

Décompositions de Goldbach et zéros de ζ : la formule de Fujii

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claudie, septembre 2026)

La suite de cette note a été intégralement rédigée par l'ia claudie.

1. Ce qu'on peut honnêtement écrire

Il n'existe pas de formule exacte connue exprimant $G(n)$ (le nombre brut de décompositions $n = p+q$ avec p, q premiers) directement en fonction des zéros de ζ . Ce qui existe, et qui est rigoureux, porte sur la version *pondérée par le logarithme*, introduite par Von Mangoldt :

$$\Lambda(k) = \begin{cases} \ln p & \text{si } k = p^m, \text{ } p \text{ premier, } m \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \psi_2(n) = \sum_{\substack{m+m'=n \\ m, m' \geq 1}} \Lambda(m)\Lambda(m').$$

$\psi_2(n)$ compte les décompositions de Goldbach de n , chacune pondérée par $\ln p \cdot \ln q$, *plus* une contribution parasite venant des puissances de nombres premiers ($m = p^k, k \geq 2$). Pour $n \leq 100$ ces termes parasites sont peu nombreux et calculables explicitement ; le script joint les inclut sans les isoler, ce qu'il faut garder en tête en comparant ψ_2 à G brut.

2. Le théorème de Fujii (1991)

Théorème 1. ([1], Fujii, 1991 - version moyennée) Sous l'hypothèse de Riemann,

$$G(N) := \sum_{n \leq N} \psi_2(n) = \frac{N^2}{2} - 2 \sum_{\rho} \frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(N^{4/3}(\ln N)^{4/3}\right),$$

la somme portant sur tous les zéros non triviaux $\rho = \beta + i\gamma$ de ζ ($\gamma \neq 0$), somme absolument convergente.

C'est exactement l'analogie, un cran plus haut, de la formule explicite classique

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} x^{\rho}/\rho + \dots$$

Là où $\psi(x)$ compte les nombres premiers, ψ_2 compte - en moyenne sur $n \leq N$ - les couples de nombres premiers de somme n . Une version inconditionnelle existe (Billington-Cheng-Schettler-Suriajaya, 2023-2025), avec un terme d'erreur relié explicitement aux régions sans zéro de ζ plutôt qu'à l'hypothèse de Riemann.

Remarque : [Pourquoi une moyenne, et pas $\psi_2(n)$ directement] La sommation sur $n \leq N$ n'est pas cosmétique : c'est elle qui rend la somme sur les zéros absolument convergente. Une formule ponctuelle pour $\psi_2(n)$ seul existe (Bhowmik-Schlage-Puchta ; Languasco-Zaccagnini, 2012) mais son terme d'erreur est bien plus délicat à contrôler - les oscillations des différents zéros ne se moyennent plus les unes les autres. Ce n'est pas un détail technique périphérique : c'est exactement le mécanisme qui, ailleurs dans nos échanges, refait surface sous d'autres formes (bande rectangulaire, entropie de Connes-Shannon) - l'information utile ne survit qu'après un lissage, jamais au niveau ponctuel.

3. Ce que ça dit, et ce que ça ne dit pas, par rapport à une démonstration éventuelle de la conjecture de Goldbach

Même une version *parfaite* de cette formule (sans terme d'erreur du tout) ne donnerait qu'un énoncé sur la *moyenne* de ψ_2 sur un intervalle, mais ne donnerait pas la positivité de chaque $\psi_2(n)$ individuellement, et encore moins de $G(n)$ après avoir retranché les termes parasites de puissances de nombres premiers.

L'hypothèse de Riemann, si elle était démontrée, ne ferait que réduire la taille du terme d'erreur $O(\cdot)$ - elle ne changerait rien au fait que le terme principal $N^2/2$ est un énoncé moyen, pas ponctuel.

C'est la même leçon que pour la bande rectangulaire et pour l'entropie de Connes-Shannon : la formule est correcte et non triviale, mais le contenu arithmétique dur (ici, isoler un n particulier) reste entier dans le nouveau langage d'expression du problème.

4. Vérification numérique

Le script `fujii_goldbach.py` calcule $G(N)$ exactement (sans zéros, par définition directe) pour $N \leq 100$, et la somme tronquée sur les K premiers zéros de ζ (via `mpmath.zetazero`) pour $K = 10, 50, 100$. Deux choses à observer, et une seule à ne pas en conclure :

- la somme tronquée sur les zéros *converge* rapidement en K (les colonnes $K = 10, 50, 100$ sont très proches entre elles) - le mécanisme de la formule fonctionne bel et bien numériquement ;
- l'écart entre cette somme convergée et $G(N)$ exact reste de l'ordre de plusieurs centaines à $N = 100$, comparable à l'estimation théorique du terme d'erreur $O(N^{4/3}(\ln N)^{4/3})$ à cette échelle (le script calcule cette taille explicitement) ;
- il ne faut **pas** en conclure que la formule est fausse ou mal implémentée : $N = 100$ est loin du régime asymptotique $N \rightarrow \infty$ dans lequel l'énoncé de Fujii est valide. La vérification porte sur le mécanisme (convergence de la somme sur les zéros), pas sur une coïncidence numérique à petite échelle qui n'a aucune raison de se produire.

```
"""
Verification numerique de la formule de Fujii (1991) pour les
representations de Goldbach ponderees , jusqu'a N = 100.

psi2(n)  = sum_{m+m'=n} Lambda(m) Lambda(m')          (Lambda = von Mangoldt)
G(N)      = sum_{n<=N} psi2(n)

Fujii (sous RH) :
G(N) = N^2/2 - 2 * sum_{rho} N^{(rho+1)} / (rho (rho+1)) + O(N^{4/3} (log N)^{4/3})

la somme portant sur TOUS les zeros non triviaux de zeta (rho et son
conjugue 1/2 - i*gamma comptes separement). Comme rho et son conjugue
donnent des termes conjuges , la somme complete vaut
sum_rho (...) = 2 * sum_{k>=1} Re( terme(rho_k) )
```

ou $\rho_k = 1/2 + i\gamma_k$ est le k -ieme zero ($\gamma_k > 0$, convention `mpmath.zetazero`).

ATTENTION (honnete numerique) : cette formule est ASYMPTOTIQUE. Le terme d'erreur $O(N^{4/3}(\log N)^{4/3})$ n'est PAS petit devant $N^{2/2}$ pour N aussi petit que 100 (il est du meme ordre de grandeur, voir le calcul en fin de script). Le script montre donc que la somme sur les zeros converge (elle est absolument convergente), mais ceci NE DOIT PAS etre lu comme "l'approximation colle a $G(N)$ des $N=100$ " — ce serait precisement le genre de raccourci a eviter. Ce qui est verifie ici, c'est le MECANISME (la somme sur les zeros existe, converge, et se rapproche imparfaitement de $G(N)$) — l'ecart residuel EST le terme d'erreur annonce par le theoreme, pas une erreur de calcul.

References :

A. Fujii, "An additive problem of prime numbers I, II, III",
 Proc. Japan Acad. / Acta Arith., 1991.
 Reformulation utilisee ici : arXiv:2110.14250 (Goldston–Suriajaya et al.,
 "On an Average Goldbach Representation Formula of Fujii"), eq. (2).

"""

```
from mpmath import mp, zetazero, mpf, re, log
```

```
mp.dps = 30 # precision decimale
```

```
def von_mangoldt(k):
    """Lambda(k) = log(p) si k = p^m (p premier, m>=1), sinon 0."""
    if k < 2:
        return mpf(0)
    n = k
    p = 2
    while p * p <= n:
        if n % p == 0:
            while n % p == 0:
                n //= p
            return log(p) if n == 1 else mpf(0)
        p += 1
    # aucun facteur <= sqrt(n) trouve => n est premier
    return log(n)
```

```
def psi2(n):
    """psi2(n) = sum_{m=1}^{n-1} Lambda(m) Lambda(n-m)."""
    return sum(von_mangoldt(m) * von_mangoldt(n - m) for m in range(1, n))
```

```
def G_exact(N):
    """G(N) = sum_{n<=N} psi2(n), calcule directement (sans zeros)."""
    return sum(psi2(n) for n in range(1, N + 1))
```

```
def fujii_approx(N, K):
    """Approximation de G(N) tronquee aux K premiers zeros (gamma_k > 0)."""
    Nf = mpf(N)
```

```

total = mpf(0)
for k in range(1, K + 1):
    rho = zetazero(k) # = 1/2 + i*gamma_k
    term = Nf ** (rho + 1) / (rho * (rho + 1))
    total += 2 * re(term)
return Nf ** 2 / 2 - 2 * total

if __name__ == "__main__":
    print("Verification de la formule de Fujii, N = 1..100")
    print("=" * 78)
    print(f"{ 'N':>4} { 'G(N) exact':>14} { 'K=10 zeros':>16} "
          f"{ 'K=50 zeros':>16} { 'K=100 zeros':>16}")

    Ks = [10, 50, 100]
    # on precalcule les zeros une seule fois (couteux), reutilises pour tout N
    zeros_cache = [zetazero(k) for k in range(1, max(Ks) + 1)]

    def fujii_approx_cached(N, K):
        Nf = mpf(N)
        total = mpf(0)
        for rho in zeros_cache[:K]:
            term = Nf ** (rho + 1) / (rho * (rho + 1))
            total += 2 * re(term)
        return Nf ** 2 / 2 - 2 * total

    #for N in range[10, 20, 30, 50, 70, 100]:
    for N in range(6, 1000, 2):
        exact = G_exact(N)
        approxs = [fujii_approx_cached(N, K) for K in Ks]
        print(f"{N:>4} {float(exact):>14.2f} "
              f"{float(approxs[0]):>16.2f} {float(approxs[1]):>16.2f} "
              f"{float(approxs[2]):>16.2f}")

    print()
    print("Terme d'erreur theorique  $O(N^{4/3} (\log N)^{4/3})$  a N=100 :")
    N = mpf(100)
    err_bound = N ** (mpf(4) / 3) * (log(N)) ** (mpf(4) / 3)
    print(f"ordre de grandeur ~ {float(err_bound):.1f} "
          f"(a comparer a  $N^{2/2} = {float(N ** 2 / 2):.1f}$ )")
    print(" -> les deux quantites sont du meme ordre de grandeur : aucune")
    print(" coincidence numerique n'est attendue a cette echelle. C'est")
    print(" la nature meme du resultat de Fujii, valable pour  $N \rightarrow l'infini$ ," )
    print(" pas une propriete verifiable terme a terme a N=100.")

```

Le résultat de ce programme est consultable ici : <https://denisevellachemla.eu/res-Fujii.pdf>.

Référence

[1] A. Fujii, *An additive problem of prime numbers*, Acta arithmetica, vol. 58, 2, p. 173-179, 1991.