

Trois avatars d'une même fractalité : valuations p -adiques, plongement résiduel infini et arbre des congruences

Denise Vella-Chemla pilotant chatgpt, septembre 2026

La suite de cette note a été rédigée par chatgpt (avec quelques modifications ou ajouts de Denise Vella-Chemla). Je lui ai demandé de produire un texte rassemblant 4 approches que j'avais proposées de la conjecture de Goldbach et qui sont similaires.

Résumé

On rassemble ici quatre constructions élaborées séparément entre 2006 et 2016 autour d'une même idée : organiser les entiers naturels par leurs restes modulaires successifs fait apparaître une structure hiérarchique auto-similaire dont les feuilles, lorsque les moduli employés sont premiers entre eux, coïncident exactement avec les fibres du théorème des restes chinois. On y retrouve, sous des habillages différents (séquences fractales de valuations p -adiques, plongement métrique infini dans $\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, arbre combinatoire des congruences, treillis de sélection pour la conjecture de Goldbach), la même armature mathématique.

1. Introduction

La répartition des nombres premiers dans $\mathbb{N}$ paraît chaotique lorsqu'on la regarde terme à terme. Elle cesse de l'être dès qu'on organise les entiers non plus selon leur ordre naturel, mais selon la donnée de leurs restes modulo une suite de nombres (premiers, le plus souvent). Cette réorganisation fait système : à chaque nouveau modulus ajouté correspond un raffinement de la classification des entiers, et ce raffinement itéré engendre une structure arborescente auto-similaire, au sens où le sous-arbre issu de n'importe quel nœud reproduit, à un changement d'échelle près, la structure de l'arbre entier.

Quatre textes, écrits à des moments différents, explorent cette même idée sous des angles complémentaires :

- *Fractales, symétrie et conjecture de Goldbach* (2006, <https://denisevellachemla.eu/fevrier2006.pdf>) : les suites des valuations p -adiques des entiers successifs sont des *séquences fractales* au sens de Kimberling, porteuses de symétries palindromiques ;
- *l'arbre des congruences* (2007, <https://denisevellachemla.eu/icdvc15.png> ou <https://denisevellachemla.eu/arbres.pdf>) : une figuration arborescente générale du théorème des restes chinois, dont on étudie ici un exemplaire à moduli 2, 3, 4 ;
- le *treillis de Cantor* (2012, <https://denisevellachemla.eu/icdvc5.png>) : un diagramme combinatoire qui sélectionne, parmi les combinaisons de restes modulo 3, 5, 7, $\dots$, celles qui correspondent à des décomposants de Goldbach ;
- le *Snurpf* (2016, <https://denisevellachemla.eu/snurpf.pdf>) : le plongement des entiers dans l'espace produit infini $\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, muni d'une métrique et figuré comme un maillage torique.

L'objet de cette note est de montrer que ces quatre constructions relèvent d'un seul et même objet mathématique : la hiérarchie des partitions de $\mathbb{N}$ (ou d'un intervalle fini d'entiers) induites par les

applications de restes $n \mapsto (n \bmod m_1, \dots, n \bmod m_k)$ ¹, et son passage à la limite quand $k \rightarrow \infty$ le long de la suite des nombres premiers.

2. Les séquences fractales de valuations p -adiques (2006)

2.1. Définitions

Définition 1 (Valuation p -adique). *Pour p premier et $n \in \mathbb{N}^*$, la valuation p -adique $v_p(n)$ est l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n ; de façon récursive,*

$$v_p(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ v_p(n/p) + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 2 (Séquence fractale d'entiers, Kimberling). *Une suite d'entiers est dite fractale lorsqu'elle est auto-contenante : en supprimant tous ses termes nuls et en retranchant 1 aux termes restants, on retrouve la suite initiale.*

Proposition 3. *Pour tout nombre premier p , la suite $(v_p(n))_{n \geq 1}$ est une séquence fractale d'entiers.*

La suite des valuations 2-adiques des entiers de 1 à 16, par exemple, est

$$0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 4,$$

et si l'on retire les zéros et retranche 1 aux termes restants, on obtient à nouveau $0, 1, 0, 2, \dots$: la suite se contient elle-même à une échelle plus fine, exactement comme une courbe de Peano ou de Sierpiński reproduit sa propre structure dans chacune de ses parties.

2.2. Symétries palindromiques

Autour de tout entier de valuation p -adique non nulle i , la fenêtre de largeur $2i - 1$ centrée sur cet entier est un palindrome de la suite des valuations p -adiques : les entiers symétriques par rapport au centre ont deux à deux la même valuation p -adique. Cette propriété découle de l'inégalité $v_p(a + b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$, avec égalité stricte de la moyenne dès que $v_p(a) \neq v_p(b)$.

Le tableau suivant résume ce que la connaissance de $v_p(x)$ et $v_p(y)$ permet de déduire de $v_p(x + y)$ et $v_p(x - y)$:

$v_p(x)$	$v_p(y)$	$v_p(x + y)$	$v_p(x - y)$
0	0	indéterminé	indéterminé
0	$\neq 0$	0	0
$\neq 0$	0	0	0
$\neq 0$	$\neq 0$ (distinctes)	$\min(v_p(x), v_p(y))$	$\min(v_p(x), v_p(y))$

1. dénommées RNS pour Residue Number Systems dans le TAOCP de Donald Knuth.

2.3. Lien avec la conjecture de Goldbach

L'intérêt de ces symétries pour la conjecture de Goldbach tient à l'observation suivante : chercher une décomposition $n = p + (n - p)$ avec $p, n - p$ premiers revient à chercher, pour chaque nombre premier $q \leq \sqrt{n}$, deux points symétriques par rapport à $n/2$ dont les restes modulo q ne sont *jamais simultanément nuls* (un reste nul signalerait un facteur premier q commun, donc un candidat composé). Le crible ainsi défini - présenté dans le texte original sous forme d'un tableau des restes modulo 3, 5, 7, 11, ... où sont repérées entre parenthèses les positions non-Goldbach - est un crible d'Ératosthène "replié" autour de x .

Remarque : La conclusion du texte de 2006 est que la répartition des nombres premiers relève d'un *chaos déterministe* : chaque étape du crible d'Ératosthène, prise isolément, obéit à une régularité parfaite (une périodicité de période p), et c'est la *superposition* de ces régularités indépendantes - une par nombre premier - qui produit l'irrégularité apparente de la suite des nombres premiers lorsqu'on l'observe globalement.

3. Le plongement résiduel infini : le Snurpf (2016)

3.1. L'espace ambiant $\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Le Snurpf (*Système de numération par les restes dans les parties finies de $\mathbb{N}$*) part d'une idée simple : représenter chaque entier n non plus par sa position sur la droite des entiers, mais par la collection infinie de ses restes,

$$n \longmapsto (n \bmod 2, n \bmod 3, n \bmod 5, n \bmod 7, \dots) \in \prod_{p \text{ premier}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Deux entiers distincts ont nécessairement des images distinctes par ce plongement, puisque leur différence, non nulle, n'admet qu'un nombre fini de facteurs premiers : il existe toujours un p suffisamment grand qui les distingue. Le plongement est donc injectif, et son image est un sous-ensemble dénombrable de l'espace ambiant $\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Remarque : Cet espace ambiant, muni de la topologie produit, est lui-même de cardinal $2^{\aleph_0}$ (c'est un espace de Cantor), alors que son sous-ensemble image - les entiers eux-mêmes - reste dénombrable : presque toutes les suites de restes cohérentes localement ne correspondent à aucun entier réel. C'est précisément l'écart entre l'espace ambiant continu et le sous-ensemble dénombrable qu'il porte qui est étudié dans l'*ensemble de la castafiore*.

3.2. Le maillage torique

Pour rendre sensible la cyclicité de chaque coordonnée (chaque colonne de restes "retombe" régulièrement à 0, puisque $p \equiv 0 \pmod{p}$), le texte de 2016 propose une figuration en maillage tridimensionnel, où les trois premiers moduli 2, 3, 5 correspondent respectivement à la profondeur, la hauteur et la largeur d'un réseau de points. Ce maillage, si l'on identifie les bords opposés de chaque direction (retour "à la Pacman" lorsqu'on sort d'un côté), devient topologiquement un tore de dimension 3 - préfiguration discrète du tore de dimension infinie $\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, muni de sa topologie

produit.

Le passage d'un entier n à son successeur $n + 1$ s'y lit comme un déplacement selon la diagonale interne du maillage (incrément simultané de tous les restes), tandis que le passage d'un sommet à un sommet adjacent le long d'une seule fibre correspond à l'incrément d'une seule coordonnée résiduelle - typiquement le passage d'un décomposant de Goldbach à un autre lorsqu'on ne fait varier qu'un seul modulus.

Une distance est également introduite pour mesurer l'écart entre deux entiers via leurs profils de restes :

$$d(p, q) = \sqrt{\sum_{k \leq \min(p, q)} \left((p \bmod k) - (q \bmod k) \right)^2}.$$

Elle a la propriété de maximiser la distance entre un nombre premier et ses deux voisins immédiats au sens de Peano, les “rechutes à zéro” des restes modulo leurs diviseurs faisant fortement chuter la distance des nombres composés à leurs voisins.

3.3. Une limite ouverte

Le théorème des restes chinois permet de résoudre, pour tout système *fini* de congruences à moduli premiers entre eux, une unique classe de solutions modulo le produit des moduli. Le texte de 2016 relève explicitement que la résolution d'un système comportant une *infinité* de congruences - l'analogue naturel pour le point complet $(n \bmod p)_p$ de l'espace ambiant - reste, elle, une question sans réponse dans ce cadre élémentaire.

Question : Comment caractériser, parmi les suites de $\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ cohérentes vis-à-vis de toute sous-famille finie de moduli, celles qui sont *réalisées* par un entier naturel ?

Cette question rejoint le vocabulaire des entiers profinis $\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_N \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, dans lequel $\mathbb{N}$ se plonge densément sans l'épuiser.

4. L'arbre des congruences et le théorème des restes chinois

4.1. Construction générale

Définition 4 (Arbre des congruences). *Soit $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ une suite de moduli. On construit un arbre de profondeur k où :*

- *la racine porte l'ensemble des entiers considérés ;*
- *tout nœud de profondeur $i - 1$ possède exactement m_i fils, indexés par les restes $0, 1, \dots, m_i - 1$ possibles modulo m_i ;*
- *un nœud de profondeur i , atteint par l'adresse $(r_1, \dots, r_i)$, porte l'ensemble des entiers n tels que $n \equiv r_j \pmod{m_j}$ pour tout $j \leq i$.*

Lorsque les moduli $m_1, \dots, m_k$ sont premiers entre eux deux à deux, le théorème des restes chinois affirme que l'application

$$n \mapsto (n \bmod m_1, \dots, n \bmod m_k)$$

est une bijection de $\mathbb{Z}/(m_1 \cdots m_k)\mathbb{Z}$ sur $\prod_i \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$: chaque adresse de l'arbre correspond alors, dans la fenêtre $\{0, \dots, m_1 \cdots m_k - 1\}$, à *exactement un* entier. C'est en ce sens précis qu'on peut dire que les feuilles de l'arbre sont les fibres - les *feuilles*, au sens d'un feuilletage - de l'application de restes chinois : chaque feuille est une classe résiduelle modulo $\prod_i m_i$, et le feuilletage complet de $\mathbb{Z}$ par ces classes recouvre exactement $\mathbb{Z}$ sans recouvrement ni trou.

4.2. Un exemple instructif : moduli 2, 3, 4

L'arbre à trois niveaux de moduli (2, 3, 4) appliqué aux entiers 0 à 23 ne vérifie *pas* les hypothèses du théorème des restes chinois : 2 et 4 ne sont pas premiers entre eux ($n \bmod 4$ détermine déjà $n \bmod 2$). Le produit des moduli vaut $2 \times 3 \times 4 = 24$, mais leur plus petit commun multiple vaut seulement

$$\text{ppcm}(2, 3, 4) = 12.$$

Proposition 5. *L'arbre des congruences de moduli (2, 3, 4) possède exactement 12 feuilles distinctes (et non 24), chaque feuille regroupant deux entiers de $\{0, \dots, 23\}$ qui diffèrent exactement de 12.*

Démonstration. L'adresse d'un entier n dans l'arbre est le triplet $(n \bmod 2, n \bmod 3, n \bmod 4)$. Deux entiers n et n' ont la même adresse si et seulement si $n \equiv n' \pmod{2}$, $n \equiv n' \pmod{3}$ et $n \equiv n' \pmod{4}$, c'est-à-dire si et seulement si $n \equiv n' \pmod{\text{ppcm}(2, 3, 4)} = n \equiv n' \pmod{12}$. Il y a donc exactement 12 classes d'adresses sur $\{0, \dots, 23\}$, chacune de cardinal $24/12 = 2$, ses deux représentants différant de 12. $\square$

C'est très exactement ce que montre la figure 4.2 : les douze feuilles contiennent chacune une paire d'entiers séparés de 12 (par exemple $\{0, 12\}$, $\{6, 18\}$, $\{4, 16\}$, ...), la coordonnée $n \bmod 2$ apportant une information redondante déjà contenue dans $n \bmod 4$.

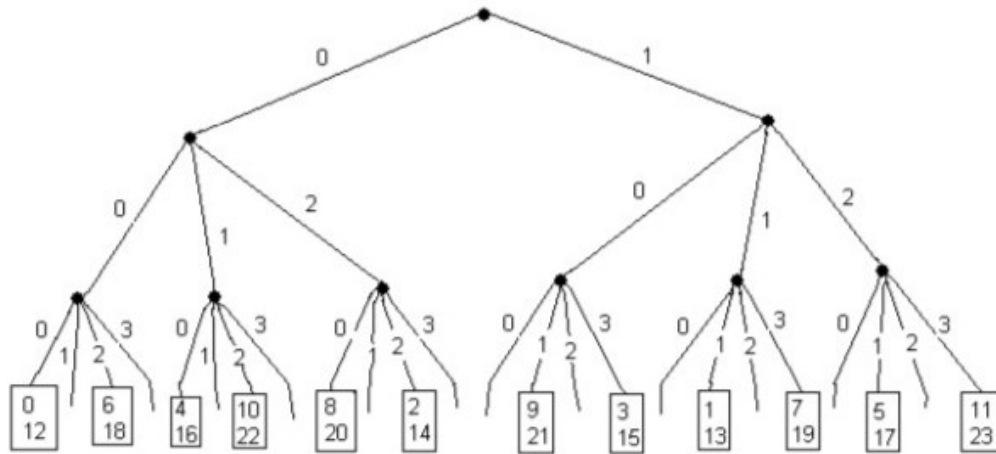


FIGURE 1 : Arbre des congruences de moduli (2, 3, 4) sur $\{0, \dots, 23\}$. Les moduli 2 et 4 n'étant pas premiers entre eux, l'arbre ne compte que $\text{ppcm}(2, 3, 4) = 12$ feuilles, chacune portant deux entiers distants de 12, au lieu des 24 feuilles singletons qu'aurait produites une suite de moduli deux à deux premiers entre eux.

4.3. Passage à des moduli premiers : le feuilletage résolu

L'exemple précédent joue le rôle de contre-exemple pédagogique : il isole exactement la condition (la coprimauté) qui manque pour que l'arbre des congruences réalise une bijection au sens du théorème des restes chinois. Dès que l'on choisit pour $(m_1, \dots, m_k)$ une suite de nombres premiers *distincts* $p_1, \dots, p_k$, l'arbre correspondant devient un feuilletage *résolu* : chaque feuille, à la profondeur k , contient un unique entier de $\{0, \dots, p_1 \cdots p_k - 1\}$. En laissant $k \rightarrow \infty$ le long de la suite de tous les nombres premiers, on retrouve exactement le plongement de Snurpf de la section précédente : l'arbre infini des congruences par nombres premiers successifs est une autre façon de décrire le même objet que l'espace ambiant $\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, chaque branche infinie de l'arbre correspondant à un point de cet espace, et les branches infinies effectivement "habitées" par un entier naturel étant exactement celles qui se stabilisent (portent, à partir d'un certain rang, l'adresse $n \bmod p$ pour l'entier fixé n).

5. Le treillis de Cantor et le crible de Goldbach (2012)

Le *treillis de Cantor* présenté en 2012 applique la même logique de combinaison des restes dans un but ciblé : sélectionner, pour un entier pair n donné, les nombres premiers candidats à une décomposition de Goldbach $n = p + q$. Le diagramme met en correspondance, par des lignes croisées, les restes modulo 3, modulo 5 et modulo 7 pris isolément (rangée du haut) avec les combinaisons de ces trois restes prises simultanément (rangée du bas) : chaque nœud du bas est l'adresse, au sens de la section précédente, obtenue en choisissant un fils dans chacun des trois sous-arbres de moduli 3, 5, 7.

• Treillis de Cantor

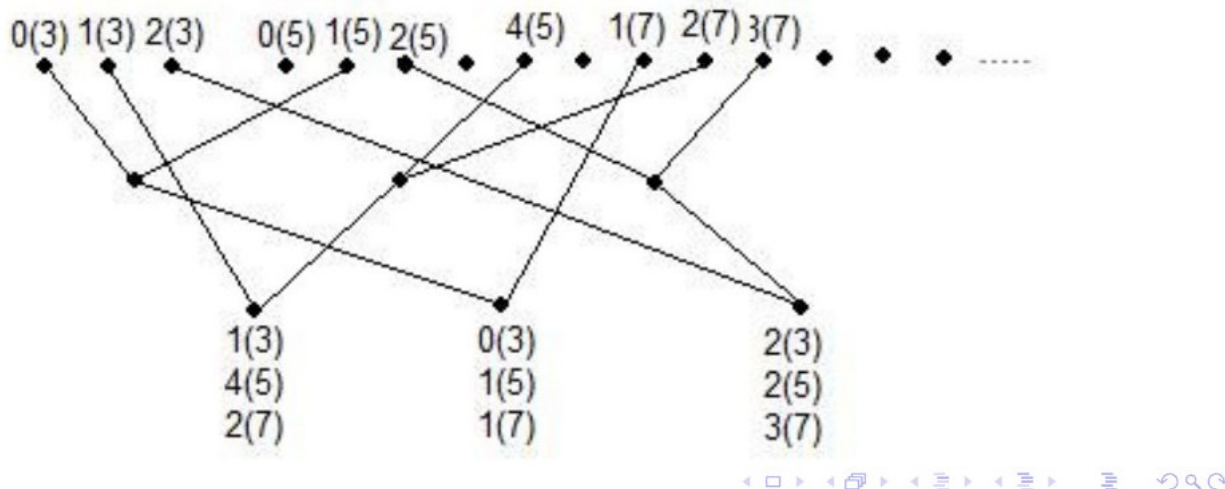


FIGURE 2 : Treillis de Cantor (2012) : combinaison, via le théorème des restes chinois, des restes modulo 3, 5 et 7 en classes résiduelles modulo $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Chaque nœud de la rangée inférieure est une feuille de l'arbre des congruences de moduli $(3, 5, 7)$, ces trois moduli étant premiers entre eux.

Le critère utilisé pour reconnaître un décomposant de Goldbach - un nombre premier $p > \sqrt{n}$ est un décomposant de n s'il ne partage *aucun* reste modulaire avec n , pour aucun nombre premier

inférieur à $\sqrt{n}$ - se lit alors directement sur le treillis : il s'agit d'éviter, à chaque niveau, la branche particulière portant le reste de n modulo ce nombre premier. Le treillis de Cantor est ainsi un cas particulier, restreint aux trois premiers moduli 3, 5, 7 et à une condition d'exclusion ("aucun reste commun"), de l'arbre général des congruences de la section 4.²

6. Synthèse

Le tableau ci-dessous rassemble les quatre constructions et l'objet mathématique commun qu'elles éclairent chacune sous un jour différent.

Texte	Objet central	Ce qu'il met en évidence	Lien avec les autres
Fractales (2006)	suite $(v_p(n))_n$	auto-similarité <i>le long de l'axe des entiers</i> , symétries palindromiques	une seule coordonnée de l'adresse résiduelle, observée en fonction de n
Treillis de Cantor (2012)	sélection combinatoire de restes mod 3, 5, 7	criblage des décomposants de Goldbach par exclusion d'une branche à chaque niveau	cas particulier fini et orienté-Goldbach de l'arbre des congruences
Snurpf (2016)	plongement $n \mapsto (n \bmod p)_p$	structure métrique et torique de l'espace ambiant infini	limite $k \rightarrow \infty$ de l'arbre des congruences à moduli premiers
Arbre des congruences	partition de $\{0, \dots, \prod m_i - 1\}$	rôle exact de la coprimalité : feuilles singletons <i>ssi</i> moduli premiers entre eux	cadre combinatoire commun aux trois autres textes

Le fil qui relie ces quatre textes est ainsi le suivant : la conjecture de Goldbach, comme la répartition des nombres premiers en général, se prête à une lecture combinatoire dès qu'on remplace l'ordre naturel de $\mathbb{N}$ par son adressage résiduel modulo la suite des nombres premiers.

Cet adressage engendre une hiérarchie auto-similaire (les séquences fractales de 2006).

La hiérarchie auto-similaire en question devient un feuilletage exactement résolu lorsque les moduli choisis sont premiers entre eux (l'arbre des congruences).

Et la hiérarchie auto-similaire en question se prête aussi à une sélection ciblée pour cribler les décomposants de Goldbach (le treillis de 2012).

Enfin, cette hiérarchie auto-similaire admet, à la limite infinie, une réalisation métrique et topologique explicite dans $\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (le Snurpf de 2016).

Cette façon d'envisager les nombres fournit un espace de cardinal continu dont les entiers naturels, et les nombres premiers en particulier, ne forment qu'un sous-ensemble dénombrable, dense en un sens à préciser.

2. Le lecteur reconnaîtra ici exactement la construction nommée par la suite *ensemble de la castafiore* : en retirant à chaque niveau p_k la branche des multiples de p_k (reste 0), on obtient un ensemble de type Cantor dont les nombres premiers forment le sous-ensemble dénombrable effectivement réalisé.