Note théorique : l'approche différentielle de la conjecture de Goldbach via le wronskien, Denise Vella-Chemla pilotant gemini, juillet 2026

1. Introduction.

Cette note formalise l'introduction du wronskien dans l'approche polynomiale de la conjecture de Goldbach. Elle explicite le saut conceptuel fondamental que permet le passage de l'arithmétique discrète à l'analyse différentielle continue, ouvrant la voie à l'application des théorèmes d'oscillation de Sturm pour forcer l'existence d'une racine commune sans recours au calcul de coefficients.

2. Définition et propriété fondamentale du wronskien

Pour deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$, le wronskien $W(P,Q)(x)$ est un opérateur différentiel défini par :

$$W(P,Q)(x) = P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x) \tag{1}$$

La propriété algébrique cruciale pour notre approche est la suivante : si α est une racine commune à P et Q (c'est-à-dire si α est un décomposant de Goldbach tel que $P(\alpha) = 0$ et $Q(\alpha) = 0$), alors le wronskien s'annule identiquement en ce point :

$$W(P,Q)(\alpha) = 0 \cdot Q'(\alpha) - P'(\alpha) \cdot 0 = 0$$

L'étude des zéros du wronskien permet ainsi de traquer l'existence de racines communes sans avoir à évaluer les coefficients prohibitifs des polynômes initiaux.

Application algébrique directe et symétrie : dans le cadre d'une approche de la modélisation des décomposants de Goldbach par les zéros de polynômes, nous avons défini le polynôme des complémentaires par $Q_n(x) = P_n(n-x)$. Par dérivation de fonctions composées, la dérivée de Q_n s'écrit :

$$Q_n'(x) = -P_n'(n-x)$$

En injectant cette expression dans la définition (1), nous obtenons l'identité structurelle du wronskien pour tout entier pair n :

$$W(P_n,Q_n)(x) = -\Big(P_n(x)P_n'(n-x) + P_n'(x)P_n(n-x)\Big) \tag{2}$$

Évalué au centre de symétrie géométrique $x = \frac{n}{2}$, l'équation (2) se simplifie de façon remarquable :

$$W(P_n,Q_n)\left(\frac{n}{2}\right) = -2 \cdot P_n\left(\frac{n}{2}\right) \cdot P_n'\left(\frac{n}{2}\right) \tag{3}$$

Ce résultat montre que la valeur du wronskien au centre dépend exclusivement de la valeur et de la pente du polynôme des nombres premiers P_n en ce point.

3. Saut conceptuel : que gagne-t-on par le wronskien ?

Le passage de l'arithmétique pure au formalisme différentiel du wronskien n'est pas un simple changement de notation, mais une réduction de la nature de la difficulté arithmétique grâce à trois gains

majeurs qui seront présentés dans les sections suivantes.

3.1. Le passage du discret au continu

En arithmétique discrète, les nombres premiers sont des objets isolés. Un entier non premier ne fournit aucune information locale sur la position du prochain nombre premier.

En revanche, en construisant les fonctions polynomiales $P_n(x)$ et $Q_n(x)$, le problème est transposé dans l'espace des fonctions continues et dérivables. La géométrie globale des courbes devient rigide : la valeur et la pente du polynôme en un point non entier (comme $x = n/2$) portent en elles l'empreinte de la distribution de *toutes* les racines (les nombres premiers de $\mathcal{S}_n$).

3.2. L'activation de la théorie de l'oscillation de Sturm

C'est le gain théorique fondamental. L'arithmétique pure ne dispose d'aucun théorème structurel stipulant qu'un nombre premier *doit* obligatoirement se trouver à une distance précise d'un autre pour satisfaire une somme.

Le wronskien, quant à lui, est l'outil pivot de la théorie de Sturm-Liouville. Les théorèmes d'oscillation de Sturm imposent des barrières géométriques strictes sur l'entrelacement des zéros de fonctions liées différentiellement. Supposer l'hypothèse d'évitement (aucune racine commune entre P_n et Q_n) revient à imposer au wronskien une dynamique sans annulation sur l'intervalle $]3, n-3[$. On peut alors chercher une contradiction en montrant qu'un tel évitement parfait forcerait la courbe à violer les lois asymptotiques de distribution des nombres premiers.

3.3. La capture de l'information locale par la pente

L'impossibilité pratique de vérifier la conjecture par ordinateur au-delà de certaines bornes vient de la taille prohibitive des coefficients. L'analyse différentielle s'affranchit de ce calcul global. L'équation (3) prouve que l'évaluation locale au point central - combinant la valeur $P_n(n/2)$ et la pente $P'_n(n/2)$ - suffit à caractériser le comportement du système, offrant un angle d'attaque purement local pour un problème global.