Arbres des restes, arbre de chip-firing et valuations p-adiques : une synthèse unifiée, avec application à la conjecture de Goldbach, Denise Vella-Chemla pilotant claude, juillet 2026.

1. Résumé

On rassemble ici trois explorations menées séparément par l'auteure :

(i) l'*arbre des restes à arité variable*, construit pour l'étude de la conjecture de Goldbach ;

(ii) l'*arbre de chip-firing* x-naire, dont l'étiquetage des feuilles avait été *constaté* numériquement égal à la valuation x-adique du rang de la feuille ;

(iii) la *formule exacte de* $\pi(m)$ obtenue par sommation de valuations k-adiques.

On montre que ces trois objets sont trois lectures d'une seule et même construction combinatoire, on donne une démonstration complète de deux faits qui n'étaient jusqu'ici que constatés numériquement (le lien chip-firing / valuation, l'exactitude de la formule de $\pi(m)$), et on en tire une reformulation précise - et un durcissement - de l'obstruction locale/globale déjà identifiée pour Goldbach dans le document de juillet 2026 sur l'arbre des restes.

2. Introduction : trois pièces d'un même puzzle

Trois textes récents proposent, sous des habillages différents, la même idée de fond : coder un entier n par son comportement vis-à-vis de la division par les petits entiers $2, 3, 4, \ldots$, et lire la primalité de n sur ce codage.

- Le document https://denisevellachemla.eu/formalisation-arbres-restes-gemini-dvc.pdf construit un arbre où le niveau k se subdivise en k branches, indexées par les restes modulo k, et démontre un théorème d'invariance des feuilles par translation d'un multiple du $ppcm(2, \ldots, m)$.
- Le document https://denisevellachemla.eu/arbre-chip.pdf construit, lui, un arbre *homogène* x-naire sur lequel on fait circuler des jetons ("chip-firing"), et *constate* que l'étiquette de la n-ième feuille est la valuation x-adique de n.
- Les documents https://denisevellachemla.eu/padic-retour.pdf et https://denisevellachemla.eu/reprise-valpadic.pdf proposent une formule de $\pi(m)$ obtenue en sommant des valuations k-adiques de m pour k variant dans un intervalle, et *constatent par programme* qu'elle compte bien les nombres premiers.

Le but de cette note est de montrer que ces trois constructions sont les trois visages d'un seul objet - que nous appellerons *l'arbre des restes généralisé* - et de remplacer les trois constats numériques ci-dessus par des démonstrations. On en déduit ensuite, pour Goldbach, un énoncé précis de l'obstacle déjà pressenti dans le document de juillet 2026, obstacle qui n'est donc pas levé par l'introduction des valuations, mais qui se trouve désormais formulé de façon quantitative plutôt que descriptive.

3. L'arbre des restes à arité variable (rappel et reformulation)

Définition 1 (Arbre des restes)**.** *Soit A l'arbre enraciné infini dont le niveau $k \geq 2$ subdivise chaque nœud du niveau $k-1$ en exactement k branches indexées par $R_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Tout $n \in N$ définit un unique chemin dans A, caractérisé au niveau m par le mot de restes*

$$W_m(n) = \Big(r_2(n), r_3(n), \ldots, r_m(n)\Big), \qquad n \equiv r_k(n) \pmod{k}.$$

Théorème 2 (Densité et fibres, [2])**.** *Le nombre de feuilles effectivement atteintes au niveau m vaut $L_m := \mathrm{ppcm}(2,3,\dots,m)$, et l'ensemble des entiers partageant un même mot de restes W_m est une progression arithmétique (une fibre) de raison L_m :*

$$F(W_m) = \{\, n_0 + jL_m \;:\; j \in \mathbb{N} \,\}, \qquad n_0 < L_m.$$

Théorème 3 (Invariance par translation)**.** `invariance` *Soit n pair, p un décomposant de Goldbach de n (i.e. p et $q = n-p$ premiers), et $m \geq 2$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, si $n' = n + jL_m$ et $q' = n' - p$, alors*

$$W_m(q') = W_m(q).$$

Démonstration. Pour tout $k \leq m$, $L_m \equiv 0 \pmod{k}$ (par définition du *ppcm*), donc $q' = q + jL_m \equiv q \pmod{k}$, c'est-à-dire $r_k(q') = r_k(q)$ pour tout $k \leq m$. □

Remarque : on soulignera au § 7 le point suivant, déjà pressenti dans le document source : ce théorème garantit une invariance à *profondeur fixe* m, alors que tester la primalité de q' exige - on va le voir précisément - un contrôle jusqu'à la profondeur $\lfloor \sqrt{q'} \rfloor$, qui croît avec j. C'est exactement l'écart entre le *local* (fixé) et le *global* (croissant) que l'on va pouvoir chiffrer une fois la Section `critere` en place.

4. L'arbre homogène de chip-firing et la valuation x-adique

4.1. Construction

On considère à présent, non plus l'arbre à arité variable $2, 3, 4, \dots$, mais l'arbre *homogène* x-naire complet, muni d'un unique jeton à la racine. La règle de transfert ("chip-firing") est : un nœud interne ne peut céder ses jetons qu'à son *dernier* fils (le fils le plus à droite d'une fratrie), un jeton à la fois, tant que c'est possible. Au niveau k, on obtient ainsi x^k feuilles, que l'on numérote $n = 1, \dots, x^k$ dans l'ordre de gauche à droite ; on note $\ell_x(n)$ l'étiquette (le nombre de jetons reçus) de la n-ième feuille.

Le document *Arbres* (2018) *constate* sur les cas $x = 2$ (16 feuilles) et $x = 3$ (18 feuilles) que $\ell_x(n)$ coïncide avec $v_x(n)$, la valuation x-adique de n (le plus grand e tel que $x^e \mid n$). On en donne ici une démonstration complète, qui explique *pourquoi* la règle de transfert "seulement au dernier fils" produit exactement cette suite.

4.2. Une récurrence syntaxique

Notons $L_k^{(x)} = \big(\ell_x(1), \dots, \ell_x(x^k)\big)$ la suite des étiquettes au niveau k, et $L_k^{(x)}{+}1$ la même suite dont on a incrémenté d'une unité la *dernière* composante seulement. La construction par chip-firing engendre exactement la récurrence syntaxique déjà décrite de façon informelle dans *Valuations p-adiques, suite* ("recopie, puis augmente le dernier nombre écrit de 1") :

$$L_0^{(x)} = (0), \qquad L_k^{(x)} = \underbrace{L_{k-1}^{(x)} \frown \cdots \frown L_{k-1}^{(x)}}_{x-1 \text{ copies}} \frown \Big(L_{k-1}^{(x)} + 1\Big),$$

où $\frown$ désigne la concaténation et où seule la *toute dernière* copie est incrémentée sur sa dernière composante. On vérifie immédiatement que ceci reproduit les suites données dans le document source : pour $x = 2$, $L_1 = (0,1)$, $L_2 = (0,1,0,2)$, $L_3 = (0,1,0,2,0,1,0,3)$, $L_4 = (0,1,0,2,0,1,0,3,0,1,0,2,0,1,0,4)$; pour $x = 3$, $L_1 = (0,0,1)$, $L_2 = (0,0,1,0,0,1,0,0,2)$, etc.

Théorème 4. (`chipfiring`) *Pour $x \geq 2$ premier et tout $k \geq 1$, la suite $L_k^{(x)}$ engendrée par la récurrence syntaxique ci-dessus coïncide avec $\big(v_x(1), \ldots, v_x(x^k)\big)$. Autrement dit, l'étiquette de chip-firing de la n-ième feuille de l'arbre x-naire au niveau k est exactement la valuation x-adique de n, pour tout $1 \leq n \leq x^k$.*

Démonstration. Par récurrence sur k. Le cas $k = 1$ est immédiat : pour $n = 1, \ldots, x-1$, $v_x(n) = 0$, et $v_x(x) = 1$, ce qui est bien $L_1^{(x)} = (0, \ldots, 0, 1)$.

Supposons le résultat vrai au rang $k-1$ et découpons $\{1, \ldots, x^k\}$ en x blocs de taille x^{k-1} : le i-ième bloc ($i = 0, \ldots, x-1$) est $\{i\,x^{k-1} + m : 1 \leq m \leq x^{k-1}\}$ (avec la convention $0 \cdot x^{k-1} + m = m$ pour $i = 0$).

Cas $m < x^{k-1}$. Écrivons $v_x(m) = j$ avec $j \leq k-2$ (car $m < x^{k-1}$), donc $m = x^j m'$ avec $x \nmid m'$. Alors

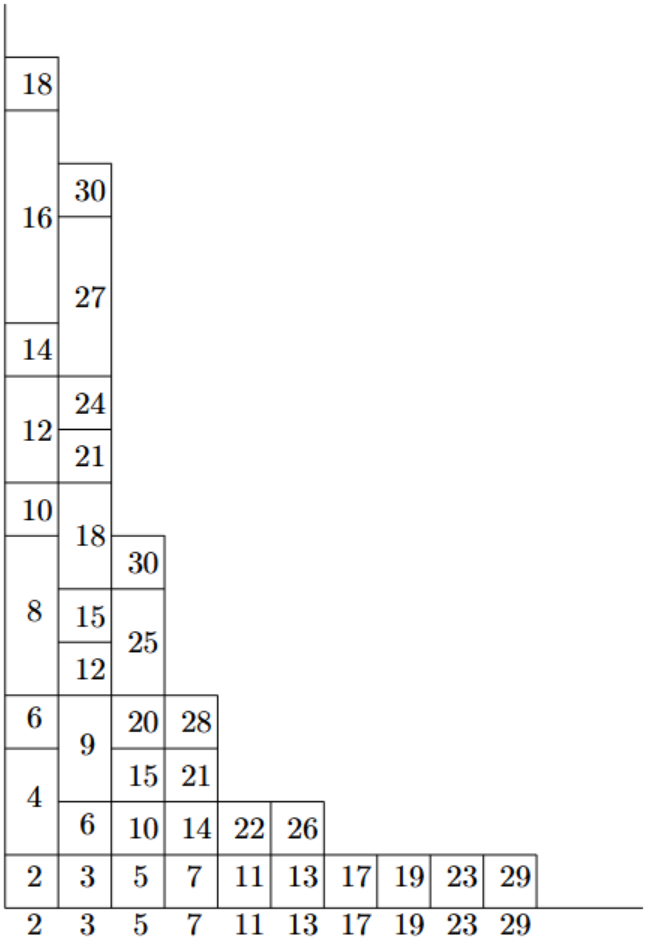
$$n = i\,x^{k-1} + m = x^j\big(i\,x^{k-1-j} + m'\big).$$

Comme $j \leq k-2$, on a $k-1-j \geq 1$, donc $x \mid i\,x^{k-1-j}$; comme $x \nmid m'$ (et x est premier), $x \nmid \big(i\,x^{k-1-j} + m'\big)$. Donc $v_x(n) = j = v_x(m)$: la valuation ne dépend pas du bloc i, ce qui correspond exactement à la copie *non incrémentée* de $L_{k-1}^{(x)}$ dans chacun des $x-1$ premiers blocs, et sur les $x^{k-1} - 1$ premières composantes du dernier bloc.

Cas $m = x^{k-1}$ (dernière composante d'un bloc). Par hypothèse de récurrence, $v_x(x^{k-1}) = k-1$ est la dernière composante de $L_{k-1}^{(x)}$. Pour $i < x-1$, $n = i\,x^{k-1} + x^{k-1} = (i+1)x^{k-1}$, avec $i + 1 \leq x - 1 < x$, donc $v_x(n) = k-1$ (inchangé, copie simple). Pour $i = x-1$ (dernier bloc), $n = (x-1)x^{k-1} + x^{k-1} = x^k$, et $v_x(x^k) = k = (k-1) + 1$: la dernière composante est bien incrémentée d'une unité, uniquement dans la dernière copie. Ceci est exactement la règle "seul le dernier fils reçoit les jetons restants" du chip-firing. □

Remarque : la démonstration montre que le rôle combinatoire de la règle "on ne cède les jetons qu'au dernier fils" est de coder la carry (retenue) de l'écriture en base x : seule la position x^k, qui correspond à un débordement complet de tous les niveaux, voit sa valuation augmenter, exactement comme dans une addition avec retenue en base x. C'est la version chip-firing du fait classique $v_x(x^k) = v_x(x^{k-1}) + 1$ et $v_x(n) = v_x(n \bmod x^{k-1})$ pour n non multiple de x^{k-1}. Pour x non premier, un raisonnement analogue s'applique en utilisant la multiplicativité $v_x(ab) = v_x(a) + v_x(b)$ rappelée dans *Valuations p-adiques, suite*, à condition de définir v_x comme la plus grande puissance de x (et non d'un facteur premier de x) qui divise n ; on ne détaille pas ce cas ici.

Remarque : l'illustration graphique jointe



un empilement de cases indexées par les nombres premiers $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ en base, avec des hauteurs de piles données par les multiples successifs - est la traduction visuelle de cette même récurrence par copie/incrémentation : chaque colonne empile les multiples d'une base, et le passage d'un niveau au suivant se lit verticalement exactement comme la concaténation $L_{k-1} \frown \cdots \frown (L_{k-1}+1)$ ci-dessus.

5. Un critère exact de primalité par sommes de valuations (`critere`)

5.1. Les deux formulations de l'auteure

Le document d'août 2023 propose

$$\pi(x) = \sum_{2 \le y \le x} \frac{1}{1 - \Big(f(y)\Big)^{15}}, \qquad f(y) = \sum_{2 \le k \le \lfloor y/2 \rfloor} v_k(y),$$

et le document de la Toussaint 2020 raffine ce calcul en restreignant la sommation à $k \le \lfloor \sqrt{y} \rfloor$ et en remplaçant l'astuce de la puissance 15 par un simple $\lfloor 1/f(y) \rfloor$ (avec la convention $v(y,1) := 1$ pour amorcer la somme). Les deux versions sont *constatées* numériquement exactes sur $y \le 100$ ou $y \le 1000$; on en donne ici la preuve générale, ce qui manquait.

5.2. Le critère exact

Définition 5. *Pour $m \geq 2$, on pose, avec la convention $v(m,1) := 1$,*

$$S(m) \;=\; 1 + \sum_{k=2}^{\lfloor\sqrt{m}\rfloor} v(m,k),$$

où $v(m,k)$ est la valuation k-adique de m (le plus grand $e \geq 0$ tel que $k^e \mid m$), k non nécessairement premier.

Théorème 6. `(critere)` *Pour tout entier $m \geq 2$:*

$$S(m) = 1 \iff m \text{ est premier}, \qquad S(m) \geq 2 \iff m \text{ est composé}.$$

Par conséquent $\lfloor 1/S(m) \rfloor = \mathbf{1}_{\{m \text{ premier}\}}$ exactement, et

$$\pi(x) = \sum_{m=2}^{x} \left\lfloor \frac{1}{S(m)} \right\rfloor$$

est une identité exacte, sans terme d'erreur, pour tout $x \geq 2$.

Démonstration. Si m est premier, tout k avec $2 \leq k \leq \lfloor\sqrt{m}\rfloor$ vérifie $2 \leq k < m$, donc $k \nmid m$ (un nombre premier n'a pas de diviseur strictement compris entre 1 et lui-même), d'où $v(m,k) = 0$ pour tout tel k, et $S(m) = 1$.

Réciproquement, si $m \geq 4$ est composé, m possède un plus petit facteur premier p, et le fait classique $p \leq \sqrt{m}$ tient (sinon $m = pq$ avec $p, q > \sqrt{m}$ donnerait $m = pq > m$, absurde). Alors p est un entier de l'intervalle $[2, \lfloor\sqrt{m}\rfloor]$ et $v(m,p) \geq 1$, donc $S(m) \geq 1 + 1 = 2$.

Comme $S(m)$ est un entier ≥ 1, $\lfloor 1/S(m) \rfloor$ vaut 1 si $S(m) = 1$ et 0 si $S(m) \geq 2$: c'est exactement l'indicatrice de primalité, et la somme télescope en $\pi(x)$. □

Corollaire 7. *La formule de 2020 (bornée à $\sqrt{y}$, avec $\lfloor 1/f(y) \rfloor$) est exacte. La formule de 2023 (bornée à $y/2$, avec l'astuce $1/(1-f^{15})$) est seulement une approximation numérique de la même quantité : elle repose sur le fait que $1/(1-f^{15})$ est proche de 0 dès que $f \geq 1$, mais n'est jamais rigoureusement nul, et la borne $y/2$, bien que suffisante (puisque $\sqrt{y} \leq y/2$ pour $y \geq 4$), fait pour rien $\Theta(y)$ divisions au lieu de $\Theta(\sqrt{y})$. Le raffinement de 2020 constitue donc une amélioration réelle, que l'on vient de justifier complètement : on est passé d'un test heuristique et coûteux à un test exact et optimal en profondeur de crible.*

6. Unification : l'arbre des restes comme géométrie du crible `unif`

On peut maintenant relier les Sections `critere` et 2 à l'arbre des restes de la Section 2.

Proposition 8 (Critère de primalité arborescent)**.** `arbre-primalite` *Soit $m \geq 2$ et A l'arbre des restes. Alors*

$$m \text{ est premier} \iff \forall k \in \{2, \ldots, \lfloor\sqrt{m}\rfloor\},\ r_k(m) \neq 0,$$

c'est-à-dire ssi le mot de restes $W_{\lfloor\sqrt{m}\rfloor}(m)$ ne comporte aucune composante nulle.

Démonstration. $r_k(m) = 0 \iff k \mid m \iff v(m,k) \geq 1$. La Proposition découle donc immédiatement du Théorème critere, puisque $S(m) = 1$ (primalité) équivaut à $v(m,k) = 0$ pour tout $k \leq \lfloor\sqrt{m}\rfloor$, c'est-à-dire à l'absence de composante nulle dans $W_{\lfloor\sqrt{m}\rfloor}(m)$. □

On obtient ainsi une lecture géométrique complète du crible d'Ératosthène–Legendre : dans l'arbre à arité variable, un nœud de niveau k portant le résidu 0 est un nœud "obstrué" (il révèle un diviseur). La Proposition `arbre-primalite` dit que m est premier ssi son chemin dans l'arbre évite tout nœud obstrué jusqu'au niveau $\lfloor\sqrt{m}\rfloor$.

L'arbre homogène de chip-firing (Section 2) est alors le raffinement *quantitatif*, à une seule base x fixée, de cette information binaire : là où l'arbre des restes ne dit que $r_x(m) = 0$ ou non (obstrué / non obstrué), le chip-firing fournit l'exposant exact $v_x(m)$, c'est-à-dire la *profondeur* de l'obstruction. Les deux constructions décrites indépendamment par l'auteure en 2018 et en 2026 sont donc les cas particuliers, l'un homogène (arité x fixe, information fine : la valuation), l'autre hétérogène (arité $k = 2, \ldots, m$ variable, information grossière : le résidu nul ou non), d'un seul et même arbre de crible.

7. Application à Goldbach : ce que gagne - et ce que ne gagne pas - la formalisation

7.1. Reformulation quantitative de la transmission des décomposants

Soit n pair, p un décomposant de Goldbach de n, $q = n - p$. La Proposition `arbre-primalite` dit que la primalité de q se lit sur $W_{\lfloor\sqrt{q}\rfloor}(q)$. Le théorème `invariance` dit que, pour $n' = n + jL_m$, $q' = n' - p$ vérifie $W_m(q') = W_m(q)$.

Proposition 9 (Version quantitative de l'obstruction locale/globale)**.** `obstacle` *Fixons $m \geq 2$ et $j \in \mathbb{N}$, $n' = n + jL_m$, $q' = n' - p$. Alors :*

1. *Si $m \geq \lfloor\sqrt{q'}\rfloor$, le Théorème* ***`invariance`*** *et la Proposition* ***`arbre-primalite`*** *déterminent complètement la primalité de q' à partir de celle de q (aucune obstruction nouvelle ne peut apparaître au-delà du niveau m puisqu'il n'y a rien à tester au-delà de $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor \leq m$).*
2. *Si $m < \lfloor\sqrt{q'}\rfloor$ - ce qui se produit nécessairement pour j assez grand, puisque $q' \sim jL_m \to \infty$ alors que m est fixé - le Théorème* ***`invariance`*** *ne contrôle plus que les $m - 1$ premières composantes de $W_{\lfloor\sqrt{q'}\rfloor}(q')$: il reste $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor - m$ composantes $r_{m+1}(q'), \ldots, r_{\lfloor\sqrt{q'}\rfloor}(q')$ dont la nullité ou non n'est pas déterminée par l'invariance de translation, et dont dépend pourtant, seule, la primalité de q'.*

Démonstration. (i) est immédiat : si $m \geq \lfloor\sqrt{q'}\rfloor$, toutes les composantes nécessaires au critère de la Proposition `arbre-primalite` sont déjà fixées par $W_m(q') = W_m(q)$. (ii) : comme $L_m \geq 2$ est fixé une fois m choisi, $q' = q + jL_m \to \infty$ quand $j \to \infty$, donc $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor \to \infty$ tandis que m reste constant : il existe donc j à partir duquel $m < \lfloor\sqrt{q'}\rfloor$, et les composantes de rang $> m$ du mot de restes échappent au contrôle du Théorème `invariance`. □

Ceci rend précis, de façon calculable, le constat plus qualitatif du document de juillet 2026 ("rien ne garantit combinatoirement que ce candidat ne soit pas strictement supérieur à n") : l'invariance par translation ne porte que sur une fenêtre de profondeur fixe m (déterminée par le *ppcm* choisi), alors que le test de primalité exact (Proposition `arbre-primalite`) exige une profondeur $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor$

qui croît sans borne. La formalisation par valuations ne comble donc pas l'écart : elle en donne la mesure exacte, à savoir le déficit $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor - m$ de niveaux non contrôlés.

8. Lien avec les matrices de chip-firing de [1]

Le document *Conjecture de Goldbach et chip-firing games* encode la même idée sous une autre forme : une matrice 2×2 $\big(f_{aa}, f_{ab}; f_{ba}, f_{bb}\big)(n)$ dénombre les couples $(p, q = n - p)$ selon les quatre patrons de primalité/composition de p, q et d'un décalé $n + 2 - p$, et Goldbach revient à montrer $f_{aa}(n) + f_{ab}(n) > 0$ pour tout n pair. Le "gnomon de zéros" interdit dans la version 4×4 (une configuration où toutes les cases d'un coin sont nulles) est l'exacte transcription matricielle du fait "tous les décomposants candidats sont obstrués" de la Proposition `arbre-primalite`, appliqué simultanément à p et à $n - p$ le long de leurs deux chemins respectifs dans l'arbre des restes. C'est donc, sous une présentation différente (comptage matriciel plutôt qu'arborescent), le même phénomène et le même obstacle : on sait décrire localement l'absence d'obstruction, mais rien dans cette description locale ne borne la taille du plus petit p qui y échappe.

9. Une mise en garde : ne pas confondre avec l'obstruction de parité de Selberg

Le critère de la Proposition `arbre-primalite` est un crible *exact*, non tronqué (c'est une reformulation du crible d'Ératosthène–Legendre, pas une approximation analytique) : il n'est donc pas directement soumis au phénomène de parité de Selberg, qui frappe spécifiquement les sommes de crible *tronquées* (de type Brun/Selberg) et se traduit par une insensibilité structurelle de ces sommes au nombre de facteurs premiers modulo 2. Ici, l'obstacle mis en évidence par la Proposition `obstacle` est d'une autre nature : c'est un problème de *profondeur de contrôle* (local, fixe) contre *taille effective* (globale, croissante), et non un problème de signe ou de parité au sens de Selberg. Il ne faut donc pas présenter cette construction comme contournant l'obstruction de parité : elle rencontre un mur différent, mais tout aussi structurel, qui est en réalité une reformulation du problème classique et non résolu du passage du "local" au "global" en théorie des cribles élémentaires (c'est la raison pour laquelle le crible seul - sans information supplémentaire de type analytique ou géométrique sur la distribution des premiers - ne peut à ce jour établir ni Goldbach ni les nombres premiers jumeaux).

10. Conclusion et pistes

On a montré que l'arbre des restes à arité variable (2026), l'arbre de chip-firing x-naire (2018) et la formule de $\pi(m)$ par sommes de valuations (2020/2023) sont trois incarnations d'une seule structure de crible arborescent, et on a remplacé par des démonstrations complètes les trois faits qui n'étaient jusqu'ici que numériquement constatés (Théorèmes `chipfiring` et `critere`, Proposition `arbre-primalite`). Appliquée à Goldbach, cette unification transforme le constat qualitatif du document de juillet 2026 en un énoncé quantitatif (Proposition `obstacle`) : le déficit de contrôle croît exactement comme $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor - m$.

Deux pistes semblent raisonnables pour la suite, si l'on souhaite pousser cette direction sans se heurter frontalement à l'obstacle ci-dessus :

1. **Estimation heuristique de densité.** Le critère arborescent permet de compter, combina-

toirement, la proportion de feuilles “non obstruées jusqu'au niveau m” (c'est $\prod_{k=2}^{m}(1-1/k)$ à des corrections multiplicatives près liées au théorème des restes chinois (TRC)) : cela rejoint, sans le redémontrer, l'heuristique de Hardy–Littlewood pour le nombre de décomposants de Goldbach de n, et pourrait fournir une présentation combinatoire alternative de cette heuristique, cohérente avec les comptages déjà tabulés dans [1].

2. **Couplage p/q dans l'arbre.** La proposition `obstacle` traite q seul ; le gnomon de zéros de [1] suggère de formaliser le couplage des deux chemins (celui de p et celui de $n-p$) dans l'arbre des restes, ce qui n'a pas été fait ici et constituerait un prolongement naturel.

Références

[1] Denise Vella-Chemla, Conjecture de Goldbach et chip-firing games, 19 août 2018.
https://denisevellachemla.eu/chip-firing-gb.pdf.

[2] D. Vella-Chemla pilotant Gemini, *Théorie de l'arbre des restes à arité variable et stabilité des décomposants de Goldbach*, juillet 2026.
https://denisevellachemla.eu/formalisation-arbres-restes-gemini-dvc.pdf.

[3] D. Vella-Chemla, *Arbres*, 29 septembre 2018.
https://denisevellachemla.eu/arbres.pdf.

[4] D. Vella-Chemla, *Conjecture de Goldbach et chip-firing games*, 19 août 2018.
https://denisevellachemla.eu/arbre-chip.pdf.

[5] D. Vella-Chemla, *Revenir à l'algorithme de calcul du nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné en utilisant les valuations p-adiques*, août 2023.
https://denisevellachemla.eu/padic-retour.pdf.

[6] D. Vella-Chemla, *Valuations p-adiques, suite*, Toussaint 2020.
https://denisevellachemla.eu/reprise-valpadic.pdf.