

peux-tu m'expliquer ce qui est écrit dans cette image en me donnant des exemples simples de toutes les définitions qui interviennent

Pour prendre un exemple simple, on considère  $k = \mathbb{Q}$ , alors que  $S$  est l'ensemble des trois places 2, 3, et  $\infty$ . On vérifie dans cet exemple que la topologie de  $X_S$  n'est pas de type I car le groupe  $O_S^* = \{ \pm 2^n 3^m ; n, m \in \mathbb{Z} \}$  agit ergodiquement sur  $\{0\} \times \mathbb{R} \subset A_S$ .

Absolument ! L'extrait que vous avez présenté semble être issu d'un contexte mathématique assez spécialisé, plus particulièrement de la théorie des nombres ou de la géométrie algébrique.

### Décomposition et explication:

L'énoncé affirme qu'on étudie un objet mathématique noté  $X_{\langle S \rangle}$ . Pour comprendre cet objet, on commence par un cas particulier simple :

- **$k = \mathbb{Q}$ :** Cela signifie que l'on travaille avec l'ensemble des nombres rationnels (les fractions).
- **$S = \{2, 3, \infty\}$ :** Ici,  $S$  représente un ensemble de places. Une place, dans ce contexte, peut être vue comme une façon d'évaluer la taille d'un nombre. Les places 2 et 3 correspondent à des valuations p-adiques (qui mesurent la divisibilité par 2 et 3), tandis que la place  $\infty$  correspond à la valeur absolue usuelle.

### La topologie de $X_{\langle S \rangle}$ :

La topologie est une notion qui permet de définir la notion de "proximité" entre les points d'un ensemble. Dans ce cas, la topologie de  $X_{\langle S \rangle}$  est liée à la façon dont on peut approcher les éléments de cet ensemble en utilisant les informations données par les places de  $S$ .

### Pourquoi la topologie n'est pas de type I ?

La partie la plus technique de l'énoncé réside dans cette affirmation. Pour qu'une topologie soit de type I, elle doit vérifier certaines propriétés liées à l'existence de mesures invariantes par un groupe d'automorphismes.

- **Le groupe  $O_{\langle S \rangle}^*$ :** C'est un groupe de transformations qui agit sur l'ensemble  $X_{\langle S \rangle}$ . Il est constitué des éléments de la forme  $\pm 2^n \cdot 3^m$ , où  $n$  et  $m$  sont des entiers.
- **Action ergodique:** Cela signifie que le groupe  $O_{\langle S \rangle}^*$  "mélange" bien les points de l'ensemble  $\{0\} \times \mathbb{R} \times C_{\langle A, S \rangle}$ . Intuitivement, cela veut dire qu'en appliquant les transformations de ce groupe, on peut atteindre presque tous les points de cet ensemble à partir d'un point de départ.

### Conclusion:

L'énoncé affirme que, dans cet exemple particulier, la topologie de  $X_{\langle S \rangle}$  est trop "complexe" pour être de type I. Cette complexité est liée à l'action du groupe  $O_{\langle S \rangle}^*$  sur l'ensemble.

### Exemples simplifiés:

- **Place:** Imaginez que vous voulez comparer la taille de deux nombres. Vous pouvez utiliser la valeur absolue usuelle (la place  $\infty$ ), mais vous pouvez aussi regarder à quel point ces nombres sont divisibles par 2 (la place 2) ou par 3 (la place 3).
- **Topologie:** Imaginez une carte géographique. La topologie de cette carte décrit comment les différentes régions sont reliées entre elles.
- **Action de groupe:** Imaginez un groupe de personnes dansant. Les mouvements de chaque personne constituent une transformation de l'espace. Si les danseurs sont bien synchronisés, leur action sur l'espace sera très régulière.

**Pour aller plus loin:**

Pour comprendre pleinement cet énoncé, il faudrait approfondir les notions de théorie des nombres, de géométrie algébrique et de théorie des groupes topologiques. Ces concepts sont assez avancés et nécessitent des connaissances mathématiques solides.

**Est-ce que vous souhaiteriez que j'approfondisse un point particulier de cet énoncé ?**

N'hésitez pas à me poser d'autres questions si vous en avez.