

1. Introduction et formalisation du langage

Le treillis à 16 règles permet de s'extraire de l'arithmétique pure pour traduire la décomposition de Goldbach en un **langage bidimensionnel contraint** sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$.

Pour un entier pair n donné, chaque couple d'impairs (p, q) tel que $p + q = n$ (avec $3 \leq p \leq n/2$) est projeté dans l'un des quatre états exclusifs de primalité :

- **a** : premier + premier (succès de la conjecture de Goldbach)
- **b** : composé + premier
- **c** : premier + composé
- **d** : composé + composé (défaut absolu de la conjecture)

D'un point de vue logique, la condition de succès pour l'entier n est l'existence d'au moins un décomposant de type **a** situé **avant la moitié de la ligne** ($p \leq n/2$). Le complémentaire strict d'un succès sur cette demi-ligne utile est l'union des trois autres états : $\text{Non}(a) = b \cup c \cup d$.

2. Structure de bande rectangulaire

Comme mis en évidence par claudé, les 16 règles déterministes de transition définissent de façon exacte une **bande rectangulaire** (*rectangular band*, voir <https://ncatlab.org/nlab/show/rectangular+band>). En représentant chaque lettre par ses composantes de primalité gauche et droite, la règle pour former une cellule enfant à partir de deux parents horizontaux juxtaposés X et Y s'écrit :

$$\text{enfant}(X, Y) = (\text{gauche}(X), \text{droite}(Y))$$

Cette structure symbolique agit comme un opérateur de double décalage (*shift*) géométrique : la composante gauche glisse vers la droite et la composante droite glisse vers la gauche à chaque descente d'une ligne dans le treillis.

3. Modélisation de l'entropie globale de Connes

Selon l'identité géométrique d'Alain Connes, l'addition de deux grandeurs positives est liée de manière exacte au maximum d'une fonction d'entropie :

$$\log(p + q) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ \alpha \log p + (1 - \alpha) \log q + S(\alpha) \}$$

avec l'entropie de Shannon-Connes définie par :

$$S(x) = -x \ln(x) - (1 - x) \ln(1 - x)$$

Sur la première ligne du treillis (ligne 0), chaque case i est initialisée par le profil de probabilités asymptotiques issu du Théorème des Nombres Premiers :

$$\text{gauche}_i = \alpha_i = \frac{1}{\ln p_i}, \quad \text{droite}_i = \beta_i = \frac{1}{\ln q_i}$$

Pour étudier le système globalement, nous définissons l'**entropie globale de la demi-ligne**, notée $\mathcal{H}(L)$, comme la somme des entropies de toutes ses composantes sur la zone utile :

$$\mathcal{H}(L) = \sum_{i=1}^m [S(\text{gauche}_i) + S(\text{droite}_i)]$$

où m est la longueur de la demi-ligne ($p \leq n/2$).

4. Géométrisation : cinématique des trajectoires sur l'arche

La fonction $S(\alpha)$ trace une arche symétrique en cloche culminant à l'abscisse critique $\alpha = 0,5$. L'initialisation arithmétique positionne deux familles de points sur cette arche : les coordonnées gauches $A_i = (\alpha_i, S(\alpha_i))$ et les coordonnées droites $B_i = (\beta_i, S(\beta_i))$.

Sous l'action de la bande rectangulaire, la cinématique des points est strictement contrainte :

- les points gauches A_i demeurent ancrés à leurs coordonnées verticales (fixité des p).
- les points droits B_i subissent un glissement continu vers la gauche à chaque descente de ligne (décalage de q).

L'automate agit comme un **métier à tisser mécanique** qui force les points mobiles à balayer l'espace devant les points fixes. Le "trou" informationnel identifié à l'extrême bord de chaque nouvelle ligne descendante réinjecte continuellement de nouveaux candidats issus de la loi en $\frac{1}{\ln x}$.

5. Loi d'évolution fondamentale

En calculant la différence d'entropie globale entre une ligne parente L et sa ligne enfant L' , on obtient la relation d'évolution exacte :

$$\mathcal{H}(L') = \mathcal{H}(L) - [S(\text{gauche}_m) + S(\text{droite}_1)]$$

Cette équation prouve que la perte d'entropie subie par le treillis lors de la descente est **strictement locale** : elle ne dépend que des extrémités de la ligne précédente (gauche_m et droite_1). Tout le cœur de la demi-ligne conserve intacte sa structure informationnelle arithmétique.

6. Statut mathématique actuel de la présente piste de recherche

Afin de situer scientifiquement la portée de cette note, il convient de distinguer ce qui est démontré de ce qui demeure une conjecture ouverte :

1. **ce qui est rigoureusement prouvé** : l’existence d’un invariant et d’une loi de conservation locale de l’entropie au cœur du treillis. La bande rectangulaire n’est pas “aveugle” aux densités de départ ; elle en fige la structure. Les trajectoires sur l’arche de Connes décrivent un balayage topologique continu.
2. **ce qui reste à prouver (le chaînon de Goldbach)** : démontrer que la perte cumulée d’entropie aux frontières de la ligne est strictement insuffisante pour vider la demi-ligne de son énergie initiale avant la borne critique du milieu. Cette barrière énergétique forcerait mathématiquement le croisement des trajectoires au sommet de la cloche, garantissant l’apparition d’au moins un état **a** (premier/premier).

6.1. Formulation variationnelle du chaînon manquant

En exploitant les bornes effectives de Rosser et Schoenfeld (1962), l’énergie initiale croît comme $O\left(\frac{n \ln \ln n}{\ln n}\right)$, tandis que la fuite aux frontières induite par la bande rectangulaire après k étapes est minorée par $2k \ln 2$.

Le trou théorique actuel réside dans la transition locale-globale : il s’agit de démontrer par l’inégalité de Jensen que la contrainte structurelle $\text{Non}(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \cup \mathbf{c} \cup \mathbf{d}$ sous l’opérateur de double shift macroscopique abaisse le plafond d’entropie admissible en dessous de la barrière de conservation du treillis. Nous laissons aux analystes le soin de formaliser ce couplage entre l’ergodicité du shift et les minoration effectives de Chebychev.

Références

- [1] <https://denisevellachemla.eu/panier-marseille-Denise-et-Jacques-Chemla.pdf> .
- [2] <https://denisevellachemla.eu/entropie-Connes-Goldbach-panier-marseille-claude-jade-dvc.pdf> .
- [3] <https://denisevellachemla.eu/entropie-analyse-bibliographie-Connes-Kontsevich-log-un-et-demi-claude-dvc.pdf> .
- [4] <https://denisevellachemla.eu/p10-treillis-lattice-claude-dvc-20260708.pdf> .
- [5] <https://denisevellachemla.eu/v8-gemini-analyse-cogitations-goldbach-dvc.pdf> .
- [6] <https://denisevellachemla.eu/s2-preuve-mistral-16-regles-refutation-claude-dvc-20260711.pdf> .
- [7] <https://denisevellachemla.eu/s7-bilan-choix-piste-prioritaire-claude-dvc-20260711.pdf> .
- [8] <https://denisevellachemla.eu/Rosser-Schoenfeld-1962.pdf> .

7. Annexe : programme de simulation entropique du treillis

Le programme python ci-dessous permet de mesurer la conservation de l'entropie de Connes et de calculer la probabilité cumulée d'apparition d'au moins un état a (succès de Goldbach) avant la borne critique de la moitié de l'entier n .

```
import numpy as np

def S_connes(alpha):
    """Calcule l'entropie locale S(alpha) d'Alain Connes."""
    if alpha <= 0.0 or alpha >= 1.0:
        return 0.0
    return -alpha * np.log(alpha) - (1.0 - alpha) * np.log(1.0 - alpha)

def simuler_entropie_treillis(N_pair, etapes):
    # On isole les candidats impairs p avant la moitié (p <= N/2)
    p_valeurs = np.arange(3, int(N_pair // 2) + 1, 2)
    taille_ligne = len(p_valeurs)

    if taille_ligne == 0:
        print("Entier trop petit.")
        return

    # 1. INITIALISATION DE LA LIGNE 0 (Th or me des Nombres Premiers)
    gauche = np.zeros(taille_ligne) # probabilit pour p
    droite = np.zeros(taille_ligne) # probabilit pour q = N - p

    for i, p in enumerate(p_valeurs):
        q = N_pair - p
        gauche[i] = 1.0 / np.log(p)
        droite[i] = 1.0 / np.log(q)

    # Calcul de l'entropie globale initiale (Ligne 0)
    # C'est la somme des entropies de chaque composante sur la demi-ligne
    entropie_globale = sum(S_connes(gauche[i])
                          + S_connes(droite[i])
                          for i in range(taille_ligne))

    print(f"== Analyse Dynamique pour N = {N_pair} ==")
    print(f"Ligne Initiale 0 (Taille {taille_ligne}) :")
    print(f" -> Entropie Globale de Connes : {entropie_globale:.4f}\n")

    # 2. DESCENTE DYNAMIQUE (Application de la bande rectangulaire)
    courant_gauche = gauche
    courant_droite = droite

    for etape in range(1, etapes + 1):
        if len(courant_gauche) <= 1:
            print("Le treillis est devenu trop court pour continuer.")
            break

        # Cr ation de la ligne enfant (sa taille diminue de 1 chaque pas)
        prochain_gauche = np.zeros(len(courant_gauche) - 1)
        prochain_droite = np.zeros(len(courant_droite) - 1)
```

```

for i in range(len(prochain_gauche)):
    # Rgle de la bande rectangulaire : enfant(X,Y) = (gauche(X), droite(Y))
    prochain_gauche[i] = courant_gauche[i]      # H ritage de X
    prochain_droite[i] = courant_droite[i + 1]   # H ritage de Y

    courant_gauche = prochain_gauche
    courant_droite = prochain_droite

# Recalcul de l'entropie globale sur la nouvelle ligne
entropie_globale = sum(S_connes(courant_gauche[i])
                       + S_connes(courant_droite[i])
                       for i in range(len(courant_gauche)))

# Calcul de la probabilit cumulee de trouver au moins un 'a'
prob_a = courant_gauche * courant_droite
prob_au_moins_un_a = 1.0 - np.prod(1.0 - prob_a)

print(f"Ligne Descendante {etape} (Taille {len(courant_gauche)}) :")
print(f"  -> Entropie Globale de Connes : {entropie_globale:.4f}")
print(f"  -> Probabilit d'avoir AU MOINS un 'a' :
        {prob_au_moins_un_a * 100:.2f} %")

# Lanons l'analyse pour N = 5000 sur 5 tapes de descente
simuler_entropie_treillis(N_pair=5000, etapes=5)

```

Résultat d'exécution du programme ci-dessus

```

== Analyse Dynamique pour N = 5000 ==
Ligne Initiale 0 (Taille 1249) :
  -> Entropie Globale de Connes : 987.5847

Ligne Descendante 1 (Taille 1248) :
  -> Entropie Globale de Connes : 986.8408
  -> Probabilit d'avoir AU MOINS un 'a' : 100.00 %
Ligne Descendante 2 (Taille 1247) :
  -> Entropie Globale de Connes : 986.0968
  -> Probabilit d'avoir AU MOINS un 'a' : 100.00 %
Ligne Descendante 3 (Taille 1246) :
  -> Entropie Globale de Connes : 985.3527
  -> Probabilit d'avoir AU MOINS un 'a' : 100.00 %
Ligne Descendante 4 (Taille 1245) :
  -> Entropie Globale de Connes : 984.6087
  -> Probabilit d'avoir AU MOINS un 'a' : 100.00 %
Ligne Descendante 5 (Taille 1244) :
  -> Entropie Globale de Connes : 983.8646
  -> Probabilit d'avoir AU MOINS un 'a' : 100.00 %

```