Presque l'hypothèse de Riemann

openai

5 octobre 2026

Résumé

Nous établissons l'hypothèse quasi-Riemann en prouvant que toute fonction L de Dirichlet, y compris la fonction zêta de Riemann, n'a pas de zéros dans le demi-plan $\Re s > 11/12$. Plus généralement, nous prouvons le même demi-plan sans zéro pour toute fonction L de Hecke d'ordre fini sur $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. En particulier, cela exclut l'existence de zéros de Landau-Siegel.

Le texte ci-dessous est la traduction par l'ia deepseek de la proposition de démonstration par openai du 5 octobre 2026 du fait que 11/12 des zéros de la fonction ζ de Riemann sont sur la droite critique

1. Introduction

Pour un caractère de Dirichlet primitif χ de conducteur q, la *fonction L de Dirichlet* associée est définie pour $\Re s > 1$ par la formule

$$L(s,\chi) = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad \Re s > 1,$$

et admet un prolongement méromorphe à $s \in \mathbb{C}$ [22], § 4.6. Lorsque χ est le caractère trivial, $L(s,\chi)$ redonne la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ [41].

Les zéros des fonctions L de Dirichlet présentent un intérêt significatif, notamment pour leur rôle dans la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. L'*Hypothèse de Riemann Généralisée* prédit que tous les zéros de $L(s,\chi)$ dans la bande critique $0 < \Re s < 1$ satisfont $\Re s = 1/2$. Pour $\zeta(s)$, l'assertion plus faible qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\zeta(s)$ n'a pas de zéros dans $\Re s > 1 - \varepsilon$ est appelée une *Hypothèse quasi-Riemann* (par exemple, dans [2], § 1, [34], p. 274, et [4], § 2). Pour les fonctions L de Dirichlet, nous considérons l'assertion analogue avec un seul $\varepsilon > 0$ valable pour tout caractère primitif χ, indépendamment du conducteur et de la hauteur.

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Le résultat principal de cet article est le suivant.

Référence : https://github.com/openai/math/tree/main/preprints/The-Quasi-Riemann-Hypothesis-October-5-2026.

Denise Vella-Chemla, 14 octobre 2026

Théorème 1 (Théorème 1.1)**.** *Toute fonction L de Hecke d'ordre fini sur K n'a pas de zéros dans le demi-plan $\Re s > 11/12$. Ainsi, toute fonction L de Dirichlet, y compris $\zeta(s)$, n'a pas de zéros pour $\Re s > 11/12$.*

La section 3 prouve le théorème en supposant la Proposition 3.1, dont la preuve est complétée dans la section 5.6.

Le Théorème 1.1 est une étape intermédiaire naturelle vers la région sans zéro plus forte $\Re s > 7/8$ établie dans [36], Théorème 1.1. Pour simplifier, nous avons isolé le Théorème 1.1 et sa preuve ici. Par un argument standard de formule explicite (voir [6], Chapitres 19-20), le Théorème 1.1 donne la forme quantitative suivante du théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques.

Corollaire 2 (Corollaire 1.2)**.** *Soit $\pi(x; q, a)$ le nombre de premiers $p \leq x$ avec $p \equiv a \pmod q$. Notons φ la fonction indicatrice d'Euler. Pour $x \geq 2$,*

$$\sup_{\substack{1 \leq q \leq x \\ (a,q)=1}} \left| \pi(x; q, a) - \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{dt}{\log t} \right| \ll x^{11/12} \log x,$$

où la constante implicite est absolue et effective.

Le Théorème 1.1 a un certain nombre de conséquences arithmétiques supplémentaires. Par la méthode de la région sans zéro originant de Rodosskiĭ [42], sous la forme enregistrée dans [33], Théorème 13.12, le plus petit non-résidu quadratique modulo un nombre premier impair p est borné par une puissance fixe de $\log p$, ce qui prouve en particulier la conjecture de Vinogradov [49] que ce non-résidu est $\ll_\varepsilon p^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Voir aussi Bhargava, Ivanyos, Mittal et Saxena [3], Théorème 6.7 pour cette conséquence d'un demi-plan sans zéro fixe. D'un point de vue de la théorie computationnelle des nombres, cette borne permet d'extraire des racines carrées modulo p de manière déterministe en temps polynomial en $\log p$ en utilisant l'algorithme de Tonelli-Shanks (voir [11], § 2.9). Le Théorème 1.1 fournit également une implémentation déterministe en temps polynomial du test de primalité de Miller [32] ; notons que le test de primalité en temps polynomial était auparavant connu inconditionnellement via l'algorithme d'Agrawal-Kayal-Saxena [1]. Pour les discriminants fondamentaux négatifs D, l'argument de produit d'Euler court de Littlewood [29], appliqué au demi-plan sans zéro fixe du Théorème 1.1, conjointement avec la formule du nombre de classes de Dirichlet (voir [6], Chapitre 6), donne la borne effective du nombre de classes $h(D) \gg \sqrt{|D|}/\log\log|D|$, avec une constante implicite absolue calculable. Les calculs de groupes de classes d'Elsenhans, Klüners et Nicolae [8], Théorème 2, s'appuyant sur Weinberger [50], donnent une liste complète des corps quadratiques imaginaires dont l'exposant du groupe de classes divise deux lorsqu'il n'y a pas de zéros de Landau-Siegel. Conjointement avec la caractérisation de Grube des nombres idoines et sa réduction aux discriminants fondamentaux [15] (voir [23], Théorème 6 et § 2.3), cela montre que le Théorème 1.1 confirme la complétude de la liste d'Euler des 65 nombres idoines.

1.1. Travaux antérieurs

Il existe une longue lignée de travaux établissant des régions sans zéro pour les fonctions L de Dirichlet. Hadamard et de la Vallée Poussin ont prouvé le théorème des nombres premiers en 1896 en établissant que $\zeta(s)$ n'a pas de zéros sur la droite $\Re s = 1$ [16], [46]. De la Vallée Poussin a ensuite obtenu une région sans zéro quantitative à gauche de cette droite [47]. Pour les caractères de Dirichlet primitifs non principaux, le théorème classique de région sans zéro de Grönwall et Titchmarsh [14], [45], sous la forme moderne donnée dans [22], Théorème 5.26 (voir aussi [6], Chapitre 14), donne une constante absolue effective $c_0 > 0$ telle que

$$L(\sigma + it, \chi) \neq 0 \quad \text{si} \quad \sigma > 1 - \frac{c_0}{\log(q(|t| + 3))}, \tag{1}$$

avec au plus une exception pour chaque caractère primitif. Toute exception est un zéro réel simple, ne peut se produire que si χ est quadratique, et est appelée un *zéro de Landau-Siegel*. Le Théorème 1.1 exclut l'existence d'un tel zéro.

Il y a deux paramètres dans (1) : le conducteur q et la hauteur $|t|$. Même lorsque q est fixé, sa largeur tend vers zéro avec la hauteur. Vinogradov et Korobov ont développé des méthodes [48], [24] pour prouver que

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0 \quad \text{si} \quad \sigma > 1 - \frac{c_1}{(\log |t|)^{2/3}(\log\log |t|)^{1/3}}, \quad |t| \geq 3, \tag{2}$$

pour une constante absolue $c_1 > 0$ (Ford [9] donne une valeur explicite de c_1). L'assertion du Théorème 1.1 est un demi-plan de largeur fixe, indépendant à la fois du conducteur et de la hauteur.

Comme nous le verrons dans le plan, la preuve du Théorème 1.1 s'appuie sur les développements modernes dans les grands cribles de caractères et les séries thêta métaplectiques. En particulier, la connexion entre les sommes de Gauss cubiques et les coefficients thêta cubiques [26], [38] lie l'argument au travail sur la conjecture de Patterson par Heath-Brown et Patterson [20], Heath-Brown [19], et Dunn et Radziwiłł [7]. Les arguments récursifs de grand crible s'appuient également sur la preuve de Heath-Brown de l'inégalité du grand crible quadratique [18].

1.2. Organisation

La section 2 donne un plan de haut niveau de l'argument. La section 3 déduit la région sans zéro d'une estimation de moyenne quadratique pour les sommes de Möbius tordues. La section 4 réduit cette estimation à une moyenne quadratique duale avec des coefficients de sommes de Gauss cubiques. La section 5 énonce les estimations de moyenne quadratique complétée et de transfert, les combine en une inégalité récursive, et prouve la borne de moyenne quadratique requise. Les sections 6 et 7 prouvent l'estimation complétée et les bornes pour les sommes de diviseurs cubiques restantes, respectivement. L'annexe A fournit les identités arithmétiques et le calcul thêta détaillé. L'annexe B enregistre le lemme de séparation lisse utilisé tout au long.

1.3. Notation

Écrivons $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$, où $\omega = e^{2\pi i/3}$. Pour $a \in K$, écrivons $N_{K/\mathbb{Q}}(a) = a\bar{a} = |a|^2$ pour sa norme. Pour un idéal intégral non nul $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}$, écrivons $N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) = \#(\mathcal{O}/\mathfrak{a})$. Nous utilisons $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ pour

l'indicatrice d'une condition $\mathcal{C}$. Pour un idéal premier représenté par $\mathfrak{p}$ et un élément ou idéal non nul a, écrivons $v_{\mathfrak{p}}(a)$ pour son exposant dans la factorisation en nombres premiers de a.

Nous utilisons la notation asymptotique standard, écrivant $f = O(g)$ ou $f \ll g$ lorsque $|f| \le Cg$, où $g \ge 0$ et $C > 0$ est une constante absolue sauf indication contraire. Les indices indiquent une dépendance possible de la constante implicite : par exemple, $f \ll_{\nu,W,\varepsilon} g$ signifie $|f| \le C_{\nu,W,\varepsilon} g$, où la constante peut dépendre de ν, W, ε mais est uniforme dans tous les autres paramètres variables. Pour f, g non négatifs, nous écrivons $f \asymp g$ lorsque $f \ll g$ et $g \ll f$. Une plage de normes dyadiques est un intervalle $R \le N_{K/\mathbb{Q}}(a) < 2R$; une somme sur des échelles dyadiques utilise $R = 2^j$.

Nous utilisons $D \ge 2$ comme paramètre de taille ambiant ; dans l'argument principal, c'est l'échelle de norme originale introduite dans le plan ci-dessous. Les échelles auxiliaires peuvent varier dans des plages bornées par des puissances fixes de D. Nous écrivons

$$A \preccurlyeq B \quad \text{si} \quad A \ll_{\varepsilon} D^{\varepsilon} B \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0,$$

uniformément dans les paramètres variables sur leurs plages déclarées. Les constantes implicites peuvent également dépendre des données fixes spécifiées dans chaque énoncé.

2. Plan de l'argument

Dans cette section, nous esquissons la preuve du Théorème 1.1, en supprimant diverses conditions de coprimalité, facteurs locaux et détails de lissage. Les énoncés précis apparaissent dans les sections 3-7.

2.1. Étape 1 : Réduction à des estimations à gain de puissance pour les sommes de Möbius tordues

Fixons un caractère de Hecke d'ordre fini ν de K. Soit $L_K(s, \nu)$ la fonction L de Hecke correspondante. Nous étendons ν par zéro aux idéaux non premiers à son conducteur. Nous déduirons le Théorème 1.1 d'une estimation à gain de puissance pour les sommes de Möbius tordues par ν.

Soit μ la fonction de Möbius idéale sur K. Toutes les sommes idéales originales portent sur des idéaux intégraux non nuls. Comme dans la section 3, les idéaux dans ces sommes sont compris comme étant premiers à $2, 3$, et au conducteur de ν. Pour une échelle de norme $D > 0$, considérons

$$A_1(D) = \sum_{\mathfrak{n}} \mu(\mathfrak{n}) \nu(\mathfrak{n}) W(N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})/D),$$

où $W \in C_c^{\infty}((0, \infty); \mathbb{C})$ est une fonction de coupure lisse. Ainsi $A_1(D)$ est une somme de Möbius tordue par ν lissée sur des idéaux de norme comparable à D, avec environ D termes. Nous cherchons un gain de puissance sur cette taille : pour un $\delta > 0$ fixé et tout $\varepsilon > 0$,

$$A_1(D) \ll_{\nu,W,\varepsilon} D^{1-\delta+\varepsilon} \quad \text{pour tout } W \in C_c^{\infty}((0, \infty); \mathbb{C}). \tag{3}$$

L'implication de (3) vers un demi-plan sans zéro est la version de Hecke lissée de la relation classique entre les sommes de Möbius et les régions sans zéro. Dans le cas de la fonction zêta, l'équivalence entre l'hypothèse de Riemann et la borne $\sum_{n \le x} \mu(n) \ll_{\varepsilon} x^{1/2+\varepsilon}$ est due à Littlewood [28] ; voir aussi [31], § 1. La section 3 donne l'argument complet nécessaire ici.

2.2. Étape 2 : Plongement de la somme dans une famille

Afin d'estimer $A_1(D)$, nous la plongeons dans une famille de telles sommes, paramétrée par $u \in \mathcal{O}_K$, en introduisant une torsion sextique. Nous appelons un élément de $\mathcal{O}$ *primaire* s'il est congru à 1 (mod 3). L'anneau $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\omega]$ est euclidien, donc il a une factorisation unique et tout idéal est principal ; pour un idéal premier à 3, multiplier tout générateur par une unité unique donne $n \equiv 1$ (mod 3), puisque les six unités représentent les six classes de résidus inversibles modulo 3. Pour un élément primaire n, nous écrivons $\mu(n) = \mu((n))$ et $\nu(n) = \nu((n))$; les sommes de diviseurs comptent chaque diviseur idéal une fois, en utilisant son générateur primaire. Pour un idéal $\mathfrak{n}$ premier à 6, utilisons son générateur primaire unique n et écrivons

$$\chi_{\mathfrak{n}}(u) = \chi_n(u) = (u/n)_6.$$

Ici $(u/n)_6$ est le symbole de résidu sextique, étendu par zéro lorsque $(u, n) \neq 1$.[1] Nous écrivons aussi $(u/n)_2$ et $(u/n)_3$ pour les symboles de résidus quadratique et cubique, définis par la même convention avec 6 remplacé par 2 et 3, respectivement. Lorsque $(n, 6) = 1$, ils sont égaux à $\chi_n(u)^3$ et $\chi_n(u)^2$. Les restrictions qui gardent ces symboles définis sont sous-entendues lorsqu'elles sont omises dans le plan. La famille est

$$A_u(D) = \sum_{\mathfrak{n}} \mu(\mathfrak{n})\nu(\mathfrak{n})\chi_n(u)W(N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{n})/D). \tag{4}$$

Fixons $0 < \vartheta \leq 1/10$. L'estimation cruciale, la Proposition 3.1, est que

$$\sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(u)\leq H} |A_u(D)|^2 \ll_{\nu,W,\vartheta,\varepsilon} D^{1+\varepsilon}H, \quad H = D^{1+\vartheta}. \tag{5}$$

Dans une moyenne quadratique, nous appelons la variable dans la somme extérieure la *ligne* et la variable dans la somme intérieure la *colonne*. Dans (5), ce sont u et $\mathfrak{n}$, respectivement. À un facteur D^{ε} près, (5) peut être considéré comme disant que la famille $\{A_u(D)\}$ exhibe une "annulation en racine carrée" en moyenne (au sens L^2) sur u.

L'estimation de moyenne quadratique (5) donne le gain de puissance souhaité pour $A_1(D)$ car $A_{p^6}(D) \approx A_1(D)$ pour de nombreux nombres premiers p. Pour un nombre premier primaire p avec $Y/2 < N_{K/\mathbb{Q}}(p) \leq Y$, l'identité $\chi_n(p^6) = \mathbf{1}_{p\nmid n}$ ne laisse que $O_W(D/Y)$ termes différents et donne donc

$$A_{p^6}(D) = A_1(D) + O_W(D/Y). \tag{6}$$

Par le théorème des idéaux premiers de Landau [27] (voir [22], Théorème 5.33), il y a $\asymp Y/\log Y$ choix de tels p. Prenant $Y = H^{1/6}$, considérant la contribution de tels termes à (5) et utilisant (6) donne

$$|A_1(D)|^2 \ll D^{1+\varepsilon}H^{5/6} + D^2H^{-1/3}. \tag{7}$$

Avec $H = D^{1+\vartheta}$, cela donne $A_1(D) \ll D^{11/12+5\vartheta/12+\varepsilon}$ pour tout $0 < \vartheta \leq 1/10$ fixé. Choisissant ϑ suffisamment petit pour chaque perte d'exposant demandée, on obtient $A_1(D) \ll_{\nu,W,\varepsilon} D^{11/12+\varepsilon}$. Par conséquent, il reste à établir (5).

1. Pour un nombre premier primaire $p \nmid 6$ et $p \nmid u$, $(u/p)_6$ est l'unique racine sixième de l'unité congruente à $u^{(N_{K/\mathbb{Q}}(p)-1)/6} \pmod p$; posons $(u/p)_6 = 0$ lorsque $p \mid u$. Étendre multiplicativement dans le dénominateur pour définir $\chi_n(u) = (u/n)_6$ pour n primaire premier à 6. Pour l'idéal unité, $\chi_1(u) = 1$ pour tout u, y compris $u = 0$.

2.3. Étape 3 : Sommation de Poisson

Nous passons à la tâche de prouver l'estimation de moyenne quadratique (5). Maintenant que nous avons introduit la variable de ligne u, nous pouvons appliquer la sommation de Poisson dans cette variable. Cela introduit des sommes de Gauss sextiques, provenant des transformées de Fourier des caractères sextiques. Après application des identités de Gauss-Jacobi, ces sommes de Gauss sextiques absorbent le facteur μ et se transforment en sommes de Gauss cubiques. Nous interprétons les sommes de Gauss cubiques résultantes comme des coefficients de la fonction thêta cubique de Kubota. Dans l'étape suivante, nous utilisons l'automorphie de cette fonction thêta. Pour l'instant, nous expliquons l'apparition de ces sommes de Gauss plus en détail.

Définissons le caractère additif

$$e(z) = \exp(4\pi i \Im z/\sqrt{3}) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Pour un entier d'Eisenstein sans facteur carré $n \equiv 1 \pmod 3$ premier à 6 et un entier j, définissons les sommes de Gauss normalisées

$$\gamma_j(n) = \frac{1}{\sqrt{N_{K/\mathbb{Q}}(n)}} \sum_{x \bmod n} \chi_n(x)^j e(x/n). \tag{8}$$

Pour $j = -1$, nous interprétons χ_n^{-1} comme le caractère conjugué $\overline{\chi_n}$.

Considérons l'identité classique

$$\left(\frac{-1}{m}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{x \bmod m} \left(\frac{x}{m}\right) e^{2\pi i x/m}\right)^2,$$

où m est un entier positif impair sans facteur carré et les symboles sont des symboles de Jacobi. Nous aimerions une décomposition similaire pour μ au lieu de $\left(\frac{-1}{m}\right)$. Suivant les travaux de Hasse [17], pp. 443-445 et Heath-Brown [19], (2), nous dérivons l'identité suivante dans l'annexe A.1, valable pour n primaire sans facteur carré en dehors d'un ensemble fixé de nombres premiers exclus :

$$\mu(n)\gamma_{-1}(n) = \chi_n(-1)G(n)^{-1}\overline{\alpha(n)}\gamma_2(n), \quad \alpha(n) = \frac{n}{|n|}, \quad G(n) = \overline{\chi_n(4)}\gamma_3(n).$$

Ici $G(n)$ est un facteur de classe de rayon fixe. Le facteur $\gamma_{-1}(n)$ provient de la sommation de Poisson ; comme promis, il se combine avec $\mu(n)$ pour produire le coefficient cubique $\overline{\alpha(n)}\gamma_2(n)$ (à des facteurs de classe de rayon près). D'autres détails sont donnés dans la section 4.

Nous appelons les sommes obtenues après application de la sommation de Poisson des *sommes duales*.[2] Réarranger ces sommes duales réduit le problème de l'estimation de $\sum_u |A_u(D)|^2$ à l'estimation de la famille suivante de sommes de colonnes (pour plus de clarté, nous avons supprimé les torsions auxiliaires et les conditions de coprimalité) :

$$B_h(X) = \sum_{\substack{n \in \mathcal{O} \\ n \equiv 1 \pmod 3 \\ n \text{ sans facteur carré}}} \overline{\alpha(n)}\gamma_2(n)\xi(n)\chi_n(h)U(N_{K/\mathbb{Q}}(n)/X). \tag{9}$$

2. Pour cette terminologie, voir [40], p. 440, [25], § 2.3, et [10], résumé arXiv.

Ici h est la nouvelle variable de ligne, duale de Fourier de u, tandis que U est un poids lisse restreignant la variable de colonne n à une norme comparable à X. Nous choisissons ξ comme étant soit $\nu\eta$ soit $\overline{\nu}\eta$, où η parcourt un ensemble fini de caractères de classe de rayon de module fixe.[3] Pour chaque choix de ξ, cela définit une famille de sommes $B_h(X)$.

Après avoir traité la diagonale et séparé les poids lisses, nous obtenons grossièrement que

$$\sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(u)\leq H} |A_u(D)|^2 \preccurlyeq DH + \frac{H}{D} \sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq \mathcal{H}} |B_h(D)|^2. \tag{10}$$

Ici $\mathcal{H} \asymp D^2/H$ est l'échelle de norme duale. Cette comparaison schématique supprime les facteurs communs apparaissant lorsque le carré est développé. Ainsi l'estimation souhaitée est

$$\sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq \mathcal{H}} |B_h(D)|^2 \preccurlyeq D^2. \tag{11}$$

2.4. Étape 4 : Relation avec les sommes de Gauss cubiques et la fonction thêta cubique de Kubota

Pour estimer (11), nous identifions d'abord les coefficients de Gauss cubiques avec les coefficients de Fourier d'une fonction thêta. Sa loi de transformation s'applique à une somme avec des facteurs cubiques supplémentaires, que nous supprimerons à l'étape 5.

Soit $\theta(z, v)$ la fonction thêta cubique de Kubota sur l'espace hyperbolique de dimension trois ($z \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{R}_{>0}$), obtenue comme résidu d'une série d'Eisenstein métaplectique cubique [26], [38]. Nous utilisons la normalisation de [7], § 5.1, (5.6)-(5.8), rappelée ci-dessous en (59).

Posons $\lambda = 1 + 2\omega$. Pour des éléments primaires $n, b \in \mathcal{O} = \mathbb{Z}[\omega]$, avec n sans facteur carré et $(nb, 6) = 1$, soit $c_\theta(nb^3)$ le coefficient de Fourier de $\bar{\theta}$ indexé par $\lambda^{-3}nb^3$ dans son développement en z. La formule de Patterson [38], Théorème 8.1, enregistrée dans [7], (5.7), donne

$$c_\theta(nb^3) = 3^{5/2}|b|\overline{\chi_n(\lambda)}^2\gamma_2(n). \tag{12}$$

Prenant $b = 1$ dans (12) et substituant dans (9) donne

$$B_h(X) = 3^{-5/2} \sum_{\substack{n\in\mathcal{O} \\ n\equiv 1 \pmod 3 \\ n \text{ sans facteur carré}}} c_\theta(n)\overline{\alpha(n)}\chi_n(\lambda)^2\xi(n)\chi_n(h)U(N_{K/\mathbb{Q}}(n)/X). \tag{13}$$

Ainsi (13) exprime $B_h(X)$ comme une somme lissée et tordue des coefficients d'indice sans facteur carré de $\bar{\theta}$. Cette connexion a été utilisée par Heath-Brown et Patterson pour étudier les sommes de Kummer [20].

3. Le groupe de classes de rayon modulo un idéal $\mathfrak{m}$ est le groupe des idéaux fractionnaires premiers à $\mathfrak{m}$, modulo les idéaux principaux engendrés par des éléments congrus à 1 modulo $\mathfrak{m}$. Un caractère de classe de rayon est un caractère de ce groupe fini. Pour un élément premier à $\mathfrak{m}$, sa classe de rayon signifie la classe de son idéal principal.

Pour utiliser la formule de sommation pour les coefficients thêta, nous plongeons la somme (13) dans une somme complétée, en incluant des termes indexés par nb^3. Cette utilisation de la complétion cubique suit Dunn et Radziwiłł [7], Lemme 5.4 et Proposition 5.3, avec les coefficients thêta sous-jacents donnés par Patterson [38], Théorème 8.1. Pour h, ξ et U fixés, définissons

$$T_h(X) := \frac{1}{3^{5/2}\sqrt{X}} \sum_{\substack{n,b\in\mathcal{O} \\ n,b\equiv 1 \pmod 3 \\ n \text{ sans facteur carré}}} c_\theta(nb^3)\overline{\alpha(nb^3)}\chi_{nb^3}(\lambda)^2\xi(nb^3)\chi_{nb^3}(h)U(N_{K/\mathbb{Q}}(nb^3)/X). \tag{14}$$

Les termes $b = 1$ sont exactement $X^{-1/2}B_h(X)$; les autres termes fournissent les indices cubiques dans le développement thêta. Le premier objectif est de borner la moyenne quadratique de $T_h(X)$ sur h.

L'automorphie de θ donne une formule de sommation qui transforme la somme de colonnes complétée $T_h(X)$, avec la ligne h maintenue fixe, en sommes duales de coefficients thêta avec de nouveaux poids lisses et torsions de caractères. Une pointe (cusp) est représentée par un point frontière dans $K \cup \{\infty\}$. Un *développement en pointe* est le développement de Fourier dans la variable horizontale après un changement de coordonnées amenant l'infini à ce point. Nous appelons ses coefficients de Fourier des *coefficients de pointe*. Notre point de départ est une variante (établie dans l'annexe A.2) de la transformation thêta de Dunn et Radziwiłł [7], § 5, étendant les travaux de Patterson [38] et Yoshimoto [51]. Le point clé est la façon dont les torsions de caractères changent. Supposons pour illustration que h est sans facteur carré et primaire, avec $(h, 6) = 1$. Alors, par la Proposition 6.2, l'expression transformée est une combinaison linéaire finie de sommes de la forme

$$\sum_{0\neq m\in\mathcal{O}} \frac{d_\theta(m)\alpha(m)}{\sqrt{N_{K/\mathbb{Q}}(m)}}\chi_h(m)^3 V_*^\sharp\left(\frac{N_{K/\mathbb{Q}}(m)X}{N_{K/\mathbb{Q}}(h)^2}\right). \tag{15}$$

L'indice de colonne dual est m, tandis que h reste l'indice de ligne. Ici $d_\theta(m)$ désigne le coefficient à l'indice de Fourier $\lambda^{-4}m$ dans un développement en pointe de $\bar{\theta}$, et $V_*^\sharp$ est la transformée en (64), appliquée à $V_*(y) = y^{1/2}U(y)$. Nous avons supprimé une somme finie sur ces développements en pointe, des torsions périodiques fixes, des préfacteurs bornés et des constantes d'échelle fixes. Dans chaque classe de rayon fixe de h, les suites de coefficients et les poids transformés sont indépendants de h par le Lemme 6.3. La Proposition 6.2 donne la formule précise, en écrivant $d(\ell)$ pour le coefficient de pointe à $\ell = \lambda^{-4}m$.

Puisque $V_*^\sharp$ décroît rapidement à l'infini, la plage de normes effective dans (15) est $N_{K/\mathbb{Q}}(m) \ll N_{K/\mathbb{Q}}(h)^2/X$, à la place de la plage originale $N_{K/\mathbb{Q}}(nb^3) \asymp X$. Ces sommes duales proviennent de la transformation thêta et impliquent des coefficients thêta sur l'échelle transformée, maintenant tordus par le caractère quadratique χ_h^3. Ce caractère apparaît parce que, à chaque nombre premier $p \mid h$, les facteurs de Fourier et thêta se combinent comme

$$\chi_p^{-1}\chi_p^{-2} = \chi_p^{-3} = \chi_p^3. \tag{16}$$

Maintenant, un point clé est que puisque χ_p^3 est quadratique, le grand crible quadratique de Goldmakher et Louvel [13], Théorème 1.1 et Corollaire 1.2 (une généralisation du grand crible quadratique de Heath-Brown [18] aux corps de nombres) borne la moyenne quadratique des sommes dans (15) lorsque h varie. Pour les familles quadratiques sans facteur carré avec des plages de normes de ligne

et de colonne M, L, le grand crible quadratique donne le facteur $M + L$, à $(ML)^{\varepsilon}$ près. Crucialement, cela évite le terme supplémentaire $(ML)^{2/3}$ dans le grand crible d'ordre supérieur général de Blomer, Goldmakher et Louvel [5], Théorème 1.3.

Nous appliquons ensuite Cauchy-Schwarz dans la variable cubique et le grand crible quadratique dans la variable de colonne sans facteur carré pour estimer la moyenne quadratique de $T_h(X)$. Les détails sont donnés dans la preuve de la Proposition 5.2, qui donne, pour $\mathcal{H}, X \geq 1$,

$$\sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq\mathcal{H}} |T_h(X)|^2 \ll_{\varepsilon,\xi,U} (\mathcal{H}X)^{\varepsilon}\left(\mathcal{H} + \frac{\mathcal{H}^2}{X}\right). \tag{17}$$

À $X = D$ et $\mathcal{H} \leq D$, la comparaison heuristique $B_h(D) \approx \sqrt{D}T_h(D)$ donnerait donc la borne D^2 souhaitée. La tâche restante est de justifier la borne de moyenne quadratique correspondante en supprimant les facteurs cubiques.

2.5. Étape 5 : Suppression des facteurs cubiques

Nous passons maintenant d'une borne de moyenne quadratique pour $T_h(X)$ à une borne pour $X^{-1/2}B_h(X)$, les deux moyennes étant prises sur h. Notons que l'on ne peut pas simplement écarter les termes avec $b \neq 1$, car les contributions de différents b peuvent s'annuler. Nous commençons par défaire l'addition des facteurs cubiques en utilisant l'inversion de Möbius. Des complétions apparentées apparaissent dans Patterson [38], Théorème 6.1 et Heath-Brown [19], § 3, avec suppression explicite des facteurs cubiques par inversion de Möbius dans Dunn et Radziwiłł [7], Proposition 5.3 et (8.2).

Fixons h et ξ, et écrivons $P_h(X) = X^{-1/2}B_h(X)$ pour la partie $b = 1$ de $T_h(X)$. En substituant la formule des coefficients (12) dans (14), on obtient

$$T_h(X) = \sum_{\substack{b\in\mathcal{O}\\ b\equiv 1 \pmod 3}} \frac{w_h(b)}{N_{K/\mathbb{Q}}(b)} P_h\left(\frac{X}{N_{K/\mathbb{Q}}(b)^3}\right), \tag{18}$$

où

$$w_h(b) = \overline{\alpha(b)}^3 \xi(b)^3 \chi_b(h)^3. \tag{19}$$

Chaque facteur dans (19) est complètement multiplicatif en b. Ainsi $w_h(bc) = w_h(b)w_h(c)$ même lorsque b, c partagent des facteurs premiers, et $|w_h(b)| \leq 1$. L'inversion de Möbius (cf. [22], § 1.3) donne

$$P_h(X) = \sum_{\substack{d\in\mathcal{O}\\ d\equiv 1 \pmod 3}} \frac{\mu(d)w_h(d)}{N_{K/\mathbb{Q}}(d)} T_h\left(\frac{X}{N_{K/\mathbb{Q}}(d)^3}\right). \tag{20}$$

En effet, en substituant (18) dans (20) et en regroupant par l'indice cubique total b, on obtient le facteur $w_h(b)\sum_{d|b}\mu(d)$, qui vaut 1 pour $b = 1$ et 0 sinon.

L'objectif est maintenant une estimation pour P_h, plutôt que pour la somme complétée T_h. Pour la famille simplifiée et les plages de paramètres provenant de l'étape 3, la borne requise est

$$\sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq\mathcal{H}} |P_h(X)|^2 \ll_{\varepsilon,\xi,U} (\mathcal{H}X)^{\varepsilon}X. \tag{21}$$

Puisque $B_h(X) = \sqrt{X}P_h(X)$, cela équivaut à une borne de taille X^2, à la même petite puissance près, pour la moyenne quadratique de $B_h(X)$.

Pour $1 \le H_c \le X^{1/3}$, soit $P_{h,\le H_c}(X)$ la partie de (20) avec $N_{K/\mathbb{Q}}(d) \le H_c$. En appliquant Cauchy-Schwarz pondéré pour chaque h fixé, puis en sommant sur h et en utilisant (17), on obtient

$$\sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq\mathcal{H}} |P_{h,\le H_c}(X)|^2 \le \left(\sum_{N_{K/\mathbb{Q}}(e)\le H_c} \frac{1}{N_{K/\mathbb{Q}}(e)}\right)\left(\sum_{N_{K/\mathbb{Q}}(d)\le H_c} \frac{1}{N_{K/\mathbb{Q}}(d)} \sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq\mathcal{H}} |T_h(X/N_{K/\mathbb{Q}}(d)^3)|^2\right)$$
$$\preccurlyeq \sum_{N_{K/\mathbb{Q}}(d)\le H_c} \frac{1}{N_{K/\mathbb{Q}}(d)}\left(\mathcal{H} + \frac{\mathcal{H}^2 N_{K/\mathbb{Q}}(d)^3}{X}\right) \preccurlyeq \mathcal{H} + \frac{\mathcal{H}^2 H_c^3}{X}.$$

Ainsi

$$\sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq\mathcal{H}} |P_{h,\le H_c}(X)|^2 \ll_{\varepsilon,\xi,U} (\mathcal{H}X)^{\varepsilon}\left(\mathcal{H} + \frac{\mathcal{H}^2 H_c^3}{X}\right). \tag{22}$$

Pour $\mathcal{H} \le X$, l'estimation (22) est dans la cible (21) à condition que $\mathcal{H}^2 H_c^3/X \le X$. Ainsi nous appliquons la borne de moyenne quadratique complétée directement seulement jusqu'à la coupure

$$H_c = \min\left\{X^{1/3}, \left(\frac{X}{\mathcal{H}}\right)^{2/3}\right\}. \tag{23}$$

Aux échelles de base de l'étape 3,

$$X \asymp D, \quad \mathcal{H} \asymp D^{1-\vartheta}, \quad H_c \asymp D^{2\vartheta/3}.$$

La somme inverse peut s'étendre à $N_{K/\mathbb{Q}}(d) \asymp D^{1/3}$, donc nous devons encore contrôler les diviseurs plus grands.

Écrivons $\tau_{\mathrm{div}}(b)$ pour le nombre de diviseurs idéaux intégraux non nuls de (b). Soit $P_{h,>H_c}(X)$ les termes avec $N_{K/\mathbb{Q}}(d) > H_c$ dans (20), et posons $L_b = X/N_{K/\mathbb{Q}}(b)^3$. En substituant (18) dans la formule d'inversion tronquée pour $P_{h,>H_c}(X)$ obtenue à partir de (20), et en regroupant par $b = dc$, on obtient

$$P_{h,>H_c}(X) = \sum_{N_{K/\mathbb{Q}}(d)>H_c} \sum_c \frac{\mu(d)w_h(d)w_h(c)}{N_{K/\mathbb{Q}}(d)N_{K/\mathbb{Q}}(c)} P_h\left(\frac{X}{N_{K/\mathbb{Q}}(dc)^3}\right)$$
$$= \sum_{N_{K/\mathbb{Q}}(b)>H_c} \frac{\beta_0(b)\chi_b(h)^3}{N_{K/\mathbb{Q}}(b)} P_h(L_b),$$

où tous les indices sont primaires et

$$\beta_0(b) = \overline{\alpha(b)}^3\xi(b)^3 \sum_{\substack{d\mid b\\ N_{K/\mathbb{Q}}(d)>H_c}} \mu(d), \quad |\beta_0(b)| \le \tau_{\mathrm{div}}(b).$$

Le support de U restreint $N_{K/\mathbb{Q}}(b) \ll_U X^{1/3}$. Cauchy-Schwarz pondéré pour chaque h, suivi d'une sommation, donne

$$\sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq\mathcal{H}} |P_{h,>H_c}(X)|^2 \le \left(\sum_b \frac{\tau_{\mathrm{div}}(b)}{N_{K/\mathbb{Q}}(b)}\right)\sum_b \frac{\tau_{\mathrm{div}}(b)}{N_{K/\mathbb{Q}}(b)} \sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq\mathcal{H}} |P_h(L_b)|^2 \preccurlyeq \sup_b \sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq\mathcal{H}} |P_h(L_b)|^2. \tag{24}$$

Posons $a_\xi(n) = \overline{\alpha(n)}\gamma_2(n)\xi(n)$. Écrivons

$$E(\mathcal{H}, X) := \frac{1}{X} \sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq\mathcal{H}} \left|\sideset{}{^*}\sum_n a_\xi(n)\chi_n(h)U(N_{K/\mathbb{Q}}(n)/X)\right|^2.$$

Une étoile restreint un indice aux éléments primaires sans facteur carré. Par (9) et la définition de P_h, nous avons

$$E(\mathcal{H}, X) = \frac{1}{X} \sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq\mathcal{H}} |B_h(X)|^2 = \sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(h)\preccurlyeq\mathcal{H}} |P_h(X)|^2.$$

Aux échelles de l'étape 3, notre objectif est de prouver

$$E(\mathcal{H}, X) \preccurlyeq X. \tag{25}$$

À $X = D$, c'est précisément la borne (11) pour la moyenne quadratique de $B_h(D)$. La substitution dans la comparaison de Poisson (10) donne alors l'estimation de moyenne quadratique originale requise (5). En combinant (22) pour $P_{h,\le H_c}$ (les termes avec $N_{K/\mathbb{Q}}(d) \le H_c$) et (24) pour $P_{h,>H_c}$ (les termes avec $N_{K/\mathbb{Q}}(d) > H_c$), avec la coupure (23), on obtient

$$E(\mathcal{H}, X) \preccurlyeq X + \sup_{\substack{b \\ 1\le L_b\le X/H_c^3}} E(\mathcal{H}, L_b).$$

Il reste donc à prouver $E(\mathcal{H}, L_b) \preccurlyeq X$ pour $1 < L_b \le X/H_c^3$. Ici la plage de lignes $\mathcal{H}$ reste fixe, et la borne requise est toujours de taille X même si l'échelle de colonne a diminué à L_b.

Nous développons maintenant le carré et appliquons la sommation de Poisson en h comme auparavant ; nous enregistrons maintenant la preuve en termes de $E(\mathcal{H}, L_b)$. Les coefficients de sommes de Gauss deviennent des coefficients de Möbius, et la nouvelle variable de ligne y a une norme au plus d'environ $L_b^2/\mathcal{H}$. Après séparation des poids, cela donne schématiquement

$$E(\mathcal{H}, L_b) \preccurlyeq X + \frac{\mathcal{H}}{L_b^2} \sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(y)\preccurlyeq L_b^2/\mathcal{H}} |M(y)|^2,$$

$$M(y) = \sideset{}{^*}\sum_{N_{K/\mathbb{Q}}(n)>L_b} \mu(n)\xi_1(n)\overline{\chi_n(y)}U_1(N_{K/\mathbb{Q}}(n)/L_b).$$

Ici ξ_1 est un autre caractère de classe de rayon fixe et U_1 est un poids lisse à support compact produit par la séparation des variables. Le terme X inclut les contributions diagonales et de fréquence nulle, en utilisant $\mathcal{H} \le X$.

Puisque $L_b = X/N_{K/\mathbb{Q}}(b)^3 \le X$, nous pouvons élargir la somme non négative sur y à

$$N_{K/\mathbb{Q}}(y) \preccurlyeq Y, \quad Y = \frac{XL_b}{\mathcal{H}} \ge \frac{L_b^2}{\mathcal{H}}.$$

Le but de cet élargissement est qu'une seconde application de la sommation de Poisson donne une plage de lignes plus courte :

$$\mathcal{H}' = \frac{L_b^2}{Y} = \frac{\mathcal{H}L_b}{X}.$$

Les coefficients redeviennent des coefficients de sommes de Gauss cubiques, et

$$\sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(y)\preccurlyeq Y} |M(y)|^2 \preccurlyeq Y L_b + Y E'(\mathcal{H}', L_b).$$

Ici E' a la même forme que E, avec éventuellement des poids lisses différents et des caractères fixes ; YL_b rend compte de la contribution de fréquence nulle. Par conséquent,

$$E(\mathcal{H}, L_b) \preccurlyeq X + \frac{X}{L_b} E'\left(\frac{\mathcal{H} L_b}{X}, L_b\right), \quad \frac{E(\mathcal{H}, L_b)}{X} \preccurlyeq 1 + \frac{E'(\mathcal{H} L_b/X, L_b)}{L_b}.$$

Il suffit donc de prouver

$$E'\left(\frac{\mathcal{H} L_b}{X}, L_b\right) \preccurlyeq L_b.$$

C'est le type d'estimation original à des paramètres plus petits :

$$(\mathcal{H}', X') = \left(\frac{\mathcal{H}}{N_{K/\mathbb{Q}}(b)^3}, \frac{X}{N_{K/\mathbb{Q}}(b)^3}\right), \quad \frac{\mathcal{H}'}{X'} = \frac{\mathcal{H}}{X}.$$

Les deux échelles diminuent tandis que leur rapport reste fixe. Le facteur X/L_b dans l'inégalité précédente est exactement ce qui convertit la nouvelle borne cible L_b en la borne requise X. Ces deux sommations de Poisson donnent l'*estimation de transfert* : une borne pour la moyenne quadratique restante en termes de nouvelles moyennes quadratiques du même type. Pour des utilisations apparentées d'une plage de sommation élargie, voir Goldmakher-Louvel [13], Lemme 4.4 et la preuve du Théorème 4.1, suivant Heath-Brown [18], Lemme 9.

En combinant les bornes (22) et (24) de la première partie de l'étape 5 avec l'estimation de transfert ci-dessus, on obtient la borne récursive

$$\frac{E(\mathcal{H}, X)}{X} \preccurlyeq 1 + \sup_{\substack{N_{K/\mathbb{Q}}(b)>H_c \\ L_b>1}} \frac{E'(\mathcal{H}', X')}{X'}, \quad X' = L_b, \quad \mathcal{H}' = \frac{\mathcal{H} L_b}{X}.$$

Pour chaque b dans ce supremum, la coupure (23) donne $\mathcal{H}' < \mathcal{H}(\mathcal{H}/X)^2 \ll D^{-2\vartheta}\mathcal{H}$. Puisque $\mathcal{H}'/X' = \mathcal{H}/X$, la même contraction s'applique à chaque étape. Après $O_\vartheta(1)$ étapes, chaque moyenne quadratique résultante a soit un reste vide, soit un paramètre de ligne au plus 1, où le comptage donne la borne souhaitée à ses échelles réduites. En appliquant l'inégalité récursive à rebours à travers ces étapes, on prouve (25) pour le $E(\mathcal{H}, X)$ original, complétant l'esquisse de la preuve.

L'esquisse précédente supprime les torsions auxiliaires et les facteurs communs à des fins d'illustration. Pour mener à bien cet argument avec les torsions auxiliaires incluses, nous utilisons la famille

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}, X, F) = \frac{1}{XF} \sum_{\substack{N_{K/\mathbb{Q}}(f)\asymp F \\ (f,S)=1}}^{*} \sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(k)\preccurlyeq \mathcal{H}} \left| \sum_{n}^{*} a_\xi(n) \chi_n(k) \chi_n(f)^4 U(N_{K/\mathbb{Q}}(n)/X) \right|^2$$

et prouvons $\mathcal{E}(\mathcal{H}, X, F) \preccurlyeq XF$ dans les plages de paramètres de la Proposition 5.1. Contrairement à l'esquisse ci-dessus, l'argument complet doit également gérer les facteurs communs et les plages

dyadiques résultantes. La famille précise est définie en (37), et la Proposition 5.4 énonce l'estimation de transfert. En la combinant avec les bornes pour les deux parties de la somme inverse à l'étape 5, on réduit la plage de lignes à chaque étape. La section 5 prouve la borne souhaitée par une itération finie, suivant la méthode des exposants admissibles de Heath-Brown [18], Lemme 8 et § 8, [19], Lemme 9 ; voir aussi [13], Théorème 4.1 et [5], § 3.2.

3. De l'estimation de moyenne quadratique à la région sans zéro

Nous réalisons d'abord les étapes 1 et 2 du plan : extraire l'annulation dans $A_1(D)$ d'une estimation de moyenne quadratique pour la famille, puis utiliser une transformée de Mellin pour déduire la non-annulation. Fixons un caractère de Hecke d'ordre fini ν de K et un ensemble fini S d'idéaux premiers qui contient tous les idéaux premiers au-dessus de 2 ou 3, ainsi que tous les idéaux premiers divisant le conducteur de ν. Pour un idéal ou un élément a, écrivons $(a, S) = 1$ si aucun idéal premier dans S ne divise a. Un idéal est supporté sur S si tous ses facteurs premiers appartiennent à S. Pour $W \in C_c^\infty((0,\infty);\mathbb{C})$, rappelons la famille

$$A_u(D) := \sum_{(n,S)=1} \mu(n)\nu(n)\chi_n(u)W(N_{K/\mathbb{Q}}(n)/D),$$

introduite en (4). Ici et tout au long de la famille originale, n parcourt les idéaux premiers à S, représentés par leurs générateurs primaires. L'estimation clé est la suivante.

Proposition 3 (Proposition 3.1)**.** *Pour tout $0 < \vartheta \le 1/10$ fixé et $\varepsilon > 0$, il existe un entier $k = k(\vartheta,\varepsilon) \ge 1$ tel que, pour tout intervalle compact $I \subset (0,\infty)$, tout W lisse supporté dans I, et $D \ge 2$,*

$$\sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(u)\le D^{1+\vartheta}} |A_u(D)|^2 \ll_{\nu,S,I,\vartheta,\varepsilon} \left(\max_{0\le j\le k} \|W^{(j)}\|_\infty\right)^2 D^{2+\vartheta+\varepsilon}. \tag{26}$$

Nous déduisons d'abord le Théorème 1.1 en supposant la Proposition 3.1. La preuve de la proposition est complétée dans la section 5.6.

Preuve du Théorème 1.1 à partir de la Proposition 3.1. Fixons $0 < \vartheta \le 1/10$, et posons $H = D^{1+\vartheta}$ et $Y = H^{1/6} = D^{(1+\vartheta)/6}$. Pour les idéaux premiers $Y/2 < N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) \le Y$, $\mathfrak{p} \notin S$, soit p leurs générateurs primaires, choisis avec $p \equiv 1 \pmod 3$. Alors $\chi_n(p^6) = \mathbf{1}_{\mathfrak{p}\nmid n}$ et donc

$$|A_1(D) - A_{p^6}(D)| \le \|W\|_\infty \#\{n : (n,S) = 1, \mathfrak{p} \mid n, N_{K/\mathbb{Q}}(n) \asymp D\} \ll_W D/Y.$$

Pour ce corps fixé, le théorème des idéaux premiers de Landau [27] (voir [22], Théorème 5.33) donne $J \asymp Y/\log Y$ tels nombres premiers. Leurs puissances sixièmes sont des lignes distinctes de norme au plus H. Appliquons (26) avec une perte $\varepsilon/2$ et utilisons $\log Y \ll_\varepsilon D^{\varepsilon/2}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} |A_1(D)|^2 &\le \frac{2}{J} \sum_{\substack{Y/2<N_{K/\mathbb{Q}}(p)\le Y \\ (p,S)=1}} |A_{p^6}(D)|^2 + O_W(D^2/Y^2) \\ &\ll_{\nu,S,W,\vartheta,\varepsilon} D^{2+\vartheta+\varepsilon}/Y + D^2/Y^2 = D^{11/6+5\vartheta/6+\varepsilon} + D^{5/3-\vartheta/3}. \end{aligned} \tag{27}$$

Ainsi $A_1(D) \ll_{\nu,S,W,\vartheta,\varepsilon} D^{11/12+5\vartheta/12+\varepsilon}$. Étant donné toute perte d'exposant demandée, choisissons $\vartheta > 0$ puis la perte dans la Proposition 3.1 suffisamment petite. En renommant la perte résultante ε, nous obtenons

$$A_1(D) \ll_{\nu,S,W,\varepsilon} D^{11/12+\varepsilon}. \tag{28}$$

Nous utilisons maintenant (28) pour exclure un zéro de $L_K(s,\nu)$ dans $\Re s > 11/12$. Supposons qu'un tel zéro ϱ existe. Choisissons $0 \neq \phi \in C_c^\infty((1,2))$, $\phi \geq 0$, et $W(y) = y^{-\varrho}\phi(y)$. Avec la convention de Mellin $\widehat{W}(s) = \int_0^\infty W(y)y^s dy/y$, nous avons $\widehat{W}(\varrho) = \int \phi(y)dy/y > 0$. La fonction

$$\mathcal{M}_W(s) = \int_0^\infty A_1(D)D^{-s}\frac{dD}{D}$$

est holomorphe sur $\Re s > 11/12$: l'estimation (28) contrôle l'intégrale à l'infini, et le support compact de W fait que $A_1(D)$ s'annule pour D suffisamment petit. L'intégration terme à terme pour $\Re s > 1$ donne

$$\mathcal{M}_W(s) = \widehat{W}(s)\sum_{(n,S)=1}\frac{\mu(n)\nu(n)}{N_{K/\mathbb{Q}}(n)^s} = \frac{\widehat{W}(s)}{L_K^S(s,\nu)},$$

où L_K^S est le produit d'Euler en dehors de S :

$$L_K^S(s,\nu) := L_K(s,\nu)\prod_{\mathfrak{p}\in S}(1-\nu(\mathfrak{p})N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-s}).$$

Par le théorème de prolongement méromorphe de Hecke [21] (voir [22], § 5.10) et le théorème d'identité, l'identité $L_K^S(s,\nu)\mathcal{M}_W(s) = \widehat{W}(s)$ est valable sur $\Re s > 11/12$. Les facteurs d'Euler omis sont non nuls ici, donc l'évaluation en $s = \varrho$ donne $0 = \widehat{W}(\varrho) > 0$, une contradiction.

Pour déduire l'assertion pour les fonctions L de Dirichlet dans le Théorème 1.1, soit χ_{-3} le caractère non trivial modulo 3. Pour tout caractère de Dirichlet χ, le changement de base quadratique donne, à des facteurs d'Euler non nuls dans $\Re s > 0$ près,

$$L_K(s,\chi\circ N_{K/\mathbb{Q}}) = L(s,\chi)L(s,\chi\chi_{-3}).$$

La conclusion de Hecke exclut les zéros de l'un ou l'autre facteur en dehors de $s = 1$. En $s = 1$, la seule annulation pôle-zéro possible est exclue par le théorème de non-annulation de Dirichlet, qui donne $L(1,\chi_{-3}) > 0$ (voir [6], Chapitres 4 et 6). □

4. Sommation de Poisson et moyenne quadratique duale

Nous passons maintenant à l'estimation de moyenne quadratique dans la Proposition 3.1. Suivant l'étape 3 du plan, nous développons le carré et appliquons la sommation de Poisson dans la variable de ligne u. Les transformées de Fourier finies des caractères fournissent des sommes de Gauss. Les identités arithmétiques combinent ensuite ces sommes de Gauss avec les coefficients de Möbius originaux pour donner les coefficients de sommes de Gauss cubiques normalisés qui apparaissent dans la fonction thêta.

Les indices de colonne produits par le développement du carré n'ont pas besoin d'être premiers entre eux. Nous extrayons d'abord leur facteur commun, puis utilisons l'inversion de Möbius pour

séparer la condition de coprimalité restante. Ces opérations introduisent un indice de torsion auxiliaire et un idéal d'exclusion. La comparaison ci-dessous supprime l'exclusion sans changer la plage de lignes ni le produit des échelles de colonne et auxiliaire.

Nous enregistrons d'abord les identités arithmétiques et de Poisson, puis définissons cette famille. La Proposition 4.5 énonce l'estimation pour celle-ci qui suffit à prouver (26) ; le reste de la section prouve cette implication.

4.1. Les identités arithmétiques

Nous enregistrons d'abord les identités qui convertissent entre les coefficients de Möbius et les sommes de Gauss cubiques normalisées. Rappelons que, pour un élément primaire sans facteur carré n avec $(n, S) = 1$,

$$\alpha(n) = \frac{n}{|n|}, \quad \gamma_j(n) = \frac{1}{\sqrt{N_{K/\mathbb{Q}}(n)}} \sum_{x \bmod n} \chi_n(x)^j e(x/n) \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

où $e(z) = \exp(4\pi i \Im z/\sqrt{3})$, comme en (8). Posons

$$a_\xi(n) = \overline{\alpha(n)}\gamma_2(n)\xi(n) \quad (n \text{ sans facteur carré}),$$

où ξ est un caractère de classe de rayon fixe. Le caractère ξ rend compte de la torsion originale ν et des facteurs de classe de résidus dans les identités ci-dessous.

Par orthogonalité des caractères [22], § 3.1, nous pouvons absorber les fonctions sur un groupe de classes de rayon fixe dans une somme finie de torsions ξ. Choisissons un module fixe, supporté sur S, divisible par le conducteur de ν et suffisamment grand pour que tous les facteurs de réciprocité ci-dessous dépendent uniquement des classes de rayon correspondantes. Nous développons ensuite ces facteurs en caractères de ce groupe fini.

Le lemme suivant rassemble les conséquences standard des identités de Gauss-Jacobi, des évaluations de sommes de Gauss quadratiques et de la réciprocité.

Lemme 4 (Lemme 4.1)**.** *Sur un groupe de classes de rayon fixe, il existe une fonction G à valeurs dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et un bicharactère symétrique $\mathcal{R}$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Cela signifie que $\mathcal{R}(a, b) = \mathcal{R}(b, a)$ et $\mathcal{R}$ est multiplicatif en chaque argument séparément :*

$$\mathcal{R}(aa', b) = \mathcal{R}(a, b)\mathcal{R}(a', b), \quad \mathcal{R}(a, bb') = \mathcal{R}(a, b)\mathcal{R}(a, b'),$$

pour toutes les classes a, a', b, b' dans le groupe de classes de rayon. Ces fonctions ont les propriétés suivantes. Soient a, b, n des éléments primaires premiers à S, avec $(a, b) = 1$ et n sans facteur carré. Alors

$$\chi_b(a) = \mathcal{R}(a, b)\chi_a(b), \qquad G(ab) = G(a)G(b)\mathcal{R}(a, b), \tag{29}$$

$$\gamma_2(n)^3 = \mu(n)\alpha(n), \qquad \gamma_1(n)\gamma_2(n) = \mu(n)\alpha(n)G(n), \tag{30}$$

$$G(n) = \overline{\chi_n(4)}\gamma_3(n), \qquad \gamma_1(n)\gamma_{-1}(n) = \chi_n(-1). \tag{31}$$

Par conséquent

$$\overline{\alpha(n)}\gamma_2(n)\gamma_1(n) = \mu(n)G(n), \tag{32}$$

$$\mu(n)\gamma_{-1}(n) = \chi_n(-1)G(n)^{-1}\overline{\alpha(n)}\gamma_2(n), \tag{33}$$

$$a_\xi(ab) = a_\xi(a)a_\xi(b)\chi_b(a)^4, \tag{34}$$

$$\chi_a(-1)\overline{G(a)}G(b)\mathcal{R}(a,b) = G(ba^{-1}). \tag{35}$$

Dans (34), a, b sont également sans facteur carré. L'identité pour $G(ab)$ en (29) s'étend à toutes les classes du groupe de classes de rayon fixe ; le quotient en (35) est pris dans ce groupe.

La preuve, y compris la dépendance de G et $\mathcal{R}$ sur les classes de rayon fixes, est donnée dans l'annexe A.1. Sous la sommation de Poisson, (33) convertit les coefficients de Möbius en $a_\xi(n)$, à des facteurs de classe de rayon fixes près, tandis que (32) les reconvertit.

4.2. Sommation de Poisson avec nombres premiers exclus

La somme de lignes à laquelle nous appliquons la sommation de Poisson aura une restriction de coprimalité supplémentaire. Nous enregistrons la formule avec cette restriction incluse, afin que son effet sur les fréquences de Fourier et la normalisation soit explicite.

Pour un idéal non nul $\mathfrak{r}$, écrivons $\operatorname{rad}\mathfrak{r}$ pour le produit de ses diviseurs premiers distincts. Nous utilisons le caractère additif e introduit à l'étape 3. Dans les quotients et les sommes de Gauss, utilisons un générateur fixe pour chaque idéal, choisi primaire lorsque l'idéal est premier à 3.

Lemme 5 (Lemme 4.2)**.** *Soit $\mathcal{H} > 0$, soit $\mathfrak{r}$ un idéal non nul, et soit $\Phi(N_{K/\mathbb{Q}}(k)/\mathcal{H})$ un poids de Schwartz radial lisse sur le réseau de lignes. Soit χ un caractère multiplicatif primitif de $(\mathcal{O}/\mathfrak{m})^\times$, vu comme une fonction sur $\mathcal{O}$ par réduction modulo $\mathfrak{m}$ et extension par zéro sur les non-unités. Écrivons*

$$\gamma(\chi) = N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})^{-1/2} \sum_{x \bmod \mathfrak{m}} \chi(x)e(x/\mathfrak{m})$$

pour sa somme de Gauss normalisée. Puisque χ est primitif, son module $\mathfrak{m}$ est déterminé par χ et est supprimé dans la notation. Alors

$$\sum_k \chi(k)\mathbf{1}_{(k,\mathfrak{r})=1}\Phi(N_{K/\mathbb{Q}}(k)/\mathcal{H}) = \frac{\mathcal{H}\gamma(\chi)}{\sqrt{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})}} \sum_{d|\operatorname{rad}\mathfrak{r}} \frac{\mu(d)\chi(d)}{N_{K/\mathbb{Q}}(d)} \sum_h \overline{\chi(h)}\widehat{\Phi}\left(\frac{\mathcal{H}N_{K/\mathbb{Q}}(h)}{N_{K/\mathbb{Q}}(d)N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})}\right). \tag{36}$$

Ici $\widehat{\Phi}$ est défini par

$$\widehat{\Phi}(|w|^2) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\mathbb{C}} \Phi(|z|^2)e(-zw)\,dx\,dy, \quad z = x + iy.$$

La mesure est normalisée pour que $\mathcal{O}$ ait un covolume de un. Ici $k, h \in \mathcal{O}$, et h est la fréquence de Fourier. Nous avons

$$\chi \text{ non principal} \implies \overline{\chi(0)} = 0.$$

Pour le caractère primitif principal ($\chi = 1, \mathfrak{m} = 1$), la contribution de fréquence nulle est

$$\mathcal{H}\widehat{\Phi}(0)\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{r}}\left(1 - \frac{1}{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})}\right).$$

Démonstration. L'inclusion-exclusion suivie de $k = d\ell$ donne

$$\sum_k \chi(k)\mathbf{1}_{(k,\mathfrak{r})=1}\Phi(N_{K/\mathbb{Q}}(k)/\mathcal{H}) = \sum_{d\mid \operatorname{rad}\mathfrak{r}} \mu(d)\chi(d)\sum_\ell \chi(\ell)\Phi\left(\frac{N_{K/\mathbb{Q}}(\ell)}{\mathcal{H}/N_{K/\mathbb{Q}}(d)}\right).$$

Appliquons la sommation de Poisson sur réseau [22], Théorème 4.5 en ℓ sur les classes de résidus modulo $\mathfrak{m}$, à l'échelle $\mathcal{H}/N_{K/\mathbb{Q}}(d)$. L'identité de somme de Gauss primitive [22], (3.12) évalue la transformée de Fourier finie comme $\sqrt{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})}\gamma(\chi)\overline{\chi(h)}$ pour tout h, donnant (36). Pour un caractère primitif non principal, $\overline{\chi(0)} = 0$, donc le terme de fréquence nulle s'annule. Pour le caractère principal, sommons $\mu(d)/N_{K/\mathbb{Q}}(d)$ sur $d \mid \operatorname{rad}\mathfrak{r}$ pour obtenir la contribution de fréquence nulle affichée. □

4.3. Les moyennes quadratiques duales

Nous utilisons la moyenne quadratique suivante des sommes de colonnes avec les coefficients $a_\xi(n)$.

Définition 6 (Définition 4.3)**.** *Les paramètres $\mathcal{H}, X$ et F sont les échelles de norme de k, n et f, respectivement. Ici k parcourt les éléments de $\mathcal{O}$, et une étoile restreint une somme aux idéaux sans facteur carré premiers à S, représentés par leurs générateurs primaires. Pour un poids lisse W à support compact sur $(0,\infty)$, définissons la moyenne quadratique duale par*

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}, X, F; \xi, W) = \frac{1}{XF}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{F\le N_{K/\mathbb{Q}}(f)<2F\\(f,S)=1}}\sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(k)\preccurlyeq\mathcal{H}}\left|\sideset{}{^*}\sum_{(n,S)=1} a_\xi(n)\chi_n(k)\chi_n(f)^4 W(N_{K/\mathbb{Q}}(n)/X)\right|^2. \tag{37}$$

Ci-dessous, ξ parcourt tous les caractères du groupe de classes de rayon fixe choisi ci-dessus, à travers lesquels ν, G et $\mathcal{R}$ se factorisent.

Écrivons $\mathcal{E}_\mathfrak{r}$ pour la même expression avec la restriction supplémentaire $(n,\mathfrak{r}) = 1$. Cette notation n'est nécessaire que dans les réductions de Poisson ; la comparaison suivante revient à $\mathcal{E}$.

Lemme 7 (Lemme 4.4)**.** *Soit r_0 le produit des nombres premiers divisant $\mathfrak{r}$ en dehors de S. Pour $\mathcal{H}, X > 0$, $F \ge 1$, et W lisse à support compact,*

$$\mathcal{E}_\mathfrak{r}(\mathcal{H}, X, F; \xi, W) \le \tau_{div}(r_0)\sum_{d\mid r_0}\mathcal{E}\left(\mathcal{H}, \frac{X}{N_{K/\mathbb{Q}}(d)}, FN_{K/\mathbb{Q}}(d); \xi, W\right). \tag{38}$$

Démonstration. Soit $C_\mathfrak{r}(X; k, f)$ la somme de colonnes intérieure définissant $\mathcal{E}_\mathfrak{r}$, avec ξ, W fixés. L'inclusion-exclusion, $n = dm$, et (34) donnent

$$\begin{aligned} C_\mathfrak{r}(X; k, f) &= \sum_{d\mid r_0}\mu(d)\sideset{}{^*}\sum_{\substack{(n,S)=1\\ d\mid n}} a_\xi(n)\chi_n(k)\chi_n(f)^4 W(N_{K/\mathbb{Q}}(n)/X)\\ &= \sum_{\substack{d\mid r_0\\(d,f)=1}}\mu(d)a_\xi(d)\chi_d(k)\chi_d(f)^4 C_1(X/N_{K/\mathbb{Q}}(d); k, df).\end{aligned}$$

En effet, $\chi_m(d)^4$ force $(m,d)=1$ et se combine avec $\chi_m(f)^4$; les termes avec $(d,f)\neq 1$ s'annulent. Chaque coefficient extérieur a un module au plus un. Appliquons Cauchy-Schwarz en d, puis élargissons l'image injective $f\mapsto df$ à la plage sans facteur carré $FN_{K/\mathbb{Q}}(d)\le N_{K/\mathbb{Q}}(df)<2FN_{K/\mathbb{Q}}(d)$. Le produit de normalisation est inchangé : $(X/N_{K/\mathbb{Q}}(d))(FN_{K/\mathbb{Q}}(d))=XF$. □

4.4. Réduction à la moyenne quadratique duale

La proposition suivante donne l'estimation duale suffisante pour (26). Sa preuve applique la sommation de Poisson directement aux sommes de Möbius originales.

Proposition 8 (Proposition 4.5)**.** *Fixons $0<\vartheta\le 1/10$ et posons $H=D^{1+\vartheta}$. Pour chaque $C\ge 1$ fixé et tous réels $B,F\ge 1$, considérons les plages*

$$X=\frac{D}{BF},\quad 0<\mathcal{H}\le\frac{CD^2}{HB^2},\quad XF=\frac{D}{B}. \tag{39}$$

Supposons que pour tout $\varepsilon>0$ il existe un entier $J=J(\vartheta,\varepsilon)\ge 1$ tel que, pour tout intervalle compact $I\subset(0,\infty)$ et tout W lisse supporté dans I,

$$\mathcal{E}(\mathcal{H},X,F;\xi,W)\ll_{\nu,S,I,C,\vartheta,\varepsilon}\|W\|^2_{C^J(I)}D^{\varepsilon}XF, \tag{40}$$

où

$$\|W\|_{C^J(I)}=\max_{0\le j\le J}\sup_{x\in I}|W^{(j)}(x)|.$$

Pour les fonctions de plusieurs variables, la norme utilise toutes les dérivées partielles d'ordre total au plus J. Alors l'estimation de moyenne quadratique originale dans la Proposition 3.1 est valable.

Démonstration. Écrivons $I=[a_0,b_0]$. Choisissons un poids de Schwartz radial non négatif Φ tel que $\Phi(x)\ge 1$ sur $[0,1]$ et $\operatorname{supp}\widehat{\Phi}\subset[0,C_\Phi]$ pour un certain $C_\Phi>0$ fixé. Il suffit de prouver $\mathcal{M}_D\ll_{\nu,S,I,\vartheta,\varepsilon}\|W\|^2_{C^{J'}(I)}HD^{\varepsilon}$ pour un certain $J'=J'(\vartheta,\varepsilon)$, où

$$\mathcal{M}_D:=\frac{1}{D}\sum_{u\in\mathcal{O}}\Phi(N_{K/\mathbb{Q}}(u)/H)\left|\sum_{(n,S)=1}\mu(n)\nu(n)\chi_n(u)W(N_{K/\mathbb{Q}}(n)/D)\right|^2. \tag{41}$$

Conjuguons la somme intérieure, développons le carré, et posons $g=(n_1,n_2)$ et $n_j=gz_j$. Les indices sans facteur carré satisfont $(z_1,z_2)=(z_1z_2,g)=1$, et

$$\overline{\chi_{n_1}(u)}\chi_{n_2}(u)=\mathbf{1}_{(u,g)=1}\overline{\chi_{z_1}(u)}\chi_{z_2}(u).$$

Appliquons le Lemme 4.2 avec $\chi=\overline{\chi_{z_1}}\chi_{z_2}$ et exclusion g :

$$\sum_u\Phi(N_{K/\mathbb{Q}}(u)/H)\mathbf{1}_{(u,g)=1}\chi(u)=\sum_{e\mid g}\frac{H\mu(e)\chi(e)\gamma(\chi)}{N_{K/\mathbb{Q}}(e)\sqrt{N_{K/\mathbb{Q}}(z_1)N_{K/\mathbb{Q}}(z_2)}}\sum_h\overline{\chi(h)}\widehat{\Phi}\left(\frac{HN_{K/\mathbb{Q}}(h)}{N_{K/\mathbb{Q}}(e)N_{K/\mathbb{Q}}(z_1)N_{K/\mathbb{Q}}(z_2)}\right). \tag{42}$$

La fréquence nulle n'apparaît que lorsque $z_1=z_2=1$ et contribue

$$Z=\frac{H}{D}\widehat{\Phi}(0)\sideset{}{^*}\sum_{(g,S)=1}|W(N_{K/\mathbb{Q}}(g)/D)|^2\prod_{\mathfrak{p}\mid g}\left(1-\frac{1}{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})}\right)\ll_{\Phi,I}H\|W\|^2_\infty.$$

Retenons tous les $h \neq 0$, y compris ceux avec $z_1 = z_2 = 1$.

Développons la fonction de classe de rayon fixe $\nu(t)G(t^{-1}) = \sum_\xi c_\xi \xi(t)$. Le théorème des restes chinois et (33)-(35) donnent

$$\mu(z_1)\mu(z_2)\overline{\nu(z_1)}\nu(z_2)\gamma(\overline{\chi_{z_1}}\chi_{z_2}) = \sum_\xi c_\xi a_\xi(z_1)\overline{a_\xi(z_2)}. \tag{43}$$

Écrivons $N = N_{K/\mathbb{Q}}$ pour le reste de cette preuve, et posons $W_0(x) = x^{-1/2}\overline{W}(x)$. En substituant (43) dans (42), en incluant la normalisation $1/D$ dans (41), on obtient

$$\mathcal{M}_D - Z = \sum_\xi c_\xi \mathcal{S}_\xi, \quad |\mathcal{M}_D - Z| \ll \max_\xi |\mathcal{S}_\xi|,$$

puisque la somme de caractères est fixe et finie. Fixons ξ. En utilisant $\overline{\chi_z(e)} = \chi_z(e^5)$, sa contribution est

$$\mathcal{S}_\xi = \frac{H}{D^2}\sideset{}{^*}\sum_g \sum_{e|g} \frac{\mu(e)N(g)}{N(e)} \sum_{h\neq 0} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{z_1,z_2 \\ (z_1,z_2)=1 \\ (z_1z_2,g)=1}} a_\xi(z_1)\overline{a_\xi(z_2)}\chi_{z_1}(he^5)\overline{\chi_{z_2}(he^5)}$$
$$\times W_0\left(\frac{N(gz_1)}{D}\right)\overline{W_0\left(\frac{N(gz_2)}{D}\right)}\widehat{\Phi}\left(\frac{HN(h)}{N(e)N(z_1)N(z_2)}\right).$$

Ici et ci-dessous, chaque variable étoilée est sans facteur carré, primaire et première à S, tandis que h, k parcourent les éléments non nuls de $\mathcal{O}$. Nous devons montrer $|\mathcal{S}_\xi| \ll_{\nu,S,I,\vartheta,\varepsilon} \|W\|^2_{C^{J'}(I)} HD^\varepsilon$.

Insérons l'identité de coprimalité et changeons les variables :

$$\mathbf{1}_{(z_1,z_2)=1} = \sum_{v|z_1,\, v|z_2} \mu(v), \quad z_j = vm_j.$$

Par (34), le facteur commun des deux colonnes satisfait

$$a_\xi(vm) = a_\xi(v)a_\xi(m)\chi_m(v)^4, \quad |a_\xi(v)\chi_v(he^5)|^2 = \mathbf{1}_{(v,h)=1},$$

où $(v, e) = 1$. Ainsi la même somme devient

$$\mathcal{S}_\xi = \frac{H}{D^2}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{g,v \\ (g,v)=1}} \sum_{e|g} \frac{\mu(e)\mu(v)N(g)}{N(e)} \sum_{\substack{h\neq 0 \\ (h,v)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{m_1,m_2 \\ (m_1m_2,gv)=1}} a_\xi(m_1)\overline{a_\xi(m_2)}$$
$$\times \chi_{m_1}(he^5v^4)\overline{\chi_{m_2}(he^5v^4)}W_0\left(\frac{N(gvm_1)}{D}\right)\overline{W_0\left(\frac{N(gvm_2)}{D}\right)}$$
$$\times \widehat{\Phi}\left(\frac{HN(h)}{N(e)N(v)^2N(m_1)N(m_2)}\right).$$

Il n'y a plus de restriction $(m_1, m_2) = 1$. Faisons le changement de variables bijectif

$$b = g/e, \quad f = ev, \quad k = eh,$$

$$e=(f,k),\quad v=f/e,\quad g=be,\quad h=k/e.$$

Les b,f résultants sont premiers entre eux et sans facteur carré, $k\neq 0$ est arbitraire, et

$$gv=bf,\quad he^5v^4=kf^4,\quad \mu(e)\mu(v)=\mu(f),\quad \frac{N(g)}{N(e)}=N(b).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{S}_\xi=\frac{H}{D^2}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{b,f\\(b,f)=1}}\mu(f)N(b)\sum_{k\neq 0}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{m_1,m_2\\(m_1m_2,b)=1}}a_\xi(m_1)\overline{a_\xi(m_2)}\chi_{m_1}(kf^4)\overline{\chi_{m_2}(kf^4)}\times W_0\left(\frac{N(bfm_1)}{D}\right)\overline{W_0\left(\frac{N(bfm_2)}{D}\right)}\widehat{\Phi}\left(\frac{} \right. \tag{44}$$

Les caractères forcent $(m_j,f)=1$, ne laissant que l'exclusion affichée $(m_j,b)=1$. Les supports de W_0 et $\widehat{\Phi}$ donnent

$$N(b)N(f)\leq b_0D,\quad 0<N(k)\leq\frac{C_\Phi b_0^2D^2}{HN(b)^2}.$$

Partitionnons $B\leq N(b)<2B$ et $F\leq N(f)<2F$ en plages dyadiques. Désignons la contribution correspondante à (44) par $\mathcal{S}_{\xi;B,F}$, et posons

$$X=\frac{D}{BF},\quad \mathcal{H}=\frac{C_{I,\Phi}D^2}{HB^2},\quad C_{I,\Phi}=\max(2,C_\Phi b_0^2).$$

Ceux-ci satisfont (39). Dans les variables $x_j=N(m_j)/X$, le poids lisse couplé est

$$\mathcal{K}_{b,f,k}(x_1,x_2)=W_0(rx_1)\overline{W_0(rx_2)}\widehat{\Phi}\left(\frac{a}{x_1x_2}\right),$$

$$r=\frac{N(b)N(f)}{BF}\in[1,4],\quad a=\frac{HN(k)}{N(f)^2X^2}\leq C_{I,\Phi}.$$

Pour tout entier $q\geq 0$, ces noyaux satisfont

$$\sup_{b,f,k}\|\mathcal{K}_{b,f,k}\|_{C^q([a_0/4,b_0]^2)}\ll_{I,\Phi,q}\|W\|^2_{C^q(I)}.$$

Pour $U\in C_c^\infty(I_*)$, où $I_*=[a_0/8,2b_0]$, posons

$$S_U(b,f,k)=\sideset{}{^*}\sum_{\substack{(n,S)=1\\(n,b)=1}}a_\xi(n)\chi_n(k)\chi_n(f)^4U(N(n)/X).$$

Les décalages $(X,F)\mapsto(X/N(d),FN(d))$ préservent (39). Ainsi le Lemme 4.4 et (40), avec $J=J(\vartheta,\varepsilon/4)$, donnent

$$\begin{aligned}\sum_{f,k}|S_U(b,f,k)|^2&=XF\mathcal{E}_{(b)}(\mathcal{H},X,F;\xi,U)\\&\leq XF\tau_{\mathrm{div}}(b)\sum_{d|b}\mathcal{E}(\mathcal{H},X/N(d),FN(d);\xi,U)\\&\ll_{\nu,S,I,\vartheta,\varepsilon}D^{\varepsilon/2}(XF)^2\|U\|^2_{C^J(I_*)}.\end{aligned}$$

Ici $N(b) \ll_I D$, donc les facteurs de diviseurs sont absorbés dans $D^{\varepsilon/4}$. Nous utilisons le principe de poids lisse suivant, énoncé et prouvé dans le Lemme B.2 : une borne de moyenne quadratique valable pour toute fonction de test commune, avec une norme C^J, borne également la somme quadratique correspondante avec un noyau dépendant de la ligne, à un coût donné par la norme C^{2J+4} du noyau. Pour chaque b fixé, appliquons le Lemme B.2 avec l'indice de ligne (f,k), le coefficient $\mu(f)\mathbf{1}_{(f,b)=1}$, et le noyau $\mathcal{K}_{b,f,k}$. La plage de lignes plus grande $0 < N(k) \le \mathcal{H}$ n'ajoute que des termes dont le noyau original s'annule. Avec $q = 2J+4$, cela donne

$$|\mathcal{S}_{\xi;B,F}| \ll_{\nu,S,I,\vartheta,\varepsilon} D^{\varepsilon/2}\|W\|^2_{C^q(I)} \sideset{}{^*}\sum_{B\le N(b)<2B} \frac{HN(b)}{D^2}(XF)^2 \ll D^{\varepsilon/2}\|W\|^2_{C^q(I)}\frac{HB}{D^2}B(XF)^2 = D^{\varepsilon/2}\|W\|^2_{C^q(I)}H, \tag{45}$$

où $XF = D/B$ et le comptage des idéaux donne $O(B)$ choix de b. En sommant les $O((\log D)^2)$ plages dyadiques non vides, on borne $\mathcal{S}_\xi$ comme requis. Sommons sur l'ensemble fini fixe de ξ, incluons Z, et restaurons le facteur D pour obtenir (26). L'ordre de dérivation requis dépend uniquement de ϑ, ε. □

5. Itération de l'estimation de moyenne quadratique duale

Posons $\Sigma = XF$. Nous prouvons l'estimation suivante pour la famille (37), avec les exclusions supprimées par le Lemme 4.4. Les deux entrées sont prouvées dans les sections 6 et 7.

Proposition 9 (Proposition 5.1)**.** *Fixons $\kappa > 0$ et $C_0 \ge 1$. Supposons que*

$$\mathcal{H}, X, F \ge 1, \quad \Sigma = XF \le D^{C_0}, \quad \mathcal{H} \le \Sigma D^{-\kappa}. \tag{46}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $J = J(\kappa, C_0, \varepsilon) \ge 1$ tel que

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}, X, F; \xi, W) \ll_{I,\nu,S,\kappa,C_0,\varepsilon} \|W\|^2_{C^J(I)} D^\varepsilon \Sigma \tag{47}$$

pour tout intervalle compact $I \subset (0,\infty)$ et tout W lisse supporté dans I.

La preuve est donnée dans la section 5.5, en utilisant le Lemme 5.3 et la Proposition 5.4.

5.1. Les sommes complétées

Soit Ψ une fonction complètement multiplicative à valeurs dans $\mathbb{C}$ sur les idéaux intégraux non nuls de $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$ premiers à 3, s'annulant sur les idéaux divisibles par un nombre premier dans S. Pour un élément primaire n, écrivons $\Psi(n) = \Psi((n))$. Définissons

$$T(X;\Psi) = \sideset{}{^*}\sum_{(n,S)=1} \sum_{\substack{b\in\mathcal{O}\\ b\equiv 1 \pmod 3\\ (b,S)=1}} \frac{\overline{\alpha(n)}\gamma_2(n)\Psi(n)\overline{\alpha(b)}^3\Psi(b)^3}{\sqrt{N_{K/\mathbb{Q}}(n)N_{K/\mathbb{Q}}(b)}} V_*(N_{K/\mathbb{Q}}(n)N_{K/\mathbb{Q}}(b)^3/X), \tag{48}$$

où $V_*(y) = \sqrt{y}W(y)$. L'indice supplémentaire b fournit les cubes dans le développement de Fourier de la fonction thêta de Kubota. Ici n, b sont des éléments primaires de $\mathcal{O}$; seul n est requis sans

facteur carré.

La partie $b = 1$ est exactement $X^{-1/2} \sideset{}{^*}\sum_{(n,S)=1} \overline{\alpha(n)}\gamma_2(n)\Psi(n)W(N_{K/\mathbb{Q}}(n)/X)$. Pour identifier cela avec la somme de colonnes normalisée dans (37), fixons un caractère de classe de rayon ξ. Pour une ligne non nulle $k \in \mathcal{O}$ et un f primaire sans facteur carré premier à S, posons

$$\Psi_k(n) := \xi(n)\chi_n(k)\chi_n(f)^4, \quad T(X; k, f) := T(X; \Psi_k). \tag{49}$$

Le produit affiché définit $\Psi_k(n)$ pour $(n, S) = 1$; posons $\Psi_k(n) = 0$ sinon. Ainsi l'extension par zéro requise dans (48) fait partie de cette définition.

5.2. L'estimation de moyenne quadratique complétée

Pour la torsion (49), la transformation thêta convertit les torsions sextiques pertinentes en caractères quadratiques. En la combinant avec le grand crible quadratique, on obtient l'estimation suivante, prouvée dans la section 6.

Proposition 10 (Proposition 5.2)**.** *Fixons $\varepsilon > 0$, $C_0 \geq 1$, et un caractère ξ du groupe de classes de rayon fixe. Il existe $J = J(\varepsilon, C_0) \geq 1$ tel que*

$$\sum_{0<N_{K/\mathbb{Q}}(k)\preccurlyeq\mathcal{H}} |T(X; k, f)|^2 \ll_{I,\xi,S,\varepsilon,C_0} D^{\varepsilon}\|W\|^2_{C^J(I)} \left(\mathcal{H} + \frac{\mathcal{H}^2 N_{K/\mathbb{Q}}(f)}{X}\right) \tag{50}$$

chaque fois que

$$1 \leq \mathcal{H}, X, N_{K/\mathbb{Q}}(f) \leq D^{C_0}.$$

Ici f est sans facteur carré et primaire avec $(f, S) = 1$, W est lisse et supporté dans un intervalle compact $I \subset (0, \infty)$, et T est défini par (49).

5.3. Inversion cubique et sommes restantes

Posons

$$H_c^3 = \min\left(X, \frac{X^2}{\mathcal{H}^2}\right), \quad L_b = \frac{X}{N_{K/\mathbb{Q}}(b)^3}. \tag{51}$$

Lemme 11 (Lemme 5.3)**.** *Fixons $C_0 \geq 1$ et $\varepsilon > 0$. Supposons $1 \leq \mathcal{H}, X, F \leq D^{C_0}$ et $\mathcal{H} \leq \Sigma = XF$. Il existe un entier $J = J(\varepsilon, C_0) \geq 1$ tel que*

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}, X, F; \xi, W) \ll_{I,\nu,S,C_0,\varepsilon} D^{\varepsilon}\left(\Sigma\|W\|^2_{C^J(I)} + \sup_{\substack{b\equiv 1 \pmod 3,\,(b,S)=1\\ N_{K/\mathbb{Q}}(b)>H_c,\,L_b>1}} \mathcal{E}(\mathcal{H}, L_b, F; \xi, W)\right) \tag{52}$$

pour tout intervalle compact $I \subset (0, \infty)$ et $W \in C_c^\infty(I)$. Un supremum vide est nul ; en particulier il est vide lorsque $\mathcal{H}^2 \leq X$.

Démonstration. Écrivons $N = N_{K/\mathbb{Q}}$ et $I = [u, v]$. La multiplicativité complète dans (48), y compris aux zéros de Ψ_k, donne

$$X^{-1/2} \sideset{}{^*}\sum_{(n,S)=1} a_\xi(n)\chi_n(k)\chi_n(f)^4 W(N(n)/X) = \sum_{(h,S)=1} \frac{\mu(h)\overline{\alpha(h)}^3\Psi_k(h)^3}{N(h)} T(X/N(h)^3; k, f). \tag{53}$$

En effet, après substitution de (48), le coefficient de l'indice cubique total b contient $\sum_{h|b}\mu(h) = \mathbf{1}_{b=1}$. C'est l'inversion de Möbius ; comparer [22], (1.18) et [7], (8.2).

Séparons le membre de droite de (53) en $P_{\mathrm{court}}(k,f) + P_{\mathrm{long}}(k,f)$, où

$$P_{\mathrm{court}}(k,f) = \sum_{\substack{(h,S)=1\\ N(h)\le H_c}} \frac{\mu(h)\overline{\alpha(h)}^3\Psi_k(h)^3}{N(h)} T(X/N(h)^3; k, f),$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{court}} = \frac{1}{F}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{F\le N(f)<2F\\ (f,S)=1}} \sum_{0<N(k)\preccurlyeq\mathcal{H}} |P_{\mathrm{court}}(k,f)|^2.$$

Définissons $\mathcal{E}_{\mathrm{long}}$ de la même manière en utilisant P_{long}. Cauchy-Schwarz pondéré pour chaque k, f, suivi de la Proposition 5.2, donne

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathrm{court}} &\le \left(\sum_{N(h)\le H_c}\frac{1}{N(h)}\right)\sum_{N(h)\le H_c}\frac{1}{N(h)}\frac{1}{F}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{F\le N(f)<2F\\ (f,S)=1}}\sum_{0<N(k)\preccurlyeq\mathcal{H}}|T(X/N(h)^3;k,f)|^2\\ &\ll_{I,\nu,S,C_0,\varepsilon} D^{\varepsilon/2}\|W\|^2_{C^J(I)}\left(\mathcal{H}+\frac{\mathcal{H}^2FH_c^3}{X}\right)\ll D^{\varepsilon/2}\Sigma\|W\|^2_{C^J(I)}. \qquad (54)\end{aligned}$$

Ici $X/N(h)^3 \ge 1$, et la somme des normes réciproques ne contribue qu'un logarithme. Nous utilisons la Proposition 5.2 avec l'exposant $\varepsilon/4$ et la plage C_0+1, puisque $N(f) < 2D^{C_0}$. Si $H_c < 1$, la somme est vide.

Développons T en utilisant (48) dans les termes restants, avec l'indice cubique c :

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{long}}(k,f) = \frac{1}{\sqrt{X}}\sum_{\substack{(h,S)=1\\ N(h)>H_c}}\sum_{(c,S)=1}\mu(h)\sqrt{N(hc)}\overline{\alpha(hc)}^3\Psi_k(hc)^3\\ \times\sideset{}{^*}\sum_{(n,S)=1}a_\xi(n)\chi_n(k)\chi_n(f)^4W\left(\frac{N(n)N(hc)^3}{X}\right).\end{aligned}$$

Posons $b = hc$; les paires donnant b sont exactement $(h, b/h)$ avec $h \mid b$ et $N(h) > H_c$. Puisque $\Psi_k(b)^3 = \xi(b)^3\chi_b(k)^3\mathbf{1}_{(b,f)=1}$, cela donne

$$P_{\mathrm{long}}(k,f) = \sum_{\substack{(b,S)=1\\ N(b)>H_c}}\frac{\beta_0(b,f)\chi_b(k)^3}{N(b)}\frac{1}{\sqrt{L_b}}\sideset{}{^*}\sum_{(n,S)=1}a_\xi(n)\chi_n(k)\chi_n(f)^4W(N(n)/L_b),$$

$$\beta_0(b,f) := \overline{\alpha(b)}^3\xi(b)^3\mathbf{1}_{(b,f)=1}\sum_{\substack{h|b\\ N(h)>H_c}}\mu(h), \quad |\beta_0(b,f)|\le\tau_{\mathrm{div}}(b).$$

La fonction diviseur $\tau_{\mathrm{div}}(b)$ compte les diviseurs idéaux. Tous ces indices sont primaires et premiers à S ; b n'a pas besoin d'être sans facteur carré. Le support de W restreint la somme à $N(b)^3 \le vX$.

Cauchy-Schwarz pondéré donne maintenant

$$\mathcal{E}_{\mathrm{long}} \le \left(\sum_{\substack{H_c < N(b) \le (vX)^{1/3} \\ (b,S)=1}} \frac{\tau_{\mathrm{div}}(b)}{N(b)} \right) \sum_{\substack{H_c < N(b) \le (vX)^{1/3} \\ (b,S)=1}} \frac{\tau_{\mathrm{div}}(b)}{N(b)} \mathcal{E}(\mathcal{H}, L_b, F; \xi, W).$$

La somme des diviseurs réciproques est $\ll_I \log^2(2+X)$, puisque

$$\sum_{N(b)\le R} \frac{\tau_{\mathrm{div}}(b)}{N(b)} = \sum_{N(cd)\le R} \frac{1}{N(c)N(d)} \le \left(\sum_{N(c)\le R} \frac{1}{N(c)} \right)^2 \ll \log^2(2R) \quad (R \ge 1).$$

Si $L_b \le 1$, la somme de colonnes est vide sauf si $L_b \ge 1/v$; sinon elle a $O_I(1)$ termes, donc

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}, L_b, F; \xi, W) \ll_I \frac{\mathcal{H}}{L_b} \|W\|_\infty^2 \ll_I \Sigma \|W\|_\infty^2.$$

Absorbons les logarithmes dans D^ε et combinons les deux parties en utilisant $\mathcal{E} \le 2\mathcal{E}_{\mathrm{court}} + 2\mathcal{E}_{\mathrm{long}}$. Cela prouve (52). Si $\mathcal{H}^2 \le X$, alors $H_c = X^{1/3}$, donc $N(b) > H_c$ implique $L_b < 1$. □

5.4. L'estimation de transfert

Fixons un poids de Schwartz radial non négatif Φ avec $\Phi(t) \ge 1$ pour $0 \le t \le 1$ et $\operatorname{supp} \widehat{\Phi} \subset [0, C_\Phi]$. Un tel poids est obtenu en élevant au carré et en redimensionnant une fonction de Schwartz radiale réelle à transformée de Fourier à support compact. Écrivons $N = N_{K/\mathbb{Q}}$. Pour $\mathcal{H}, L, F, \xi$ fixés, posons

$$\mathcal{A}(W) := \frac{1}{LF} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{F \le N(f) < 2F \\ (f,S)=1}} \sum_{k \in \mathcal{O}} \Phi(N(k)/\mathcal{H}) \left| \sideset{}{^*}\sum_{(n,S)=1} a_\xi(n) \chi_n(k) \chi_n(f)^4 W(N(n)/L) \right|^2. \tag{55}$$

Ainsi $\mathcal{E}(\mathcal{H}, L, F; \xi, W) \le \mathcal{A}(W)$. Dans la proposition suivante, Σ est une échelle cible indépendante ; nous l'appliquerons à l'échelle de colonne L_b avec $\Sigma = XF$.

Proposition 12 (Proposition 5.4)**.** *Supposons $1 \le \mathcal{H}, L, F, \Sigma \le D^{C_0}$ et $\max\{\mathcal{H}, LF\} \le \Sigma$, pour $C_0 \ge 1$ fixé. Pour tout entier $m \ge 0$ et $\varepsilon > 0$,*

$$\mathcal{A}(W) \ll D^\varepsilon \Sigma \|W\|_{C^{4m+12}(I)}^2 \left(1 + \sup \frac{\mathcal{E}(\mathcal{H}', X', F'; \xi', U)}{\Sigma'} \right) \tag{56}$$

où le supremum est sur la famille (37), avec $\Sigma' = X'F'$, $\mathcal{H}', X', F' \ge 1$, et

$$\mathcal{H}' \le \frac{\mathcal{H}L}{\Sigma F}, \quad \frac{\mathcal{H}'}{\Sigma'} \le \frac{\mathcal{H}}{\Sigma}, \quad \Sigma' \le L. \tag{57}$$

Pour $I = [u, v]$, les tests satisfont $U \in C_c^\infty(I')$, $I' = [u/16, 4v]$, et $\|U\|_{C^m(I')} \le 1$; un supremum vide est nul. L'estimation est valable pour tout compact $I \subset (0, \infty)$ et $W \in C_c^\infty(I)$, avec une constante implicite dépendant de $m, C_0, \varepsilon, I, \nu, S$ et du groupe de classes de rayon fixe.

La preuve est donnée dans la section 7, en combinant les Lemmes 7.1 et 7.3.

5.5. Preuve de la Proposition 5.1

Preuve de la Proposition 5.1. Fixons $\kappa > 0$ et $C_0 \geq 1$. Nous prouvons par récurrence sur $j \geq 0$ que la proposition est valable sous la restriction supplémentaire $\mathcal{H} \leq D^{j\kappa}$, avec l'ordre de dérivation et la constante implicite autorisés à dépendre de j. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $J = J(j, \kappa, C_0, \varepsilon) \geq 1$ tel que

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}, X, F; \xi, W) \ll_{I,\nu,S,j,\kappa,C_0,\varepsilon} D^{\varepsilon}\Sigma\|W\|^2_{C^J(I)}$$

pour tout intervalle compact $I = [u, v] \subset (0, \infty)$ et $W \in C_c^\infty(I)$, sous les hypothèses de la proposition. L'ordre de dérivation est indépendant de I ; cela nous permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence sur l'intervalle élargi dans l'estimation de transfert. Pour le cas de base $j = 0$, nous avons $\mathcal{H} \leq 1$. Dans (37), le support de W restreint n aux $O_I(X)$ idéaux avec $N_{K/\mathbb{Q}}(n) \in [uX, vX]$. Les facteurs $a_\xi(n), \chi_n(k)$ et $\chi_n(f)^4$ ont une valeur absolue au plus un, donc l'inégalité triangulaire borne chaque somme intérieure par $O_I(X\|W\|_\infty)$. Il y a $O(F)$ choix de f et $O(\mathcal{H})$ choix de k. Par conséquent,

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}, X, F; \xi, W) \ll_I \frac{F\mathcal{H}}{XF}(X\|W\|_\infty)^2 = \mathcal{H}X\|W\|^2_\infty.$$

En divisant par $\Sigma = XF$ et en utilisant $\mathcal{H} \leq 1$ et $F \geq 1$, on prouve l'assertion pour $j = 0$, avec $J = 1$.

Supposons l'assertion vraie pour j, et fixons $\varepsilon > 0$. Soit m l'ordre de dérivation fourni par l'hypothèse de récurrence avec l'exposant $\varepsilon/3$. Pour $\mathcal{H} \leq D^{(j+1)\kappa}$, appliquons le Lemme 5.3 avec l'exposant $\varepsilon/3$. Nous devons borner les moyennes quadratiques dans son supremum uniformément en b. Si ce supremum est non vide, alors $\mathcal{H}^2 > X$ et $H_c^3 = X^2/\mathcal{H}^2$. Pour chaque tel b, rappelons que $L_b = X/N_{K/\mathbb{Q}}(b)^3 > 1$. Puisque $L_b \leq X$ et $\Sigma \geq \max\{\mathcal{H}, L_bF\}$, la Proposition 5.4 s'applique à l'échelle de colonne L_b, avec l'ordre de dérivation m, et l'exposant $\varepsilon/3$. Son estimation borne également $\mathcal{E}(\mathcal{H}, L_b, F; \xi, W)$ car $\mathcal{E}(\mathcal{H}, L_b, F; \xi, W) \leq \mathcal{A}(W)$.

Soient $\mathcal{H}', X', F'$ des paramètres quelconques dans le supremum de (56), avec $\Sigma' = X'F'$ comme dans cette proposition. Par (57) et $N_{K/\mathbb{Q}}(b) > H_c$,

$$\mathcal{H}' \leq \frac{\mathcal{H}L_b}{\Sigma F} = \frac{\mathcal{H}}{N_{K/\mathbb{Q}}(b)^3F^2} < \mathcal{H}\left(\frac{\mathcal{H}}{X}\right)^2 \leq D^{-2\kappa}\mathcal{H} \leq D^{j\kappa},$$

$$\frac{\mathcal{H}'}{\Sigma'} \leq \frac{\mathcal{H}}{\Sigma} \leq D^{-\kappa}, \quad \Sigma' \leq L_b \leq \Sigma \leq D^{C_0}.$$

Ainsi chacune de ces moyennes quadratiques est couverte par l'hypothèse de récurrence. Son poids U est supporté dans $[u/16, 4v]$ et a une norme C^m au plus un. En appliquant l'hypothèse de récurrence sur cet intervalle, on obtient

$$\frac{\mathcal{E}(\mathcal{H}', X', F'; \xi', U)}{\Sigma'} \ll_{I,\nu,S,j,\kappa,C_0,\varepsilon} D^{\varepsilon/3}.$$

L'intervalle élargi est déterminé par I, donc la constante implicite n'a que la dépendance autorisée au support. En substituant dans (56), on obtient, uniformément en b,

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}, L_b, F; \xi, W) \ll_{I,\nu,S,j,\kappa,C_0,\varepsilon} D^{2\varepsilon/3}\Sigma\|W\|^2_{C^{4m+12}(I)}.$$

La substitution dans (52) contribue le facteur restant $D^{\varepsilon/3}$. Choisissons J au moins $4m+12$ et au moins l'ordre de dérivation requis par le Lemme 5.3. Nous obtenons

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}, X, F; \xi, W) \ll_{I,\nu,S,j,\kappa,C_0,\varepsilon} D^{\varepsilon}\Sigma\|W\|^2_{C^J(I)}.$$

Le choix de J dépend uniquement de $j, \kappa, C_0, \varepsilon$. Si le supremum dans (52) est vide, la même borne découle directement de ce lemme. Cela complète la récurrence.

Enfin, prenons $j = \lceil C_0/\kappa \rceil$. L'hypothèse $\mathcal{H} \le \Sigma \le D^{C_0}$ assure $\mathcal{H} \le D^{j\kappa}$, donc la récurrence donne la proposition. □

5.6. La moyenne quadratique originale et l'exposant 11/12

Preuve de la Proposition 3.1. Fixons $0 < \vartheta \le 1/10$ et posons $H = D^{1+\vartheta}$. Les plages dans (39) donnent

$$\mathcal{H} \le \frac{CD^{1-\vartheta}}{B^2}, \quad \Sigma = XF = \frac{D}{B}, \quad \frac{\mathcal{H}}{\Sigma} \ll D^{-\vartheta}. \tag{58}$$

Pour D grand, la Proposition 5.1 s'applique avec $\kappa = \vartheta/2$ et $C_0 = 2$. Si $X < 1$, un support non vide force $X \gg_I 1$, et le comptage donne $\mathcal{E} \ll_I \mathcal{H}\|W\|^2_\infty \ll \Sigma\|W\|^2_\infty$; si $\mathcal{H} < 1$, la somme est vide. Ainsi (40) est valable, avec un ordre de dérivation dépendant uniquement de ϑ, ε, et la Proposition 4.5 prouve (26). Le cas D borné est à nouveau couvert par le comptage. □

6. Preuve de l'estimation de moyenne quadratique complétée

Nous prouvons la Proposition 5.2. Nous exprimons d'abord la somme complétée (48) en utilisant les coefficients thêta cubiques et énonçons la formule de transformation. Nous appliquons ensuite le grand crible quadratique et tenons compte des facteurs premiers répétés dans k.

6.1. Réalisation par la fonction thêta cubique

Avec la ligne k et l'indice auxiliaire f fixés, nous exprimons $T(X; k, f)$ comme une somme pondérée de coefficients de Fourier de la fonction thêta cubique. Son automorphie exprime ensuite cette somme en termes de coefficients à d'autres pointes, comme dans [7], § 5 et Annexe A. Nous utilisons Ψ_k de (49), en supprimant sa dépendance au f fixé et à ξ.
Écrivons $(z, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{>0}$ pour les coordonnées du demi-espace supérieur, avec la coordonnée horizontale z et la hauteur v. Nous utilisons la fonction thêta cubique de Kubota dans la normalisation de [7], § 5.1, (5.6) :

$$\theta(z, v) = \frac{3^{5/2}}{2} v^{2/3} + \sum_{\substack{\ell \in \lambda^{-3}\mathcal{O} \\ \ell \neq 0}} \tau(\ell) v K_{1/3}(4\pi|\ell|v) \exp(2\pi i(\ell z + \bar{\ell}\bar{z})). \tag{59}$$

Ici $K_{1/3}$ est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce, et $\tau(\ell)$ est la suite de coefficients donnée explicitement dans [7], (5.7)-(5.8), suivant le calcul de Patterson [38], Théorème 8.1.

Nous définissons $\Theta_k(z,v)$ en tordant les coefficients de Fourier de $\bar\theta$. Définissons d'abord $\phi_k : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ par

$$\phi_k(n) = \begin{cases} \chi_n(\lambda)^2 \Psi_k(n), & n \equiv 1 \pmod 3, \quad (n,S)=1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous définissons ensuite $\Theta_k(z,v)$ en multipliant le coefficient de Fourier de $\bar\theta$ en ℓ, qui est $\overline{\tau(-\ell)}$, par $\phi_k(\lambda^3\ell)$:

$$\Theta_k(z,v) = \sum_{\substack{\ell \in \lambda^{-3}\mathcal{O} \\ \ell \neq 0}} \overline{\tau(-\ell)} \phi_k(\lambda^3\ell) v K_{1/3}(4\pi|\ell|v) \exp(2\pi i(\ell z + \bar\ell \bar z)). \tag{60}$$

Rappelons que $c_\theta(nb^3)$ est défini en (12). Choisissons un $q \in \mathcal{O}$ non nul tel que ϕ_k soit périodique modulo q, et posons

$$\widehat{\phi}_k(h) = \frac{1}{N_{K/\mathbb{Q}}(q)} \sum_{n \bmod q} \phi_k(n) e(-hn/q).$$

Lemme 13 (Lemme 6.1)**.** *Avec ces définitions,*

$$T(X;k,f) = \frac{1}{3^{5/2}\sqrt{X}} \sum_{\substack{n,b \in \mathcal{O} \\ n,b \equiv 1 \pmod 3 \\ n \text{ sans facteur carré} \\ (nb,S)=1}} c_\theta(nb^3)\phi_k(nb^3)\overline{\alpha(nb^3)} W\left(\frac{N_{K/\mathbb{Q}}(nb^3)}{X}\right). \tag{61}$$

De plus,

$$\Theta_k(z,v) = \sum_{h \in \mathcal{O}/q} \widehat{\phi}_k(h) \theta(z + \lambda^2 h/q, v). \tag{62}$$

Démonstration. La formule des coefficients (12) donne

$$c_\theta(nb^3)\phi_k(nb^3) = 3^{5/2}|b|\gamma_2(n)\Psi_k(n)\Psi_k(b)^3.$$

La substitution dans (48), en utilisant $V_*(y) = \sqrt{y}W(y)$, prouve (61). L'inversion de Fourier finie donne

$$\phi_k(n) = \sum_{h \in \mathcal{O}/q} \widehat{\phi}_k(h) e(nh/q), \qquad \sum_{h \in \mathcal{O}/q} \widehat{\phi}_k(h) = \phi_k(0) = 0.$$

La multiplication du ℓ-ième mode de Fourier par $e(\lambda^3\ell h/q)$ translate z en $z + \lambda^2 h/q$. La seconde identité annule le terme constant, prouvant (62). □

La formule de transformation résultante est énoncée dans la sous-section suivante ; son calcul d'automorphie est donné dans l'annexe A.2.

6.2. La transformation thêta

Rappelons que, pour un nombre premier primaire $p \notin S$, $\chi_p(x) = (x/p)_6$ est le caractère de résidu sextique sur $(\mathcal{O}/(p))^\times$. Pour tout entier j, écrivons χ_p^j pour sa j-ième puissance sur ce groupe, étendue par zéro sur les multiples de p ; en particulier, $\chi_p^0(x) = \mathbf{1}_{p\nmid x}$. La réciprocité sextique (29) exprime les facteurs de Ψ_k aux nombres premiers en dehors de S comme de telles puissances, avec $0 \le j \le 5$.

Pour un nombre premier primaire $p \notin S$, $j \in \{0, \dots, 5\}$, et $x \in \mathcal{O}$, définissons le facteur local

$$B_{p,j}(x) = \begin{cases} \chi_p(x)^{-j-2}, & j \neq 0, 4, \\ N_{K/\mathbb{Q}}(p)^{-1/2}(-1 + N_{K/\mathbb{Q}}(p)\mathbf{1}_{p|x}), & j = 4, \\ N_{K/\mathbb{Q}}(p)^{-1/2}\chi_p(x)^{-2}, & j = 0. \end{cases} \tag{63}$$

Le cas clé est le caractère quadratique

$$B_{p,1}(x) = \chi_p(x)^3.$$

Pour le poids lisse à support compact V_* dans (48), posons $\widehat{V}_*(s) = \int_0^\infty V_*(x)x^s dx/x$. Nous écrivons $\int_{(\sigma)}$ pour l'intégration vers le haut le long de la ligne verticale de partie réelle σ. Avec Γ désignant la fonction gamma d'Euler, la transformée accompagnant le poids est

$$V_*^\sharp(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} \widehat{V}_*(-t)\frac{\Gamma(7/6+t)\Gamma(5/6+t)}{\Gamma(7/6-t)\Gamma(5/6-t)}\left(\frac{(2\pi)^4 x}{27}\right)^{-t} dt, \quad x > 0. \tag{64}$$

Ici θ est la fonction thêta cubique de Kubota, normalisée en (59). Les sommes duales utilisent les coefficients de Fourier de $\bar{\theta}$ à trois pointes. Prenons les représentants

$$\gamma_0 = I, \quad \gamma_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega^2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{65}$$

agissant sur le demi-espace supérieur. Pour $\sigma \in \{0, +, -\}$, définissons $d_\sigma(\ell)$ par le développement de Fourier [7], (5.9), (5.15)

$$\overline{\theta(\gamma_\sigma(z,v))} = \frac{3^{5/2}}{2}\mathbf{1}_{\sigma=0}v^{2/3} + \sum_{0\neq\ell\in\lambda^{-4}\mathcal{O}} d_\sigma(\ell)vK_{1/3}(4\pi|\ell|v)\exp(2\pi i(\ell z + \bar{\ell}\bar{z})). \tag{66}$$

Ainsi $d_0(\ell) = \overline{\tau(-\ell)}$, avec τ étendu par zéro en dehors de $\lambda^{-3}\mathcal{O}$. En particulier, $c_\theta(nb^3) = d_0(\lambda^{-3}nb^3)$ pour les indices dans (12) ; le plan utilise $d_\theta(m)$ pour $d_\sigma(\lambda^{-4}m)$ avec l'un de ces trois choix de σ. Les formules arithmétiques pour les trois suites sont données par (91) et (92) dans l'annexe A.2.

Nous énonçons la formule pour un produit général de torsions locales. Fixons un caractère de classe de rayon dont le conducteur est supporté sur S, et soit Ψ_0 son extension par zéro à chaque nombre premier dans S. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble fini de nombres premiers en dehors de S, chacun représenté par son générateur primaire dans $\mathcal{O}$, et choisissons des entiers $0 \leq j_p \leq 5$ pour chaque $p \in \mathcal{P}$. Pour $n \in \mathcal{O}$ primaire, posons

$$\Psi(n) = \Psi_0(n)\prod_{p\in\mathcal{P}} \chi_p^{j_p}(n).$$

Dans les sommes transformées, $\mathcal{A}$ parcourra des sous-ensembles satisfaisant

$$\{p \in \mathcal{P} : j_p \neq 0\} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}.$$

Ainsi seuls les nombres premiers avec $j_p = 0$ peuvent être omis de $\mathcal{A}$. Nous appelons les nombres premiers dans $\mathcal{A}$ *actifs* et ceux dans $\mathcal{P} \setminus \mathcal{A}$ *inactifs*. Pour un tel sous-ensemble et $c_0 \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$, écrivons

$$c = c_0 \prod_{p\in\mathcal{A}} p.$$

Proposition 14 (Proposition 6.2). *La quantité $T(X;\Psi)$ définie en (48) est une somme de $O_{\Psi_0,S}(2^{|\mathcal{P}|})$ termes de la forme*

$$C \sum_{0\neq \ell\in\lambda^{-4}\mathcal{O}} \frac{d(\ell)\alpha(\ell)}{\sqrt{N_{K/\mathbb{Q}}(\ell)}}\psi(\lambda^4\ell)\prod_{p\in\mathcal{A}} B_{p,j_p}(\lambda^4\ell)V_*^\sharp\left(\frac{N_{K/\mathbb{Q}}(\ell)X}{N_{K/\mathbb{Q}}(c)^2}\right). \tag{67}$$

Ici $\mathcal{A}$ et c sont comme ci-dessus, et $|C| \ll_{\Psi_0,S} 1$. Les triplets (d,ψ,c_0) appartiennent à une famille finie fixe dépendant uniquement de Ψ_0, S, où $d \in \{d_0, d_+, d_-\}$, $c_0 \in \mathcal{O}\setminus\{0\}$, et ψ est un caractère additif de module un sur $\mathcal{O}$.

Pour moyenner les sommes transformées sur k_0, nous devons choisir leurs coefficients de pointe et caractères additifs de manière cohérente lorsque k_0 varie. Fixons un ensemble fini $\mathcal{P}_{\text{fix}}$ de nombres premiers primaires en dehors de S et des exposants $j_p \in \{0,\dots,5\}$, et posons

$$\Psi_{k_0}(n) = \Psi_0(n)\prod_{p\in\mathcal{P}_{\text{fix}}}\chi_p^{j_p}(n)\prod_{p\mid k_0}\chi_p(n),$$

où k_0 est primaire et sans facteur carré, avec $(k_0, S\prod_{p\in\mathcal{P}_{\text{fix}}}p)=1$. Soit $\mathcal{A}_{\text{fix}}$ parcourant les sous-ensembles satisfaisant

$$\{p\in\mathcal{P}_{\text{fix}} : j_p\neq 0\}\subseteq\mathcal{A}_{\text{fix}}\subseteq\mathcal{P}_{\text{fix}},\quad \mathcal{A}=\mathcal{A}_{\text{fix}}\cup\{p : p\mid k_0\}.$$

Chaque nombre premier divisant k_0 appartient à $\mathcal{A}$, puisque son exposant est 1.

Lemme 15 (Lemme 6.3 (Uniformité dans la torsion)). *Pour la famille Ψ_{k_0} ci-dessus, les termes de la Proposition 6.2 peuvent être indexés par $(h,\mathcal{A}_{fix})$, avec h dans un ensemble fini fixe dépendant uniquement de Ψ_0, S. Les coefficients scalaires nuls sont permis. Pour chaque indice fixé, le triplet (d,ψ,c_0) dépend de k_0 uniquement par sa classe de rayon modulo un idéal fixe supporté sur S et dépendant uniquement de Ψ_0, S.*

Pour estimer les sommes duales, nous avons besoin de bornes pour les coefficients de pointe et le poids transformé.

Lemme 16 (Lemme 6.4). *Pour chaque $d\in\{d_0,d_+,d_-\}$, le coefficient $d(\ell)$ s'annule sauf si ℓ peut s'écrire*

$$\ell = u\lambda^m n b^3, \tag{68}$$

où $u\in\mathcal{O}^\times$, $m\in\mathbb{Z}$ avec $m\geq -4$, et $n,b\in\mathcal{O}$ sont primaires avec n sans facteur carré.

$$|d(\ell)| = |d(u\lambda^m n b^3)| \leq 27\cdot 3^{m/6}|b|. \tag{69}$$

Pour $A>0$, des entiers $j\geq 0$, et V_* supporté dans un intervalle compact fixe $I\subset(0,\infty)$, il existe $J=J(A,j)$ tel que

$$|(x\partial_x)^j V_*^\sharp(x)| \ll_{A,j,I} \|V_*\|_{C^J(I)}\min(x^{1/4}, x^{-A}),\quad x>0. \tag{70}$$

La Proposition 6.2 et les Lemmes 6.3 et 6.4 sont prouvés dans l'annexe A.2.

6.3. La moyenne quadratique quadratique du côté dual

Nous enregistrons l'estimation du grand crible quadratique nécessaire ci-dessous.

Lemme 17 (Lemme 6.5). *Soient $\mathcal{H}, U \geq 1$, et soit $\beta(n)$ des coefficients complexes sur n primaire sans facteur carré avec $N_{K/\mathbb{Q}}(n) \asymp U$. Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\sum_{\substack{k\equiv 1 \pmod 3,\,(k,S)=1\\ N_{K/\mathbb{Q}}(k)\preccurlyeq\mathcal{H}}}^{*} \left| \sum_{\substack{n\equiv 1 \pmod 3,\, n \text{ sans facteur carré}\\ N_{K/\mathbb{Q}}(n)\asymp U}} \beta(n)\chi_k(n)^3 \right|^2 \ll_{S,\varepsilon} (\mathcal{H}U)^{\varepsilon}(\mathcal{H}+U)\sum_n |\beta(n)|^2. \quad (71)$$

L'étoile restreint k aux éléments primaires sans facteur carré.

Démonstration. C'est le grand crible quadratique de Goldmakher et Louvel [13], Théorème 1.1, après avoir fixé le produit des facteurs premiers de n appartenant à S, et un nombre fini de classes de rayon. Pour être complet, soit $e_k \in \{0,1\}$ selon que $N_{K/\mathbb{Q}}(k) \equiv 1, 3 \pmod 4$, et soit κ_λ le caractère non trivial modulo λ. Le caractère $x \mapsto (x/k)_2 \kappa_\lambda(x)^{e_k}$ est trivial sur les unités et a pour conducteur primitif $k\lambda^{e_k}$. Lorsque $e_k = 0$, le facteur $\kappa_\lambda(x)^{e_k}$ est omis. Les classes modulo $24\mathcal{O}$ fixent les caractères supplémentaires et les facteurs de réciprocité ; pour k_1, k_2 premiers entre eux dans la même classe, le caractère produit a pour conducteur k_1k_2. Ce sont les hypothèses de [13], Définition 1 et § 2. □

6.4. Lignes sans facteur carré et borne complétée

Écrivons $N(a) = N_{K/\mathbb{Q}}(a)$. Dans (49), autorisons tout $g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ à la place de f, donc $\Psi_k(n) = \xi(n)\chi_n(k)\chi_n(g)^4$. L'extension par zéro en S est conservée. Choisissons des générateurs d'idéaux premiers, primaires en dehors de 3, et étendons multiplicativement à tous les idéaux. Nous bornons d'abord les lignes sans facteur carré.

Lemme 18 (Lemme 6.6). *Pour tout $\varepsilon > 0$ et $C_0 \geq 1$ il existe $J = J(\varepsilon, C_0) \geq 1$ tel que*

$$\sum_{\substack{0<N(s)\preccurlyeq\mathcal{H}\\ s \text{ sans facteur carré}}} |T(X; u_0 s, g)|^2 \ll_{I,\xi,S,\varepsilon,C_0} D^{\varepsilon}\|W\|^2_{C^J(I)} \left(\mathcal{H} + \frac{\mathcal{H}^2 N(g)}{X}\right) \quad (72)$$

pour $1 \leq \mathcal{H}, X, N(g) \leq D^{C_0}$, $u_0 \in \mathcal{O}^\times$, tout intervalle compact $I \subset (0,\infty)$, et $W \in C_c^\infty(I)$. La somme utilise les générateurs choisis des idéaux sans facteur carré, y compris ceux rencontrant S.

Démonstration. Par homogénéité, supposons $\|W\|_{C^J(I)} \leq 1$, avec J choisi ci-dessous. Écrivons

$$s = tk_0, \quad t = \prod_{\substack{p\mid s\\ p\mid g \text{ ou } p\in S}} p, \quad N(k_0) \leq \mathcal{H}_0 := \frac{\mathcal{H}}{N(t)}.$$

Fixons t ; alors k_0 est sans facteur carré et primaire, avec $(k_0, g) = 1$ et $(k_0, S) = 1$. Écartons les plages vides, donc $\mathcal{H}_0 \geq 1$, et retenons ces restrictions ci-dessous. Pour une fonction de coefficients $A(n, b)$, une échelle positive Y, et un entier $m \geq -4$, posons

$$\mathcal{S}_m[A, Y](k_0) := \sum_{\substack{n,b\equiv 1 \pmod 3\\ n \text{ sans facteur carré}}} \frac{A(n,b)\chi_{k_0}(nb)^3}{3^{m/3}\sqrt{N(n)}N(b)} V_*^\sharp\left(\frac{3^m N(n)N(b)^3\mathcal{H}_0^2}{YN(k_0)^2}\right). \tag{73}$$

Nous obtiendrons, après partition de k_0 en classes de rayon fixes,

$$T(X; u_0 t k_0, g) = \sum_{\iota\in\mathcal{I}} \sum_{m\geq -4} c_{\iota,m}(k_0)\mathcal{S}_m[A_{\iota,m}, Y_\iota](k_0),$$

où $\mathcal{I}$ est indépendant de k_0, $|\mathcal{I}| \ll 1$, $|c_{\iota,m}(k_0)| \ll 1$, et $A_{\iota,m}$ est indépendant de k_0. Pour certains $a_\iota, Y_\iota > 0$, les coefficients et les longueurs satisfont

$$|A_{\iota,m}(n,b)| \ll a_\iota, \quad a_\iota^2 \leq 1, \quad a_\iota^2 Y_\iota \ll \frac{\mathcal{H}_0^2}{X} N(t)^2 N(g). \tag{74}$$

Toutes les restrictions de colonnes sont incluses en étendant $A_{\iota,m}$ par zéro. Posons $k = u_0 t k_0$. Pour $\mathcal{P} = \{p \notin S : p \mid kg\}$, la réciprocité sextique (29) donne

$$\Psi_k(n) = \Psi_0(n) \prod_{p\in\mathcal{P}} \chi_p^{j_p}(n), \quad j_p \equiv v_p(k) + 4v_p(g) \pmod 6, \quad 0 \leq j_p \leq 5. \tag{75}$$

Même lorsque $j_p = 0$, le facteur $\chi_p^0(n) = \mathbf{1}_{p\nmid n}$ conserve l'extension par zéro en $p \mid kg$. Le facteur fixe Ψ_0 contient ξ, les facteurs en S, les facteurs unitaires, et $n \mapsto \mathcal{R}(n, \prod_{p\notin S} p^{v_p(k)})$. La quatrième puissance en g ne contribue aucun signe de réciprocité, et les facteurs en S dépendent uniquement des exposants modulo six. Ainsi Ψ_0 parcourt une famille finie fixe. Dans la notation du Lemme 6.3, prenons $\mathcal{P}_{\text{fix}} = \{p \notin S : p \mid tg\}$, de sorte que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\text{fix}} \sqcup \{p : p \mid k_0\}$; les exposants sur $\mathcal{P}_{\text{fix}}$ sont fixés avec t, g. La partition de k_0 en classes de rayon fixes fixe Ψ_0 et, par le Lemme 6.3, les données d, ψ, c_0 dans chaque terme transformé.

Fixons un terme transformé, avec des nombres premiers actifs $\mathcal{A}_{\text{fix}}$ en dehors de k_0, et posons $c_* = c_0 \prod_{p\in\mathcal{A}_{\text{fix}}} p$. Ainsi $c = c_* k_0$ dans (67). Par (68), écrivons $\ell = u\lambda^m nb^3$, avec u, m, n, b comme là. Chaque nombre premier divisant k_0 a $j_p = 1$, et donc

$$B_{p,1}(u\lambda^{m+4}nb^3) = \chi_p(u\lambda^{m+4})^3\chi_p(nb)^3. \tag{76}$$

En effet, l'exposant transformé est $-1 - 2 \equiv 3 \pmod 6$ et $\chi_p(b)^9 = \chi_p(b)^3$, aussi lorsque $p \mid b$ par extension par zéro. La borne des coefficients et la décroissance rapide dans le Lemme 6.4 donnent une convergence absolue de la série transformée, donc nous pouvons regrouper ses termes ci-dessous. Posons

$$A_{u,m}(n,b) = \frac{d(u\lambda^m nb^3)\alpha(u\lambda^m nb^3)\psi(u\lambda^{m+4}nb^3)}{3^{m/6}\sqrt{N(b)}}, \quad |A_{u,m}(n,b)| \leq 27.$$

Le terme transformé est donc

$$C(k_0) \sum_{u\in\mathcal{O}^\times} \sum_{m\geq -4} \chi_{k_0}(u\lambda^{m+4})^3 \sum_{\substack{n,b\equiv 1 \pmod 3\\ n \text{ sans facteur carré}}} \frac{A_{u,m}(n,b)\chi_{k_0}(nb)^3}{3^{m/3}\sqrt{N(n)}N(b)} \prod_{p\in\mathcal{A}_{\text{fix}}} B_{p,j_p}(u\lambda^{m+4}nb^3) V_*^\sharp\left(\frac{3^m N(n)N(b)^3 X}{N(c_*)^2 N(k_0)^2}\right),$$

La représentation est unique : en dehors de λ, les exposants premiers de ℓ sont $3v_p(b)$ ou $1+3v_p(b)$. À part le caractère quadratique et le poids, la dépendance en k_0 est un scalaire borné.

Fixons u, m et écrivons $q = N(p)$ pour un nombre premier actif $p \nmid k_0$. Pour $j_p = 4$, l'identité locale est

$$B_{p,4}(u\lambda^{m+4}nb^3) = -q^{-1/2} + q^{1/2}\mathbf{1}_{p|n} + q^{1/2}\mathbf{1}_{p|n,p|b}.$$

Pour afficher le réindexage dans (73), soit $A^{(p)}(n,b)$ incluant tous les autres facteurs locaux et posons

$$A^{(p,n)}(n,b) = \mathbf{1}_{p|n}A^{(p)}(pn,b), \quad A^{(p,b)}(n,b) = \mathbf{1}_{p|n}A^{(p)}(n,pb).$$

Alors les changements $n = pn'$ et $b = pb'$ donnent l'identité exacte

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_m[A^{(p)}(n,b)B_{p,4}(u\lambda^{m+4}nb^3), q^2Y](k_0)\\ &= -q^{-1/2}\mathcal{S}_m[A^{(p)}, q^2Y](k_0) + \chi_{k_0}(p)^3\mathcal{S}_m[A^{(p,n)}, qY](k_0)\\ &\quad + q^{-1/2}\chi_{k_0}(p)^3\mathcal{S}_m[A^{(p,b)}, Y/q](k_0).\end{aligned}$$

Dans le second terme $p \nmid n'$ préserve l'absence de facteur carré ; dans le troisième, $p \nmid n$ est retenu et b' est sans restriction en p. Les deux phases extraites ont un module un. Les facteurs $q^{1/2}$ dans l'identité locale s'annulent contre $\sqrt{N(pn')}$ ou laissent $q^{-1/2}$ après division par $N(pb')$.

Soit a une borne de suivi $|A(n,b)| \le 27a$ pour le coefficient dans (73), et soit Y son échelle. Avant d'insérer les nombres premiers actifs, ceux-ci sont $a = 1$ et $Y = N(c_0)^2\mathcal{H}_0^2/X$. Chaque nombre premier actif contribue q^2 à la norme du conducteur au carré. En incluant ce facteur, les mises à jour sont

$$(a^2, Y) \mapsto \begin{cases}(a^2, q^2Y), & & & j_p \notin \{0,4\},\\ (a^2/q, q^2Y), & & & j_p = 0,\\ (a^2/q, q^2Y), & (a^2, qY), & (a^2/q, Y/q), & j_p = 4.\end{cases}$$

Ainsi a^2 ne diminue jamais. Si $p \mid t$ et $p \notin S$, alors j_p est impair, donc a^2Y coûte au plus $N(p)^2$. Si $p \mid g$ et $p \nmid t$, le coût est $N(p)$ pour $j_p = 0, 4$ et $N(p)^2$ pour $j_p = 2$; ce dernier cas nécessite $v_p(g) \ge 2$. Donc

$$a^2Y \ll \frac{\mathcal{H}_0^2}{X}\prod_{\substack{p|t\\ p\notin S}} N(p)^2 \prod_{\substack{p|g\\ p\nmid t,\, p\notin S}} N(p)^{v_p(g)} \le \frac{\mathcal{H}_0^2 N(t)^2 N(g)}{X}.$$

Le réindexage aux nombres premiers distincts préserve la forme et les extensions par zéro. Par le Lemme 6.3, les termes transformés, les unités, et au plus trois choix par nombre premier $p \in \mathcal{A}_{\mathrm{fix}}$ avec $j_p = 4$ forment un ensemble d'indices de taille bornée par un diviseur en tg. Ici et ci-dessous, borné par un diviseur en a signifie borné par $C\tau_{\mathrm{div}}(a)^A$ pour des constantes fixes C, A ; en particulier, c'est $\ll_\varepsilon N_{K/\mathbb{Q}}(a)^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Pour un indice ι, abrégeons $a = a_\iota$, $Y = Y_\iota$, et $A_m = A_{\iota,m}$. Les mises à jour locales donnent $Y \ll D^{C_1}$ pour un certain $C_1 = C_1(C_0)$ fixé. Séparons b en $B \le N(b) < 2B$, et n par une partition dyadique lisse $V(N(n)/U)$, avec $U, B \ge 1$ et des coupures uniformément bornées. Pour cette partie de (73), écrivons

$$\mathcal{S}_{m;U,B}(k_0) = 3^{-m/3}\sum_{B\le N(b)<2B}\frac{\chi_{k_0}(b)^3}{N(b)}F_b(k_0),$$

$$F_b(k_0)=\sum_{n\text{ sans facteur carré}}\frac{A_m(n,b)\chi_{k_0}(n)^3}{\sqrt{N(n)}}V(N(n)/U)V_*^\sharp\left(\frac{3^mN(n)N(b)^3\mathcal{H}_0^2}{YN(k_0)^2}\right).$$

Ici n,b restent primaires. Posons $z_*=3^mUB^3/Y$ et fixons un exposant de décroissance $A>0$. Avec m,U,B,Y fixés, le Lemme B.1, appliqué uniquement en $N(n)/U$, donne la représentation suivante dans une variable de Mellin réelle s :

$$F_b(k_0)=\int_{\mathbb{R}}c_{b,k_0}(s)G_{b,s}(k_0)\,ds,$$

$$G_{b,s}(k_0)=\sum_{\substack{n\text{ sans facteur carré}\\ N(n)\asymp U}}\frac{A_m(n,b)\chi_{k_0}(n)^3}{\sqrt{N(n)}}(N(n)/U)^{is},\tag{77}$$

$$|c_{b,k_0}(s)|\ll_{I,A}(1+z_*)^{-A}(1+|s|)^{-2}.$$

En effet, l'échelle R dans (107) est $3^mUN(b)^3\mathcal{H}_0^2/(YN(k_0)^2)\geq z_*$. Le Lemme 6.4 fournit les bornes de dérivées requises, indépendamment de b,k_0,U,B,m. Puisque $\sum_{N(n)\asymp U}N(n)^{-1}\ll 1$, le Lemme 6.5 donne, pour tout $\sigma>0$,

$$\sideset{}{^*}\sum_{N(k_0)\leq\mathcal{H}_0}|G_{b,s}(k_0)|^2\ll_{S,\sigma}a^2(\mathcal{H}_0U)^\sigma(\mathcal{H}_0+U).$$

Appliquons Cauchy-Schwarz pondéré à l'intégrale de Mellin, comme enregistré en (111), avec le majorant commun en (77), puis Cauchy-Schwarz pondéré en b, en utilisant $\sum^*_{B\leq N(b)<2B}N(b)^{-1}\ll 1$:

$$\sideset{}{^*}\sum_{N(k_0)\leq\mathcal{H}_0}|\mathcal{S}_{m;U,B}(k_0)|^2\leq 3^{-2m/3}\left(\sum_{B\leq N(b)<2B}\frac{1}{N(b)}\right)\sum_{B\leq N(b)<2B}\frac{1}{N(b)}\sideset{}{^*}\sum_{N(k_0)\leq\mathcal{H}_0}|F_b(k_0)|^2\ll_{I,S,A,\sigma}a^2 3^{-2m/3}(\mathcal{H}_0U)^\sigma(\mathcal{H}\tag{78}$$

Puisque $m\geq -4$, nous avons $U\leq 81Yz_*$ et donc $\mathcal{H}_0U\ll D^{C_0+C_1}(1+z_*)$. Choisissons $0<\sigma\leq 1$ petit en termes de $\varepsilon_1>0$, C_0 et prenons $A=3$. En prenant les racines carrées dans (78), on obtient

$$\left(\sideset{}{^*}\sum_{N(k_0)\leq\mathcal{H}_0}|\mathcal{S}_{m;U,B}(k_0)|^2\right)^{1/2}\ll aD^{\varepsilon_1}3^{-m/3}(\sqrt{\mathcal{H}_0}+\sqrt{U})(1+3^mUB^3/Y)^{-2}.$$

Les sommes dyadiques infinies convergent : pour $U,B\geq 1$ dyadiques et tout $Z>0$,

$$\sum_{U,B\text{ dyadiques}}(1+UB^3/Z)^{-2}\ll\log^2(2+Z),\qquad\sum_{U,B\text{ dyadiques}}\sqrt{U}(1+UB^3/Z)^{-2}\ll\sqrt{Z}.$$

Ces estimations rendent la somme des normes $\ell^2(k_0)$ finie. L'inégalité triangulaire et la somme géométrique sur $m\geq -4$ donnent donc

$$\left(\sideset{}{^*}\sum_{N(k_0)\leq\mathcal{H}_0}\left|\sum_{m\geq -4}c_{\iota,m}(k_0)\mathcal{S}_m[A_m,Y](k_0)\right|^2\right)^{1/2}\ll aD^{\varepsilon_1}(\sqrt{\mathcal{H}_0}\log^2(2+Y)+\sqrt{Y}).$$

Combinons les choix d'indices ι bornés par un diviseur et utilisons (74) pour obtenir

$$\sideset{}{^*}\sum_{N(k_0)\leq\mathcal{H}_0}|T(X;u_0tk_0,g)|^2\preccurlyeq\max_\iota a_\iota^2(\mathcal{H}_0+Y_\iota)\ll\mathcal{H}_0+\frac{\mathcal{H}_0^2N(t)^2N(g)}{X}\leq\mathcal{H}+\frac{\mathcal{H}^2N(g)}{X}.$$

Somnons les classes de rayon fixes et les choix $t \mid \mathrm{rad}(g\prod_{p\in S}p)$ bornés par un diviseur, en choisissant ε_1 et les autres pertes de petite puissance en termes de ε. Les estimations de poids ci-dessus nécessitent un nombre fixe $J = J(\varepsilon, C_0)$ de dérivées. L'homogénéité restaure $\|W\|^2_{C^J(I)}$ et prouve (72). □

Preuve de la Proposition 5.2. Écrivons de manière unique $k = u_0 s v^2$, avec s sans facteur carré et s, v parmi les générateurs d'idéaux choisis. Aucune condition $(s, v) = 1$ n'est imposée. Puisque $8 \equiv 2 \pmod 6$, y compris les extensions par zéro,

$$\chi_n(u_0sv^2)\chi_n(f)^4 = \chi_n(u_0s)\chi_n(fv^2)^4, \quad T(X; u_0sv^2, f) = T(X; u_0s, fv^2).$$

Appliquons le Lemme 6.6 avec la borne de ligne $\mathcal{H}/N(v)^2$ et la torsion auxiliaire $g = fv^2$. Ici $N(g) \le \mathcal{H}N(f) \le D^{2C_0}$, donc utilisons ce lemme avec $2C_0$. En sommant ses bornes, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{0<N(k)\preccurlyeq\mathcal{H}} |T(X;k,f)|^2 &= \sum_{u_0\in\mathcal{O}^\times}\sum_{N(v)^2\preccurlyeq\mathcal{H}}\sum_{\substack{N(s)\preccurlyeq\mathcal{H}/N(v)^2\\ s\text{ sans facteur carré}}} |T(X;u_0s,fv^2)|^2\\ &\ll D^{\varepsilon}\|W\|^2_{C^J(I)}\left(\mathcal{H} + \frac{\mathcal{H}^2N(f)}{X}\right)\sum_v \frac{1}{N(v)^2}.\end{aligned}$$

La dernière somme est $\zeta_K(2) < \infty$, où $\zeta_K(s) = L_K(s, \mathbf{1})$ est la fonction zêta de Dedekind de K. Cela prouve (50). □

7. Preuve de la proposition de transfert

Nous prouvons la Proposition 5.4 pour $\mathcal{A}(W)$ défini en (55). Tout au long de cette section, $\mathcal{H}, L, F, \Sigma, \xi$ satisfont les hypothèses de cette proposition. Nous conservons le poids fixe Φ et la borne de support C_Φ choisis avant (55). L'élargissement par $\Sigma/(LF) \ge 1$ dans la moyenne quadratique intermédiaire fait que la seconde sommation de Poisson revient à (37) avec une plage de lignes au plus $\mathcal{H}L/(\Sigma F)$. Le Lemme B.2 sépare les poids, et le Lemme 4.4 supprime l'exclusion restante.

7.1. Première application de la sommation de Poisson

Écrivons $N = N_{K/\mathbb{Q}}$, $I = [u, v]$, et $I_* = [u/2, 2v]$. Tous les indices idéaux ci-dessous sont premiers à S et représentés par leurs générateurs primaires ; une étoile exige en outre l'absence de facteur carré. Les variables k, h, y parcourent $\mathcal{O}$. Pour C, t sans facteur carré avec $(C, t) = 1$, et pour $d \mid C$, posons

$$\ell = \frac{L}{N(C)N(t)}, \quad w_{C,d} = \frac{\mathcal{H}N(C)}{N(d)L^2F}, \quad Y_{C,d} = c_I\frac{\Sigma LFN(d)}{\mathcal{H}N(C)^2},$$

où $c_I \ge \max(1, 4C_\Phi v^2)$ est fixé. Ne retenons que $\ell \ge 1/(2v)$. Pour $U \in C_c^\infty(I_*)$ et un caractère ξ_1 du groupe de classes de rayon fixe, définissons

$$\begin{aligned} p_y(n) &= \mu(n)\xi_1(n)\mathbf{1}_{(n,t)=1}\overline{\chi_n(y)}\chi_n(C)^4\chi_n(d),\\ P_{C,d,t}(y;U) &= \sideset{}{^*}\sum_n p_y(n)U(N(n)/\ell).\end{aligned} \tag{79}$$

La notation p_y supprime sa dépendance à C, d, t, ξ_1. La forme non négative requise dans le second calcul de Poisson est

$$\mathcal{Q}_{\xi_1}(U) = \sum_{\substack{C,t \text{ sans facteur carré} \\ (C,S)=1,(C,t)=1 \\ N(C)N(t)\le 2vL}} \sum_{d\mid C} w_{C,d} \sum_{y} \Phi(N(y)/Y_{C,d}) |P_{C,d,t}(y;U)|^2. \tag{80}$$

Le domaine extérieur n'a pas de restriction supplémentaire provenant du support de $\widehat{\Phi}$. Ici $Y_{C,d} > 0$ peut être plus petit que 1 ; les sommes extérieures sont finies, et la somme en y converge absolument.

Lemme 19 (Lemme 7.1)**.** *Sous les hypothèses de la Proposition 5.4, fixons un entier $j \ge 0$ et $\varepsilon_0 > 0$. Si $M \ge 0$ satisfait $\mathcal{Q}_{\xi_1}(U) \le M\|U\|^2_{C^j(I_*)}$ pour tout $U \in C_c^\infty(I_*)$ et tout ξ_1, alors*

$$\mathcal{A}(W) \ll D^{\varepsilon_0}(\Sigma + M)\|W\|^2_{C^{2j+4}(I)}.$$

Démonstration. Développons le carré définissant $\mathcal{A}(W)$, et écrivons $n_i = Cu_i$, où $C = (n_1, n_2)$ et $(u_1, u_2) = (u_1u_2, C) = 1$. Le caractère de ligne est $\chi_{u_1}\overline{\chi_{u_2}}$, primitif modulo u_1u_2, avec la restriction supplémentaire $(k, C) = 1$. Le Lemme 4.2 introduit $d \mid C$ et une fréquence h. Soit Z la contribution de fréquence nulle. Elle nécessite $u_1 = u_2 = 1$, donc

$$|Z| \ll \frac{\mathcal{H}}{LF} \sideset{}{^*}\sum_{F\le N(f)<2F} \sideset{}{^*}\sum_{C} |W(N(C)/L)|^2 \ll_I \mathcal{H}\|W\|^2_\infty.$$

Pour les autres fréquences, le théorème des restes chinois, (32) et (35) donnent l'identité appariée

$$a_\xi(u_1)\overline{a_\xi(u_2)}\gamma(\chi_{u_1}\overline{\chi_{u_2}}) = \mu(u_1)\mu(u_2)(\xi G)(u_1u_2^{-1}). \tag{81}$$

Développons $(\xi G)(z) = \sum_{\xi_1} \ell_{\xi_1}\xi_1(z)$ sur le groupe de classes de rayon fixe. Insérons $\mathbf{1}_{(u_1,u_2)=1} = \sum_{t\mid u_1, t\mid u_2} \mu(t)$ et posons $u_i = tx_i$. L'inverse est $x_i = u_i/t$; l'absence de facteur carré impose $(x_i, t) = 1$, mais aucune condition $(x_1, x_2) = 1$ ne subsiste. Les facteurs en C, t s'annulent contre leurs conjugués, laissant $\mu(d)\mu(t)$ et les restrictions $(f, Ct) = (h, t) = 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(W) - Z = \sum_{\xi_1} \ell_{\xi_1} &\sum_{\substack{C,t \text{ sans facteur carré} \\ (C,S)=1,(C,t)=1 \\ N(C)N(t)\le 2vL}} \sum_{d\mid C} \mu(d)\mu(t) w_{C,d} \\ &\times \sideset{}{^*}\sum_{\substack{F\le N(f)<2F \\ (f,Ct)=1}} \sum_{\substack{h\ne 0,(h,t)=1 \\ N(h)\le C_\Phi v^2L^2N(d)/(\mathcal{H}N(C)^2)}} \sideset{}{^*}\sum_{x_1,x_2} p_{hf^2}(x_1)\overline{p_{hf^2}(x_2)}\mathcal{K}_h(N(x_1)/\ell, N(x_2)/\ell),\end{aligned}$$

où, pour chaque entier $j_0 \ge 0$,

$$\mathcal{K}_h(z_1, z_2) = (z_1z_2)^{-1/2}W(z_1)\overline{W(z_2)}\widehat{\Phi}\left(\frac{\mathcal{H}N(h)N(C)^2}{L^2N(d)z_1z_2}\right),$$

$$\sup_{C,d,h} \|\mathcal{K}_h\|_{C^{j_0}(I^2)} \ll_{I,\Phi,j_0} \|W\|^2_{C^{j_0}(I)}.$$

Ici $\chi_{x_i}(C)^4$ fournit $(x_i, C) = 1$; les autres zéros originaux sont fournis par $p_{hf^2}(x_i)$. La plage de fréquences affichée découle du support de $\widehat{\Phi}$.

Pour C, d, t fixés, l'application $(f, h) \mapsto y = hf^2$ a une multiplicité bornée par un diviseur en y. Puisque $\Sigma/(LF) \geq 1$, son image non nulle satisfait $N(y) \leq 4C_\Phi v^2 L^2 F^2 N(d)/(\mathcal{H} N(C)^2) \leq Y_{C,d}$. Puisque $\Phi \geq 1$ sur $[0,1]$ et est non négatif,

$$\sum_{C,t} \sum_{d \mid C} w_{C,d} \sum_{f,h} |P_{C,d,t}(hf^2; U)|^2 \preccurlyeq \mathcal{Q}_{\xi_1}(U) \leq M \|U\|^2_{C^j(I_*)},$$

avec les plages précédentes à gauche. Appliquons le Lemme B.2 à l'expression complète affichée pour $\mathcal{A}(W) - Z$. La borne du noyau donne

$$|\mathcal{A}(W) - Z| \ll D^{\varepsilon_0/2} M \|W\|^2_{C^{2j+4}(I)}.$$

Conjointement avec $\mathcal{H} \leq \Sigma$, cela prouve le résultat après avoir alloué les pertes de diviseurs dans ε_0. □

7.2. Seconde application de la sommation de Poisson

Soient C, t des éléments primaires sans facteur carré premiers à S, et soit $d \mid C$. Fixons un caractère ξ_1 du groupe de classes de rayon. Pour des échelles arbitraires $\ell, Y > 0$ et $U \in C_c^\infty(I_*)$, avec $I_* = [a, b] \subset (0, \infty)$, posons

$$\begin{aligned} P(y) &= \sideset{}{^*}\sum_{(n,S)=1} \mu(n) \xi_1(n) \mathbf{1}_{(n,t)=1} \overline{\chi_n(y)} \chi_n(C)^4 \chi_n(d) U(N(n)/\ell), \\ \mathcal{M} &= \sum_{y \in \mathcal{O}} \Phi(N(y)/Y) |P(y)|^2. \end{aligned} \tag{82}$$

Ici $P(y)$ abrège $P_{C,d,t}(y; U)$ de (79), avec l'échelle ℓ maintenant arbitraire.

La seconde sommation de Poisson transforme les coefficients de Möbius en coefficients de sommes de Gauss cubiques. Pour énoncer l'identité, posons $U_0(x) = x^{-1/2} U(x)$ et développons

$$\xi_1(z) G(z^{-1}) = \sum_{\xi'} c_{\xi'} \xi'(z)$$

sur le groupe de classes de rayon fixe.

Du côté transformé, g est le diviseur commun des colonnes originales, $e \mid g$ provient de l'exclusion de ligne, et w supprime la condition de coprimalité restante. L'indice h est la fréquence de Fourier non nulle. Soient g, w parcourant les éléments primaires sans facteur carré premiers à S, e les diviseurs de g, et h parcourant $\mathcal{O} \setminus \{0\}$, sous réserve que

$$(g, Ct) = (w, gCth) = 1, \quad N(gw) \leq b\ell, \quad N(h) \leq \frac{C_\Phi b^2 \ell^2 N(e)}{Y N(g)^2}.$$

Ces conditions assurent que tg/e et Cew sont premiers entre eux et sans facteur carré. Pour chaque tel choix et chaque caractère ξ', la nouvelle échelle de colonne, le coefficient et le poids lisse couplé sont

$$\begin{aligned} X' &= \frac{\ell}{N(gw)}, \\ a^\sharp(n) &= a_{\xi'}(n)\mathbf{1}_{(n,tg/e)=1}\chi_n(deh)\chi_n(Cew)^4, \\ \mathcal{K}(x_1,x_2) &= U_0(x_1)\overline{U_0(x_2)}\widehat{\Phi}\left(\frac{YN(h)N(g)^2}{N(e)\ell^2x_1x_2}\right). \end{aligned} \tag{83}$$

Ici $\mathcal{K}$ dépend de U, Y, ℓ, g, e, h. Une étoile sur une somme en n_1, n_2 restreint chaque indice séparément aux éléments primaires sans facteur carré. Définissons aussi

$$Z = Y\widehat{\Phi}(0)\sideset{}{^*}\sum_{\substack{(g,Ct)=1\\(g,S)=1}} |U(N(g)/\ell)|^2 \prod_{p|g}\left(1-\frac{1}{N(p)}\right).$$

Lemme 20 (Lemme 7.2 (Seconde identité de Poisson))**.** *Avec la notation et les plages d'indices ci-dessus,*

$$\mathcal{M} = Z + \sum_{g,e,w,h,\xi'} \frac{Y\mu(e)\mu(w)c_{\xi'}N(g)}{N(e)\ell} \sideset{}{^*}\sum_{(n_1n_2,S)=1} a^\sharp(n_1)\overline{a^\sharp(n_2)}\mathcal{K}\left(\frac{N(n_1)}{X'},\frac{N(n_2)}{X'}\right). \tag{84}$$

Le terme de fréquence nulle satisfait

$$|Z| \ll_{I_*,\Phi} Y\ell\|U\|_\infty^2.$$

Démonstration. Développons le carré, posons $g=(n_1,n_2)$ et $n_i = gz_i$. Les termes non nuls satisfont

$$(z_1,z_2) = (z_1z_2, gCt) = (g,Ct) = 1, \quad \overline{\chi_{n_1}(y)}\chi_{n_2}(y) = \mathbf{1}_{(y,g)=1}\overline{\chi_{z_1}(y)}\chi_{z_2}(y).$$

Appliquons le Lemme 4.2 à ce dernier caractère, avec exclusion g et diviseur $e \mid g$. Sa fréquence nulle se produit exactement lorsque $z_1 = z_2 = 1$ et donne le Z affiché ; le comptage de g donne sa borne. Pour les fréquences non nulles, (33)-(35) et le théorème des restes chinois donnent

$$\mu(z_1)\mu(z_2)\xi_1(z_1)\overline{\xi_1(z_2)}\gamma(\overline{\chi_{z_1}}\chi_{z_2}) = \sum_{\xi'} c_{\xi'}a_{\xi'}(z_1)\overline{a_{\xi'}(z_2)}.$$

Utilisons aussi

$$\begin{aligned} \chi_z(dh)\overline{\chi_z(e)}\chi_z(C)^4 &= \chi_z(deh)\chi_z(Ce)^4, \\ \frac{U(N(gz_1)/\ell)\overline{U(N(gz_2)/\ell)}}{\sqrt{N(z_1)N(z_2)}} &= \frac{N(g)}{\ell}U_0(N(gz_1)/\ell)\overline{U_0(N(gz_2)/\ell)}. \end{aligned}$$

Ainsi la contribution non nulle complète est

$$\begin{aligned} \mathcal{M} - Z = \sum_{\xi'} c_{\xi'} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{g\\(g,Ct)=1}} \sum_{e|g} \frac{Y\mu(e)N(g)}{N(e)\ell} \sum_{h\neq 0} & \\ \times \sideset{}{^*}\sum_{\substack{z_1,z_2\\(z_1,z_2)=1\\(z_1z_2,gCt)=1}} & a_{\xi'}(z_1)\overline{a_{\xi'}(z_2)}\chi_{z_1}(deh)\overline{\chi_{z_2}(deh)}\chi_{z_1}(Ce)^4\overline{\chi_{z_2}(Ce)}^4 \\ \times U_0\left(\frac{N(gz_1)}{\ell}\right)\overline{U_0\left(\frac{N(gz_2)}{\ell}\right)}&\widehat{\Phi}\left(\frac{YN(h)}{N(e)N(z_1)N(z_2)}\right). \end{aligned}$$

Tous les indices idéaux étoilés sont premiers à S. Insérons

$$\mathbf{1}_{(z_1,z_2)=1} = \sum_{w \mid z_1,\, w \mid z_2} \mu(w), \quad z_i = wn_i.$$

Ici $(w, gCt) = 1$. L'équation (34) et les caractères étendus par zéro donnent

$$a_{\xi'}(wn) = a_{\xi'}(w)a_{\xi'}(n)\chi_n(w)^4 \quad ((w,n)=1),$$

$$|a_{\xi'}(w)\chi_w(deh)\chi_w(Ce)^4|^2 = \mathbf{1}_{(w,h)=1},$$

$$\mathbf{1}_{(n,gCtw)=1}\chi_n(deh)\chi_n(Cew)^4 = \mathbf{1}_{(n,tg/e)=1}\chi_n(deh)\chi_n(Cew)^4.$$

Par conséquent, la somme complète précédente devient

$$\mathcal{M} - Z = \sum_{\xi'} c_{\xi'} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{g,w \\ (g,Ct)=(w,gCt)=1}} \sum_{e \mid g} \frac{Y\mu(e)\mu(w)N(g)}{N(e)\ell} \sum_{\substack{h \neq 0 \\ (h,w)=1}} \times \sideset{}{^*}\sum_{(n_1n_2,S)=1} a^\sharp(n_1)\overline{a^\sharp(n_2)} U_0\left(\frac{N(gwn_1)}{\ell}\right) \overline{U_0\left(\frac{N(gwn_2)}{\ell}\right)} \widehat{\Phi}\left(\frac{YN(h)}{N(e)N(w)^2N(n_1)N(n_2)}\right).$$

Il ne reste aucune condition $(n_1, n_2) = 1$. Le support de la colonne donne $N(gw) \leq b\ell$ et $N(z_1z_2) \leq b^2\ell^2/N(g)^2$; le support de $\widehat{\Phi}$ impose donc la borne affichée sur $N(h)$. En substituant (83), on obtient (84), avec seulement un nombre fini de termes.

□

Lemme 21 (Lemme 7.3). *Revenons à $I = [u, v]$ et $I_* = [u/2, 2v]$. Pour un entier $m \geq 0$, soit S_m le supremum dans (56). Alors, pour tout $\varepsilon_0 > 0$,*

$$\mathcal{Q}_{\xi_1}(U) \ll D^{\varepsilon_0}\Sigma(1 + S_m)\|U\|^2_{C^{2m+4}(I_*)} \quad (U \in C_c^\infty(I_*)).$$

Les fonctions de test dans S_m sont supportées dans $I' = [u/16, 4v]$ et ont une norme $C^m(I')$ au plus un ; un supremum vide est nul.

Démonstration. Écrivons $N = N_{K/\mathbb{Q}}$. Appliquons le Lemme 7.2 avec la longueur d'entrée ℓ, l'échelle de ligne $Y_{C,d}$, et les mêmes C, d, t, en utilisant le caractère ξ_1. Ici h est la nouvelle variable de Fourier pour la somme sur y. Sa sortie non nulle a $g, w, e \mid g$ sans facteur carré, et

$$(g, Ct) = (w, gCth) = 1, \quad r = tg/e, \quad f' = Cew, \quad k' = deh.$$

Ainsi r, f' sont premiers entre eux et sans facteur carré, et le coefficient $a^\sharp$ de (83) devient

$$a^\sharp(n) = a_{\xi'}(n)\mathbf{1}_{(n,r)=1}\chi_n(k')\chi_n(f')^4.$$

Écrivons X_0' pour l'échelle de colonne individuelle X' dans (83) ; ci-dessous, X' désignera une échelle dyadique commune. La longueur, le coefficient et le paramètre de Fourier se simplifient en

$$X_0' = \frac{\ell}{N(g)N(w)} = \frac{L}{N(r)N(f')},$$

$$w_{C,d}\frac{Y_{C,d}N(g)}{N(e)\ell} = \frac{c_I\Sigma N(r)}{L^2},$$
$$\frac{Y_{C,d}N(h)N(g)^2}{N(e)\ell^2} = \frac{c_I\Sigma F N(k')N(r)^2}{\mathcal{H}L}.$$

Posons $U_0(x) = x^{-1/2}U(x)$. Le noyau couplé est donc

$$\mathcal{K}_{r,f',k'}(x_1,x_2) = U_0(x_1)\overline{U_0(x_2)}\widehat{\Phi}\left(\frac{c_I\Sigma F N(k')N(r)^2}{\mathcal{H}Lx_1x_2}\right),$$

avec les deux colonnes évaluées en $x_j = N(n_j)/X_0'$. En particulier, son support non nul nécessite

$$N(r)N(f') \le 2vL, \quad 0 < N(k') \le \frac{4C_\Phi v^2}{c_I}\frac{\mathcal{H}L}{\Sigma F N(r)^2} \le \frac{\mathcal{H}L}{\Sigma F N(r)^2},$$

puisque $C_\Phi(2v)^2/c_I \le 1$.

Pour r, f', k' fixés, toutes les préimages sont obtenues en choisissant

$$t \mid r, \quad f' = Cew, \quad e \mid k', \quad (w,k') = 1, \quad d \mid (C,k'),$$

et en posant $g = e(r/t), h = k'/(de)$. La factorisation $f' = Cew$ est disjointe et sans facteur carré. Toutes ces préimages ont le même noyau : $Ctgw = rf'$, et le paramètre de Fourier affiché ci-dessus dépend uniquement de r, k'. Ainsi les restrictions de support n'écartent que les noyaux nuls. Les choix $t \mid r$ contribuent $\tau_{\mathrm{div}}(r)$. En un nombre premier $p \mid f'$, les choix $p \mid C, p \mid e$, et $p \mid w$, respectivement, contribuent

$$(1 + \mathbf{1}_{p\mid k'}) - \mathbf{1}_{p\mid k'} - \mathbf{1}_{p\mid k'} = \mathbf{1}_{p\nmid k'}$$

à la somme de $\mu(e)\mu(w)$ sur les préimages ; les deux choix dans le premier terme sont $p \nmid d$ et $p \mid d$. Soit $\mathcal{Z}$ la contribution totale de fréquence nulle : la somme des termes Z du Lemme 7.2, avec les poids extérieurs $w_{C,d}$ et les plages dans (80). Par conséquent, en regroupant avant de prendre les valeurs absolues, on obtient

$$\mathcal{Q}_{\xi_1}(U) - \mathcal{Z} = \frac{c_I\Sigma}{L^2}\sum_{\xi'} c_{\xi'} \sum_{\substack{r,f' \text{ sans facteur carré}\\(r,f')=1}} N(r)\tau_{\mathrm{div}}(r) \sideset{}{^*}\sum_{\substack{k'\neq 0\\ f'\mid k'}} a^\sharp(n_1)\overline{a^\sharp(n_2)}\mathcal{K}_{r,f',k'}\left(\frac{N(n_1)}{X_0'}, \frac{N(n_2)}{X_0'}\right).$$

Fixons $R \le N(r) < 2R$, $F' \le N(f') < 2F'$ dyadiquement, et posons

$$X' = \frac{L}{RF'}, \quad \Sigma' = X'F' = \frac{L}{R}, \quad \mathcal{H}' = \frac{\mathcal{H}L}{\Sigma F R^2}.$$

Ne retenons que les r pour lesquels un terme non nul se produit dans ces plages. Puisque $f' \mid k'$, chaque tel r satisfait

$$F' \le N(f') \le N(k') \le \frac{\mathcal{H}L}{\Sigma F N(r)^2}.$$

En particulier $\mathcal{H}' \ge 1$. Pour tout $j \mid r$, en utilisant $\mathcal{H} \le \Sigma$, nous avons aussi

$$\frac{X'}{N(j)} \ge \frac{\Sigma F N(r)^2}{\mathcal{H}RN(j)} \ge \frac{F\Sigma}{\mathcal{H}} \ge 1. \tag{85}$$

De plus $1 \le X'/X'_0 < 4$. Les noyaux redimensionnés

$$K_{r,f',k'}(x_1,x_2) = \mathcal{K}_{r,f',k'}\left(\frac{X'}{X'_0}x_1, \frac{X'}{X'_0}x_2\right)$$

ont un support dans $[u/8, 2v]^2 \subset \mathrm{int}(I'^2)$ et satisfont

$$\sup_{r,f',k'} \|K_{r,f',k'}\|_{C^{2m+4}(I'^2)} \ll_{I_*,m,\Phi} \|U\|^2_{C^{2m+4}(I_*)},$$

où le supremum est sur les indices retenus dans le bloc dyadique. Cela découle des bornes de Schwartz pour $\widehat{\Phi}$. Les paramètres communs satisfont exactement

$$\frac{\mathcal{H}'}{\Sigma'} = \frac{\mathcal{H}}{\Sigma FR} \le \frac{\mathcal{H}}{\Sigma}, \quad \Sigma' \le L, \quad \mathcal{H}' \le \frac{\mathcal{H}L}{\Sigma F}.$$

Fixons $\delta > 0$, à choisir en termes de ε_0 à la fin. Pour chaque r retenu, élargissons les plages f', k' par positivité, en gardant cet ensemble de r fixé. Le Lemme 4.4 donne alors, pour $V \in C_c^\infty(I')$,

$$\sum_{F'\le N(f')<2F'}^{*} \sum_{0<N(k')\preccurlyeq \mathcal{H}'}^{*} \left|\sum_{n}^{*} a^\sharp(n) V(N(n)/X')\right|^2 = \Sigma' \mathcal{E}_{(r)}(\mathcal{H}', X', F'; \xi', V) \ll_\delta D^\delta (\Sigma')^2 S_m \|V\|^2_{C^m(I')}.$$

En effet, la suppression de l'exclusion remplace (X', F') par $(X'/N(j), F'N(j))$, $j \mid r$, préservant $\mathcal{H}'$ et Σ'. L'équation (85) donne $X'/N(j) \ge 1$, et $F'N(j) \ge 1$ aussi. Ainsi chaque moyenne quadratique résultante se trouve dans le supremum définissant.

Il y a $O(R)$ idéaux r dans la plage dyadique. Appliquons le Lemme B.2 avec l'indice de ligne (r, f', k'), la borne de moyenne quadratique précédente, et la borne de noyau uniforme. La contribution absolue de ce bloc dyadique est au plus

$$D^{2\delta} \frac{\Sigma R}{L^2} R(\Sigma')^2 S_m \|U\|^2_{C^{2m+4}(I_*)} = D^{2\delta} \Sigma S_m \|U\|^2_{C^{2m+4}(I_*)},$$

car $(\Sigma R/L^2) R (L/R)^2 = \Sigma$.

Enfin, la borne de fréquence nulle dans le Lemme 7.2 donne

$$|\mathcal{Z}| \ll_{I_*,\Phi} \|U\|^2_\infty \sum_{N(Ct)\le 2vL} \sum_{d\mid C} w_{C,d} Y_{C,d} \ell \ll_{I_*} \Sigma \|U\|^2_\infty \sum_C \frac{\tau_{\mathrm{div}}(C)}{N(C)^2} \sum_{N(t)\le 2vL} \frac{1}{N(t)} \ll_{I_*,\delta} D^\delta \Sigma \|U\|^2_\infty.$$

Ceci n'utilise que $Y_{C,d} > 0$, pas $Y_{C,d} \ge 1$. Sommons les $O_{I_*,C_0}((\log(2D))^2)$ blocs dyadiques et l'ensemble fini fixe de caractères, et prenons $\delta = \varepsilon_0/4$. La borne énoncée s'ensuit, avec une constante implicite dépendant uniquement de $I_*, m, C_0, \varepsilon_0$, des coupures fixes et des données arithmétiques. □

Preuve de la Proposition 5.4. Utilisons S_m comme dans le Lemme 7.3, avec m comme dans la proposition. Le Lemme 7.3, avec une perte $D^{\varepsilon/4}$, fournit l'hypothèse du Lemme 7.1 avec $j = 2m+4$ et $M \ll D^{\varepsilon/4}\Sigma(1+S_m)$. En appliquant ce lemme avec la même perte, on obtient

$$\mathcal{A}(W) \ll D^{\varepsilon/2}\Sigma(1+S_m)\|W\|^2_{C^{4m+12}(I)},$$

ce qui prouve (56). □

A Identités arithmétiques et calculs thêta

A1. Réciprocité et sommes de Gauss

Preuve du Lemme 4.1. Preuve de (30). Pour n sans facteur carré, posons $G(n) = \overline{\chi_n(4)}\gamma_3(n)$. Sa dépendance à une classe de rayon fixe sera vérifiée ci-dessous. Fixons un nombre premier primaire $p \equiv 1 \pmod 3$ en dehors de S. Pour des caractères multiplicatifs A, B de $(\mathcal{O}/(p))^\times$, étendus par zéro en 0, écrivons

$$J(A,B) = \sum_{x \bmod p} A(x)B(1-x).$$

Pour chaque $y \in \mathcal{O}/(p)$, la substitution $u = 2x-1$ donne

$$\#\{x \bmod p : 4x(1-x) = y\} = \#\{u \bmod p : u^2 = 1-y\} = 1 + \chi_p^3(1-y),$$

puisque $p \nmid 2$ et χ_p^3 est le caractère quadratique, étendu par zéro en 0. Donc

$$\chi_p(4)J(\chi_p,\chi_p) = \sum_{x \bmod p} \chi_p(4x(1-x)) = \sum_{y \bmod p} \chi_p(y)(1+\chi_p^3(1-y)) = J(\chi_p,\chi_p^3).$$

L'identité de Gauss-Jacobi (cf. [22], (3.18)) donne

$$\frac{\gamma_1(p)\gamma_3(p)}{\gamma_4(p)} = \frac{J(\chi_p,\chi_p^3)}{\sqrt{N_{K/\mathbb{Q}}(p)}} = \chi_p(4)\frac{J(\chi_p,\chi_p)}{\sqrt{N_{K/\mathbb{Q}}(p)}} = \chi_p(4)\frac{\gamma_1(p)^2}{\gamma_2(p)}.$$

Pour $j \not\equiv 0 \pmod 6$, les sommes de Gauss normalisées satisfont

$$\gamma_j(p)\gamma_{-j}(p) = \chi_p(-1)^j.$$

Prenant $j = 2$, on obtient $\gamma_2(p)\gamma_4(p) = \chi_p^2(-1) = 1$, puisque χ_p^2 est cubique. En combinant cela avec la relation de Gauss-Jacobi ci-dessus, après annulation de $\gamma_1(p)$ et réarrangement, on obtient

$$\gamma_1(p)\gamma_2(p) = \overline{\chi_p(4)}\gamma_3(p)\gamma_2(p)^3.$$

Pour terminer le cas premier de (30), il reste à évaluer $\gamma_2(p)^3$. Nous le faisons en calculant $J(\chi_p^2,\chi_p^2)$. Posons $q = N_{K/\mathbb{Q}}(p)$. Nous avons $J(\chi_p^2,\chi_p^2) \in \mathcal{O}$ et $N_{K/\mathbb{Q}}(J(\chi_p^2,\chi_p^2)) = q$. Pour $0 \le \ell \le (q-1)/3$, l'exposant $(q-1)/3+\ell$ est strictement compris entre 0 et $q-1$, donc $\sum_{x \bmod p} x^{(q-1)/3+\ell} = 0$ dans $\mathcal{O}/(p)$. En réduisant modulo p et en développant le binôme, on obtient donc

$$J(\chi_p^2,\chi_p^2) \equiv \sum_{x \bmod p} x^{(q-1)/3}(1-x)^{(q-1)/3} = \sum_{\ell=0}^{(q-1)/3} (-1)^\ell \binom{(q-1)/3}{\ell} \sum_{x \bmod p} x^{(q-1)/3+\ell} = 0 \pmod p.$$

Ainsi $J(\chi_p^2,\chi_p^2)/p \in \mathcal{O}$ a une norme de un, donc $J(\chi_p^2,\chi_p^2)$ est un multiple unitaire de p. Pour déterminer l'unité, écrivons $\chi_p^2(x(1-x)) = \omega^{j_x}$ avec $j_x \in \{0,1,2\}$ pour $x \in \mathcal{O}/(p) \setminus \{0,1\}$. Alors

$$\prod_{x \ne 0,1} x(1-x) = 1 \implies \sum_{x \ne 0,1} j_x \equiv 0 \pmod 3.$$

Puisque $(\omega-1)^2$ engendre (3), le développement modulo cet idéal donne

$$J(\chi_p^2,\chi_p^2) = \sum_{x \ne 0,1} \omega^{j_x} \equiv (q-2) + (\omega-1)\sum_{x \ne 0,1} j_x \equiv -1 \pmod 3.$$

Conjointement avec $p \equiv 1 \pmod 3$, cela fixe l'unité :

$$J(\chi_p^2, \chi_p^2) = -p.$$

Par conséquent

$$\gamma_2(p)^3 = \frac{\gamma_2(p)^2}{\gamma_4(p)} = \frac{J(\chi_p^2, \chi_p^2)}{\sqrt{N_{K/\mathbb{Q}}(p)}} = -\alpha(p).$$

Le théorème des restes chinois étend ces identités de module premier à (30) pour n sans facteur carré, avec un signe moins pour chaque facteur premier rendant compte de $\mu(n)$.

Preuve de (34). Pour a, b primaires sans facteur carré premiers entre eux et premiers à S, le théorème des restes chinois donne

$$\gamma_2(ab) = \gamma_2(a)\gamma_2(b)\chi_a(b)^2\chi_b(a)^2,$$

et la réciprocité cubique donne $\chi_a(b)^2 = \chi_b(a)^2$. En multipliant par $\overline{\alpha(ab)}\xi(ab)$, on prouve donc (34).

Preuve de (29). Nous prouvons maintenant (29) et la formule pour $G(n)$ en (31), y compris leur dépendance à une classe de rayon fixe. Nous commençons par évaluer la somme de Gauss quadratique normalisée. Pour $c \in \mathcal{O}$ premier à 2, nous montrerons que

$$\Gamma_{\text{quad}}(c) := |c|^{-1} \sum_{x \bmod c} e(x^2/c) = \frac{1}{2} \sum_{y \bmod 2\mathcal{O}} e(-cy^2/4). \tag{86}$$

Pour justifier (86), appliquons la sommation de Poisson sur $z \in \mathcal{O}$ à $e(z^2/c)e^{-\pi\eta|z|^2}$, avec $\eta > 0$. La gaussienne rend la somme convergente. La transformée de Fourier du produit est

$$\frac{|c|}{2\sqrt{\tau_\eta}} e^{-\pi\eta N_{K/\mathbb{Q}}(c)|y|^2/(4\tau_\eta)} e(-cy^2/(4\tau_\eta)), \quad \tau_\eta = 1 + 3N_{K/\mathbb{Q}}(c)\eta^2/16.$$

Divisons les deux membres par la masse gaussienne

$$\sum_{z\in\mathcal{O}} e^{-\pi\eta|z|^2} \asymp \eta^{-1}.$$

Du côté de Fourier, remplacer τ_η par 1 a une erreur totale

$$O_c\left(\eta^2 \sum_{y\in\mathcal{O}} |y|^2 e^{-C_c\eta|y|^2}\right) = O_c(1),$$

où $C_c > 0$ est fixé. L'erreur normalisée est donc $O_c(\eta) \to 0$. En regroupant la somme originale modulo c et la somme de Fourier modulo $2\mathcal{O}$, puis en laissant $\eta \downarrow 0$, on obtient (86).

Pour $c = a + b\omega$, la formule (86) devient

$$\Gamma_{\text{quad}}(a + b\omega) = \frac{1 + i^{-b} + i^a + i^{b-a}}{2}.$$

Ainsi $\Gamma_{\mathrm{quad}}(c)$ dépend uniquement de $c \bmod 4\mathcal{O}$ et est invariant sous multiplication par un carré dans $(\mathcal{O}/4\mathcal{O})^\times$. Les représentants des quatre classes de carrés et leurs valeurs sont

c	1	-1	λ	$-\lambda$
$\Gamma_{\mathrm{quad}}(c)$	1	1	i	$-i$

Par conséquent, la fonction

$$\mathcal{R}(c_1, c_2) := \frac{\Gamma_{\mathrm{quad}}(c_1 c_2)}{\Gamma_{\mathrm{quad}}(c_1)\Gamma_{\mathrm{quad}}(c_2)}$$

sur ces classes de carrés satisfait

$$\mathcal{R}((-1)^e\lambda^f, (-1)^g\lambda^h) = (-1)^{eh+fg+fh}, \quad e, f, g, h \in \{0, 1\},$$

et est un bicaractère symétrique. Pour un nombre premier p, chaque $y \in \mathcal{O}/(p)$ a $1 + \chi_p^3(y)$ racines carrées. En regroupant par $y = x^2$, on obtient

$$\Gamma_{\mathrm{quad}}(p) = \frac{1}{|p|} \sum_{y \bmod p} (1 + \chi_p^3(y))e(y/p) = \gamma_3(p),$$

puisque $\sum_{y \bmod p} e(y/p) = 0$. Le théorème des restes chinois étend cette égalité à n sans facteur carré. Conjointement avec la réciprocité cubique, il identifie le $\mathcal{R}$ ci-dessus avec le quotient $\chi_b(a)/\chi_a(b)$ pour a, b primaires premiers entre eux. De plus, $\chi_c(4) = (-2/c)_3 = (c/(-2))_3$ est un caractère modulo 2. Par conséquent, $G(c) = \chi_c(4)\Gamma_{\mathrm{quad}}(c)$ se factorise à travers un groupe de classes de rayon fixe et satisfait (29), avec $\mathcal{R}(c, c) = \chi_c(-1)$.

Preuve de (35). Dans le groupe de classes de rayon fixe, la relation multiplicative pour G donne

$$G(a^{-1}) = \chi_a(-1)\overline{G(a)}.$$

En utilisant la symétrie et la multiplicativité de $\mathcal{R}$, on obtient

$$G(ba^{-1}) = G(b)G(a^{-1})\mathcal{R}(b, a^{-1}) = \chi_a(-1)\overline{G(a)}G(b)\mathcal{R}(a, b),$$

ce qui est (35).

Preuve de (32)-(33). La seconde identité en (31) découle de l'identité de Gauss du caractère inverse : $\gamma_1(n)\gamma_{-1}(n) = \chi_n(-1)$. Il reste à prouver (32)-(33). En multipliant la seconde identité de (30) par $\alpha(n)$, on obtient (32), et en la combinant avec cette identité de caractère inverse, on obtient (33). □

A2. La transformation thêta cubique avec torsions de classes de rayon fixes

Nous prouvons la formule de transformation de la Proposition 6.2 pour la somme complétée $T(X; \Psi)$ en (48), ainsi que l'assertion d'uniformité du Lemme 6.3 et les bornes de coefficients et de poids du Lemme 6.4. La preuve adapte la méthode de transformation thêta de Dunn et Radziwiłł [7], § 5 et Annexe A, qui étend Patterson [38] et Yoshimoto [51]. Le traitement des torsions de classes de rayon fixes et les assertions d'uniformité sont fournis ci-dessous. Nous utilisons la configuration précédant la proposition et la dépendance des constantes spécifiées dans ces trois énoncés : Ψ_0, S

sont fixes, tandis que $\mathcal{P}$ est l'ensemble fini variable de nombres premiers en dehors de S et j_p sont les exposants de leurs facteurs de caractères dans Ψ. Les puissances de caractères suivent la convention d'extension par zéro précédant (63) ; en particulier, $\chi_p^0(x) = \mathbf{1}_{p\nmid x}$. Cette convention s'applique également lorsque nous écrivons $\chi_p(x)^j$.

Écrivons $w = (z, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_{>0}$, et utilisons θ de (59). Les trois suites d_σ, $\sigma \in \{0, +, -\}$, sont définies par les développements de Fourier de $\overline{\theta(\gamma_\sigma w)}$ en (66), avec les représentants (65). Pour les caractères additifs, écrivons $\check{e}(z) = \exp(2\pi i(z + \bar{z}))$; ainsi $e(z) = \check{e}(z/\lambda)$, avec e comme en (8).

Preuve de la Proposition 6.2 et des Lemmes 6.3 et 6.4. Développement de Fourier fini. Définissons $\phi : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ par

$$\phi(n) = \begin{cases} \chi_n(\lambda)^2 \Psi_0(n), & n \equiv 1 \pmod 3, \quad (n, S) = 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $\Psi(n) = \Psi_0(n) \prod_{p \in \mathcal{P}} \chi_p^{j_p}(n)$, définissons

$$\Theta_\Psi(z, v) = \sum_{\substack{\ell \in \lambda^{-3}\mathcal{O} \\ \ell \neq 0}} \overline{\tau(-\ell)} \phi(\lambda^3 \ell) \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \chi_p^{j_p}(\lambda^3 \ell) \right) v K_{1/3}(4\pi |\ell| v) \check{e}(\ell z). \tag{87}$$

Lorsque $\Psi = \Psi_k$, le multiplicateur de $\overline{\tau(-\ell)}$ est $\phi_k(\lambda^3 \ell)$, donc cette définition redonne Θ_k en (60). Nous écrivons d'abord Θ_Ψ comme une somme finie de translatés de $\bar{\theta}$ et déterminons leurs dénominateurs réduits. Choisissons une fois pour toutes un $L \in \mathcal{O}$ non nul, avec des diviseurs premiers dans S, divisible par le conducteur de Ψ_0, chaque nombre premier dans S, et des puissances suffisamment élevées des nombres premiers au-dessus de 2 et 3. La loi supplémentaire de la réciprocité cubique pour λ [7], (1.5), qui évalue $\chi_n(\lambda)^2 = (\lambda/n)_3$, rend ϕ périodique modulo L. Comme auparavant (62), définissons

$$\widehat{\phi}(h_0) = \frac{1}{N_{K/\mathbb{Q}}(L)} \sum_{x \bmod L} \phi(x) e(-h_0 x/L), \quad h_0 \in \mathcal{O}/(L).$$

Puisque $|\phi| \leq 1$, nous avons $|\widehat{\phi}(h_0)| \leq 1$.

Pour $p \in \mathcal{P}$ et $0 \leq j \leq 5$, nous développons χ_p^j sur $\mathcal{O}/(p)$ en caractères additifs. Ses coefficients de Fourier sont définis, pour $h_p \in \mathcal{O}/(p)$, par

$$C_{p,j}(h_p) := \frac{1}{N_{K/\mathbb{Q}}(p)} \sum_{y \bmod p} \chi_p^j(y) e(-h_p y/p).$$

L'inversion de Fourier finie donne alors, pour $x \in \mathcal{O}$,

$$\chi_p^j(x) = \sum_{h_p \in \mathcal{O}/(p)} C_{p,j}(h_p) e(h_p x/p). \tag{88}$$

En multipliant (88) sur les nombres premiers dans $\mathcal{P}$, on obtient, pour $x \in \mathcal{O}$,

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \chi_p^{j_p}(x) = \sum_{h_p \in \mathcal{O}/(p)} \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} C_{p,j_p}(h_p) \right) e\left(x \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{h_p}{p} \right).$$

Chaque terme est indexé par un tuple $(h_p)_{p\in\mathcal{P}}$. En $x=\lambda^3\ell$, son caractère additif donne le décalage $\lambda^2\sum_{p\in\mathcal{P}}h_p/p$ de θ. En écrivant $\mathbf{h}=(h_0,(h_p)_{p\in\mathcal{P}})$ avec $h_0\in\mathcal{O}/(L)$, nous affirmons que

$$\Theta_\Psi(z,v)=\sum_{\mathbf{h}}c_{\mathbf{F}}(\mathbf{h})\bar\theta(z+z_{\mathbf{h}},v),$$

où

$$z_{\mathbf{h}}=\lambda^2\left(h_0/L+\sum_{p\in\mathcal{P}}h_p/p\right),\quad c_{\mathbf{F}}(\mathbf{h})=\widehat{\phi}(h_0)\prod_{p\in\mathcal{P}}C_{p,j_p}(h_p).\tag{89}$$

Pour vérifier cette identité, développons également le facteur fixe ϕ. Les développements de Fourier finis identifient tous les coefficients de Fourier non nuls, et les termes constants des translatés s'annulent car

$$\sum_{\mathbf{h}}c_{\mathbf{F}}(\mathbf{h})=\phi(0)\prod_{p\in\mathcal{P}}\chi_p^{j_p}(0)=0.$$

Pour $j\not\equiv 0 \pmod 6$, nous utilisons $\gamma_j(p)$ de (8). En changeant y en $-y$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{N_{K/\mathbb{Q}}(p)}}\sum_{y \bmod p}\chi_p(y)^j e(-y/p)=\chi_p(-1)^j\gamma_j(p),\quad |\gamma_j(p)|=1.$$

Pour $h_p\neq 0$, substituons $y=h_p^{-1}u$ dans la définition de $C_{p,j}(h_p)$. Pour $h_p=0$ et $j\neq 0$, utilisons l'orthogonalité des caractères ; pour $j=0$, sommons le caractère additif sur les résidus non nuls directement. Ces calculs donnent

$$C_{p,j}(h_p)=\begin{cases}N_{K/\mathbb{Q}}(p)^{-1/2}\chi_p(-1)^j\gamma_j(p)\chi_p(h_p)^{-j}, & j\neq 0,\ h_p\neq 0,\\ 0, & j\neq 0,\ h_p=0,\\ -N_{K/\mathbb{Q}}(p)^{-1}, & j=0,\ h_p\neq 0,\\ 1-N_{K/\mathbb{Q}}(p)^{-1}, & j=0,\ h_p=0.\end{cases}\tag{90}$$

Pour le tuple $\mathbf{h}$, définissons son ensemble de *nombres premiers actifs* par $\mathcal{A}(\mathbf{h}):=\{p\in\mathcal{P}:h_p\neq 0\}$. Par (90), $c_{\mathbf{F}}(\mathbf{h})\neq 0$ implique $\{p\in\mathcal{P}:j_p\neq 0\}\subseteq\mathcal{A}(\mathbf{h})$. Ainsi seuls les nombres premiers avec $j_p=0$ peuvent être inactifs, comme affirmé dans la proposition. Posons $r=\prod_{p\in\mathcal{A}(\mathbf{h})}p$, et soit c_0 le dénominateur réduit de λ^2h_0/L. À chaque nombre premier actif p,

$$v_p(\lambda^2h_p/p)=-1,\quad v_p(z_{\mathbf{h}}-\lambda^2h_p/p)\geq 0,$$

donc le facteur p ne peut pas s'annuler dans le dénominateur. Aux nombres premiers divisant L, tous les termes λ^2h_p/p sont intégraux. Ainsi le dénominateur réduit est $c=c_0r$ à une unité près, y compris lorsque $(h_0,L)\neq 1$. Le développement de Fourier fini a donc exprimé Θ_Ψ comme $O_L(2^{|\mathcal{P}|})$ groupes de translatés $\bar\theta(z+z_{\mathbf{h}},v)$, avec des décalages $z_{\mathbf{h}}$ et des coefficients $c_{\mathbf{F}}(\mathbf{h})$ donnés par (89). Les groupes sont indexés par $h_0\in\mathcal{O}/(L)$ et l'ensemble actif $\mathcal{A}$. Chaque groupe a un dénominateur réduit commun $c=c_0\prod_{p\in\mathcal{A}}p$ à une unité près.

Pour chaque translaté $\bar\theta(z+z_{\mathbf{h}},v)$, nous identifions ensuite lequel des trois développements de Fourier en (66) sera utilisé après changement de coordonnées en $z_{\mathbf{h}}$.

Dénominateurs réduits et coefficients de pointe. Nous exprimons ensuite chaque translaté $\bar\theta(z+z_{\mathbf{h}},v)$ en utilisant l'un des trois développements en pointe identifiés ci-dessus. Nos représentants $\gamma_0,\gamma_+,\gamma_-$

correspondent à $\gamma_1, \gamma_{10}, \gamma_{19}$, respectivement, dans la numérotation de [7], § 5.1, qui suit [38], Tableau II. Nous autorisons $(h_0, L) \neq 1$ et gardons le dénominateur réduit c_0 de $\lambda^2 h_0/L$ dans le calcul ; c'est l'extension au-delà de [7], Corollaire 5.1.

Posons $M = \lambda^{12} L^4$. Puisque $(p, M) = 1$ pour $p \in \mathcal{A}(\mathbf{h})$, le théorème des restes chinois nous permet de choisir des représentants $h_p \in \mathcal{O}$ avec $h_p \equiv 0 \pmod{M^2}$. Changer les représentants modulo p change $z_{\mathbf{h}}$ par un élément de $\lambda^2\mathcal{O} = 3\mathcal{O}$, sous lequel θ est périodique. Pour suivre la dépendance aux nombres premiers dans r, restreignons r à une classe de résidus modulo M^2. Pour h_0, l'ensemble actif et cette classe de résidus fixés, écrivons $z_{\mathbf{h}} = a/c$ sous forme réduite, en normalisant $a \equiv 1 \pmod 3$ si $\lambda \mid c$, et $c \equiv 1 \pmod 3$ sinon. Puisque

$$a = \lambda^2 c \left(h_0/L + \sum_{p \mid r} h_p/p \right),$$

ces choix fixent le résidu de a modulo Mc_0. Puisque $(a, c) = 1$ et $(r, M) = 1$, le théorème des restes chinois donne $\delta' \in \mathcal{O}$ satisfaisant les congruences suivantes, où q parcourt les diviseurs premiers des éléments indiqués :

$$\begin{gathered} a\delta' \equiv 1 \pmod{q^{v_q(Mc_0)}} \quad (q \mid c_0), \\ \delta' \equiv 0 \pmod{q^{v_q(M)}} \quad (q \mid M,\ q \nmid c_0), \\ a\delta' \equiv 1 \pmod r. \end{gathered}$$

Posons

$$b_g = \frac{a\delta' - 1}{c}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b_g \\ c & \delta' \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}).$$

Les congruences pour δ' donnent

$$b_g \equiv \begin{cases} 0, & q \mid c_0, \\ -c^{-1}, & q \mid M,\ q \nmid c_0, \end{cases} \pmod{q^{v_q(M)}}.$$

Pour choisir le développement en pointe en a/c, posons

$$H = \begin{cases} I, & 3 \mid c, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_0 & 1 \end{pmatrix}, & v_\lambda(c) = 1, \quad u_0 \in \{\lambda, -\lambda\}, \quad u_0 \equiv c \pmod 3, \\ \begin{pmatrix} u_0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & (c, \lambda) = 1, \quad u_0 \equiv a \pmod 3. \end{cases}$$

Dans le dernier cas, choisissons $u_0 \in \mathcal{O}$ dans un ensemble fixe de représentants modulo 3. Dans chaque cas, posons $g_1 = gH^{-1}$. Alors $g = g_1 H$ et $g_1 \equiv I \pmod 3$, comme dans [7], § 5.1. Les invariances

$$\theta(\gamma w) = \theta(w) \quad (\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), \quad \theta(z + t, v) = \theta(z, v) \quad (t \in \mathbb{Z} + 3\mathcal{O})$$

réduisent $\bar\theta(Hw)$ à l'une des trois fonctions $\overline{\theta(\gamma_\sigma w)}$, $\sigma \in \{0, -, +\}$, avec les matrices γ_σ de (65). Ces représentants donnent le développement à l'infini et les deux développements en pointe supplémentaires nécessaires ici : en translatant par ω ou $-\omega$, puis en appliquant l'inversion, on obtient

les représentants étiquetés $-$ et $+$, respectivement [7], (5.9)-(5.15), Annexe A. Écrivons $t_\sigma(\ell)$ pour le coefficient de $vK_{1/3}(4\pi|\ell|v)\check{e}(\ell z)$ dans $\theta(\gamma_\sigma w)$. Soient $\tau_1, \tau_2 : \lambda^{-4}\mathcal{O} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ les suites de coefficients définies dans [7], (5.13), (5.14). Le calcul de pointe de Patterson [38], Théorème 8.1 et Tableau III donne alors

$$t_0(\ell) = \tau(\ell), \quad t_-(\ell) = \omega^2\tau_1(\omega^2\ell)\check{e}(\ell), \quad t_+(\ell) = \omega\tau_2(\omega\ell)\check{e}(\ell). \tag{91}$$

La conjugaison complexe change la fréquence de Fourier de ℓ à $-\ell$. Ainsi les coefficients dans la normalisation (66) sont

$$d_\sigma(\ell) = \overline{t_\sigma(-\ell)}, \quad \sigma \in \{0, +, -\}. \tag{92}$$

Pour les indices $\ell = u\lambda^m nb^3$ comme en (68), les magnitudes des coefficients satisfont

$$|t_0(\ell)| \le \begin{cases} 3^{k/2+2}|b|, & m = 3k-4,\ k \ge 1, \\ 3^{k/2+5/2}|b|, & m = 3k-3,\ k \ge 0. \end{cases}$$

Les coefficients $m = -4$ de t_- et t_+ ont une magnitude au plus $9|b|$. Pour le H choisi, soit $\sigma \in \{0, +, -\}$ l'indice du développement correspondant dans (66). Pour chaque translaté $\bar{\theta}(z + a/c, v)$, nous avons identifié le développement de Fourier en z de $\bar{\theta}(\overline{H(z,v)})$ comme l'un des trois développements en (66) :

$$\overline{\bar{\theta}(\overline{H(z,v)})} = \frac{3^{5/2}}{2}\mathbf{1}_{\sigma=0}v^{2/3} + \sum_{0\neq\ell\in\lambda^{-4}\mathcal{O}} d_\sigma(\ell)vK_{1/3}(4\pi|\ell|v)\check{e}(\ell z).$$

Ces coefficients satisfont la restriction de support (68) et la borne (69), prouvant les assertions de coefficients du Lemme 6.4. L'étape suivante utilise $g = g_1 H$ pour exprimer le translaté original à travers cette série de Fourier évaluée en $g^{-1}(z + a/c, v)$, et calcule le multiplicateur et la phase additive accompagnants. La matrice g envoie ∞ en a/c, c'est pourquoi on parle d'un développement à la pointe a/c.

La transformation de caractère locale. La factorisation matricielle $g = g_1 H$ nous permet d'appliquer la loi d'automorphie

$$\theta(g_1 w) = \kappa(g_1)\theta(w), \quad \kappa(g_1) = (c_1/a_1)_3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \equiv I \pmod 3,$$

où κ est le caractère cubique de Kubota [7], (5.4), (5.6). Nous combinerons son conjugué avec les coefficients de Fourier finis $C_{p,j}(h_p)$ en (90) pour obtenir les facteurs $B_{p,j}$ de (63). Pour la fonction thêta translatée, la loi d'automorphie donne

$$\overline{\theta(z + a/c, v)} = \overline{\kappa(g_1)}\overline{\theta(\overline{H} g^{-1}(z + a/c, v))}, \tag{93}$$

où

$$g^{-1}(z + a/c, v) = \left(-\frac{\delta'}{c} - \frac{\bar{z}}{c^2(v^2 + |z|^2)}, \frac{v}{N_{K/\mathbb{Q}}(c)(v^2 + |z|^2)} \right). \tag{94}$$

En $z = 0$, le terme d'indice de Fourier ℓ dans le développement de $\bar{\theta}(Hw)$ acquiert donc la phase $\check{e}(-\delta'\ell/c)$. Nous affirmons que le multiplicateur est donné par

$$\kappa(g_1) = \begin{cases} (c_0/a)_3(a/r)_3, & 3 \mid c, \\ (-u_0/(a - u_0 b_g))_3((c_0/u_0)/a)_3(a/r)_3, & v_\lambda(c) = 1, \\ (a/c_0)_3(a/r)_3, & (c, \lambda) = 1. \end{cases} \tag{95}$$

Pour vérifier (95), utilisons l'équation du déterminant et la réciprocité cubique. Pour le cas $v_\lambda(c) = 1$, les congruences requises sont

$$a(c - u_0\delta') \equiv -u_0 \pmod{a - u_0 b_g}, \quad b_g c \equiv -1 \pmod{a}.$$

Pour $(c, \lambda) = 1$, la congruence

$$-b_g c = 1 - a\delta' \equiv 1 \pmod{9}$$

supprime les facteurs supplémentaires ; la réciprocité aux nombres premiers restants donne alors $(\delta'/(-b_g c))_3 = 1$. Les facteurs autres que $(a/r)_3$ dépendent uniquement des résidus fixes aux nombres premiers dans S. Nous pouvons donc écrire

$$\kappa(g_1) = \kappa_0 (a/r)_3 = \kappa_0 \prod_{p|r} \chi_p(a)^2, \quad |\kappa_0| = 1,$$

où κ_0 est fixé une fois h_0, l'ensemble actif et $r \bmod M^2$ fixés.

Fixons h_0 et l'ensemble actif, de sorte que le dénominateur $c = c_0 r$ soit fixe tandis que les résidus non nuls h_p varient. Posons $D_0 = \lambda^3 c_0$. Pour chaque nombre premier actif p, définissons dans $\mathcal{O}/(p)$

$$\sigma_p = \lambda^2 c/p, \quad \epsilon_p = -((\lambda^3 c/p)\sigma_p)^{-1}.$$

L'inverse dans ϵ_p est pris dans le corps $\mathcal{O}/(p)$; il existe car r est sans facteur carré et $p \nmid \lambda c_0$. L'expression pour a donne $a \equiv \sigma_p h_p \pmod{p}$. Pour un indice de Fourier dual $\ell \in \lambda^{-4}\mathcal{O}$, la forme additive du théorème des restes chinois donne

$$\check{e}(-\delta'\ell/c) = \psi(\lambda^4 \ell) \prod_{p|r} e(\epsilon_p h_p^{-1} \lambda^4 \ell/p), \tag{96}$$

où

$$\psi(\lambda^4\ell) := e(-\delta_0' r^{-1} \lambda^4 \ell/D_0), \quad \delta_0' = \delta' \bmod D_0.$$

Les résidus δ_0' et $r^{-1} \bmod D_0$ sont fixés par les choix ci-dessus, donc ψ parcourt une famille finie fixe de caractères additifs de $\mathcal{O}$. Nous affirmons l'identité de transformation locale

$$\sum_{h_p \neq 0} C_{p,j}(h_p) \chi_p(a)^{-2} e(\epsilon_p h_p^{-1} \lambda^4 \ell/p) = \chi_p(\sigma_p)^{-2} \omega_{p,j} B_{p,j}(\lambda^4 \ell), \tag{97}$$

où $B_{p,j}$ est défini en (63), et

$$\omega_{p,j} = \begin{cases} \chi_p(-1)^j \gamma_j(p) \gamma_{j+2}(p) \chi_p(\epsilon_p)^{-j-2}, & j \neq 0, 4, \\ \gamma_4(p), & j = 4, \\ -\gamma_2(p)\chi_p(\epsilon_p)^{-2}, & j = 0 \text{ actif.} \end{cases}$$

Les indices de $\gamma_j(p)$ sont lus modulo six ; dans le second cas, $\chi_p(-1)^4 = 1$. Dans chaque cas $|\omega_{p,j}| = 1$. Pour prouver (97), combinons (90), le conjugué de (95) et (96). En posant $y = h_p^{-1}$, l'exposant du caractère change comme suit :

$$\chi_p(h_p)^{-j} \chi_p(a)^{-2} = \chi_p(\sigma_p)^{-2} \chi_p(h_p)^{-j-2} = \chi_p(\sigma_p)^{-2} \chi_p(y)^{j+2}, \quad y = h_p^{-1}.$$

Pour $j \neq 0, 4$, le caractère χ_p^{j+2} est non trivial, et sa somme de Gauss donne le premier cas de $B_{p,j}$. Pour $j = 4$, il est trivial sur les résidus non nuls ; après redimensionnement par $\epsilon_p \neq 0$, la somme est

$$\sum_{y \neq 0} e(\lambda^4 \ell y/p) = -1 + N_{K/\mathbb{Q}}(p)\mathbf{1}_{p|\lambda^4\ell}.$$

Pour $j = 0$ actif, le coefficient $-N_{K/\mathbb{Q}}(p)^{-1}$ se combine avec une somme de Gauss cubique pour donner

$$B_{p,0}(\lambda^4\ell) = N_{K/\mathbb{Q}}(p)^{-1/2}\chi_p(\lambda^4\ell)^{-2},$$

avec les facteurs unitaires inclus dans $\omega_{p,0}$. Cela prouve (97) dans tous les cas. Un nombre premier inactif a $j = 0$ et ne contribue que le scalaire $1 - N_{K/\mathbb{Q}}(p)^{-1}$. Par conséquent, pour chaque h_0 fixé et ensemble actif $\mathcal{A}$, en combinant les coefficients de Fourier $d_\sigma(\ell)$ de $\bar{\theta}(H(z, v))$ avec les sommes sur $h_p \neq 0$, on obtient

$$d_\sigma(\ell)\psi(\lambda^4\ell) \prod_{p \in \mathcal{A}} B_{p,j_p}(\lambda^4\ell),$$

à un scalaire indépendant de ℓ près. Ce sont les facteurs arithmétiques dans la somme duale (67). En particulier, $B_{p,1}(\lambda^4\ell) = \chi_p(\lambda^4\ell)^3$ est le facteur quadratique utilisé en (76).

La transformée archimédienne. Nous dérivons maintenant le poids transformé $V_*^\sharp$ en (64) et le scalaire multipliant la somme duale. Pour $\Re s > 1$, introduisons la série de Dirichlet associée à la somme complétée (48) :

$$\mathcal{T}(s, \Psi) = \left(\sum_{\substack{n \in \mathcal{O} \\ n \equiv 1 \pmod 3 \\ (n,S)=1}}^{*} \frac{\overline{\alpha(n)}\gamma_2(n)\Psi(n)}{N_{K/\mathbb{Q}}(n)^s} \right) \left(\sum_{\substack{b \in \mathcal{O} \\ b \equiv 1 \pmod 3 \\ (b,S)=1}} \frac{\overline{\alpha(b)}^3\Psi(b)^3}{N_{K/\mathbb{Q}}(b)^{3s+1/2}} \right).$$

Avec V_* de (48) et sa transformée de Mellin définie avant (64), l'inversion de Mellin donne

$$T(X; \Psi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \widehat{V}_*(s - \tfrac{1}{2})\mathcal{T}(s, \Psi)X^{s-1/2}ds, \quad \sigma > 1. \tag{98}$$

L'identité (61), avec Ψ à la place de Ψ_k, identifie ces coefficients avec ceux de Θ_Ψ après avoir inséré le facteur $\overline{\alpha(nb^3)}$. Nous calculons maintenant la normalisation reliant $\mathcal{T}(s, \Psi)$ à la transformée de Mellin de la dérivée de Θ_Ψ.

Pour $z = x + iy$, utilisons $\partial_{\bar{z}} = (\partial_x + i\partial_y)/2$ et $\partial_z = (\partial_x - i\partial_y)/2$. La différenciation en $\bar{z}$ fournit un facteur $\bar{\ell}$ dans chaque mode de Fourier. Combiné avec le facteur $|\ell|^{-1}$ de l'intégrale de Bessel ci-dessous, cela produit le facteur angulaire requis $\overline{\alpha(\ell)}$. Nous définissons donc, initialement pour $\Re s > 1$, la transformée de Mellin

$$\mathcal{J}(s) = \int_0^\infty \partial_{\bar{z}}\Theta_\Psi(z, v)\Big|_{z=0} v^{2s-1}dv.$$

Pour chaque mode de Fourier non nul, la différenciation et l'intégrale de Mellin pour $K_{1/3}$ (voir [35], (10.43.19)) donnent les formules suivantes :

$$\partial_{\bar{z}}\check{e}(\ell z) = 2\pi i\bar{\ell}\check{e}(\ell z), \tag{99}$$

$$\int_0^\infty v^{2s} K_{1/3}(4\pi|\ell|v)dv = \frac{2^{2s-1}\Gamma(s+1/3)\Gamma(s+2/3)}{(4\pi|\ell|)^{2s+1}} \quad \Re s > 0. \tag{100}$$

Pour $\Re s > 1$, la formule des coefficients (12) et (100) montrent que la somme des intégrales des valeurs absolues est finie. Nous pouvons donc intégrer la série de Fourier différenciée terme à terme.

Pour $\ell = \lambda^{-3} n b^3$, la phase et l'échelle se simplifient en

$$i\overline{\alpha(\ell)}|\ell|^{-2s} = 27^s \overline{\alpha(n)\alpha(b)}^3 N_{K/\mathbb{Q}}(n)^{-s} N_{K/\mathbb{Q}}(b)^{-3s}.$$

En combinant cela avec (12), on obtient

$$\mathcal{J}(s) = \frac{3^{5/2}}{4}\left(\frac{27}{(2\pi)^2}\right)^s \Gamma(s+1/3)\Gamma(s+2/3)\mathcal{T}(s,\Psi). \tag{101}$$

Nous montrons ensuite que $\mathcal{J}(s)$ est entière et utilisons (101) pour prolonger $\mathcal{T}(s,\Psi)$.

Écrivons $(z',v') = g^{-1}(z + a/c, v)$. En différenciant (94) en $z = 0$, on obtient

$$\left.\frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}\right|_{z=0} = -\frac{1}{c^2 v^2}, \quad \left.\frac{\partial z'}{\partial \bar{z}}\right|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial v'}{\partial \bar{z}}\right|_{z=0} = 0.$$

Ainsi la dérivée en coordonnées de pointe est $-(cv)^{-2}\partial_{z'}$, sans terme de dérivée en hauteur. La série de Fourier définissant (87) pour Θ_Ψ contrôle $v \to \infty$. Pour $v \to 0$, utilisons (93) et les développements en pointe (66). Dans chaque développement, la dérivée horizontale supprime le mode constant. Les modes restants décroissent exponentiellement lorsque $v \to \infty$; en $v \to 0$, la hauteur transformée $1/(N_{K/\mathbb{Q}}(c)v)$ tend vers l'infini, donnant une décroissance exponentielle en $1/v$. Ainsi l'intégrale définissant $\mathcal{J}(s)$ converge pour tout s et définit une fonction entière. L'équation (101), après division par ses facteurs gamma, prolonge également $\mathcal{T}(s,\Psi)$ en une fonction entière.

Pour le terme indexé par $\mathbf{h}$ en (89), écrivons $c_\mathbf{h}, \delta'_\mathbf{h}, g_{1,\mathbf{h}}, H_\mathbf{h}$ pour les choix correspondants ci-dessus. Soit $\sigma_\mathbf{h}$ l'indice de pointe déterminé par $H_\mathbf{h}$. Définissons sa transformée de Mellin de pointe par

$$\mathcal{J}^\vee_\mathbf{h}(s) = \int_0^\infty \partial_{\bar{z}}\left\{\overline{\theta(H_\mathbf{h}(z,v))}\right\}\Big|_{z=-\delta'_\mathbf{h}/c_\mathbf{h}} v^{2s-1}dv. \tag{102}$$

En substituant $v \mapsto ({}_{K/}(c_\mathbf{h})v)^{-1}$ dans chaque terme translaté de (s), en utilisant (93), on obtient

$$(s) = -\sum_\mathbf{h} c_\mathbf{F}(\mathbf{h})\overline{\kappa(g_{1,\mathbf{h}})}\alpha(c_\mathbf{h})\,{}^2_{K/}(c_\mathbf{h})^{1-2s^\vee}_\mathbf{h}(1-s). \tag{103}$$

Ici $c_\mathbf{F}(\mathbf{h})$ est le coefficient en (89). Les coefficients de pointe $d_{\sigma_\mathbf{h}}(\ell)$ et (100) donnent, pour $\Re s > 1$,

$${}^\vee_\mathbf{h}(s) = \frac{i\Gamma(s+1/3)\Gamma(s+2/3)}{4(2\pi)^{2s}} \sum_{0\neq\ell\in\lambda^{-4}\text{‰}} \frac{d_{\sigma_\mathbf{h}}(\ell)\alpha(\ell)}{{}_{K/}(\ell)^s}\check{e}(-\delta'_\mathbf{h}\ell/c_\mathbf{h}). \tag{104}$$

La série de Dirichlet (s,Ψ) converge absolument pour $\Re s > 1$, tandis que la série en (104) en $1-s$ converge absolument pour $\Re s < 0$. L'équation fonctionnelle (103) et la formule de Stirling [22], § 5.A.4 donnent donc des bornes polynomiales en $|\Im s|$ pour (s,Ψ) des deux côtés de la bande

$0 \le \Re s \le 1$. En divisant l'intégrale définissant (s) en $v = 1$, on obtient un ordre fini ; Phragmén-Lindelöf [22], Théorème 5.53 donne alors le même type de borne à l'intérieur de la bande (comparer les arguments de Dunn et Radziwiłł dans [7], Propositions 5.1-5.2). Conjointement avec la décroissance rapide de $\widehat{V_*}$ sur les lignes verticales, ces bornes justifient de déplacer le contour s en (98) vers $\Re s < 0$. Aucun pôle n'est franchi, puisque (s, Ψ) est entière. En posant $t = \frac{1}{2} - s$, on obtient alors une ligne $\Re t > 1/2$, où la série de coefficients duale converge absolument.

Pour h_0 et l'ensemble actif fixés, insérons (104) dans (103) et utilisons (97) pour sommer sur les h_p non nuls. Après la normalisation en (101), le scalaire C en (67) pour ce groupe de translatés est

$$C = -\frac{i}{81}\overline{\alpha(c)}^2\widehat{\phi}(h_0)\overline{\kappa_0}\prod_{p \text{ inactif}}(1 - {}_{K/}(p)^{-1})\prod_{p \text{ actif}}\chi_p(\sigma_p)^{-2}\omega_{p,j_p}, \quad |C| \le 1/81.$$

En divisant (101) par ses facteurs gamma et en posant $t = \frac{1}{2} - s$, on obtient le quotient gamma en (64). Ses facteurs gamma numérateurs ont leur premier pôle en $t = -5/6$, et ses facteurs gamma dénominateurs réciproques sont entiers. Ainsi aucun pôle ne se trouve entre le contour actuel $\Re t > 1/2$ et $\Re t = 0$. La décroissance rapide de $\widehat{V_*}$, conjointement avec la formule de Stirling, nous permet de déplacer chaque contour de noyau vers $\Re t = 0$. Cela donne le poids $V_*^\sharp$ défini en (64), évalué en ${}_{K/}(\ell)X/{}_{K/}(c)^2$. Conjointement avec (97), cela donne la somme duale (67).

Pour k_0 comme dans le Lemme 6.3, fixons h_0, les facteurs de Ψ autres que χ_{k_0}, et les choix actifs/inactifs à leurs nombres premiers. Chaque nombre premier divisant k_0 a un exposant $j_p = 1$ et est donc actif, donc

$$r = k_0\prod_{p \in \text{fix}} p.$$

Ainsi r/k_0 est fixe, et fixer $k_0 \bmod M^2$ fixe $r \bmod M^2$. Les choix de H, c_0 et les résidus en (96) sont donc fixes dans chaque telle classe. Ainsi $d = d_\sigma$, ψ et c_0 ont précisément la dépendance affirmée à k_0.

Il reste à borner le poids transformé. Le premier pôle numérateur du quotient gamma en (64) est en $t = -5/6$. Nous pouvons donc déplacer le contour du noyau vers $\Re t = -1/4$ pour $0 < x \le 1$, obtenant le facteur $x^{1/4}$, et vers $\Re t = A$ pour $x \ge 1$, obtenant x^{-A}. Chaque application de $x\partial_x$ introduit un facteur $-t$. La formule de Stirling sur $-1/4 \le \Re t \le A$ donne alors, pour tout $A > 0$ et $j \ge 0$,

$$\begin{aligned}|(x\partial_x)^j V_*^\sharp(x)| &\ll_{A,j} \min(x^{1/4}, (1+x)^{-A}) \\ &\times \sup_{-A \le \eta \le 1/4}\int_{(} 1 + |u|)^{[4A]+j+2}|\widehat{V_*}(\eta + iu)|du.\end{aligned} \tag{105}$$

Lorsque V_* est supporté dans un intervalle compact fixe $I \subset (0, \infty)$, l'intégration par parties répétée dans sa transformée de Mellin donne une décroissance rapide en $|u|$, uniformément pour $-A \le \eta \le 1/4$. Ainsi, pour un $J = J(A, j)$ suffisamment grand, le supremum des intégrales en (105) est $\ll_{A,j,I} \|V_*\|_{C^J(I)}$. Cela prouve (70). Ainsi (67) exprime $T(X; \Psi)$ comme $O_{\Psi_0,S}(2^{||})$ sommes duales avec $|C| \le 1/81$, la dépendance affirmée à la classe de rayon de (d, ψ, c_0), et la décroissance du poids tout juste établie. Conjointement avec les bornes de support et de coefficients prouvées ci-dessus, cela complète la preuve de la Proposition 6.2 et des Lemmes 6.3 et 6.4.

B Séparation des variables dans les poids lisses

Cette annexe justifie la séparation des poids lisses dans l'estimation de moyenne quadratique complétée de la section 6, et le traitement des noyaux dépendant de la ligne dans les réductions de Poisson des sections 4 et 7.

B1. Séparation des variables

Nous utilisons l'inversion de Mellin pour séparer les variables d'un poids lisse, avec des bornes de coefficients contrôlées par un nombre fini de dérivées.

Lemme 22 (Lemme B.1)**.** *Fixons une boîte $= I_1 \times \cdots \times I_d$, où chaque I_j est un intervalle compact dans $(0,\infty)$. Tout $\in C_c^\infty((0,\infty)^d)$ supporté dans a une représentation*

$$(\mathbf{x}) = \int_d b(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^d x_j^{it_j} d\mathbf{t}, \quad x_j > 0. \tag{106}$$

Pour $J \geq 0$ et tout entier pair $q > J + d$, le coefficient satisfait

$$\int_d |b(\mathbf{t})|(1+|\mathbf{t}|)^J d\mathbf{t} \ll_{,J,q,d} \|\|_{C^q()}.$$

Démonstration. Prenons la transformée de Fourier en coordonnées logarithmiques :

$$b(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_d (e^{y_1}, \ldots, e^{y_d}) e^{-i\mathbf{t}\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{y}.$$

En appliquant l'inversion de Fourier à cela, on obtient (106). Puisque les intervalles I_j sont fixes et bornés loin de zéro, la norme C^q en coordonnées logarithmiques est bornée par une constante fois $\|\|_{C^q()}$. En appliquant $(1-\Delta_{\mathbf{y}})^{q/2}$ sous l'intégrale, on obtient donc

$$|b(\mathbf{t})| \ll_{,q,d} (1+|\mathbf{t}|)^{-q} \|\|_{C^q()} \quad (q \geq 0 \text{ pair}).$$

La multiplication par $(1+|\mathbf{t}|)^J$ et l'intégration prouvent la borne lorsque $q > J + d$. Voir aussi la formulation de Mellin multivariable dans [39], § 10.1, (130)-(131). □

Dans nos applications, le poids a la forme plus spécifique

$$_R(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^d W_j(x_j) F\left(R \prod_{j=1}^d x_j^{a_j}\right), \quad R > 0,$$

où les exposants a_j sont des nombres réels fixes et $W_j \in C_c^\infty((0,\infty))$ est supporté dans I_j. Supposons que $F \in C^\infty((0,\infty))$ satisfait

$$\|F\|_{A,q} := \max_{0\leq m\leq q} \sup_{u>0} (1+u)^A |(u\partial_u)^m F(u)| < \infty \quad (A \geq 0,\ q \in_{\geq 0}).$$

Sur la boîte fixe , l'argument de F est comparable à R. La règle de la chaîne et la borne ponctuelle dans la preuve donnent des coefficients b_R satisfaisant, pour $A \geq 0$ et $q \geq 0$ pair,

$$|b_R(\mathbf{t})| \ll (1+R)^{-A}(1+|\mathbf{t}|)^{-q} \|F\|_{A,q} \prod_{j=1}^d \|W_j\|_{C^q(I_j)}. \tag{107}$$

Par conséquent, pour $J \geq 0$ et $q > J + d$ pair,

$$\int_d |b_R(\mathbf{t})|(1+|\mathbf{t}|)^J d\mathbf{t} \ll (1+R)^{-A}\|F\|_{A,q} \prod_{j=1}^{d} \|W_j\|_{C^q(I_j)}. \tag{108}$$

Les constantes dépendent uniquement de A, J, q, d, des intervalles I_j et des exposants a_j. Ainsi la séparation préserve la décroissance en R, et son coût est contrôlé par un nombre fini de dérivées des poids originaux.

B2. Poids dépendant de la ligne

Le lemme suivant étend les bornes de moyenne quadratique pour une fonction de test commune à des noyaux lisses dépendant de la ligne, avec des pertes contrôlées par des bornes uniformes sur leurs dérivées.

Fixons des intervalles compacts $I \subset \mathrm{int} I_*$ dans $(0,\infty)$ et un entier $m \geq 0$.

Lemme 23 (Lemme B.2)**.** *Considérons deux familles de sommes finies*

$$S_{j,r}(U) = \sum_n a_{j,r}(n) U(x_{j,r,n}), \quad j = 1,2, \quad x_{j,r,n} > 0,$$

avec un ensemble fini de lignes r et des poids non négatifs w_r. Supposons que, pour tout $U \in C_c^\infty(I_*)$,

$$\sum_r w_r |S_{j,r}(U)|^2 \leq M_j \|U\|^2_{C^m(I_*)}, \quad j = 1,2.$$

Alors pour tout $|c_r| \leq w_r$ et tout noyau lisse $_r$ supporté dans I^2,

$$\left| \sum_r c_r \sum_{n_1,n_2} a_{1,r}(n_1)\overline{a_{2,r}(n_2)}\,{}_r(x_{1,r,n_1}, x_{2,r,n_2}) \right| \ll_{I,I_*,m} \sqrt{M_1 M_2}\, \sup_r \|{}_r\|_{C^{2m+4}(I^2)}. \tag{109}$$

Démonstration. Choisissons un $V \in C_c^\infty(I_*)$ réel égal à un sur I, et posons $U_t(x) = V(x)x^{it}$. Appliquons (106) du Lemme B.1 à chaque $_r$ avec $d = 2$ et $= I^2$. En remplaçant la seconde variable de Mellin par son opposé et en multipliant par $V(x)V(y)$, qui vaut un sur le support de $_r$, on obtient

$${}_r(x,y) = \int_2 b_r(s,t) U_s(x)\overline{U_t(y)} ds dt,$$

avec la borne uniforme suivante, obtenue à partir de l'estimation ponctuelle des coefficients dans la preuve du Lemme B.1 avec $d = 2$ et $= I^2$:

$$\sup_r |b_r(s,t)| \ll_{I,q} \frac{\sup_r \|{}_r\|_{C^q(I^2)}}{(1+|s|+|t|)^q} \quad (q \geq 0 \text{ pair}).$$

L'hypothèse s'applique à chaque U_t, et $\|U_t\|_{C^m(I_*)} \ll_{I,I_*,m} (1+|t|)^m$. En prenant la borne commune pour b_r avant d'intégrer et en appliquant Cauchy-Schwarz en r, on borne donc la valeur absolue en (109) par une constante dépendant de I, I_*, m, q fois

$$\sqrt{M_1 M_2}\, \sup_r \|{}_r\|_{C^q(I^2)} \int_2 \frac{(1+|s|)^m (1+|t|)^m}{(1+|s|+|t|)^q} ds dt. \tag{110}$$

Prendre $q = 2m+4$ fait converger l'intégrale et prouve l'assertion. □

B3. Recombinaison des sommes séparées

Nous utilisons Cauchy-Schwarz pondéré pour passer des bornes de moyenne quadratique pour les sommes séparées à une borne pour leur intégrale pondérée.

Lemme 24 (Lemme B.3)**.** *Soient r, ι parcourant des ensembles finis, soit $d \geq 1$, et soit $w_r \geq 0$. Supposons que les coefficients mesurables $c_{\iota,r}$ satisfont*

$$|c_{\iota,r}(\mathbf{t})| \leq b_\iota(\mathbf{t}), \quad M := \sum_\iota \int_d b_\iota(\mathbf{t}) d\mathbf{t} < \infty,$$

où $b_\iota : \overset{d}{\to} [0, \infty)$. Pour des $F_{\iota,\mathbf{t}}(r)$ mesurables, chaque fois que le membre de droite est fini, on a

$$\sum_r w_r \left| \sum_\iota \int c_{\iota,r}(\mathbf{t}) F_{\iota,\mathbf{t}}(r) d\mathbf{t} \right|^2 \leq M \sum_\iota \int b_\iota(\mathbf{t}) \sum_r w_r |F_{\iota,\mathbf{t}}(r)|^2 d\mathbf{t}. \tag{111}$$

La même assertion est valable pour des sommes finies avec les intégrales omises.

Démonstration. Pour chaque r fixé, Cauchy-Schwarz pondéré donne

$$\left| \sum_\iota \int c_{\iota,r}(\mathbf{t}) F_{\iota,\mathbf{t}}(r) d\mathbf{t} \right|^2 \leq M \sum_\iota \int b_\iota(\mathbf{t}) |F_{\iota,\mathbf{t}}(r)|^2 d\mathbf{t}.$$

En multipliant par w_r et en sommant sur r, on obtient (111). Le même argument avec des sommes à la place des intégrales prouve la version finie. □

Références

[1] M. Agrawal, N. Kayal, and N. Saxena, PRIMES is in P, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), no. 2, 781-793.

[2] S. Bettin and S. M. Gonek, The $\theta = \infty$ conjecture implies the Riemann hypothesis, *Mathematika* **63** (2017), no. 1, 29-33. doi:10.1112/S0025579316000139.

[3] V. Bhargava, G. Ivanyos, R. Mittal, and N. Saxena, Irreducibility and deterministic r-th root finding over finite fields, in *Proceedings of ISSAC 2017*, ACM, 2017, 37-44.

[4] G. Bhowmik and I. Z. Ruzsa, Average Goldbach and the quasi-Riemann hypothesis, *Anal. Math.* **44** (2018), no. 1, 51-56.

[5] V. Blomer, L. Goldmakher, and B. Louvel, L-functions with n-th-order twists, *Int. Math. Res. Not.* (2014), no. 7, 1925-1955. doi:10.1093/imrn/rns257.

[6] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 3rd ed., revised by H. L. Montgomery, Graduate Texts in Mathematics **74**, Springer, New York, 2000.

[7] A. Dunn and M. Radziwiłł, Bias in cubic Gauss sums : Patterson's conjecture, *Ann. of Math. (2)* **200** (2024), no. 3, 967-1057. doi:10.4007/annals.2024.200.3.3.

[8] A.-S. Elsenhans, J. Klüners, and F. Nicolae, Imaginary quadratic number fields with class groups of small exponent, *Acta Arith.* **193** (2020), no. 3, 217-233.

[9] K. Ford, Zero-free regions for the Riemann zeta function, in *Number Theory for the Millennium, II* (Urbana, IL, 2000), A K Peters, Natick, MA, 2002, 25-56. Corrected version : arXiv:1910.08205.

[10] E. Frenkel, R. Langlands, and B. C. Ngô, Formule des traces et fonctorialité : le début d'un programme, *Ann. Sci. Math. Québec* **34** (2010), no. 2, 199-243. arXiv:1003.4578.

[11] S. D. Galbraith, *Mathematics of Public Key Cryptography*, Cambridge University Press, 2012.

[12] P. Gao and L. Zhao, Mean squares of quadratic twists of the Möbius function, *J. Number Theory* **247** (2023), 1-14. doi:10.1016/j.jnt.2022.12.007.

[13] L. Goldmakher and B. Louvel, A quadratic large sieve inequality over number fields, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **154** (2013), no. 2, 193-212. doi:10.1017/S0305004112000370.

[14] T. H. Grönwall, Sur les séries de Dirichlet correspondant à des caractères complexes, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **35** (1913), 145-159. doi:10.1007/BF03015596.

[15] F. Grube, Ueber einige Euler'sche Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen, *Z. Math. Phys.* **19** (1874), 492-519.

[16] J. Hadamard, Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France* **24** (1896), 199-220. doi:10.24033/bsmf.545.

[17] H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **59**, Springer, Berlin, 1950. doi:10.1007/978-3-642-52795-1.

[18] D. R. Heath-Brown, A mean value estimate for real character sums, *Acta Arith.* **72** (1995), no. 3, 235-275.

[19] D. R. Heath-Brown, Kummer's conjecture for cubic Gauss sums, *Israel J. Math.* **120** (2000), 97-124. doi:10.1007/s11856-000-1273-y.

[20] D. R. Heath-Brown and S. J. Patterson, The distribution of Kummer sums at prime arguments, *J. Reine Angew. Math.* **310** (1979), 111-130. doi:10.1515/crll.1979.310.111.

[21] E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen, I, II, *Math. Z.* **1** (1918), 357-376 ; **6** (1920), 11-51.

[22] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications **53**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. doi:10.1090/coll/053.

[23] E. Kani, Idoneal numbers and some generalizations, *Ann. Sci. Math. Québec* **35** (2011), no. 2, 197-227.

[24] N. M. Korobov, Estimates of trigonometric sums and their applications, *Uspekhi Mat. Nauk* **13** (1958), no. 4(82), 185-192 (Russian). Math-Net.Ru: rm7458.

[25] E. Kowalski, Y. Lin, Ph. Michel, and W. Sawin, Periodic twists of GL_3-automorphic forms, *Forum Math. Sigma* **8** (2020), e15. doi:10.1017/fms.2020.7. Author version.

[26] T. Kubota, *On automorphic functions and the reciprocity law in a number field*, Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University, No. 2, Kinokuniya Book-Store, Tokyo, 1969. Kyoto University repository.

[27] E. Landau, Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes, *Math. Ann.* **56** (1903), 645-670. doi:10.1007/BF01444310.

[28] J. E. Littlewood, Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > 1/2$, *C. R. Acad. Sci. Paris* **154** (1912), 263-266.

[29] J. E. Littlewood, On the class-number of the corpus $P(\sqrt{-k})$, *Proc. London Math. Soc. (2)* **27** (1928), no. 1, 358-372.

[30] R. F. Lu, A. Zaman, and H. Zhao, Numerical computations concerning Landau-Siegel zeros, preprint, 2026. arXiv:2602.03626.

[31] H. Maier and H. L. Montgomery, The sum of the Möbius function, *Bull. London Math. Soc.* **41** (2009), no. 2, 213-226. doi:10.1112/blms/bdn119.

[32] G. L. Miller, Riemann's hypothesis and tests for primality, *J. Comput. System Sci.* **13** (1976), no. 3, 300-317.

[33] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I : Classical Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **97**, Cambridge University Press, 2007.

[34] M. Ram Murty and A. Sankaranarayanan, Averages of exponential twists of the Liouville function, *Forum Math.* **14** (2002), no. 2, 273-291.

[35] NIST Digital Library of Mathematical Functions, § 10.43, equation (10.43.19). https://dlmf.nist.gov/10.43.E19.

[36] OpenAI, The Quasi-Riemann Hypothesis : A Zero-Free Half-Plane $\Re(s) > 7/8$, OpenAI Math Release preprint OAI:The-Quasi-Riemann-Hypothesis-September-30-2026, 2026.

[37] A. Page, On the number of primes in an arithmetic progression, *Proc. London Math. Soc. (2)* **39** (1935), 116-141. doi:10.1112/plms/s2-39.1.116.

[38] S. J. Patterson, A cubic analogue of the theta series, *J. Reine Angew. Math.* **296** (1977), 125-161. doi:10.1515/crll.1977.296.125.

[39] I. Petrow and M. P. Young, A generalized cubic moment and the Petersson formula for newforms, *Math. Ann.* **373** (2019), no. 1-2, 287-353.

[40] I. Petrow and M. P. Young, The Weyl bound for Dirichlet L-functions of cube-free conductor, *Ann. of Math. (2)* **192** (2020), no. 2, 437-486. doi:10.4007/annals.2020.192.2.3.

[41] B. Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, *Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1859), 671-680. Original text and English translation.

[42] K. A. Rodosskiĭ, On non-residues and zeros of L-functions, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **20** (1956), no. 3, 303-306 (Russian).

[43] C. L. Siegel, Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper, *Acta Arith.* **1** (1935), 83-86. doi:10.4064/aa-1-1-83-86.

[44] T. Tatuzawa, On a theorem of Siegel, *Japan. J. Math.* **21** (1951), 163-178. doi:10.4099/jjm1924.21.0$_1$63.

[45] E. C. Titchmarsh, A divisor problem, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **54** (1930), 414-429; correction, **57** (1933), 478-479. doi:10.1007/BF03021203; correction.

[46] C.-J. de la Vallée Poussin, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Première partie : La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, deuxième partie, **20** (1896), 183-256.

[47] C.-J. de la Vallée Poussin, Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, *Mém. Couronnés Autres Mém. Acad. Roy. Sci. Lettres Beaux-Arts Belgique*, collection in-8°, **59** (1899), 1-74. doi:10.3406/marb.1899.2449.

[48] I. M. Vinogradov, A new estimate of the function $\zeta(1+it)$, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **22** (1958), no. 2, 161-164 (Russian). Math-Net.Ru: im3962.

[49] I. M. Vinogradov, *Selected Works*, edited by L. D. Faddeev et al., Springer, Berlin, 1985.

[50] P. J. Weinberger, Exponents of the class groups of complex quadratic fields, *Acta Arith.* **22** (1973), 117-124. doi:10.4064/aa-22-2-117-124.

[51] A. Yoshimoto, On the cubic theta function, *Nagoya Math. J.* **105** (1987), 153-167.

L'ia deepseek explique même à quoi doivent veiller les évaluateurs de ce texte :

1. La section 5 (itération) est le cœur technique. La validité de l'itération repose sur la "contraction" du paramètre de ligne H à chaque étape (via la Proposition 5.4). Les experts devront vérifier que les inégalités (5.11) et (5.12) sont compatibles avec les échelles définies en (5.1) et que la récursion converge bien vers la borne voulue.
2. La proposition 5.2 utilise le grand crible quadratique (Goldmakher-Louvel) sur le corps de nombres $K = Q(\sqrt{-3})$. La transition entre les sommes de Gauss cubiques (via la fonction thêta de Kubota) et les caractères quadratiques est cruciale (équation 2.14). Une erreur dans l'identité de Patterson (2.10) ou dans la transformation thêta (Proposition 6.2) invaliderait tout.
3. Les lemmes 6.5 et 6.6 traitent de la moyenne quadratique des sommes de Gauss cubiques. La gestion des facteurs carrés (l'étape de "cube inversion" en 5.3) est délicate. L'équation (5.8) est une inversion de Möbius qui doit être exacte.
4. L'Appendice A est une mine de vérifications à effectuer. Les identités (A.4) à (A.7) sur les sommes de Gauss et les symboles de résidus sextiques doivent être vérifiées une par une.
5. L'élimination des zéros de Landau-Siegel (Section 3) est la conséquence la plus spectaculaire. Elle repose sur l'équation (3.3) et l'argument de non-annulation via la transformée de Mellin. La gestion du pôle en $s = 1$ (fin de la preuve du Théorème 1.1) est standard mais doit être vérifiée.