

Deux projections orthogonales, Denise Vella-Chemla, juin 2026.

Notre objectif est de démontrer la conjecture de Goldbach, qui énonce que tout nombre pair (≤ 6) est la somme de deux nombres premiers (impairs).

On commence par rappeler notre idée initiale : pour trouver les décomposants de Goldbach de n supérieurs ou égaux à \sqrt{n} , il suffit de cribler deux sortes de nombres :

- les nombres congrus à 0 modulo tout nombre premier inférieur ou égal à \sqrt{n} ,
- et les nombres congrus à n selon ces mêmes modules.

On fournit la démonstration qu'avait écrite Leila Schneps que cette opération de double-crible permet bien de trouver les décomposants de Goldbach de n supérieurs à \sqrt{n} .

On définit

$$E(n, p) = \{m \in 2\mathbb{N} + 1 \mid 3 \leq m \leq n/2, m \not\equiv 0 \pmod{p}, m \not\equiv n \pmod{p}\}.$$

L'intersection des ensembles $E(n, p)$ associés à tous les nombres premiers p compris entre 3 et \sqrt{n} est :

$$D(n) = \bigcap_{\substack{p \text{ premier} \\ 3 \leq p \leq \sqrt{n}}} E(n, p).$$

Montrons qu'un élément de $D(n)$ est un décomposant de Goldbach de n , i.e. montrons qu'il est nécessairement premier et que son complémentaire l'est aussi.

Lemme 1 : *Soit m un entier impair. Si m n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et \sqrt{n} alors m est premier.*

Preuve : Si m est composé, $m = pq$ où p est le plus petit nombre premier de la factorisation de m en nombres premiers et q est le produit des facteurs restants dans la factorisation. m étant impair, $p \geq 3$, et puisque $q \geq p$ (q étant un produit d'entiers $\geq p$), $m = pq \geq pp = p^2$, et donc $\sqrt{m} \geq p$, la fonction racine carrée étant croissante. On a ainsi montré que si m un nombre impair est composé, il est divisible par un nombre premier compris entre 3 et \sqrt{m} . Le lemme 1 étant la contraposée de ce qui vient d'être démontré est par conséquent démontré. \square

Lemme 2 : *$D(n)$ ne contient que des nombres premiers.*

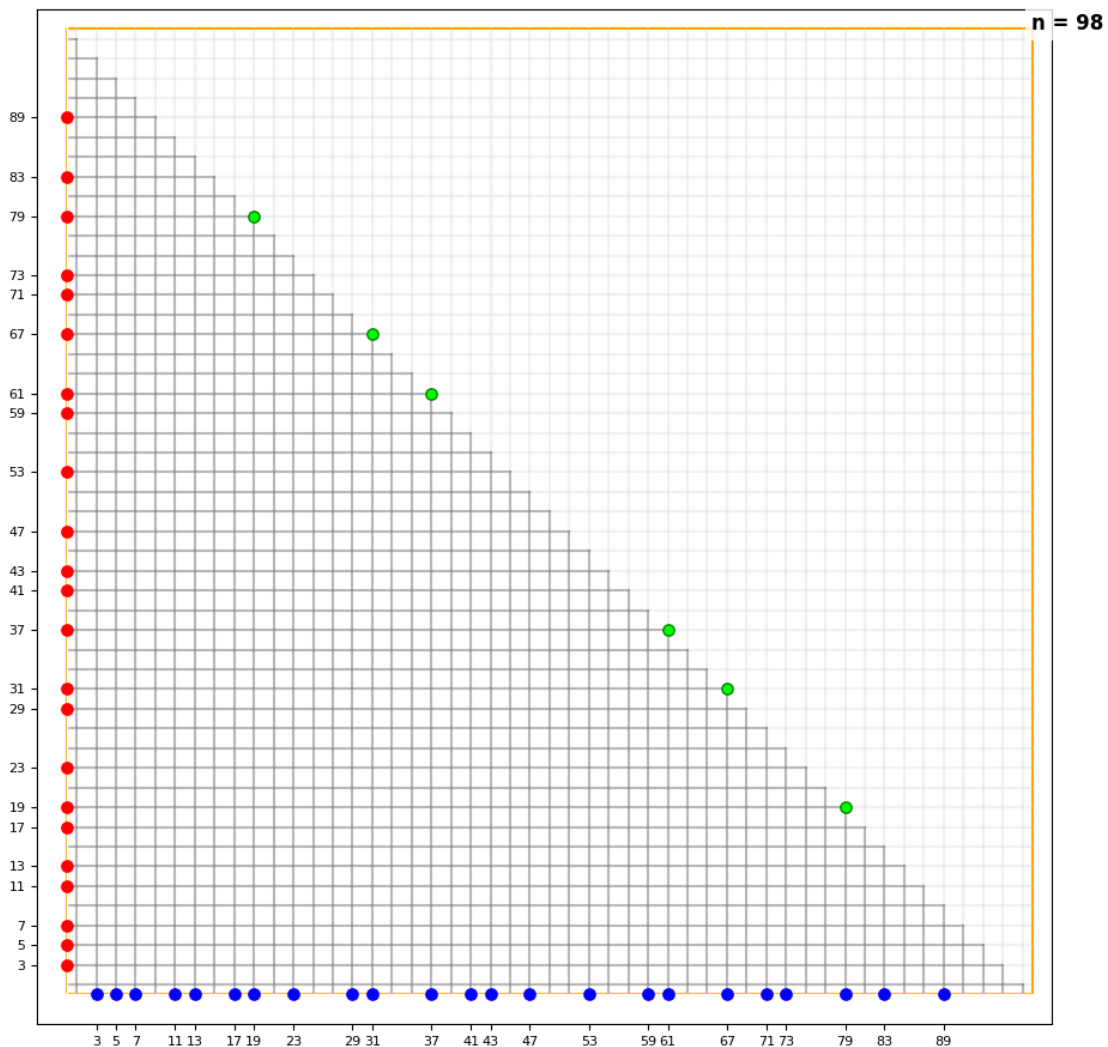
Preuve : Soit $m \in D(n)$. Alors $m \in E(n, p) \forall p$, un nombre premier compris entre 3 et \sqrt{n} . Donc m est impair et m n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et \sqrt{n} (puisque $m \not\equiv 0 \pmod{p}$); donc m n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et \sqrt{m} car $m \leq n/2 \implies m \leq n \implies \sqrt{m} \leq \sqrt{n}$. Il s'ensuit que m est donc un nombre premier par le lemme 1. \square

Lemme 3 : *L'ensemble des nombres de la forme $n - k$ avec $k \in D(n)$ ne contient que des nombres premiers.*

Preuve : Soit $m \in D(n)$. Alors $\forall p$ un nombre premier compris entre 3 et \sqrt{n} , on a $m \in E(n, p)$. Donc $n - m$ est impair (car m est impair et n est pair). D'autre part, quelque soit p un nombre premier p compris entre 3 et \sqrt{n} , puisque $m \not\equiv n \pmod{p}$, $n - m$ n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et \sqrt{n} , et donc il n'est divisible par aucun nombre premier compris entre 3 et $\sqrt{n - m}$ car $n - m \leq n \implies \sqrt{n - m} \leq \sqrt{n}$. $n - m$ est donc un nombre premier par le lemme 1. \square

Lemme 4 : Soit n un nombre pair ≥ 6 . Si $D(n) \neq \emptyset$ alors n vérifie la conjecture de Goldbach.

Preuve : Si $D(n) \neq \emptyset$, p un élément de $D(n)$ est premier par le lemme 1 et son complémentaire à n , notons le $q = n - p$ est premier également par le lemme 2, et donc $n = p + q$ admet une décomposition de Goldbach (ou vérifie la conjecture de Goldbach).



Ci-dessus est présenté un graphique qui montre les deux projections orthogonales des décomposants de Goldbach de $n = 98$, représentés par des points verts, sur l'axe des abscisses sur lequel apparaissent les décomposants x et sur l'axe des ordonnées sur lequel apparaissent leur complémentaire

$(n - x)$ à n .

On trouvera l'ensemble des carrés correspondant aux décompositions de Goldbach des nombres de 6 à 102 à l'adresse

<https://denisevellachemla.eu/les-projections.pdf>.