

**La petite fonction qui envoie les parties imaginaires des zéros
non triviaux de ζ vers des nombres “presque” successifs**
Denise Vella-Chemla
26 décembre 2024

On teste par le programme suivant, pour les 2 millions de premiers zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann, que les parties imaginaires de ces zéros sont bien envoyées par la fonction de comptage vers les nombres “presque” successifs, i.e. des nombres réels séparés chacun du suivant par un écart compris entre 0 et 1 ¹.

La fonction de comptage a, à une constante près, pour définition :

$$f(T) = \frac{T}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{T}{2\pi e} \right) \right)$$

```
import math
from math import pi,log,e

with open("zeros2millions", 'r') as f:
    lines = f.readlines()
    zeros = [float(line) for line in lines]

for n in range(len(zeros)-1):
    print(n, ' ', zeros[n], ' ', (zeros[n+1]/(2*pi))*log(zeros[n+1]/(2*pi*e)))
```

Ci-dessous le résultat de ce programme jusqu'à 100 ².

n	$\Im(\zeta_n)$	$f(\Im(\zeta_{n+1}))$	n	$\Im(\zeta_n)$	$f(\Im(\zeta_{n+1}))$
0	14.134725142	0.694895689662535	10	52.970321478	10.7392197558459
1	21.022039639	1.51833268588623	11	56.446247697	11.7644535438555
2	25.01085758	2.79584647536906	12	59.347044003	12.2980090797995
3	30.424876126	3.44206964858738	13	60.831778525	13.8681602815966
4	32.935061588	4.71837876181937	14	65.112544048	14.6049466761078
5	37.586178159	5.6899670378981	15	67.079810529	15.5416859568015
6	40.918719012	6.4192280671934	16	69.546401711	16.5133799857929
7	43.327073281	7.89568039084821	17	72.067157674	17.9401819521021
8	48.005150881	8.47320303179638	18	75.704690699	18.5128358719339
9	49.773832478	9.54208818578511	19	77.144840069	19.3928547789907

¹En fait, l'écart entre les images de deux parties imaginaires de deux zéros successifs (rangés dans l'ordre croissant des parties imaginaires) a été au maximum égal à 3.3 environ pour les 2 millions de premiers zéros, et non pas à 1, mais dans tous les cas, l'écart reste toujours très très petit par rapport au nombre considéré.

²et à cet adresse

<https://denisevellachemla.eu/entre0et1.txt> ,

l'exécution avec les zéros non triviaux de ζ de partie imaginaire inférieure à 2 millions fournis par Odlyzsko.

n	$\Im m(\zeta_n)$	$f(\Im m(\zeta_{n+1}))$	n	$\Im m(\zeta_n)$	$f(\Im m(\zeta_{n+1}))$
20	79.33737502	20.8475020524276	61	167.184439978	61.6984559369902
21	82.910380854	21.600069144213	62	169.094515416	62.1271444444692
22	84.735492981	22.7205417605702	63	169.911976479	63.9694035692432
23	87.425274613	23.3021589295633	64	173.41153652	64.6792079573964
24	88.809111208	24.8665888629723	65	174.754191523	65.5735076120176
25	92.491899271	25.7948264335012	66	176.441434298	66.6028057110773
26	94.651344041	26.322413725083	67	178.377407776	67.4234734608378
27	95.870634228	27.6136597251497	68	179.91648402	68.6487411487072
28	98.831194218	28.7091385850354	69	182.207078484	70.0813332073192
29	101.317851006	29.7790866652396	70	184.874467848	70.4714073780431
30	103.72553804	30.5493808703319	71	185.598783678	71.350947873569
31	105.446623052	31.3245538549383	72	187.228922584	72.5346151339257
32	107.168611184	33.078495631911	73	189.416158656	73.9525970335719
33	111.029535543	33.4652954705481	74	192.026656361	74.5262116161171
34	111.874659177	34.5902881052207	75	193.079726604	75.719672958394
35	114.320220915	35.4730710131554	76	195.26539668	76.6018838013679
36	116.226680321	36.6682086217569	77	196.876481841	77.2267590641179
37	118.790782866	37.879337085695	78	198.015309676	79.0154396127439
38	121.370125002	38.623986107933	79	201.264751944	79.6940486909973
39	122.946829294	39.2451198593009	80	202.493594514	80.6326289177557
40	124.256818554	40.8002822690803	81	204.189671803	81.3008329480505
41	127.51668388	41.790866980748	82	205.394697202	82.6971391696362
42	129.5787042	42.5190899316302	83	207.906258888	83.6283945340186
43	131.087688531	43.6878796199309	84	209.576509717	84.8102971609292
44	133.497737203	44.3011014007152	85	211.690862595	85.7389266964766
45	134.756509753	45.9468415556906	86	213.34791936	86.4122057823626
46	138.116042055	46.7451839583626	87	214.547044783	87.3248925751132
47	139.736208952	47.4312561383973	88	216.169538508	88.9599243352489
48	141.123707404	48.4181040360562	89	219.067596349	89.8920390429968
49	143.111845808	49.8599978194783	90	220.714918839	90.2976677989138
50	146.000982487	50.5729251200248	91	221.430705555	91.7606662793508
51	147.422765343	51.8978090115362	92	224.007000255	92.3163259969592
52	150.053520421	52.3384532843791	93	224.98332467	93.7068816956505
53	150.925257612	53.4029529442674	94	227.42144428	94.8025556889906
54	153.024693811	54.97711765745	95	229.337413306	95.8989445808808
55	156.112909294	55.7373818516436	96	231.2501887	96.3220875071878
56	157.597591818	56.3804305894168	97	231.987235253	97.3030374373686
57	158.849988171	57.5855873368141	98	233.693404179	98.9349673409935
58	161.188964138	58.538351594387	99	236.524229666	99.6547445742907
59	163.030709687	59.8402435745758	100	237.769820481	100.688414763251
60	165.537069188	60.699241612539			

Référence

- [1] Alain Connes, Henri Moscovici, *The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta*, PNAS, Vol. 119, n° 22, 24 mai 2022. <https://doi.org/10.1073/pnas.2123174119>,
et article en ligne <https://www.pnas.org/doi/epub/10.1073/pnas.2123174119>.

Pour se faire une autre idée, on note ci-dessous une petite fonction qui trouve “presque” les valeurs des parties imaginaires des zéros non triviaux de ζ en prenant “certains” multiples de $\frac{\pi}{4}$.

```

from math import pi

with open('zeros30', 'r') as f:
    lines = f.readlines()
    zeros = [float(line) for line in lines]

combien = [18,28,32,39,42,48,52,56,62,63,67,72,76,77,83,86,89,92,96,99,101,105,108,
          112,113,118,120,122,125]

for k in range(29):
    print(' :2.9f :3d :2.9f'.format(zeros[k],combien[k],combien[k]*pi/4))

```

k	$\zeta[k]$	k'	$k' \frac{\pi}{4}$
1	14.134725142	18	14.137166941
2	21.022039639	28	21.991148575
3	25.010857580	32	25.132741229
4	30.424876126	39	30.630528373
5	32.935061588	42	32.986722863
6	37.586178159	48	37.699111843
7	40.918719012	52	40.840704497
8	43.327073281	56	43.982297150
9	48.005150881	62	48.694686131
10	49.773832478	63	49.480084294
11	52.970321478	67	52.621676948
12	56.446247697	72	56.548667765
13	59.347044003	76	59.690260418
14	60.831778525	77	60.475658582
15	65.112544048	83	65.188047562
16	67.079810529	86	67.544242052
17	69.546401711	89	69.900436542
18	72.067157674	92	72.256631033
19	75.704690699	96	75.398223686
20	77.144840069	99	77.754418176
21	79.337375020	101	79.325214503
22	82.910380854	105	82.466807157
23	84.735492981	108	84.823001647
24	87.425274613	112	87.964594301
25	88.809111208	113	88.749992464
26	92.491899271	118	92.676983281
27	94.651344041	120	94.247779608
28	95.870634228	122	95.818575934
29	98.831194218	125	98.174770425