

Bonjour, Dans le livre arbres et amalgames de Serre, je ne reconnais pas tout à fait les arbres mathématiques : je suis informaticienne et tout ce que j'ai appris sur les arbres (parcours, etc) ne me semble pas figurer dans le livre de Serre. Le chapitre qui m'intéresse est le chapitre 6, au sujet des points fixes dans les arbres. Dans l'introduction, Serre dit qu'un groupe par exemple $SL_3(\mathbb{Z})$ ou $SP_4(\mathbb{Z})$ agissant sur un arbre a un point fixe. Peux-tu m'expliquer comment on fait agir un groupe sur un arbre ? Avec des petits exemples. J'ai un grid-graph de 4 sur 4, qui est donc un arbre avec racine en haut à gauche, et puits en bas à droite, fais agir un petit groupe dessus.

Bonjour ! C'est tout à fait normal d'être un peu déstabilisée. En informatique, on voit souvent l'arbre comme une **structure de données** (hiérarchique, orientée, avec une racine). Pour Jean-Pierre Serre et les géomètres, un arbre est un **objet topologique ou combinatoire** : c'est un graphe connexe sans cycle, non orienté, et qui s'étend souvent à l'infini.

Dans le livre *Arbres, amalgames et SL_2* , l'arbre est un espace sur lequel on fait "bouger" des objets pour comprendre la structure des groupes.

1. Qu'est-ce qu'une action de groupe sur un arbre ?

Faire agir un groupe G sur un arbre X , c'est envoyer chaque élément $g \in G$ vers une **symétrie** (un automorphisme) de l'arbre.

- Si v est un sommet, $g \cdot v$ est un autre sommet.
- Si e est une arête entre u et v , alors $g \cdot e$ est une arête entre $g \cdot u$ et $g \cdot v$.
- L'action doit respecter la structure : on ne peut pas "casser" ou "plier" l'arbre, juste le faire pivoter ou refléter.

2. Le "Grid-Graph" 4x4 : Attention au piège !

Petite précision de "peer" : en théorie des graphes, une **grille (grid graph)** n'est pas un arbre car elle contient énormément de cycles (des carrés). Cependant, si vous la voyez comme un arbre de décision (un DAG) où l'on ne peut aller qu'à droite ou en bas, cela devient un arbre en oubliant l'orientation.

Mais pour l'exemple de Serre, prenons un objet plus simple : **l'étoile à 4 branches** (un sommet central et 4 feuilles). C'est un arbre qui ressemble à une petite section de votre grille.

Exemple avec le groupe C_4 (Rotations de 90°)

Imaginons notre arbre en forme de croix : un centre O et quatre sommets $\{N, E, S, W\}$.

Le groupe $G = \{0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ\}$ agit par rotation :

- L'élément 90° envoie $N \rightarrow E$, $E \rightarrow S$, $S \rightarrow W$, $W \rightarrow N$.

- Le sommet 0 , lui, ne bouge pas : **c'est le point fixe.**

C'est exactement ce que Serre étudie : si votre groupe est "gentil" (fini, ou avec certaines propriétés algébriques), il y a forcément un sommet ou une arête qui reste immobile malgré l'action du groupe.

3. Pourquoi $SL_3(\mathbb{Z})$?

Serre s'intéresse à des groupes de matrices. Les matrices agissent naturellement sur des vecteurs. Pour $SL_2(\mathbb{Q})$, il construit un arbre dont les sommets sont des "réseaux" (des sortes de grilles de coordonnées). Une matrice agit sur une grille en la déformant ou en la déplaçant vers une autre grille.

Le théorème du point fixe dit que si le groupe est "trop gros" ou a certaines propriétés (comme la **Propriété (FA)** de Serre), il ne peut pas faire glisser l'arbre indéfiniment : il finit par stabiliser un point.

Résumé pour l'informaticienne

- **Arbre (Serre)** : Un terrain de jeu géométrique (non orienté).
- **Action** : Une permutation des sommets qui préserve le voisinage.
- **Point fixe** : Un sommet v tel que pour tout $g \in G$, $g \cdot v = v$.

Souhaitez-vous que je vous montre mathématiquement comment une matrice simple comme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ agit sur un arbre binaire infini ?

C'est là que réside toute la subtilité du passage de l'informatique à la théorie des groupes de Serre ! Je dois faire une petite mise au point amicale : **on ne peut pas vraiment faire agir $SL_3(\mathbb{Z})$ sur une grille 4×4 orientée.**

Voici pourquoi, et comment on peut quand même visualiser l'idée avec un exemple plus adapté.

DCV : oui, ma grille est orientée (gauche-droite, haut-bas). Merci de faire agir $SL_3(\mathbb{Z})$ sur une grille 4×4 pour voir.

1. Pourquoi la grille 4×4 "bloque" ?

En informatique, votre grille est **rigide** : elle a une racine (en haut à gauche) et une fin (en bas à droite).

- **L'orientation** : Si un groupe agit sur un arbre orienté, il doit respecter les flèches. Or, une action de groupe cherche souvent à "mélanger" ou "tourner" les sommets. Si vous tournez la grille de 90° , les flèches ne pointent plus dans le bon sens.
- **La taille du groupe** : $SL_3(\mathbb{Z})$ est un groupe **infini** et très complexe. Une grille 4×4 n'a que 16 sommets. On ne peut pas "faire rentrer" un

groupe infini dans un ensemble fini de permutations sans perdre presque toute l'information (le groupe agirait de façon triviale, en ne bougeant rien du tout).

2. L'exemple de la Matrice d'Échange (sur un arbre plus simple)

Pour voir une action "à la Serre", oublions la grille un instant et prenons un **arbre en étoile** à 3 branches (le centre O et les feuilles A, B, C).

Prenons une matrice de $SL_3(\mathbb{Z})$ qui permute les axes de coordonnées, par exemple :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice correspond à une permutation circulaire des vecteurs de base de $\mathbb{R}^3$. Si on identifie les branches de notre arbre aux axes x, y, z :

- L'action de M envoie la branche A sur B , B sur C , et C sur A .
- Le centre O (l'origine) ne bouge pas. **C'est le point fixe.**

3. Le lien avec $SL_3(\mathbb{Z})$ et la "Propriété (FA)"

Le point crucial du chapitre 6 de Serre est le suivant :

Des groupes comme $SL_3(\mathbb{Z})$ sont "trop rigides" pour agir sur un arbre sans laisser de point fixe. C'est ce qu'on appelle la **Propriété (FA)**.

Si vous essayez de forcer $SL_3(\mathbb{Z})$ à agir sur un arbre (même votre grille, si on enlève les flèches) :

1. Soit il agit "bêtement" (il ne fait rien bouger).
2. Soit il fait tourner l'arbre autour d'un sommet central.
3. Mais il ne pourra **jamais** agir par translation (faire glisser tout l'arbre à l'infini) comme le ferait le groupe des entiers $\mathbb{Z}$ sur une ligne droite infinie.

Pour une informaticienne : L'Analogie du "Load Balancing"

Imaginez que votre arbre soit un réseau de serveurs.

- Une action de groupe, c'est un **algorithme de réadressage** qui déplace les tâches d'un nœud à l'autre tout en gardant la topologie intacte.
- Le théorème de Serre dit : pour certains protocoles très complexes ($SL_3(\mathbb{Z})$), il y aura toujours au moins un serveur (ou une connexion) qui devra rester absolument immobile pour maintenir la cohérence du système.

Voulez-vous que nous regardions comment construire l'arbre de Bruhat-Tits pour $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, qui est l'exemple "star" du livre de Serre ? C'est là que l'on voit vraiment l'algèbre devenir un arbre.

Quel genre de groupe pourrait agir sur un grid-graph (une grille en français) ?

Pour agir sur une grille (un *grid-graph*), il faut un groupe qui respecte la géométrie du "quadrillage". En mathématiques, on appelle cela le **groupe d'automorphismes** du graphe.

Puisque vous êtes informaticienne, voyez cela comme l'ensemble des **permutations des sommets** qui préservent la matrice d'adjacence (si deux nœuds étaient reliés, ils le restent après l'action).

Voici les types de groupes qui peuvent agir sur votre grille 4×4 :

1. Le Groupe Diédral D_4 (Symétries du Carré)

C'est le groupe le plus naturel pour une grille carrée. Il contient 8 éléments :

- **Rotations** : 0° , 90° , 180° , 270° .
- **Réflexions** : Horizontale, verticale, et les deux diagonales.

L'action : Si vous faites une rotation de 90° , le sommet "racine" $(0,0)$ se déplace en $(0,3)$.

Note de Serre : Ici, le centre de la grille (le point "vide" au milieu des 4 sommets centraux) est le **point fixe** de la rotation. Dans un arbre de Serre, le point fixe peut être un sommet ou le milieu d'une arête.

2. Le Groupe des Translations (si la grille était infinie)

Si votre grille n'était pas limitée à 4×4 mais s'étendait à l'infini dans le plan ($\mathbb{Z}^2$), le groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ agirait dessus :

- L'élément $(1, 0)$ fait glisser toute la grille d'un cran vers la droite.
- **Problème pour Serre** : Une translation sur une grille infinie n'a **aucun point fixe**. C'est pour cela que $SL_3(\mathbb{Z})$ est spécial : contrairement à $\mathbb{Z}$, il est "forcé" d'avoir un point fixe quand il agit sur un arbre.

3. Les Sous-groupes de Permutations (S_n)

Si votre grille 4×4 est orientée (haut-bas, gauche-droite) comme vous l'avez mentionné, elle perd presque toutes ses symétries.

- Une rotation de 90° inverserait les flèches (le "bas" deviendrait la "gauche").
 - Le seul groupe qui pourrait agir sur une grille **orientée** rigide est le **groupe trivial** (l'identité) : rien ne bouge sans casser l'orientation.
-

Pourquoi Serre utilise-t-il SL_2 ou SL_3 ?

Pour faire agir un groupe de matrices sur un graphe, on ne prend pas une grille fixe. On construit un graphe où **chaque sommet est lui-même une grille** (un réseau de vecteurs).

1. **Sommet A** : La grille standard $\mathbb{Z}^2$.
2. **Sommet B** : La grille étirée par une matrice.
3. **L'arête** : Relie deux grilles qui sont "presque" les mêmes.

L'action du groupe consiste alors à **sauter d'une grille à l'autre** dans cet espace géant (l'immeuble de Bruhat-Tits).

Pour aller plus loin

Si vous voulez "voir" l'action, on peut essayer de construire un petit exemple de **graphe de Cayley**. C'est un graphe qui est la représentation visuelle d'un groupe.

Souhaitez-vous que je vous montre comment dessiner le graphe de Cayley d'un petit groupe fini pour voir comment il ressemble (ou non) à votre grille ?