait l'entropie. Ca s'appelait

l'entropie, S. Mais cette entropie, elle n'avait aucune signification philosophique puisque justement, c'est de ça dont on parle, d'accord ? Et l'incroyable génie de Boltzmann, ça a été cette formule $S = k\ log\ n.\ dq + ds = log\ n$, c'est-à-dire ce qu'a compris Boltzmann, c'est qu'à chaque fois qu'on prend un état macroscopique donc un volume donné etc., on peut avoir le même état macroscopique, à partir d'états microscopiques totalement différents. C'est-à-dire que l'exemple le plus simple, c'est de prendre des boules rouges et des boules blanches, et de les empiler dans un réservoir. Et vous avez par exemple 50 boules rouges et 50 boules blanches. Vous voyez bien que vous pouvez les empiler de 36 manières différentes, d'accord. Mais l'état macroscopique correspondant vous dira qu'il y a la moitié de boules rouges et la moitié de boules blanches et puis c'est tout. Le reste, vous vous en foutez. Eh bien, ce qu'a compris Boltzmann et qui est incroyable, c'est que l'entropie, qui était définie de manière complètement ad hoc par les gens qui faisait des systèmes de machines à vapeur et tout ça, eh bien en fait, c'était simplement le logarithme du nombre de réalisations microscopiques d'un état macroscopique donné. Bien sûr, il fallait une constante devant. C'est ce qu'on appelle la constante de Boltzmann, c'est normal qu'elle porte son nom. Donc cette constante de Boltzmann, c'est pas la même chose que la constante de Planck, et elle est, bon, évidemment il faut que ça ait la dimension d'une entropie etc. etc. d'accord. Mais c'est la formule la plus incompréhensible, et la plus géniale qui soit, cette formule d'accord. Et elle est très difficile à comprendre. Ce qui est très difficile à comprendre, c'est que les lois de la physique, pas de la physique des particules, mais les lois de la physique ordinaire, sont invariantes quand on change t en $-t$. Et si vous voulez, ce qui est très difficile à comprendre, c'est qu'un des principes fondamentaux de la thermodynamique est que l'entropie s'accroît. Alors on dit : "Mais le temps, il va dans quel sens ?. Ca, ça a hanté les gens pendant des années et des années. Et Boltzmann, il avait compris un nombre incalculable de choses simplement à cause de cette idée. C'est un exemple merveilleux, de formule très simple, mais justement si vous voulez, ça, c'est aussi une chose très importante que je n'aurais pas voulu oublier de vous dire, qui est qu'il y a un certain nombre de notions mathématiques ou de notions de physique comme ça, qui ont une qualité extraordinaire, et cette qualité, c'est de mettre la pensée en mouvement. Cette formule c'est un exemple typique, vous regardez cette formule, vous essayez de la comprendre, voilà, votre pensée est en mouvement maintenant. Elle a un potentiel extraordinaire de mise en mouvement de la pensée. Parce que vous pouvez vous dire "Pourquoi ça augmente ?". En gros, l'explication de

Boltzmann de la raison pour laquelle ça augmente, c'est que, en général, on va aller vers des états qui ont de plus en plus de réalisations microscopiques, c'est-à-dire qui sont de plus en plus probables. Et après, pour mettre ça sur des bases solides, c'est une autre histoire...

- Donc vous nous avez beaucoup parlé de la physique, et on sait qu'en ce moment la physique théorique, ça devient un peu un repaire de mathématiciens, par exemple avec la théorie des cordes, et du coup je me demandais si vous, en un sens, est-ce que vous pourriez vous considérer plutôt comme un physicien qui fait des mathématiques ?

- C'est une bonne question, j'avais des amis qui, connaissant mes opinions sur la théorie des cordes, disaient que j'étais un peu comme une machine où on met des sous, alors, mais si on met 1 euro, je vais parler pendant 10 minutes contre la théorie des cordes. Donc je vais vous épargner. Non, mais je vais vous citer une phrase de Hadamard. Il faut que je la trouve déjà *(rires)*. Attendez, il faut que je la trouve... Alors, je crois que je vais y arriver. Voilà, c'est une phrase sur le lien entre les mathématiques et la physique ; ce que dit Hadamard, pour caractériser la profondeur des concepts mathématiques qui viennent directement de la physique, il dit (je le dis en anglais donc, mais c'est très facile à traduire en français) :

...not this short lived novelty, which can too often only influence the mathematician left to his own devices, but this infinitely fecund novelty, which springs from the nature of things[2].

Donc voilà la réponse. La réponse, c'est qu'il n'y a pas d'un côté les mathématiques, et d'un autre côté la physique. C'est la même chose : on essaie tous de comprendre, d'accord. Et justement, il y a cette profondeur extraordinaire dans certains concepts mathématiques qui viennent directement de la physique. Comme Heisenberg. C'est inépuisable parce que c'est venu de quoi, c'est venu de l'expérience, c'est venu de la physique, c'est la nature qui nous parle, qui nous dit quelque chose d'accord. Ca, c'est inestimable ! Mais ce n'est pas le cas de la théorie des cordes, parce que la théorie des cordes,

2. ...non une brève nouveauté qui souvent influence le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais une nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses. in Jacques Hadamard, Préface à l'introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel de G. Juvet, Albert Blanchard, Paris, 1922

c'est une déviance qui elle, est venue à partir de mathématiques abstraites etc., et qui elle n'a pas de contact avec l'expérience.

- Il y a un autre mathématicien, qui s'appelle Carlo Rovelli *(précision d'Alain Connes : "C'est un physicien, lui, c'est un physicien" (rires))* et il dit que pour lui, la beauté de la physique, c'est une idée simple, qui nous ouvre sur un monde totalement nouveau et en même temps, ce monde, il est réel, il est correct. Et je me demandais pour vous, ce que vous pensiez vous de la beauté mathématique...

- Ca, c'est une bonne question *(soupir)*. Bon d'abord, il y a beaucoup de gens qui, et je pense que c'est vrai, qui vous diront que la notion de beauté est une notion très relative, c'est-à-dire que chacun a sa notion différente etc. bien sûr. Mais bon moi, j'avoue que pour moi, la beauté mathématique, c'est quand, après des calculs terribles, terriblement compliqués, on arrive à la même chose, on arrive au résultat, mais par une idée d'une simplicité incroyable, un peu comme l'œuf de Colomb d'accord. Pour moi, c'est ça, la beauté mathématique, pour moi, la beauté, c'est la simplicité d'une idée, mais en fait, d'une idée qui va... Bon par exemple, je ne sais pas... quand on parlait de Galois, je vais vous fournir un exemple de cette beauté. Que dit Galois ? Galois dit quand on prend une équation, on prend une équation polynomiale. Alors, la première chose qu'on va faire, on va trouver une fonction des racines, qui quand on permute les racines, va prendre... Bon, par exemple, on prend une équation de degré 5. Il faut que quand on permute les racines de manière arbitraire, cette fonction prenne 120 valeurs différentes (5! valeurs différentes). Alors comment est-ce qu'il fait, Galois, pour trouver une telle fonction ? C'est très simple : il dit "si j'appelle les racines A, B, C, D, E, d'accord, je prends A plus 1 000 000 de fois B + 1 trillion de fois C etc. Evidemment, quand je vais les permuter, ça va prendre que des valeurs différentes. Ca va prendre 120 valeurs différentes". C'est la première chose. Deuxième chose, que dit Galois ? Il dit "eh bien, maintenant, prenons pour équation l'équation qui a pour racines ces 120 racines. On prend cette équation et on la décompose en facteurs irréductibles. On peut exprimer les racines de l'équation de départ en fonction de ces facteurs irréductibles et on va obtenir, en prenant ces facteurs irréductibles, des permutations des racines de l'équation. Théorème, voilà la beauté mathématique. Théorème : Le groupe de permutations obtenu ne dépend d'aucun des choix qu'on a faits. C'est-à-dire que si, au lieu d'avoir pris A plus 1 000 000 de fois B etc.,

j'avais pris 1 000 001 ou n'importe quoi, j'aurais obtenu le même groupe. Ca, c'est la beauté mathématique, c'est quelque chose d'incroyablement beau. Pourquoi ? Parce que ça veut dire qu'on a donné une recette, qui avait l'air complètement arbitraire, et on est arrivé à un invariant, on est arrivé à un groupe, qui est une caractéristique de l'équation, qui va donner tous les résultats qu'on veut, et qui est d'une simplicité biblique, à la fin, c'est-à-dire la manière dont il est défini, c'est d'une simplicité biblique. Pour moi, c'est ça, la beauté mathématique. Mais c'est un exemple, hein, je veux dire, la définir abstraitement, si on en donnait une définition abstraite, c'est évident qu'on pourrait trouver un contre-exemple et qu'on pourrait trouver... Mais c'est... En fait, si vous cherchez des choses générales sur la beauté en mathématiques, sur des choses comme ça, lisez *Récoltes et Semailles* de Grothendieck. Parce que c'est... Grothendieck n'était pas seulement un mathématicien, en fait, c'était un littéraire, et c'était quelqu'un qui a été capable dans ses écrits, d'aller très très loin dans l'analyse de ce que sont les mathématiques, de ce que c'est que la beauté en mathématiques, etc. Donc il a écrit 1500 pages, ces 1500 pages, vous pouvez les trouver sur internet, d'accord. Et n'écoutez pas les gens qui vous diront qu'il est fou parce que ce n'est pas vrai, ce n'est pas vrai : c'était quelqu'un qui était merveilleusement intelligent, et qui a écrit merveilleusement en tant que littéraire. Il a un vocabulaire extraordinaire, etc. J'ai fait un exposé, au séminaire d'Antoine Compagnon, sur Grothendieck et Proust, en les comparant justement, et je pense qu'il est disponible cet exposé, peut-être sur le site du Collège de France ou sur mon site. Donc, parce que je veux dire, parce que c'est très frappant, c'est très frappant de voir que ce sont deux individus qui ont réussi une chose que peu de gens réussissent, aussi bien l'un que l'autre, qui est non seulement une œuvre, pour Grothendieck, mais aussi si vous voulez ce que dit Grothendieck, ce qu'il explique, c'est qu'en fait la... En fait, si on veut se réaliser bien sûr, bon, c'est bien de faire une vraie mais en fait la principale difficulté qu'on a, c'est de se comprendre soi-même, et pour se comprendre soi-même, ça paraît idiot *(rires)*, n'est-ce pas ? Et pour se comprendre soi-même, il faut en gros s'auto-analyser, c'est ce qu'a fait Grothendieck et d'une certaine manière, c'est ce qu'a fait Proust aussi dans son livre. Ce sont aussi des gens qui, à partir d'un moment donné, ont arrêté de vivre et ont passé le reste de leur vie à ré-analyser leur vie passée, d'accord, et à la comprendre, etc. Et dans les deux cas, c'est merveilleux, le résultat est merveilleux, d'accord. Donc la meilleure réponse je crois, c'est celle-là, c'est d'aller voir dans *Récoltes et Semailles*, et de le lire, pas de le feuilleter, il faut le lire vraiment, il faut le

lire attentivement, vous voyez, comme les passages que je vous ai lus tout à l'heure.

- Merci de préciser : *Récoltes et Semailles*, c'est le livre que Grothendieck a écrit et auquel on a accès depuis peu de temps, finalement...

- Non, pas peu de temps, ça fait très longtemps qu'on y avait accès mais bon, il a écrit d'autres livres. C'est un personnage, tous ces personnages-là ont des vies extraordinaires. Grothendieck a eu une vie extraordinaire parce qu'en gros, en 1970, il a quitté l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (l'IHES) et il est redevenu, parce que c'était son tempérament fondamental je pense, un peu un paria si vous voulez. Et à partir de 1991, il s'est réfugié dans un village des Pyrénées. Et plus personne n'avait de nouvelle de lui, mais il continuait à travailler, il continuait à écrire. Et alors, il n'a pas seulement écrit *Récoltes et Semailles*, il a aussi écrit un autre texte magnifique, qui s'appelle *La clé des songes*. Et c'est un texte mystique, mais bon alors, je vais dire c'est pareil, je veux dire, c'est pareil... Mais c'est extrêmement intéressant, mais je pense que par exemple, pour des gens qui font de la littérature, ces textes-là ont une valeur infinie. Il y a des thèses à faire là-dessus, il y a 36 choses à faire, bien sûr...

- Alors moi j'avais vu quelque part sur internet je crois, je ne suis pas sûre de mes sources, qu'en fait vous pensiez que les mathématiques existaient sans les hommes en fait, que même ce n'étaient pas une invention faite par les hommes, et j'ai un peu de mal à comprendre ça en fait, parce que souvent, on voit les maths comme quelque chose de très abstrait qui n'existerait pas sans que les hommes les aient inventées, donc, pouvez-vous expliquer ça ?

- Bon, je peux vous donner la réponse. La réponse est très simple. Vous prenez, vous prenez la chimie. C'est un sujet que j'exécrais, moi, lorsque j'étais en maths sup et maths spé, donc vous avez tous ces trucs-là. Alors on a les corps composés puis on a les corps simples. Les corps simples, il y a le tableau périodique des éléments. Le tableau périodique des éléments, incroyable mais vrai, il y a le principe d'exclusion de Pauli, et une toute petite équation, qui vous le donne. Ca me suffit, moi. Pourquoi ? Parce qu'imaginons qu'il y ait un autre système planétaire etc. Si ce sont des êtres intelligents, ils vont comprendre la chimie, qu'il y a des corps simples, ce sera les mêmes, ils n'auront pas... je veux dire ils n'auront pas des corps chimiques, ils n'auront

pas des corps simples différents des nôtres, donc ils vont comprendre les corps simples. Et puis, s'ils sont vraiment intelligents, ils vont essayer de trouver, bon, ils auront le tableau périodique des éléments. Ils vont essayer de trouver quelle est l'origine abstraite du tableau périodique des éléments. Ben, s'ils sont vraiment intelligents, ils trouveront la même chose, ils trouveront qu'il y a le principe d'exclusion de Pauli. Et puis, il y a cette petite équation... Qu'est-ce que ça veut dire ? Ca veut dire que, derrière l'apparente, comment dire, arbitraire du monde qui nous entoure, il y a des choses incroyablement simples qui le régissent, la chimie, l'itération puisque les arbres, tout ça, c'est régi par l'itération, et qu'en fait, il y a une manière de comprendre le monde, qui au lieu d'être un chaos, si vous voulez, est quelque chose de beaucoup plus structuré, et qui est structuré par les mathématiques. Et il n'y a aucune raison pour que, bien-sûr, les gens donnent le même nom aux concepts mathématiques qu'ils auront utilisés, mais c'est bien clair qu'ils utiliseront la... , s'ils sont des êtres différents et ils auront 1, 2, 3, 4, 5. Ils ne le diront pas de la même manière, mais ils utiliseront le langage mathématique, ce langage sera en correspondance avec le nôtre, comme le langage des chinois est en correspondance avec le nôtre.

Donc, c'est en ce sens-là, c'est en ce sens absolument fondamental, que je dis que les mathématiques pré-existent, pourquoi ? Parce que ce serait incroyablement prétentieux de dire que nous avons inventé les nombres entiers. Alors à ce moment-là, pourquoi la chimie aurait déjà utilisé ces choses-là pour exister ? Ca paraît complètement débile. Donc en fait, ce que je dis, c'est que, quand on a trouvé, quand Watson et Crick ont trouvé la structure en double hélice de l'ADN, ils ne l'ont pas *inventée*, personne ne va croire qu'ils l'ont *inventée* bien sûr, ils ont *découvert* ça. C'était une réalité, et cette réalité, elle pré-existait à eux. Eh bien, pour les mathématiques, c'est pareil, c'est exactement pareil, c'est-à-dire que nous découvrons, un peu comme un explorateur va découvrir quelque chose. Cet explorateur, il a un libre-arbitre, il peut aller à tel endroit ou à tel autre endroit. C'est ce qui fait croire à des gens qu'en fait, c'est comme l'art. Mais non ! Ce n'est pas de l'art, c'est de l'exploration. Et c'est une exploration d'autant plus... comment dire ? réelle, que cette réalité, elle résiste. Si c'était de l'art, on pourrait faire dire n'importe quoi, et n'importe quoi. Ce n'est pas le cas. Ce n'est pas le cas. Il y a une résistance terrible... Et alors un exemple, un autre exemple typique, c'est que si par exemple, j'écris une équation etc., et puis bon, par exemple, Galois avait dit que les calculs qu'on devait faire pour suivre sa méthode

étaient impossibles à faire et à son époque, c'était impossible à faire. Et pour montrer que c'était impossible à faire, quand j'ai donné mon exposé à l'Académie, j'ai expliqué aux gens la méthode de Galois et je leur ai demandé "est-ce que vous pouvez me donner une idée... ?", bon, parce que chaque racine s'exprime comme un polynome en fonction des racines de l'équation auxiliaire. Je leur ai demandé, je leur ai donné une équation comme celle que je vous ai donnée tout à l'heure je leur ai dit "est-ce que vous pouvez me donner l'ordre de grandeur du coefficient d'ordre 0 du polynome qui exprime la première racine ?"... 1 million sur 1 million, ou quelque chose comme ça. Non, la réponse, c'est un nombre à 500 chiffres sur un nombre à 500 chiffres ! L'ordinateur le fait maintenant, et l'ordinateur vérifie que Galois avait raison d'accord ! Alors dire que Galois l'a inventé, je veux dire, c'est un peu gros, quoi ! Non, non, non ! Non, non, non ! On *découvre*, on *découvre*, mais exactement comme il avait fallu le microscope électronique, pour découvrir la structure en double hélice de l'ADN, le mathématicien invente des outils conceptuels pour réussir à percevoir cette réalité. Mais il invente des outils conceptuels bien entendu. Mais c'est une réalité qui est là, elle résiste, elle est complètement tangible et elle régit la nature. Elle est plus fondamentale, pour moi, cette réalité-là est plus fondamentale que la nature qui nous entoure. Elle pré-existe à ça d'accord. Si vous voulez, ce serait même... je pense que ce ne serait pas juste de dire que la nature est seulement écrite dans le langage des mathématiques ; les mathématiques, c'est plus que ça, c'est plus que ça. La nature est consubstantielle des mathématiques. Nous, on ne s'en rend pas compte parce qu'on n'est pas suffisamment intelligent pour se rendre compte de l'explication qui est derrière tous ces phénomènes. Si on s'en rendait compte plus, on le saurait beaucoup mieux. Et c'est d'autant plus vrai avec le quantique. Je veux dire, le quantique, là, c'est flagrant. Le quantique, c'est une réalité qu'on ne perçoit que par les mathématiques, on ne la perçoit absolument pas autrement. C'est-à-dire que les gens qui font des expériences avec le quantique, en optique quantique, ils comprennent ce que c'est que l'espace de Hilbert, ils le touchent comme ça, d'accord, c'est incroyable, ça, ça, c'est vraiment incroyable !

- Merci.

- Vous êtes prêt à répondre encore à quelques questions ?

- Oui, ça va, ça va.

- Pour que l'on ait plus de facilités par exemple avec les notions abstraites, en mathématiques ou en physique, ou même avec les raisonnements, qu'est-ce que vous préconiseriez dans l'éducation et dans l'enseignement, à présent, dans l'école primaire ou même dans le secondaire ?

- Je vais répondre, d'abord pas dans l'école primaire, ni dans le secondaire, je réponds pour vous, parce que c'est le plus utile. Donc pour vous, ce que je préconise, c'est la chose suivante. Pour répondre à une question, même une question de calcul compliquée, vous laissez tout en plan, vous allez faire un tour à pied, d'accord. Et la question, vous la gardez dans la tête, d'accord, vous la gardez dans la tête, et vous réfléchissez. Evidemment, ça peut être différent selon les individus, mais pour moi, c'est le grand secret. C'est-à-dire un calcul, aussi compliqué soit-il, vous pouvez vous dire "Oh ! Jamais je vais y arriver si j'essaie comme ça !" Non ! Vous partez faire un tour à pied, et vous réfléchissez à la structure du truc, et après quand vous reviendrez, bon, vous verrez que ça améliore drôlement les choses.

Bon alors maintenant, dans le primaire, j'en sais rien, moi, tout ce que je peux vous dire, c'est ma propre expérience, parce que je n'en connais pas d'autre. Mais ma propre expérience, c'est quand j'étais gamin, quand j'avais 5 ans, mon père nous imposait de faire des calculs. On était dans le jardin avec lui, il était avec nous, et il nous faisait faire des opérations, et à l'époque, on faisait les quatre opérations, c'est-à-dire on faisait la division, à 5 ans, on faisait la multiplication, on n'avait pas attendu la sixième pour apprendre la division, et tout ça donc, on faisait ça. Et après une autre expérience qui m'est arrivée... Et moi, j'adorais ça, c'était sans doute aussi ma relation avec mon père, il me faisait à la fois peur, mais j'étais content de lui faire plaisir, enfin bon, je ne sais pas, donc je ne sais pas, je ne sais pas comment expliquer ça : je vais dire que je pense qu'il y avait une vertu extraordinaire au fait de faire des opérations comme ça, c'est-à-dire d'apprendre par cœur la table de multiplication et puis, on ne l'oubliait pas la table de multiplication, si on faisait des multiplications et des additions à longueur de journée, on ne l'oubliait pas, on la savait après. Et ça devenait un automatisme absolu. Donc il y avait ça, et moi, ça me plaisait énormément. Une autre histoire que j'ai, c'est qu'une fois, ça, je trouve ça absolument extraordinaire, une fois, j'ai rencontré un ami que je n'avais pas vu, on jouait au foot ensemble, dans le temps, et puis peut-être 8 ou 9 ans après, je prends le TGV pour aller à,

je crois que c'était à Rennes ou un truc comme ça, et puis je vais à ma place de TGV et puis, je regardais mon numéro, et je vois quelqu'un à côté qui regardait son numéro et c'était mon copain. On a commencé à discuter etc. Et puis alors, la discussion habituelle, tu as des enfants, il commence à m'expliquer qu'il a un fils, et que son fils est bizarre. Il faut dire que mon copain est littéraire. J'ai dit "pourquoi ?". Bon tu sais, bon d'abord, il avait été malade quand il était petit et puis une fois, quand il avait 5 ans, on était ensemble, on était sur la plage et puis il avait l'air souffreteux ; moi j'étais inquiet, je veux dire pendant une heure, il était là, au lieu d'aller se baigner, il était un peu blanc et puis au bout d'une heure, il vient me voir, donc c'est mon copain qui raconte, il vient me voir, et il me dit : "papa il n'y a pas de plus grand nombre !". Je lui dis "Ecoute, ton fils, il est génial !" *(rires)*. Il me dit. "Ah oui, bien sûr !". Je lui ai demandé si son fils avait trouvé une démonstration et il avait trouvé une démonstration, qui n'est pas la démonstration usuelle, c'était pas rajouter 1, c'était multiplier par 2 ou quelque-chose comme ça, peu importe, il avait trouvé une démonstration. C'est incroyable, mais après, il me dit, "tu sais, il a eu des problèmes à l'école" *(francs éclats de rires)*. Alors, il m'a raconté ses problèmes à l'école. Alors ça, ça va répondre à votre question pour l'école primaire. C'est qu'à l'école primaire, donc on lui avait posé le problème suivant : c'était "une fleuriste a 120 fleurs, elle fait 4 bouquets de 17 fleurs, combien lui reste-t-il de fleurs ?", d'accord. Alors lui, il avait eu "zéro, n'a pas le sens des opérations". Il était pas con, il lui en reste 120 puisqu'elle ne les a pas données *(rires de tous)*. Quand il m'a eu raconté ça, j'ai dit "bah écoute ton fils, c'est un mathématicien". Et alors, on a organisé donc avec son père une rencontre au Tea Caddy à Paris, c'est un endroit charmant. Et son fils à l'époque avait 12 ans. Donc bon, les choses ont évolué, ça fait un certain moment, et maintenant, c'est un grand mathématicien qui est prof à Orsay. Alors incroyable, incroyable, incroyable ! Donc je crois que ce qui compte, c'est ce que dit Grothendieck, c'est de retourner dans cet état d'enfance et de se poser les bonnes questions, et puis de ne pas hésiter à être à contre-courant etc. Surtout je veux dire que le moment où on devient mathématicien, c'est le moment où on est capable de dire au prof qu'il a tort et pourquoi, ça veut dire être capable de résister à son autorité, pour dire qu'on a réfléchi, et qu'on n'est pas d'accord, et puis d'être sûr de soi, parce qu'on a réfléchi par soi-même, c'est hyper-important.

- Non en fait, j'ai une question, même si je pense que vous avez un peu répondu à cette question par vos propos, mais j'aimerais vraiment savoir pour

vous quel est le but du travail d'un scientifique, enfin, si vous pensez que c'est plutôt d'augmenter, de faire avancer la connaissance fondamentale, ou de le rendre accessible à son public pour une éventuelle application.

- Il y a ces deux aspects, que l'on ne doit pas mélanger du tout, il y a ces deux aspects. Je pense que la vraie motivation, c'est de faire avancer la connaissance fondamentale. C'est-à-dire qu'en fait, la vraie motivation qui doit être justement indépendante de toute autorité, de tout désir de reconnaissance, etc., la vraie motivation, c'est d'essayer de comprendre, comprendre là où on est, là où on a atterri, d'accord, c'est ça, c'est tout simple à comprendre, c'est là où on est.

- Non mais sur cette question de la vulgarisation des savoirs et en particulier des savoirs mathématiques. A vous entendre, il y a un risque : l'effet papillon en est un. Moi j'allais dire ce que j'avais retenu, par exemple, de l'entropie, ce que les philosophes, ce que certains philosophes peuvent faire de l'entropie, il y a parfois effectivement un grand danger d'une espèce de ... et en même temps, vous semblez dire qu'il y a un besoin. Donc si on vous demandait en gros "comment faire pour éviter le danger et répondre au besoin", est-ce que vous seriez... ?

- Oui, oui, c'est une très bonne question. Il y a eu Sokal, il y a eu Deleuze. Il y a eu Lacan, je ne sais pas si vous savez, mais Lacan a dit dans un séminaire que le nombre $\sqrt{-1}$ est le symbole du sexe mâle, d'accord. C'est ce qu'on appelle le nombre imaginaire pur ! ! *(rires)*. Il fallait le faire quand-même, hein ? ! Et en plus, il a fait une fois un séminaire, où il avait un théorème d'accord, et son théorème, c'était que "Don Juan est compact". Quelqu'un lui avait dit la définition d'un espace compact en mathématiques. Donc ça, évidemment, c'est débile, d'accord, c'est absolument débile. Et qu'est-ce que c'est ? Ce sont des concepts mathématiques mal compris qui sont utilisés comme une autorité psychologique sur les autres, c'est-à-dire qu'ils sont utilisés parce que les gens ne comprendront pas et l'effet papillon en est un exemple flagrant, comme une autorité psychologique parce que les gens quand ils ne comprennent pas, ils sont en position d'infériorité, leur compréhension s'arrête, et si vous voulez, ils sont impressionnés etc. Donc, il y a cette manière terrible d'utiliser les mathématiques, qui est justement d'utiliser de grands mots, comme une espèce de pouvoir psychologique sur les foules. Alors ça, c'est à bannir à tout prix. Par contre, moi ce qui me désole si vous voulez,

c'est que des concepts aussi beaux que le concept de topos de Grothendieck, ne soit pas plus connu par des gens qui en auraient besoin parce que comme je vous le dis, nous sommes tous maintenant victimes du scientisme qui consiste à croire qu'une chose est vraie ou fausse alors que dans la réalité, il y a des situations qui sont bien plus subtiles que ça, bien plus subtiles que ça et qui demandent un outil de pensée que la notion de topos donne et c'est une notion qui est délicate, qui est difficile, qui demande, pour la connaître, pour la comprendre, une connaissance mathématique. Donc ce que je dirai si vous voulez, c'est qu'il y a un magnifique boulevard qui est ouvert. Ce boulevard consiste à apprendre suffisamment de mathématiques pour après les utiliser de la bonne manière, dans d'autres domaines, mais il faut d'abord commencer par apprendre suffisamment de mathématiques, c'est ça le prix à payer, c'est absolument nécessaire d'accord.

- Moi c'était justement par rapport à la question de la vérité : à vous entendre, on a l'impression que vraiment les mathématiques, ça permettait d'atteindre cette vérité avec la physique quantique, et je voulais savoir, je crois que c'est Einstein qui disait que "le monde est un peu comme une horloge fermée", on peut juste voir ce qui se passe, mais on ne peut jamais être sûr que ce qu'on trouvera, c'est vrai. Et qu'est-ce que vous en pensez de ça, de l'idée que peut-être que tout ce qu'on explique, ce sont des théories qui sont finalement fausses comme par exemple, Einstein, qui a tout remis en cause dans la physique... ?

- Il y a toujours effectivement la possibilité d'une théorie au-dessus, qui simplifiera ce qui est à l'étage avant etc. Mais on voit quand même qu'on progresse, de ce point de vue-là. Ce que j'essayais de faire passer justement, c'est l'extraordinaire subtilité, la richesse de la nature, de là où on est, quoi. Le fait qu'à chaque fois, on aura des surprises et on aura des surprises extraordinaires. Puisqu'à la fin du XIXème siècle, il y avait des physiciens qui disaient qu'on avait tout compris. Et justement, on était avant l'ère quantique, avant tout ça, avant la relativité générale. C'est vrai, parfaitement vrai, ce que vous dites. Mais, j'insisterai plus sur la merveilleuse imagination de la nature, quoi, je veux dire, on est sûrement très, très loin, il y a peut-être des civilisations, il y a sûrement des civilisations, dans d'autres planètes habitées, dans lesquelles les gens ont été beaucoup plus loin que nous. Ca, c'est bien possible et ils nous prendraient pour des primitifs. C'est bien possible, c'est tout à fait possible.

- Vous avez dit que les mathématiques n'étaient pas dans le domaine du connu, et globalement, les sciences. Mais est-ce que vous ne pensez pas que c'est parce que les mathématiciens, les physiciens et autres, ne participent pas assez au débat, par exemple, lors de la définition de programmes scolaires, on entend des philosophes, des historiens...

- Ca, c'est vrai, il y a du vrai là-dedans, il y a du vrai. Mais d'un autre côté, c'est pas tellement le problème. Je ne dirai pas que le problème vient du fait que ce n'est pas assez vulgarisé. Je pense que le problème vient plus de la lenteur de l'absorption par l'ensemble de la société de notions élaborées. Par exemple, je prends un exemple typique, qui pour moi est important. Vous voyez, au moment où l'imprimerie a été découverte, la notion de nombre a été transmissible. C'est-à-dire, il y a eu des bouquins, etc., etc. Maintenant, on en est au point où ce n'est plus le nombre qui est transmissible, mais c'est la notion de fonction, de graphe, etc. Et il y a un vocabulaire qui est passé dans le grand public, par exemple, quand on dit qu'on va inverser la courbe du chômage *(rires)*. Alors ça, ça fait intervenir l'annulation de la dérivée seconde. Si on nous disait "on va faire annuler la dérivée seconde...", il y aurait de quoi se marrer *(rires)*. Bon, enfin, vous voyez un peu le genre... Donc c'est sûr que, si vous voulez, il y a maintenant certaines notions mathématiques, dont la notion de fonction de croissance, de décroissance, de dérivée première, d'annulation de dérivée première, etc. qui sont passées dans le grand public, d'accord, mais il y a des notions beaucoup plus subtiles, comme la notion de topos, comme les notions qui viennent du quantique etc. qui ont plus de mal à passer dans le grand public. Comment les faire passer dans le grand public ? Sans doute par l'éducation, mais à ce moment-là, il faudrait qu'on soit beaucoup plus courageux, dans le système scolaire, c'est évident, c'est absolument évident. Il faudrait qu'on ne soit pas dans le renoncement actuel qui est lamentable. Je sais qu'à mon époque, bon je veux dire, qu'on n'arrêtait pas, moi, je n'arrêtais pas et mes copains n'arrêtaient pas, de faire des problèmes de géométrie. On rentrait chez nous, et on faisait des problèmes, et c'étaient pas du tout des problèmes faciles. Et maintenant, c'est fini ! Maintenant, on apprend des recettes, on apprend à appliquer des recettes ; bien sûr, c'est beaucoup plus facile pour un prof. Un jour, quand vous aurez des enfants, vous vous apercevrez d'une chose qui est absolument fondamentale, c'est que quand vous avez un petit enfant, vous avez le choix. Le petit enfant, il essaie de faire quelque chose, vous avez deux possibilités : la première possibilité,

c'est de faire cette chose pour lui, vous croyez que vous l'aidez, en fait, vous ne l'aidez pas du tout, vous lui nuisez, en faisant ça ; la deuxième chose, c'est d'être patient, et d'attendre qu'il y arrive par lui-même. Et là, vous faites quelque chose de vraiment utile, d'accord. Donc bon, dans ce qu'on fait dans le système scolaire actuel, qui est d'apprendre des recettes toute faites pour résoudre des problèmes tout faits, ça consiste à faire les choses à la place de l'enfant. C'est exactement ça qu'on fait, c'est exactement ce truc-là. Alors que la vraie découverte du travail, la vraie découverte de l'école, elle doit se faire entre 11 et 12 ans. Et elle doit se faire en séchant devant des problèmes dont on ne nous donne pas la solution, mais dont on vous demande de la trouver, d'accord, où l'on vous demande de sécher. Et à partir du moment où à cet âge-là, on a compris ce qu'est le vrai travail, ça va, ça va, c'est OK. Et ça, ce n'est pas le cas dans le système scolaire actuel. Bien sûr, loin de là, terriblement. Bien sûr. Il y a Laurent Lafforgue qui a essayé, et de toutes ses forces, d'aller dans ce sens-là, bon, il y a dépensé énormément d'énergie ; dire qu'il y est arrivé, ce ne serait pas vrai, je vais dire, en tout cas, il y a des gens qui ont fait un effort colossal pour aller dans le bon sens, maintenant après, il y a une résistance terrible du système.

Transcription[1] de l'entretien entre
Jean-Pierre Serre
et
Alain Connes
au sujet de la correspondance
Serre-Grothendieck

Alain Connes : Alors ce que je propose, c'est que notre discussion commence justement en l'année 1955, je lis ce que dit Grothendieck, il dit : "l'année 1955 marque un tournant crucial dans mon travail mathématique, celui du passage de l'analyse à la géométrie". Et il dit : "je me rappelle encore de cette impression saisissante, toute subjective certes, comme si je quittais des steppes arides et revêches".

Jean-Pierre Serre : Oui, et c'est pas gentil pour ce qu'il faisait avant...

Alain Connes : Non ! Non, non !

Jean-Pierre Serre : Parce que, il faut vous expliquer que Grothendieck avait été à Nancy et que là, sur un certain sujet qui était assez à la mode mais un peu restreint quand-même...

Alain Connes : Oui, c'étaient les espaces vectoriels topologiques...

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est ça, il avait presque résolu tous les problèmes du coin.

Alain Connes : C'est-à-dire qu'on lui avait donné 14 problèmes, c'était Dieudonné je crois, qui les lui avait donnés, ou Schwartz.

Jean-Pierre Serre : Je sais pas si c'est 8, ou...

Alain Connes : Ils lui avaient donné 14 problèmes à résoudre...

1. Transcription : Denise Vella-Chemla, 26.1.2019.

Jean-Pierre Serre : qu'ils ne savaient pas faire...

Alain Connes : qu'eux ne savaient pas faire... et Grothendieck et je pense que c'était la première fois que Grothendieck appliquait sa méthode que Serre a décrite comme étant : "pour résoudre des problèmes, il faut les laisser se dissoudre dans une marée montante de théories générales".

(Rires)

Jean-Pierre Serre : C'était un sujet qui était un peu bouché, quand-même.

Alain Connes : Oui, c'est ça, quand-même.

Jean-Pierre Serre : On a eu l'impression qu'il avait résolu à peu près toutes les questions. En fait, c'est pas tout à fait vrai. Il y avait des contre-exemples à trouver.

Alain Connes : Oui, des contre-exemples à trouver...

Jean-Pierre Serre : Il y avait les Banach, il y avait des jolis contre-exemples à trouver, mais il ne les a pas trouvés. Mais, il en avait assez, quand-même.

Alain Connes : Mais il en avait assez et alors la question que je me suis posée, parce que j'ai regardé la thèse de Grothendieck, quand il a passé sa thèse, j'ai regardé la deuxième thèse. Et alors la deuxième thèse de Grothendieck, ça c'était, ça, c'est très intéressant, la deuxième thèse de Grothendieck, c'était : "Théorie des faisceaux"

Jean-Pierre Serre : Ah ? ! *(étonné et intéressé)*

Alain Connes : donc ça veut dire, enfin, c'est ma conjecture, que le moment où il a... il a bifurqué des espaces de l'analyse fonctionnelle...

Jean-Pierre Serre : Et il avait envie sûrement.

Alain Connes : Et il avait sûrement envie de bifurquer, c'est au moment

de sa deuxième thèse, on lui a demandé d'exposer la théorie des faisceaux...

Jean-Pierre Serre : Alors il faut vous expliquer ce que c'est que la deuxième thèse parce que ça n'existe plus. A l'époque quand on passait sa thèse, on avait la thèse principale, ce qu'on avait fait, et puis le jury vous donnait un autre sujet. C'était un sujet que l'on donnait à l'intéressé avec son accord en général, ça se passait assez en famille, ça, souvent, pas toujours, pas toujours. Et alors, la personne en question parlait une demi-heure ou 20 minutes de ça et c'était très bien. Et je pense que Grothendieck avait dû plus ou moins choisir son sujet. En plus, tu vois, le lien avec les faisceaux, c'est que, déjà à l'époque, on se rendait compte que sa théorie des espaces nucléaires était si bonne que tu pouvais faire des produits tensoriels...

Alain Connes : C'est ça, qui étaient uniques bien sûr.

Jean-Pierre Serre : où, par exemple, Kunneth, que la formule de Kunneth marchait et par exemple, j'ai vendu la théorie de Grothendieck à Bott...

Alain Connes : Oui, bien sûr, à cause de ça...

Jean-Pierre Serre : ...un an ou deux ans après pour quelque chose, je lui ai dit : "tu sais, tu as un produit de variétés, eh ben, tu dois faire comme si c'était un produit tensoriel et puis voilà, tout marche !".

Alain Connes : et puis, non seulement ça, absolument, mais l'idée philosophique en fait qui est derrière les espaces nucléaires, c'est que ce sont des espaces de dimension finie. C'est-à-dire en fait, on les traite...

Jean-Pierre Serre : Oui, ils se comportent...

Alain Connes : ... , ils se comportent comme des espaces de dimension finie.

Jean-Pierre Serre : Bon, ça, c'est un peu technique.

Alain Connes : C'est un peu technique. Ah, mais, on va rentrer dans la technique.

Jean-Pierre Serre : Il est passé très naturellement...

Alain Connes : à la théorie des faisceaux. Enfin, à la géométrie algébrique.

Jean-Pierre Serre : Enfin, d'abord à la topologie...

Alain Connes : Absolument. Alors, la question que je voulais te poser, là-dessus, justement, c'est "quand est-ce que Grothendieck est rentré dans le groupe Bourbaki ?", tu te souviens ?

Jean-Pierre Serre : Oh, ça a été un petit peu, oh, je ne sais pas. Je n'ai pas de souvenir du tout de date. C'est nettement après ça.

Alain Connes : C'est nettement après ça, bon, ben d'accord. C'est ce que je voulais savoir, que c'est nettement après ça.

Jean-Pierre Serre : Nettement.

Alain Connes : Nettement, d'accord, parce qu'en fait...

Jean-Pierre Serre : Nettement, bon attends... Là, tu parles de 55. Est-ce qu'en 55... Quelle est l'année où il est parti au Kansas ?

Alain Connes : Bon, eh bien, ça, je ne pourrais pas te le dire.

Jean-Pierre Serre : Parce qu'il m'a écrit une lettre du Kansas, alors.

Alain Connes : La lettre sur...

Jean-Pierre Serre feuillette son exemplaire de la correspondance qu'il prend sur la table.

Jean-Pierre Serre : Elle est de 55.

Alain Connes : La lettre sur le diplodocus... homologicus. Et il parle d'une emmerdante rédaction pour Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est donc en 55, je pense, le Kansas. Et je dirais qu'il a dû entrer à Bourbaki, il a dû y être pris vers 57, peut-être.

Alain Connes : Ah bon, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui, un truc comme ça.

Alain Connes : D'accord, d'accord, d'accord, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Je sais pas : il s'est mis à faire des rapports pour Bourbaki, d'énormes rapports bien sûr.

Alain Connes : Oui bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Nous parlons de Bourbaki ensemble en 59. En 59, il y était, certainement.

Alain Connes : Non, sûrement, mais il me semble...

Jean-Pierre Serre : Donc, c'est par là.

Alain Connes : Oui.

Jean-Pierre Serre continue de feuilleter son exemplaire à la recherche de l'information précise.

Jean-Pierre Serre : Je lui dis... Moi, je lui parle de Bourbaki en 58 déjà donc visiblement...

Alain Connes : Non, je pense que... il y était avant.

Jean-Pierre Serre : Non, en 58, je lui dis "le congrès Bourbaki a été très agréable.". Donc, c'est que, il aurait pu y être. C'est 57, je pense, Bourbaki.

Alain Connes : 57 , d'accord, 57. Ce qui m'a beaucoup frappé, moi, en lisant la correspondance, c'est euh, vraiment euh, au moins au début, puis après je parlerai d'autres choses, mais à quel point Grothendieck justement, arrive à gagner ta confiance d'une certaine manière, et je pense qu'il y a un point qui m'a beaucoup frappé, c'est le moment où il comprend ta dualité à

travers les *Ext*, c'est-à-dire, là, tu lui dis : "c'est vraiment rupinant, etc..."

Jean-Pierre Serre : Oui, mais la confiance entre nous, elle était venue au moins 2 ans avant, tu vois : j'étais allé à Nancy...

Alain Connes : Ah bon ? Ah d'accord !

Jean-Pierre Serre : Eh oui ! *(en éclatant de rire)* J'enseignais la mécanique rationnelle à Nancy...

Alain Connes : Ah d'accord !

Jean-Pierre Serre : Je l'avais en horreur, mais je faisais aussi un séminaire de topologie, je discutais avec Grothendieck, donc j'ai vu de près ses espaces nucléaires, tu vois, et ça m'a beaucoup frappé parce que c'était très bon comme idée, ces produits tensoriels, et donc on était en confiance, depuis longtemps.

Alain Connes : Vous étiez déjà en confiance depuis longtemps, mais bon au niveau mathématiques, il y a déjà dès le début de la correspondance, il y a plusieurs points qui frappent assez et qui sont par exemple tout son traité sur l'algèbre homologique, c'est-à-dire ce qu'on appelle le Tohoku.

Jean-Pierre Serre : Oui ça m'intéressait pas spécialement.

Alain Connes : Ca t'intéressait pas spécialement ?

Jean-Pierre Serre : Non, je considérais ça comme plus ou moins évident, tu vois ? !

Alain Connes : C'est-à-dire, il y avait le Cartan-Eilenberg.

Jean-Pierre Serre : Pour moi, c'était de la rédaction. D'ailleurs pour lui aussi, c'était pareil.

Alain Connes : C'était de la rédaction.

Jean-Pierre Serre : Il le dit : “Pour comprendre quelque chose, j’ai besoin de l’écrire.”.

Alain Connes : Oui, tout à fait.

Jean-Pierre Serre : Et du coup, il le rédigeait mais pour moi il y avait rien d’original dedans.

Alain Connes : Ah ? ! Moi, il y a quand-même quelque-chose qui m’a beaucoup frappé là-dedans.

Jean-Pierre Serre : Bon, il y avait les axiomes sur les catégories abéliennes.

Alain Connes : Voilà. Non, il y avait les axiomes sur les catégories abéliennes, mais pas seulement. Il y avait au niveau des exemples. C’est-à-dire au niveau des exemples, c’est-à-dire bon, bien sûr, l’exemple principal, c’était les faisceaux de groupes abéliens sur...

Jean-Pierre Serre : Alors ça n’a pas vraiment été fait mais bon, c’était connu que c’était faisable, bon...

Alain Connes : Bien sûr, que ça marchait, d’accord ?. Mais bon il y avait la nuance entre l’aspect Cech, enfin l’aspect si tu veux pour calculer la cohomologie, mais, en fait, moi, ce qui m’a beaucoup plus frappé quand j’ai lu cet article en détail, c’était un autre exemple, qui a l’air de rien, mais j’y reviendrai après, et c’est l’exemple de ce qu’il appelait les catégories de diagrammes.

Jean-Pierre Serre : Catégories de ?

Alain Connes : de diagrammes. Alors ça, ça passe inaperçu dans l’article...

Jean-Pierre Serre : Alors, oui effectivement parce que je ne m’en souviens pas du tout.

Alain Connes : Tu ne t’en souviens pas ? Voilà !

Jean-Pierre Serre : Eh bien, même maintenant.

Alain Connes : Alors, je vais t'expliquer ce que c'est. Et le rôle que ça a joué je pense après, mais c'est aussi une conjecture. Donc en fait, qu'est-ce qu'il fait ? Il a tout un chapitre enfin, sur cet exemple-là et qu'est-ce qu'il dit ? Eh bien, il dit...

Jean-Pierre Serre : Tiens, c'est curieux, je ne me souviens pas du tout de ça !

Alain Connes : Il dit : on prend une petite catégorie et on prend les foncteurs de cette petite catégorie vers les groupes abéliens.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est ça, c'est une catégorie de diagramme.

Alain Connes : Voilà, c'est ça une catégorie de diagrammes, pour lui. Et après, il vérifie bien-sûr que bon, c'est une catégorie abélienne, tout marche, etc.

Jean-Pierre Serre : Oui, effectivement, c'est une idée qui était certainement pas dans l'air, ça, non.

Alain Connes : Voilà. Donc, si tu veux, moi, c'est cette partie-là qui m'a beaucoup intéressé, comme partie novatrice, et j'y reviendrai après.

Jean-Pierre Serre : Mais moi, elle ne m'intéressait pas parce que ça ne représentait rien de concret pour moi. Il ne calculait pas des groupes d'homotopie, il ne calculait rien avec, tu comprends ?

Alain Connes : Oui, je suis bien d'accord.

Jean-Pierre Serre : Alors, j'ai tendance à être comme ça.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr, bien évidemment, bien évidemment, mais j'y reviendrai après... Alors, en fait, donc, j'ai entendu dans une des interviews que tu as données que, je veux dire, ça te fait réagir lorsque les gens, et je pense qu'ils ont tort, parlent d'une révolution à propos de la théorie des schémas. Ca, je pense qu'on est bien d'accord, c'était dans l'air et en fait, tu

fais remonter ça à Krull ?

Jean-Pierre Serre : Parce que Krull, bon, c'était un algébriste, Krull. Mais on avait le sentiment qu'il devinait la géométrie qui était derrière. Et en tout cas, il construisait les anneaux locaux, la localisation...

Alain Connes : Il construisait la localisation qui est l'essentiel, oui.

Jean-Pierre Serre : ...mais il n'avait pas fait le pas d'aller au projectif, tu vois, il était affine, et ça, la géométrie quand elle reste affine, elle est pas collée.

Alain Connes : Ah d'accord...

Jean-Pierre Serre : La géométrie, quand elle est affine, ça marche pas...

Alain Connes : Il faut la recoller, non, bien sûr, sinon, ça ne marche pas, c'est sûr, la cohomologie...

Jean-Pierre Serre : C'est pas assez intéressant.

Alain Connes : Et alors, ce qui m'a aussi beaucoup frappé, c'est à quel point, justement, Grothendieck est arrivé dans un monde idéal. Pourquoi ? Parce que Serre et plusieurs autres personnes faisaient un séminaire à Princeton sur les schémas, au moment où ils les écrivaient. Dieudonné l'aidait à rédiger.

Jean-Pierre Serre : Mais ça, c'est un petit peu après quand-même.

Alain Connes : C'est un petit peu après.

Jean-Pierre Serre : Au début, ça a été purement, la correspondance avec moi, quand il était à Kansas, tu vois ?

Alain Connes : C'est ça, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Ca a été pour lui, ça, le changement net, c'était Kansas, et il m'écrivait,

Alain Connes : C'est ça. Ca a donné lieu au développement. D'accord.

Jean-Pierre Serre : Et puis après, il a été recruté par Motchane. Alors je sais pas comment ça marche au point de vue des années...

Alain Connes : C'est 58, le recrutement par Motchane, c'est 58.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, tandis que Kansas, c'est 55. Il y a eu une période intermédiaire. Il était au CNRS, alors, peut-être ?...

Alain Connes : Je ne sais pas, alors ça, je ne sais pas.

Jean-Pierre Serre : Il était apatride, alors, c'était pas si simple.

Alain Connes : C'était assez difficile pour lui sur ce plan-là. Donc au niveau des... au niveau des schémas, bon, c'est clair. Aussi, pareil, je veux dire la correspondance est idéale au niveau des motifs, ça c'est formidable, parce qu'on voit en 64, votre correspondance, toi, tu parles de la métaphysique des motifs, etc.

Jean-Pierre Serre : Et alors, ce que la correspondance ne montre pas, c'est que c'est en fait une conséquence de tas de remarques que je lui faisais : je lui disais "tu sais, entre variétés, si on admet les conjectures de Weil, ça suggère que la cohomologie se coupe en morceaux et des choses comme ça."

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Et ça, ça a mijoté dans son crâne. Mais alors, il a fait quelque chose que moi, je n'aurais jamais fait, il a eu l'idée de définir ça, avec un courage !!!

Alain Connes : qui le caractérise !

Jean-Pierre Serre : intellectuel extraordinaire parce que j'aurais jamais pensé que les cycles algébriques, c'était assez fort pour faire...

Alain Connes : Oui.

Jean-Pierre Serre : ça, mais il a eu le courage de le faire. C'est peut-être faux d'ailleurs, c'est peut-être faux, mais en tout cas, c'était un bon départ.

Alain Connes : C'est la conjecture de Hodge. C'était un bon départ. Mais alors il y a une autre partie pour moi absolument essentielle, et je vais te raconter ce que je sais, et tu vas me corriger, d'accord ? C'est pour la cohomologie étale. Alors ce que j'ai entendu dire, mais je ne sais pas si c'est vrai, tu me corriges, ce que j'ai entendu dire c'est que c'est toi qui as donné un séminaire, non, au séminaire Chevalley, en 58...

Jean-Pierre Serre : oui bien sûr, tout cela est correct, oui, c'était en 58.

Alain Connes : ...dans lequel tu as expliqué que pour avoir des fibrés localement triviaux en terme de groupes algébriques, il fallait prendre des revêtement étales...

Jean-Pierre Serre : C'est ça.

Alain Connes : alors, et que, à la sortie de ton séminaire...

Jean-Pierre Serre : C'est absolument correct. Et j'ai fait mon exposé, je me vois encore, au tableau...

(Rires d'Alain Connes)

Jean-Pierre Serre : ...parlant à Poincaré de ça...

Alain Connes : C'était à Poincaré, d'accord.

Jean-Pierre Serre : et à la fin de l'exposé, Grothendieck me disant : "ça va faire la cohomologie de Weil". Parce que ça s'appelait cohomologie de Weil, c'était la cohomologie que nous voulions en tout cas.

Alain Connes : Mais alors...

Jean-Pierre Serre : Instantanément.

Alain Connes : Instantanément ?

Jean-Pierre Serre : Instantanément : moi, j'avais présenté, effectivement et systématiquement, je fais un H^0, bon le H^0, c'est trivial. Je fais le H^1.

Alain Connes : Toi, c'était le H^1 ?

Jean-Pierre Serre : Oui, mais j'ai pas eu le courage intellectuel de me dire "ça pourrait faire un H^2". Tandis que lui, il a dit, tout de suite, instantanément, et c'est parfaitement correct. Cette légende, pour une fois, elle est juste.

Alain Connes : C'est le courant, qui est passé...

Jean-Pierre Serre : Ca a déclenché. Et... en un sens... tu regarderas le texte que j'ai écrit, je l'avais vraiment rédigé comme ça, c'était avec, j'avais écrit H^1, tu vois ?

Alain Connes : Oui, oui ! Ah ? Tu avais déjà écrit la suite cohomologique, tu avais noté H^1, d'accord, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, j'avais écrit H^1. J'avais la bonne cohomologie en dimension 1, c'était ça mon idée. J'étais partie de l'idée que le H^1, de Zariski, pour les revêtements, est ridicule puisqu'on trouve rien. Alors tu les mets de force, dans la machine.

Alain Connes : Tu les mets de force ? Ah, d'accord...

Jean-Pierre Serre : Et j'avais constaté que ça faisait un bon machin. Mais j'avais pas eu l'idée que ça pourrait... On m'aurait posé la question, j'aurais dit qu'il fallait peut-être des idées nouvelles en dimension plus grande, tu vois.

Alain Connes : Oui, c'est ça, c'est ça.

Jean-Pierre Serre : Tandis que lui, était...

Alain Connes : ...était convaincu que ça marchait pour les dimensions plus grandes.

Jean-Pierre Serre : Eh bien, il était d'un optimisme extraordinaire.

Alain Connes : Et toi, souvent, on voit bien dans ta correspondance à quel point, tu lui donnes des contre-exemples *(éclats de rires)*.

Jean-Pierre Serre : *(souriant franchement)* Un peu moins optimiste.

Alain Connes : De manière régulière...

Jean-Pierre Serre : Un peu moins optimiste. Oh, eh bien, tu sais, Weil m'a dit un jour, ça m'avait frappé : "ce sont les optimistes qui démontrent les théorèmes".

Alain Connes : Oh, un petit peu, bon, il ne faut pas être trop optimiste non plus. Il faut une certaine dose d'optimisme.

Jean-Pierre Serre : Bon, en tout cas, cette légende, elle est absolument correcte, donc, ça, c'est bien.

Alain Connes : D'accord, ça, c'est bien, alors il y a une notion que je voudrais aborder, Je pense savoir quelle sera ta réaction mais je vais...

Jean-Pierre Serre : Eh bien, dis toujours.

Alain Connes : Mais j'y vais toujours. Voilà, pour moi, une des grandes découvertes de Grothendieck, c'est la notion de *topos*.

Jean-Pierre Serre : C'est la notion de... ?

Alain Connes : C'est la notion de *topos*.

Jean-Pierre Serre : Alors, je ne sais même pas ce que c'est. Je n'ai même jamais fait l'effort de comprendre exactement parce que... dès qu'il y avait

des catégories dedans, en abondance, je m'arrêtais d'écouter.

Alain Connes : D'accord, d'accord.

Jean-Pierre Serre : C'est, c'est, mon crâne s'est un peu bloqué sur ces choses-là.

Alain Connes : Alors, j'avoue que j'avais exactement la même attitude jusqu'à quelques années... et que finalement je pense que c'est une notion qu'on ne peut apprécier que quand on la rencontre indépendamment.

Jean-Pierre Serre : Voilà, ça c'est sûr.

Alain Connes : Tu es d'accord, hein ?

Jean-Pierre Serre : Mais je n'en ai jamais eu besoin.

Alain Connes : Tu n'en as jamais eu besoin, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Donc en fait, si je te pose la question "à quel moment Grothendieck a inventé les topos ?"...

Alain Connes : Je ne sais pas et je m'en fiche.

Jean-Pierre Serre : Tu ne saurais pas, tu t'en fiches.

Alain Connes : Bon, je ne m'en fiche pas vraiment.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, oui, c'est sûr.

Alain Connes : Ca ne me dit rien.

Jean-Pierre Serre : Ca ne te dit rien, OK, d'accord...

Alain Connes : Non alors là, vraiment.

Jean-Pierre Serre : Je sais qu'on en fait beaucoup de... qu'on en parle énormément, que c'est très à la mode et tout ça, mais...

(Rires d'Alain Connes)

Alain Connes : Mais c'est pas quelque chose qui te... Et c'est exactement ce que je pensais, hein, je pensais que...

(Rires d'Alain Connes)

Alain Connes : ...quand j'avais bossé dessus.

Jean-Pierre Serre : Ca ne me dit rien... du tout.

Alain Connes : Voilà. Il y a une autre, comment dire, il y a une autre distinction, que tu fais, dans plusieurs interviews, et qui ressemble un peu à la distinction entre justement, que faisait Grothendieck entre l'analyse fonctionnelle et la géométrie algébrique, c'est..., tu fais une distinction un peu entre la géométrie algébrique et la théorie des formes modulaires.

Jean-Pierre Serre : Ah, ça a beaucoup plus de charme dans ma tête, eh bien, c'est-à-dire que... Non, là, nous allons dans une direction vraiment différente, ce sont des directions différentes et que, Grothendieck quand-même ne s'intéressait qu'aux théories qui se développaient logiquement par elles-mêmes, tu vois ?

Alain Connes : Eh bien, la *marée montante de théories générales.*

Jean-Pierre Serre : La *marée montante*, c'est ça. Or, l'un des charmes justement des formes modulaires et du programme de Langlands, c'est que, et ça n'est absolument pas logique du tout, c'est que, c'est une brillante idée qui dit "deux choses sont essentiellement presque identiques, enfin, elles *se correspondent*, or il n'y a aucune raison, a priori, du tout pour que ça soit vrai.

Alain Connes : Pour que ça soit vrai, d'accord. Et ça, c'est d'un charme extraordinaire.

Jean-Pierre Serre : Ca, pour moi, c'est d'un charme absolument incomparable par rapport à...

Alain Connes : à quelque chose qui se développe comme ça.

Jean-Pierre Serre : Pour moi, ce sont les choses qui se développent petit à petit, comme ça.

Alain Connes : Oui, ça je comprends très bien.

Jean-Pierre Serre : Alors ça pour moi, ça s'incarnait dans des choses précises avec les formes modulaires. Ma conjecture par exemple...

Alain Connes : Bien sûr.

Jean-Pierre Serre : ...sur les extensions Galoisiennes.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : La conjecture sur les courbes elliptiques. Tout ça pour moi a pris forme... vers 67. 67 est une grande année pour moi. Pour la théorie des nombres, parce que c'est l'année où il y a eu les motifs, j'ai vu tout de suite que les motifs étaient, étaient liés, tu vois ?

Alain Connes : En 64, c'étaient les motifs, déjà, dans la correspondance, c'est en 64.

Jean-Pierre Serre : Non, mais pour moi, c'est en 67 seulement que je... que je vois que ça doit être lié.

Alain Connes : D'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui parce que c'est à ce moment-là qu'il y a eu l'article de Weil sur les courbes elliptiques...

Alain Connes : Ah oui, ce qu'on appelle la conjecture de Taniyama-Weil.

Jean-Pierre Serre : ...qui confirmait que les courbes elliptiques devaient correspondre à des formes modulaires. Jusque là, c'était une espèce d'espoir vague, mais...

Alain Connes : Je comprends.

Jean-Pierre Serre : C'était pas concret, tandis que... Weil n'avait pas tout à fait la notion de conducteur mais presque. En tout cas, moi, je l'avais la notion de conducteur, et donc je pouvais, je pouvais énoncer beaucoup plus précisément la conjecture, et alors du coup, elle devenait absolument convaincante. C'était incroyable ! Je l'ai raconté quelque part, après discussion avec Weil, je crois, je suis rentré chez moi, j'ai regardé : "Ah ! !" (je savais qu'il n'y avait pas de courbes elliptiques de conducteur 1), "Ah ben oui, mais il n'y a pas de forme modulaire correspondant, tu vois ?"

(Rires partagés)

Jean-Pierre Serre : Ah et puis, il n'y en a pas non plus avec 8, oh ben, c'était pareil, et par contre, il y en a... Ah ! ! ! C'était lumineux, tu vois ? C'était lumineux. Et ça, c'est le genre de chose par exemple, qui n'est absolument pas Grothendieckien.

Alain Connes : C'est totalement orthogonal à... Mais ça, ça transparaît très clairement dans votre correspondance, complètement.

Jean-Pierre Serre : Ca, évidemment, ça me fait beaucoup plus d'effet, tu vois ? Alors à des niveaux plus élémentaires, à chaque fois qu'il y a des correspondances qui sont un peu surprenantes, ça me touche.

Alain Connes : Ca t'excite, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Alors que au contraire, Grothendieck, ça...

Alain Connes : (*s'exclamant*) : il n'aimait pas !

Jean-Pierre Serre : Il n'aime pas, il n'aime pas ça.

Alain Connes : Et tout ça ressort parfaitement de la correspondance.

Jean-Pierre Serre : Ce sont des points de vue un peu... : c'est bien plus romantique, quand il n'y a pas de relation évidente, et que les trucs sont les mêmes, enfin, c'est *(chuchotant presque)* un mariage fut au ciel, tu vois,

enfin, c'est le... le coup de foudre, tu vois...

(Rires)

Alain Connes : Justement, on se rapproche d'une période, de 68, enfin cette période un peu trouble par rapport à Grothendieck, donc on va moins parler de mathématiques.

Jean-Pierre Serre : Eh bien, c'est... Il commence à quitter les maths, en 68.

Alain Connes : Il commence à quitter les maths.

Jean-Pierre Serre : Enfin, c'est pas loin, c'est en 70 à peu près, c'est vers 70 qu'il quitte à peu près.

Alain Connes : Voilà. C'est en 70 qu'il quitte l'IHES ?...

Jean-Pierre Serre : Je ne me rappelle pas des dates.

Alain Connes : Bon, je ne sais pas. Mais en tout cas, il passe 2 ans au Collège de France, c'est toi qui l'invites au Collège de France, sur 2 ans.

Jean-Pierre Serre : Alors c'était une chaire de savant étranger.

Alain Connes : C'était une chaire de savant étranger, qui durait 2 ans.

Jean-Pierre Serre : qui était pour un an. Qui était pour un an, et puis on l'a renouvelée, pour la seconde année. Mais on n'a pas voulu le renouveler pour la troisième fois.

Alain Connes : Pourquoi, il s'était fait des ennemis ? Tu veux dire ? Il s'était...

Jean-Pierre Serre : Comment ?

Alain Connes : Il s'était mal comporté, qu'est-ce qui s'était passé ?

Jean-Pierre Serre : Bah, *(soupir)*, c'était pas sa place parce que, écoute, il passait son temps à ce moment-là à dire qu'il fallait plus faire de sciences. Tu vois, il fallait plus faire de maths, il fallait plus faire de sciences, que c'était l'écologie. Bon ben s'il ne voulait plus en faire, qu'il aille ailleurs quoi, c'était... Non non, et j'étais pas content même que le CNRS le prenne. Je trouvais que c'était... que c'était pas bien...

Alain Connes : Que c'était une erreur... Mais ça, c'était longtemps après, ça, le CNRS.

Jean-Pierre Serre : Pas très longtemps, non.

Alain Connes : C'était en 84 qu'il a été pris au CNRS.

Jean-Pierre Serre : Non mais à ce moment-là. Non, c'était, il jouait un assez vilain jeu parce que il ne voulait plus faire de maths, tout ça, mais il voulait bien être payé, il voulait bien avoir un poste, tu vois, c'était quand-même, pour quelqu'un qui était en principe si... rigoureux.

Alain Connes : Mais il faisait pas ses cours, ou il faisait ses cours ?

Jean-Pierre Serre : Ah, eh bien, tu connais bien l'histoire des cours au Collège, non ?

Alain Connes : Non. Absolument pas.

Jean-Pierre Serre : Alors, la première année, il n'y a pas eu de problème. La première année, il a fait un cours. Il a fait un cours, je sais pas sur quoi.

Alain Connes : Si, c'était sur les groupes de Barsotti-Tate ou un truc comme ça.

Jean-Pierre Serre : Non, je crois que ça, c'est la seconde. La seconde année, il nous a donné comme sujet de cours, tu sais bien, les sujets que nous proposons au mois de juin...

Alain Connes : Oui, au mois de juin.

Jean-Pierre Serre : Il nous a donné un truc d'écologie.

Alain Connes : Ouh la !

Jean-Pierre Serre : Alors euh...

Alain Connes : Ah c'était à ce point-là alors... Je croyais qu'il avait donné deux sujets.

Jean-Pierre Serre : Non, non, pas du tout. Un sujet d'écologie. Alors l'administrateur a disjoint cette proposition-là du reste, nous avons voté sur tout le reste, on a voté oui pour tous les copains et puis ensuite, on a voté séparément sur le truc de Grothendieck, on a voté non à une large majorité. Moi j'ai voté non bien-sûr, sur l'écologie ! Alors Grothendieck a accepté, ça, il n'avait pas le choix. Et il a fait un cours sur Barsotti-Tate ou un truc comme ça, mais dans lequel il a commencé par "je ne peux pas vous parler de Barsotti-Tate sans vous expliquer que..." et puis, 4 heures d'écologie, tu vois, et...

Alain Connes : Mon Dieu !... D'accord !

(Eclats de rires)

Jean-Pierre Serre : Je crois que le pauvre Illusie a assisté. Je crois qu'il a pas dû y avoir grand monde à ce cours.

Alain Connes : Ah c'était un cours d'écologie alors...

Jean-Pierre Serre : De Survivre [2], enfin... Des bons sentiments quoi, des bons sentiments de Grothendieck, ça.

Alain Connes : D'accord.

Jean-Pierre Serre : Et alors, tu imagines, on n'avait pas du tout envie de le renouveler, tu comprends, avec un truc pareil.

2. Mouvement écologiste fondé par Grothendieck et ses amis.

Alain Connes : Mais ça me rappelle, d'ailleurs, dans la correspondance, une dissenssion que vous aviez eue, qui était au moment où Grothendieck avait voulu, enfin, je crois qu'il l'avait écrit, il avait écrit une lettre à Cartan

Jean-Pierre Serre : Ca c'est différent, il avait écrit une lettre à Cartan sur la guerre d'Algérie...

Alain Connes : sur la guerre d'Algérie, il voulait dispenser les normaliens de service militaire ou un truc comme ça, oui.

Jean-Pierre Serre : oui, dispenser les mathématiciens de service militaire.

Alain Connes : Ca t'avait un peu...

Jean-Pierre Serre : Je lui avais répondu que c'étaient quand-même délicat quand la peau des gens était en jeu de... oui, c'est ce que je lui avais dit, que certains ne se fassent pas tuer alors que d'autres peuvent... se font tuer. Alors il est exact que certains pays, effectivement, protégeaient leurs scientifiques, je crois que l'URSS par exemple...

Alain Connes : protégeait les scientifiques...

Jean-Pierre Serre : *(riant :)* Ils les tuaient pour des raisons politiques éventuellement, mais ils ne les envoyaient pas se faire tuer à la guerre.

Alain Connes : D'accord, lui parlait des Etats-Unis, c'est sûr, oui.

Jean-Pierre Serre : Et Grothendieck, lui, anarchiste d'origine, lui, son point-de-vue était "Si n'importe quelle raison peut marcher pour ne pas aller dans l'armée, alors on la prend, c'était ça son... Mais ça n'a pas été une discussion sérieuse. Il a écrit ça à Cartan et on n'en a plus parlé après.

Alain Connes : Il y a un certain nombre de lettres, effectivement, qui sont un peu restées sans réponse.

Jean-Pierre Serre : Et puis c'est la guerre d'Algérie, ça, oui, c'est la guerre d'Algérie.

Alain Connes : Oui, c'était en 61. Un certain nombre de lettres dont on voit qu'il n'a pas répondu et il y avait une lettre sur laquelle j'étais très très curieux de savoir si tu l'avais vue après ou quoi ?... Et c'est quand Dwork a démontré la rationalité des fonctions ζ. Ca, je suis très curieux de savoir comment il a réagi.

Jean-Pierre Serre : Oh ben, il s'en foutait.

Alain Connes : Ah il s'en foutait ? Alors que...

Jean-Pierre Serre : C'était en dehors de son truc.

Alain Connes : En dehors de son schéma, il s'en foutait, c'est incroyable, parce que la démonstration de Dwork est magnifique.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, je l'avais exposée à Bourbaki, je m'étais régalé.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Elle était magnifique mais, euh, par exemple, j'avais essayé de regarder ce que ça donnait pour la cohomologie avec des coefficients, et je ne me rappelle plus mais il y avait des difficultés quand-même, avec un groupe qui opère... Non mais de toute façon, il avait raison de son point de vue : il la voulait d'une certaine façon,...

Alain Connes : Il la voulait d'une certaine façon, il ne voulait pas se détourner de son objectif.

Jean-Pierre Serre : Non, c'était un accident, un accident, quoi, on avait démontré ça, quoi, un peu plus tôt qu'on aurait dû.

Alain Connes : Bon, mais est-ce qu'il n'y a pas là-dedans, plus ou moins, ...

Jean-Pierre Serre : *(l'interrompant)* : Tu vois, j'ai eu quand-même, je te raconte, vers euh... Quand est-ce que j'ai réfléchi à Riemann-Roch, moi ?... C'est vers...

Alain Connes : Ah oui, mais tu le dis ça, dans l'interview de Colliot-Thélène, c'est toi le premier qui as eu l'idée que c'était une caractéristique d'Euler.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'était... *(petit rire modeste)*

Alain Connes : Et ça, c'est très important en fait. C'est très important, mais tu l'as jamais publié !

Jean-Pierre Serre : Non, c'était pas la peine parce que, quand j'ai correspondu avec Kodaira-Spencer, j'ai vu qu'ils avaient eu la même idée mais ils n'avaient pas mon théorème de dualité. Alors ils ont publié leur truc et moi, j'ai publié le théorème de dualité.

Alain Connes : Bon, donc ça va, quoi, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, c'était... Mais alors, quand j'ai réfléchi à ça, à Riemann-Roch, ce qui m'a amusé, c'était que j'ai essayé de le démontrer pour les courbes, tu vois...

Alain Connes : Oui, ben là, c'était juste H^1 et H^0 donc...

Jean-Pierre Serre : Eh, tu parles, oui ! Oui, oui, d'accord, mais alors, j'essayais là de démontrer quelque chose, qui était connu depuis environ 100 ans, quoi, c'est ça. Mais j'avais une idée des démonstrations qu'on pouvait faire, mais je les voulais pas.

Alain Connes : Non, mais excuse-moi, mais excuse-moi, c'est-à-dire quand tu dis que tu faisais ça, tu faisais ça avec des faisceaux Zariski, etc., ou... ?

Jean-Pierre Serre : C'est ça.

Alain Connes : C'est ça, c'est ça, hein, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Euh... Non, à l'époque, attends, à l'époque, est-ce que j'étais Zariski ou est-ce que j'étais, non, j'étais analytique-complexe à l'époque.

Alain Connes : Ah, tu étais analytique-complexe, c'était avant, euh...

Jean-Pierre Serre : C'était avant GAGA. J'ai fait FAC et GAGA en même temps. Non c'était analytique-complexe et, simplement, je voulais pas les démonstrations existantes. Je les voulais pas parce que, quand j'ai trouvé celle que je voulais, celle que je voulais, tu dois la connaître, c'est... tu as un diviseur d et ce que tu montres, c'est que si tu le sais pour d, alors tu le sais pour $d + p$ où p est un point. Or comme tu peux te balader, comme ça, et puis, quand $d = 0$, c'est...

Alain Connes : Une espèce de récurrence, quoi, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Alors, je me vois encore à ma table de travail, quand j'ai trouvé ça, je l'ai écrit quelque part, je sais que 3 minutes après, j'avais la dimension 2, la théorie des surfaces.

Alain Connes : Paf ! Donc tu savais déjà que c'était une caractéristique d'Euler.

Jean-Pierre Serre : Ah, oui, oui, oui, oui, oui. Je savais qu'avec ce style-là...

(Claquement de langue d'admiration d'Alain Connes)

Alain Connes : D'accord, d'accord, parce que comment il fallait l'énoncer ?...

Jean-Pierre Serre : Et tu vois bien comment il fallait faire ? ! Il fallait que je montre que si j'ai un diviseur sur la surface, et si je lui ajoute quelque-chose, et si je l'avais pour le diviseur, je l'ai encore pour...

Alain Connes : Ca continue à être vrai...

Jean-Pierre Serre : Et grâce au Riemann-Roch précédent, un p'tit peu plus, non non, ça m'a pris 3 minutes, je crois. Dimension 3, je pouvais pas parce qu'il y avait des choses à démontrer que...

Alain Connes : Oui, bien sûr...

(Rires d'Alain Connes)

Jean-Pierre Serre : Mais typiquement, ça nous arrive souvent ça, on n'est pas content d'une démonstration parce qu'on en veut une qui fasse autre chose.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Et celle-là, c'était formidable.

Alain Connes : Et ça, c'était en quelle année, que tu as fait ça, en gros ? 53 ?

Jean-Pierre Serre : Oh, c'est en gros 53.

Alain Connes : 53 ?

Jean-Pierre Serre : Oh à peu près, oui. Ma thèse est de 51. Je me suis arrêté de faire des groupes d'homotopie à peu près tout de suite. En 52, c'était le séminaire Cartan des variétés de Stein, et très rapidement, j'ai été élevé en taupe, comme toi d'ailleurs, avec l'idée que c'est la géométrie projective qui est bonne. La géométrie affine, c'est de la blague.

Alain Connes : C'est sûr.

Jean-Pierre Serre : Or Cartan, c'est de la géométrie affine, tu vois. Les variétés de Stein, ce sont des machins ouverts, c'est pas... Et les trucs compacts ont quand-même un charme...

Alain Connes : D'ailleurs, votre correspondance commence par une grosse bêtise de Grothendieck qui dit que le quotient d'une variété de Stein par un groupe...

Jean-Pierre Serre : Oui, non, mais je pense que ça, c'est une faute de frappe de Grothendieck, il a oublié de mettre fini.

Alain Connes : Fini, bien sûr, oui, je suis d'accord.

Jean-Pierre Serre : Après coup, je m'en suis rendu compte, c'était sûrement ça qu'il voulait dire. Mais il ne le corrige pas dans ça. Peut-être qu'il le croyait... Mais en tout cas, c'est pour ça que j'ai quitté le point de vue Cartan. C'est parce que pour moi, c'est la taupe qui m'a fait.

Alain Connes : Mais il y a un point essentiel dans ce que tu as fait, c'est l'utilisation de la topologie de Zariski, des faisceaux pour la topologie de Zariski.

Jean-Pierre Serre : Ca c'est juste après, et ça, c'est... *(se reprenant)* Bon mais ça, c'est parler de moi, c'est pas parler de Grothendieck.

Alain Connes : Mais ça ne fait rien parce que, si tu veux, c'est complètement clair, en fait, quand on regarde avec une certaine distance, moi en tant que non spécialiste du tout, c'est, si tu veux, l'influence en fait, de Leray...

Jean-Pierre Serre : Oh oui, sur les premières années de Grothendieck, oui, oui, j'ai... oui, je l'ai influencé énormément, ça c'est clair.

Alain Connes : Tu l'as influencé énormément, donc...

Jean-Pierre Serre : Non, ce qui s'est passé, c'est que... sur l'espace projectif, sur les faisceaux sur l'espace projectif complexe, tu vois, j'ai pu voir qu'il y avait des modules, parce que j'ai pris les sections.

Alain Connes : Non mais, j'ai bien vu la preuve de ton article sur GAGA, justement.

Jean-Pierre Serre : Eh bien, c'était dans un séminaire Cartan, c'était dans un séminaire je ne sais plus, en tout cas, j'ai fabriqué dans ce cas-là, et j'ai vu un dictionnaire avec les modules, alors je me suis dit "bon après, c'est pas possible, ça va marcher sur un corps quelconque." Et alors, c'est comme ça que je suis passé à FAC[3] qui s'est écrit alors, incroyable...

3. Faisceaux algébriques cohérents

Alain Connes : Oui, ça tu le dis plusieurs fois, que tu n'as pas eu à réfléchir.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : *(faisant le geste d'un papier interminable sortant d'une machine à écrire)* La machine a tapé, comme ça, un article de 100 pages, comme s'il existait déjà.

Alain Connes : Oui, alors donc là, justement, on va aborder une période qui est beaucoup plus délicate si tu veux, et qui est la fin de la correspondance, c'est-à-dire qu'il y a une très grande interruption dans la correspondance.

Jean-Pierre Serre : Oh, ben y en a plus, au fond, de correspondance.

Alain Connes : Ah il n'y en a plus. Quand-même, il y a la lettre que tu lui as écrite, et que je trouve très très pertinente si tu veux, quand tu as reçu *Récoltes et Semailles. (On entend un gros soupir de Jean-Pierre Serre.).* Donc quand tu as reçu *Récoltes et Semailles*, c'était en 86, je pense, hein ? Là, tu lui as écrit, et si tu veux, je m'en voudrais de mal te citer mais c'est très important...

Jean-Pierre Serre : Tu as fait des photocopies !

Alain Connes : Ah oui, bien sûr. Alors, je te lis, hein, pour être sûr, donc : *"J'ai bien reçu le fascicule de Récoltes et semailles que tu m'as fait envoyer. Merci beaucoup. Il me manque encore l'avant-dernier fascicule, dont j'ai seulement quelques pages isolées."*

Jean-Pierre Serre : *(riant)* il manque quelques centaines de pages, c'est tout !

Alain Connes : Oui, c'est ça. *"Une chose me frappe. Dans les textes que j'ai pu voir, tu t'étonnes et tu t'indignes de ce que tes anciens élèves n'aient pas continué l'œuvre que tu avais entreprise et menée en grande partie à bien. Mais tu ne te poses pas la question la plus évidente, celle à laquelle tout lecteur s'attend à ce que tu répondes : "Pourquoi toi, tu as abandonné l'œuvre en question ?"."*

Jean-Pierre Serre : Bien sûr, c'est évident comme question, et il passe 600 pages à ne pas y répondre.

Alain Connes : A ne pas y répondre, *(s'exclamant)* mais, ce qui est le plus intéressant, c'est que tu as une idée...

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Oh oui, j'ai une idée, je la connais, je suis encore d'accord avec cette idée.

Alain Connes : Alors, tu dis : *"J'ai l'impression que malgré ton énergie bien connue..."* Alors c'est vrai que...

Jean-Pierre Serre : Oui, l'énergie, alors ça c'est vrai, il aurait fallu le connaître : physiquement et intellectuellement, c'était pareil, c'était phénom..., il pouvait travailler presque 24 heures, c'était extraordinaire. Il était une force, je connais personne qui avait autant de force que lui... Même, il y a des gens, je connais des gens qui sont intellectuellement très forts comme Thompson par exemple, Bombieri, sont très forts, mais Grothendieck, c'était une force, euh... animale !

Alain Connes : Tu dis, alors : *"Tu étais tout simplement fatigué (rires), quand-même, de l'énorme travail que tu avais entrepris. D'autant plus, qu'il y avait aussi les SGA."* Alors je rappelle que les SGA, bon, SGA3, je crois que c'est les groupes algébriques, y avait SGA4, c'étaient les topos, bon et alors tu dis : *"Je me souviens notamment de l'état plutôt désastreux de SGA5"*.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Oui, parce que alors, il était vraiment désastreux tu vois, il avait été ronéotypé par l'IHES mais il y avait trop de commutativité à vérifier, et Illusie qui était pourtant, Illusie qui était sérieux, sur un théorème vraiment décisif, avait écrit : "j'ai été incapable de vérifier"...

Alain Connes : Ouah, oui donc ça, c'était terrible.

Jean-Pierre Serre : Oui, "j'ai été incapable de vérifier..."

Alain Connes : Tu dis : *"Ils en étaient réduits à affirmer sans preuve la commutativité, au signe près en étant optimistes, et ces commutativités étaient essentielles pour la suite."*

Jean-Pierre Serre : *(s'exclamant)* Mais oui, c'était... Alors, évidemment, vu les résultats auxquels elle est appliquée, le signe, y avait pas de problème parce que... ils auraient trouvé des nombres négatifs pour les nombres de points, ben tu vois, alors évidemment !

(Eclats de rire)

Alain Connes : Fallait forcément que...

Jean-Pierre Serre : Non mais alors c'est précieux d'avoir des trucs comme ça, c'est précieux.

Alain Connes : Ca veut dire qu'on peut détecter une erreur.

Jean-Pierre Serre : Ca veut dire qu'on peut détecter une erreur, mais ça ne veut pas dire qu'on a une démonstration.

Alain Connes : Non, ça ne veut pas dire qu'on a une démonstration.

Jean-Pierre Serre : Non, Illusie avait écrit carrément dans le texte : "le rédacteur s'excuse de n'avoir pas été capable de vérifier la commutativité du diagramme".

Alain Connes : Alors mais alors là, ce que tu dis et qui est vraiment, vraiment très très intéressant, tu dis quelque chose, je pense que je devrais lire la suite parce que c'est, je vais m'arrêter au milieu, tu dis : *"on peut se demander par exemple s'il n'y a pas une explication plus profonde...*

Jean-Pierre Serre : Oui.

Alain Connes : *"...que la simple fatigue d'avoir à porter à bout de bras tant de milliers de pages. Tu décris quelque part ton approche des maths, où l'on n'attaque pas un problème de front, mais où on l'enveloppe et le dissout*

dans une marée montante de théorie générale. Très bien. C'est ta façon de travailler et ce que tu as fait montre que ça marche effectivement pour les EVT[4] *et la géométrie algébrique."* Et après tu dis, et je vais te laisser parler : *"C'est beaucoup moins clair pour la théorie des nombres".*

Jean-Pierre Serre : Oui, je pensais à par exemple, je ne sais pas si j'y pensais à ce moment-là, mais justement à la théorie de Langlands, à ce genre de choses.

Alain Connes : Tu pensais aux formes modulaires.

Jean-Pierre Serre : Aux formes modulaires, il n'y avait rien compris aux formes modulaires. Et il avait... Il était extraordinaire d'incompréhension quelquefois, parce que quand ça ne rentrait pas dans son cadre...

Alain Connes : D'accord, je comprends.

Jean-Pierre Serre : Je lui racontais des formes modulaires, et il disait : "Mais tes formes modulaires, ça n'a aucun sens !", parce que tu vois la variété des modules, elle est affine et donc, à l'infini, tu mets des conditions artificielles, alors...

Alain Connes : Alors que c'est une variété algébrique, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Alors que moi, j'avais 100 ans ou 150 ans de formes modulaires derrière moi, où je savais que c'était bon, cette théorie, quand on la voit, on résiste pas quoi. Eh bien lui, si, alors là ! "Aucun sens... Des formules !..." Il pouvait pas supporter les formules.

Alain Connes : Donc ce que tu dis là, en fait, tu dis plus loin qu'en fait en théorie des nombres justement, toutes les mathématiques peuvent rentrer et...

Jean-Pierre Serre : Et qu'on ne sait pas... Et qu'on ne sait pas comment ça marche.

Alain Connes : On ne sait pas comment ça va marcher, on ne sait pas du

4. Espaces vectoriels topologiques

tout où...

Jean-Pierre Serre : Ca, c'est passionnant en théorie des nombres.

Alain Connes : Exactement, exactement. Mais alors maintenant, ce que je voulais avoir, c'était... Donc là, on voit ta réaction, j'ai lu la...

Jean-Pierre Serre : En tout cas, tu peux constater que je suis d'accord avec tout ce que tu cites. Autrement dit, je n'ai pas changé d'avis depuis.

Alain Connes : Non, non, tu n'as pas changé d'avis, tu n'as pas changé d'avis. C'est important. Il y a la réponse de Grothendieck, elle est dans la correspondance, je ne vais pas la lire.

Jean-Pierre Serre : Non il y a peut-être des choses où j'ai dit peut-être des bêtises dans la correspondance, c'est possible mais...

Alain Connes : Non.

Jean-Pierre Serre : Mais probablement je les ai corrigées dans les notes, parce qu'il y a des notes. Donc si j'ai dit quelque chose que je trouvais idiot, je...

Alain Connes : Non, non, je ne pense pas. Je pense si tu veux, je pense que, moi, ce que j'ai essayé de faire, c'est de me glisser dans la peau de Grothendieck pour comprendre, essayer de comprendre comment il avait pu, comment dire, euh, *(soupir)*, si tu veux... Je ne dis pas qu'il est devenu paranoïaque, parce que je n'aime pas le mot du tout, je pense qu'il y a un mot pour ça, c'est un mot à la mode, c'est obsidional mais si tu veux...

Jean-Pierre Serre : Pour te donner ma comparaison à moi...

Alain Connes : Oui, vas-y.

Jean-Pierre Serre : Grothendieck me faisait penser à une centrale nucléaire. *(Rire d'Alain Connes)*. Et les centrales nucléaires, il faut les refroidir, il faut les protéger, etc. Et tant qu'il a été dans le monde mathématique normal, nous lui servions au fond de protection. Dès qu'il a été seul, la centrale

a explosé. Bon c'est... C'est pas très gentil comme comparaison mais...

Alain Connes : Peu importe, peu importe. Ce qu'il y a, c'est, le texte qu'il a écrit.

Jean-Pierre Serre : *Les* textes, il a écrit des milliers de textes, des dizaines de milliers de pages.

Alain Connes : Il a écrit des dizaines de milliers de pages. Si tu veux en fait...

Jean-Pierre Serre : Tu parles de quel texte, alors ?

Alain Connes : Je parle de plusieurs textes, en fait, j'ai compris en... J'avais dû faire un exposé au Collège de France sur... on m'avait demandé de faire un exposé sur les réfugiés, bon. Il y avait un colloque sur les réfugiés, un colloque de rentrée.

Jean-Pierre Serre : *(étonné)* : Sur les réfugiés ?

Alain Connes : Sur les réfugiés. Attends, c'était un truc général, donc, évidemment, bon, j'avais dit d'accord, et puis tu sais comment c'est quand c'est un mois avant, tu commences à te dire "sur quoi je vais parler..."

Jean-Pierre Serre : T'as quelque chose à dire sur les réfugiés, toi ?

Alain Connes : Et puis, bon, j'étais dans des circonstances très spéciales, parce que je m'occupais de ma mère qui était très malade, et la nuit, je lisais, et je lisais la Clef des songes, qui est un des textes de Grothendieck.

Jean-Pierre Serre : Ah celui-là, je ne connais pas la Clef des songes.

Alain Connes : Tu ne connais pas la Clef des songes. Et je suis tombé...

Jean-Pierre Serre : Ah si, j'ai dû regarder quand-même, si.

Alain Connes : Tu as peut-être regardé quoi...

Jean-Pierre Serre : Parce que j'étais impressionné par certains rêves de Grothendieck qui sont d'un détail de description, je me rappelle, il y a eu une princesse, quelque chose comme ça, avec des décorations...

Alain Connes : Des détails absolument incroyables.

Jean-Pierre Serre : Je sais que je n'ai jamais de rêve avec des précisions, mon crâne ne fabrique pas, c'est une question de puissance du crâne, tu vois...

Alain Connes : D'accord.

Jean-Pierre Serre : De fabriquer mentalement avec tes petits neurones, que tu fabriques des décorations d'une dame. Et la puissance de son crâne se voyait même dans ses rêves.

Alain Connes : Absolument. Et alors je suis tombé par hasard en lisant ce texte sur un passage qui est absolument magnifique et qui est le passage sur son père, ce qui est arrivé à son père, donc, qui était un anarchiste, quand il était en prison, parce qu'il est resté, je crois, plus de 10 ans en prison en Russie et ce qui lui est arrivé à un moment donné, et qui a été transmis à Grothendieck par sa mère. Et Grothendieck le décrit d'une manière incroyablement précise comme tu dis.

Jean-Pierre Serre : Mais c'était dans un rêve alors...

Alain Connes : Non ! Non, non, c'était dans la réalité. Ca, c'est dans la réalité. Il décrit ce qui est arrivé à son père, qui était : on avait promis à son père qu'il serait libéré, je crois, au bout de 10 ans, bon, il comptait les jours, en fait, etc. Et au moment où la date est arrivée, il n'a pas été libéré. Il a commencé une grève de la faim. Et au bout de je sais pas, peut-être 3 semaines ou un mois de grève de la faim, là, il a eu une illumination... mystique.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est pas surprenant, ça.

Alain Connes : C'est pas très surprenant, mais, si tu veux, la manière dont... et dans cette illumination, il pardonnait à ses geôliers enfin, etc. Et la manière dont c'est écrit, donc, si tu veux que ça a fait que, la première fois que je l'ai lu à ma femme, avant d'en parler au Collège, j'ai été obligé

de m'arrêter dans la lecture tellement c'était émouvant. Donc en fait, bon, je l'ai lu au Collège, mais c'est à cette occasion-là si tu veux que je me suis aperçu du fait qu'au milieu de 36 choses différentes, il y avait dans ses textes, de temps en temps, des choses extraordinaires.

Jean-Pierre Serre : Oui, ça, je pense qu'effectivement, c'est vrai qu'il y a, je suis un peu... je ne trouve pas d'adjectif, j'ai commencé par penser méprisant mais c'est pas tout à fait le cas, sceptique en tout cas, sur les choses de Grothendieck des 30 dernières années, mais quand-même, c'est clair qu'il y a des choses dedans.

Alain Connes : Il y a des choses.

Jean-Pierre Serre : *(soupirant)* Son crâne n'a jamais dégénéré. Non, c'est pas comparable à ceux de nos amis dont...

Alain Connes : ...dont nous ne parlerons pas.

Jean-Pierre Serre : ...dont nous ne parlerons pas, et qui n'ayant même pas 90 ans...

Alain Connes : Non, on n'en parle pas.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : N'en parlons pas, son crâne n'a jamais dégénéré, non, il a plutôt explosé qu'autre chose.

Alain Connes : Tout à fait, tout à fait.

Jean-Pierre Serre : Et toujours intelligemment.

Alain Connes : Toujours intelligemment et, si tu veux, ce que ce texte m'a appris, ce texte que j'avais découvert, ce qu'il m'a appris, c'est qu'en fait, son père n'avait jamais réussi à faire ce qu'il voulait faire. Son père voulait être écrivain.

Jean-Pierre Serre : Ah bon.

Alain Connes : Son père voulait écrire, et il n'avait jamais réussi à le faire, parce qu'il était tout le temps par monts et par vaux, quoi, etc.

Jean-Pierre Serre : Faut pas être anarchiste et écrire à la fois, c'est un peu...

Alain Connes : C'est vrai. Mais donc en fait, Grothendieck apparemment, au bout d'un moment, a décidé d'écrire.

Jean-Pierre Serre : Ah ça, pour écrire, il a écrit.

Alain Connes : Pour écrire, il a écrit, et ce que personne ne sait, qu'on a trouvé dans sa demeure quand il est mort, on a trouvé un nombre incroyable de pages, qui sont pour le moment inaccessibles.

Jean-Pierre Serre : Enfin, non, elles ne sont pas inaccessibles.

Alain Connes : Si, si, elles sont gardées par un avocat parce que les enfants ne sont pas d'accord.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, mais ça sera accessible, un jour, ça sera accessible. Ils ne les ont pas perdues quoi, elles ne sont pas perdues.

Alain Connes : Exactement mais apparemment, et alors ça, je trouve ça tout à fait incroyable, apparemment, le sujet principal, tu sais que bon, Grothendieck a quand-même une évolution mystique, hein, je veux dire, hein, c'est clair.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est un peu bizarre, oui.

Alain Connes : Un peu bizarre, mystique, mais apparemment, le sujet principal de ces milliers de pages, c'est, euh, en fait, c'est le problème du Mal. C'est à dire que, en fait, il s'est aperçu en étant mystique, en étant religieux d'une certaine manière, hein bon, qu'en fait, il y avait un problème fondamental, et il s'est attaqué à ce problème-là. On ne sait pas ce qu'il y a dedans.

Jean-Pierre Serre : J'appelle pas ça des problèmes, ces choses-là. Les littéraires ont tendance à appeler ça Le problème, avec l'idée que surtout, on n'essaye pas de les résoudre, mais on en parle...

(Rires)

Alain Connes : Oui, mais lui, alors lui, il a essayé justement. Donc moi je suis vraiment quand-même très curieux de... alors, je ne sais pas si ce sera possible de, bien sûr, apparemment, c'est au moins 30000 pages...

Jean-Pierre Serre : 30000 ?

Alain Connes : 30000 pages. Si ce n'est plus.

Jean-Pierre Serre : 30000, oh c'est possible avec Grothendieck...

Alain Connes : Bien classées.

Jean-Pierre Serre : ...parce qu'il écrivait à une allure, vraiment incroyable. Et... elles sont tapées à la machine ou elles sont écrites, tu ne sais pas ?

Alain Connes : Ca, je ne sais pas, mais maintenant avec l'intelligence artificielle, on pourra.

Jean-Pierre Serre : En même temps, il tapait très très vite.

Alain Connes : Oui, on pourra maintenant, non, je crois que c'est manuscrit.

Jean-Pierre Serre : Parce que son écriture n'était pas terrible, hein ?

Alain Connes : Mais on mettra au point un petit logiciel qui transformera ça en Latex, donc ça c'est pas un problème. Ca, c'est pas un problème, non, c'est pas un problème.

Jean-Pierre Serre : On va pas s'occuper de ça.

Alain Connes : Non, on va pas s'occuper de ça mais alors maintenant, je voulais te signaler un autre fait, dont je ne sais pas si tu le connais. Bien sûr, tu as connu sûrement Paulo Ribenboim.

Jean-Pierre Serre : Ribenboim. Ah oui, oui, charmant, charmant !

Alain Connes : Tu vois qui c'est ? ! Charmant, charmante personne.

Jean-Pierre Serre : Attends, il est d'Afrique du Sud ou il est...

Alain Connes : Non, il est du Brésil.

Jean-Pierre Serre : Ah du Brésil.

Alain Connes : Du Brésil, et puis il alterne entre Kingston, le Brésil, et puis Paris aussi.

Jean-Pierre Serre : Il fait de la théorie des nombres.

Alain Connes : Oui, et il fait de la théorie des nombres. Alors, je l'ai vu récemment, je l'ai vu récemment, et il m'a appris quelque chose.

Jean-Pierre Serre : Il est presque aveugle, je crois ?...

Alain Connes : Oui, malheureusement, il est presque aveugle, mais si tu veux, il utilise les moyens informatiques pour y voir, c'est-à-dire que bien qu'étant presque aveugle, il a une machine qui amplifie considérablement les caractères,

Jean-Pierre Serre : Ah !

Alain Connes : Et donc en fait il est encore capable de...

Jean-Pierre Serre : De taper à la machine ?

Alain Connes : Non, pas de voir, mais de lire ce qu'on lui envoie, etc. Et alors, j'ai discuté avec lui, et il m'a appris quelque chose de très intéressant. Il m'a appris qu'en fait, Grothendieck était venu dans les années 2000 secrètement à Paris, tu n'étais pas au courant ?

Jean-Pierre Serre : Ah bon ?

Alain Connes : Tu ne le savais pas, ça ?

Jean-Pierre Serre : Mais, euh, faire quoi ?

(Rires)

Alain Connes : Et alors, il était venu parce qu'il voulait absolument encore faire une tentative pour faire publier *Récoltes et Semailles*. Donc apparemment, il est venu, il est resté dans l'appartement de Paulo Ribenboim, qui a un appartement à Paris.

Jean-Pierre Serre : Ah.

Alain Connes : Et il a voulu...

Jean-Pierre Serre : Avec Odile Jacob, peut-être ?

Alain Connes : Non, je ne pense pas. Non, elle me l'aurait dit.

Jean-Pierre Serre : Parce que initialement, il avait été question d'Odile Jacob.

Alain Connes : Bien sûr, mais Odile m'a raconté ce qui s'était passé, si tu veux.

Jean-Pierre Serre : J'avais été, on m'avait contacté, mais il y a longtemps de ça, bien avant 2000, sur la publication de ça, et finalement, j'avais hésité, puis j'avais donné un avis défavorable parce que, il dit vraiment des choses méchantes sur Deligne, Illusie, et vraiment, pour ces gens-là, qui sont des gens bien, de voir ça écrit, publié, et auquel ils ne peuvent pas répondre, tu vois, c'est, c'était vraiment désagréable.

Alain Connes : De ce point de vue-là, c'est très désagréable.

Jean-Pierre Serre : Pour Deligne, en particulier.

Alain Connes : C'est sûr. Non, non, ça, c'est évident que...

Jean-Pierre Serre : Je crois que c'est peut-être bien la SMF aussi qui voulait...

Alain Connes : Ah bon ? !

Jean-Pierre Serre : ...qui s'était posé la question. Peut-être que c'était la SMF qui m'avait contacté.

Alain Connes : D'accord, d'accord, oui.

Jean-Pierre Serre : Il avait dû... Mais j'avais hésité parce que c'est intéressant, il n'y a pas de doute.

Alain Connes : Il y a quand-même beaucoup de choses intéressantes. C'est-à-dire tout le côté polémique, bon, ben, si on pouvait le laisser de côté, le reste est intéressant...

Jean-Pierre Serre : Quelle longueur ça a, je ne me souviens plus...

Alain Connes : C'est pas si long que ça, une fois que c'est tapé, une fois que c'est tapé, ça fait à peu près...

Jean-Pierre Serre : 600 pages ?

Alain Connes : Oui, c'est ça, ça fait à peu près entre 500 et 600 pages. Donc, c'est pas...

Jean-Pierre Serre : Oui, ça fait un livre.

Alain Connes : Oui, c'est publiable. La question, et ça, il le dit très bien au début, c'est qu'il a essayé d'écrire quelque-chose qui appâte le lecteur, etc,

ça, il n'a pas réussi, je veux dire le lecteur non mathématicien.

Jean-Pierre Serre : Non, en tout cas, un jour, ce sera publié.

Alain Connes : Oui, je crois que ça va même être publié, il me semble que... Je sais pas si c'est pas Hermann qui va... En tout cas, j'ai entendu ça.

Jean-Pierre Serre : Bon.

Alain Connes : J'ai entendu ça, j'ai entendu ça récemment.

Jean-Pierre Serre : Bon, écoute, on ne m'a pas demandé.

Alain Connes : Non, non, bon, mais enfin, bon, je veux dire, il vaut mieux se tenir à l'écart de ça. Mais si tu veux, c'est vrai que moi, j'ai quand-même, j'ai quand-même regretté que les passages vraiment intéressants, parce qu'il y a des passages intéressants, soient inaccessibles.

Jean-Pierre Serre : Alors, c'est quand-même difficile d'extraire, alors, ça m'est arrivé, j'ai extrait 3 pages, sur les motifs, tu sais, j'ai écrit quelque chose sur les motifs, et j'ai recopié les 3 à 4 pages de lui, splendides !

Alain Connes : Oui, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Splendides, et où il n'engueule personne, il ne dit pas de mal de quelqu'un, et j'ai eu son autorisation.

Alain Connes : Tu as eu son autorisation ?

Jean-Pierre Serre : A l'époque.

Alain Connes : C'était pas trivial d'avoir son autorisation. Et tu sais ce qui s'est produit, personne ne le sait ça, je ne sais pas si je devrais en parler mais bon.

Jean-Pierre Serre : Si, tu peux en parler.

Alain Connes : Ce qui s'est produit, au 50ème anniversaire de l'IHES, c'était un peu avant, c'était au mois de septembre.

Jean-Pierre Serre : C'était quand, ça, le cinquantième anniversaire de l'IHES ?

Alain Connes : ben, c'était il y a 10 ans, donc, c'était en 2008, l'année de la mort de Cartan, il y a 10 ans. Et au mois de septembre, Grothendieck a écrit à la bibliothécaire de l'IHES pour lui demander des livres.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, j'avais entendu parler de ça.

Alain Connes : Tu es au courant de ça ?

Jean-Pierre Serre : Non, je ne suis pas au courant, mais j'avais entendu parler de quelque chose comme ça. Et alors, on lui a envoyé ces livres, ou pas ?

Alain Connes : Non non, il s'est fait, malheureusement, ça a été malencontreux, que la bibliothécaire était en vacances à ce moment-là. Donc, la lettre de Grothendieck n'a pas eu de réponse, bon, n'a pas eu de réponse immédiate.

Jean-Pierre Serre : Mais enfin, elle va rentrer de vacances au bout d'un certain temps quand-même.

Alain Connes : Oui, bon, mais il s'est un peu impatienté et donc il a écrit au directeur.

Jean-Pierre Serre : Oui, d'accord, en effet, pourquoi pas ?

Alain Connes : Pourquoi pas ? Il se fait que le directeur était absent à ce moment-là...

Jean-Pierre Serre : Aïe !

Alain Connes : Et qu'à ce moment-là, la personne qui a répondu à Grothendieck n'était pas le directeur, enfin, si tu veux, c'était... Alors là, il a commencé à y avoir un embrouillaminis parce que finalement la réponse était un peu une réponse un peu générique, si tu veux, en disant que bon, etc. Et

là, le ton est monté.

Jean-Pierre Serre : En disant que c'était pas possible, quoi.

Alain Connes : Pas en disant que c'était pas possible, mais en disant que, pfff, peut-être y aurait des délais, enfin, etc. Enfin...

Jean-Pierre Serre : Bon, enfin, c'était pas ce qu'il voulait, quoi.

Alain Connes : Enfin, c'était pas ce qu'il voulait, donc le ton est monté. Et Grothendieck a écrit une lettre beaucoup plus virulente comme il était capable de le faire...

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Oui, plus énergique, oui, déjà qu'il est énergique par nature.

Alain Connes : Après, bon, le directeur était rentré et le directeur a essayé de répondre.

Jean-Pierre Serre : Qui c'était le directeur à l'époque ?

Alain Connes : C'était Jean-Pierre Bourguignon, qui était un excellent directeur.

Jean-Pierre Serre : Bourguignon, qui sait arranger les choses.

Alain Connes : Oui, oui, bien sûr, alors il a essayé d'arranger les choses, en expliquant que bon, il était absent, etc. Mais le ton est monté. Et Grothendieck a en fait téléphoné à Lafforgue, à Laurent Lafforgue, chez lui. Alors Lafforgue est un admirateur de Grothendieck absolument inconditionnel comme tu sais, il a sa photo sur son bureau, etc. Et un jour, Laurent Lafforgue était rentré chez lui, le téléphone sonne et il entend une voix !

Jean-Pierre Serre : Mais, qu'il ne connaissait pas... !

Alain Connes : Mais bien sûr que non ! Et alors là...

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Ah, il a cru que c'était un canular ?

Alain Connes : Non, non, non, non, non, il était absolument abasourdi parce qu'il entend, au téléphone : "C'est Alexandre Grothendieck." Donc évidemment, et alors là...

(Rires)

Alain Connes : ... ce que Grothendieck lui a demandé, il lui a demandé de transmettre à tous les membres du Conseil Scientifique, à l'époque, je faisais partie du Conseil Scientifique, une copie de ses lettres, et de l'échange qui avait eu lieu. Et c'est là que j'ai appris que Grothendieck était réfugié, je savais pas où il était, je n'avais aucune idée d'où il était...

Jean-Pierre Serre : Il était déjà dans les Pyrénées, à ce moment-là, oui ?

Alain Connes : Bien sûr, il était dans les Pyrénées depuis 90, donc là, on était en 2008, hein, on était en 2008 déjà. Depuis, je pense 91 ou 92, il était déjà dans les Pyrénées.

Jean-Pierre Serre : Il était déjà à Lasserre, ou un endroit comme ça ?

Alain Connes : Peut-être, écoute, tu vas rigoler : moi, j'ai pensé que c'était pas un hasard...

(Rires)

Alain Connes : Si l'endroit où Grothendieck s'était réfugié...

Jean-Pierre Serre : Peut-être, en tout cas, c'est joli...

Alain Connes : L'endroit s'appelait Lasserre. Parce que, je veux dire dans *Récoltes et Semailles*, il y a tout un développement, sur le yin et le yang, etc., et sur l'idée que Grothendieck, justement, a un côté féminin dans son

approche des mathématiques, qui est pas complètement dénuée de sens, hein, je veux dire, et alors, le fait qu'il soit réfugié...

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est ça qui est curieux, effectivement, ça peut intéresser qu'il considérait qu'il avait un esprit féminin en maths, et que moi, j'avais un esprit masculin. Alors que moi, j'ai jamais connu quelqu'un d'aussi masculin que lui, quoi, c'était...

Alain Connes : D'aussi, tu veux dire...

Jean-Pierre Serre : D'aussi, ah, c'était incroyable !

Alain Connes : Ah ! Et dans la correspondance, c'est clair, aussi, quand-même, germanique !

Jean-Pierre Serre : Il se considérait lui comme à caractère féminin, et moi comme au contraire, à caractère masculin.

Alain Connes : Tout à fait. Pour lui, toi, tu étais le prototype du caractère masculin.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui.

Alain Connes : Bon mais tout ça, c'est expliqué en grand détail dans *Récoltes et Semailles*, moi, ça m'a beaucoup amusé.

Jean-Pierre Serre : Ca, c'est rigolo quand même, mais non, mais ça, il le prenait au sérieux, ça.

Alain Connes : Ah, il le prenait au sérieux.

Jean-Pierre Serre : Au contraire, il le prenait au sérieux. D'ailleurs, c'est une caractéristique de Grothendieck, il prenait *tout* au sérieux.

Alain Connes : Et d'ailleurs, c'est une question que je voulais te poser : que finalement, ce qui ressort beaucoup de ses écrits, c'est qu'on n'a pas l'impression qu'il a un sens de l'humour.

Jean-Pierre Serre : Non ! Non, non, non, il a un sens de... un espèce de devoir intellectuel, de pousser les idées jusqu'au maximum, de les approfondir, c'était une grande honnêteté intellectuelle de Grothendieck.

Alain Connes : Oui, mais pas de sens de l'humour, pas de sens de l'humour.

Jean-Pierre Serre : Ah non, c'est pas compatible.

Alain Connes : C'est pas compatible, pas de sens de l'humour.

Jean-Pierre Serre : J'imagine pas, je ne me souviens pas de l'avoir entendu rigoler, ou peut-être pour d'autres choses, mais...

Alain Connes : Tu dis c'est pas compatible mais, en voyant l'interview de Cartan, on ne peut pas ne pas être frappé par le fait que Cartan avait un sens de l'humour incroyable, tout en étant très sérieux.

Jean-Pierre Serre : Oui, mais Cartan n'aurait pas pu faire l'œuvre de Grothendieck, c'est évident, avec un caractère comme ça, moi non plus d'ailleurs.

Alain Connes : Oui, oui, je comprends ce que tu veux dire.

Jean-Pierre Serre : Il y a une certaine, je ne sais pas comment dire, il y a une force, ça demande une force énorme. Et ça n'est pas compatible avec rigoler.

(Rires d'Alain Connes)

Ci-dessous un extrait des Leçons de solfège et de piano de Pascal Quignard (p.27, aux éditions Arléa, 2013) (DV, 18/1/2014)

L'étude est à l'homme adulte ce que le jeu est à l'enfant. C'est la plus concentrée des passions. C'est la moins décevante des habitudes, ou des attentions, ou des accoutumances, ou des drogues. L'âme s'évade. Les maux du corps s'oublient. L'identité personnelle se dissout. On ne voit pas le temps passer. On s'envole dans le ciel du temps. Seule la faim fait lever la tête et ramène au monde.
Il est midi.
Il est déjà sept heures du soir.

[...]

Primo Levi s'en prit à Paul Celan avec violence : "Ecrire, c'est transmettre, dit-il. Ce n'est pas chiffrer le message et jeter la clé dans les buissons." Mais Primo Levi se trompait. Ecrire, ce n'est pas transmettre. C'est appeler. Jeter la clé est encore appeler une main après soi qui cherche.