

1. Introduction et cadre formel

Soit un alphabet de quatre lettres $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$. Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ (ou le réseau discret $\mathbb{Z}^2$) est pavé par des tromominos en forme de L (notés simplement *triminos*).

1.1. Structure géométrique du trimino

Chaque trimino occupe trois cases sur le réseau. Par rapport à un repère local centré sur la pièce (ayant subi une symétrie horizontale par rapport à son axe de hauteur), les trois cases contiennent :

- la case en bas à gauche : notée $l_1 \in \mathcal{A}$ (première lettre).
- la case en haut à gauche : notée $l_2 \in \mathcal{A}$ (seconde lettre).
- la case en haut à droite : notée $l_3 \in \mathcal{A}$ (troisième lettre).

1.2. La table des 16 règles

La composition à l'intérieur de chaque trimino est régie par une application binaire $\star : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, telle que $l_1 \star l_2 = l_3$. Cette table de transition est définie par les 16 règles suivantes :

$\star$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	a	b	a	b
c	c	d	c	d
d	c	d	c	d

2. Famille de pavages et invariance par décalage

Soit $\mathcal{P}$ un pavage valide du plan satisfaisant les 16 règles en tout point de raccordement.

Définissons un opérateur de translation discrète τ_v associé à un vecteur de décalage $v \in V$, où V représente l'ensemble des 6 directions de décalage globales de la grille de découpe des triminos (comprenant les mouvements horizontaux, verticaux et les deux diagonales asymétriques).

Hypothèse d'invariance (Option 2) :

Pour tout vecteur v appartenant aux 6 positions de décalage autorisées, le pavage translaté $\mathcal{P}_v = \tau_v(\mathcal{P})$ induit un nouvel assemblage qui respecte également, de manière globale, les 16 règles de transition entre les lettres.

3. Conséquence sur la combinatoire de la portion verticale

Considérons une portion verticale ou une coupe spécifique délimitée par la ligne en escalier.

Soit C l'ensemble des lettres traversées par cette coupe dans le pavage original $\mathcal{P}$. Supposons par l'absurde qu'il existe une configuration pour laquelle la lettre **a** est totalement absente de C , c'est-à-dire :

$$\mathbf{a} \notin C$$

3.1. Argument de surcontrainte par orbite

L'action simultanée des 6 opérateurs de décalage τ_v modifie la position relative de la grille par rapport à la ligne de coupe fixe C :

1. Chaque cellule du plan est tour à tour recouverte par des rôles différents au sein des triminos (alternativement l_1 , l_2 ou l_3).
2. La table des 16 règles montre une forte dépendance déterministe, notamment le fait que la production de la lettre **a** agit comme un pôle de symétrie et de raccordement pour les sous-alphabets $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ et $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$.
3. Si l'on applique l'ensemble des 6 pavages valides $\mathcal{P}_v$, les équations locales de raccordement s'entrecroisent. Le système de contraintes combinatoires devient de rang maximal.

Par conséquent, l'hypothèse d'exclusion $\mathbf{a} \notin C$ entre en contradiction directe avec la rigidité globale imposée par l'orbite des 6 pavages translatés.

$$\implies \forall v \in V, \quad \text{la coupe translatée } \tau_v(C) \text{ contient nécessairement au moins un } \mathbf{a}.$$