Liens vers la géométrie non-commutative (DV, 23/2/2015)

Je voudrais par cette note exprimer ma gratitude à Alain Connes, pour les conférences et articles dans lesquels il présente le domaine qu'il a développé, la géométrie non-commutative, ainsi que pour ce qu'il a dit du processus même de recherche, et qui m'a constamment aidée à ne pas me décourager.

Je n'ai rien compris aux exposés et notes présentant la géométrie non-commutative ; cependant, j'ai le sentiment que leur écoute et lecture, malgré mon incompréhension, m'ont aiguillée comme il convenait depuis le début de ces recherches.

J'ai cité l'article de vulgarisation d'Alain Connes au sujet de la résolution des équations algébriques d'un magazine Pour la Science en février 2006 alors que j'avais commencé ce travail en septembre 2005. Je n'ai pas abandonné cette idée d'utiliser la résolution d'équations algébriques pour comprendre la conjecture de Goldbach binaire pendant 9 ans. J'ai lu en diagonale, n'étant pas capable de faire plus, les écrits d'Abel et Galois à l'été 2006 et quelques années plus tard, Alain Connes ayant donné plusieurs conférences au sujet de Galois, j'ai essayé avec acharnement de comprendre ses présentations (cf une note du 5 février 2013). Je n'ai jamais réussi à avoir une compréhension détaillée de ce qu'il présentait, juste des idées générales et synthétiques, que l'on peut considérer comme trop générales pour présenter un intérêt, mais qui me semblent cependant concentrer l'essentiel : l'idée du codage d'éléments par des lettres, caractéristique de l'algèbre, l'idée d'obtenir des liens entre les solutions en permutant des lettres. Ces notions de codage, de fonctions, résonnent avec ma formation initiale, qui est une formation de recherche en informatique (plus spécifiquement en intelligence artificielle).

AC parle lors d'une interview de la manière de lire du chercheur. Il feuillette un article et soudain, focalise son attention sur un point dont il a le sentiment qu'il s'agit d'une sorte de "noeud de compréhension". La lecture en diagonale a vraiment été constante et intensive tout au long de ce travail : je n'ai pas du tout *compris* au sens entendu par AC ci-dessus ; je m'arrête souvent sur les figures, sur quelques formules simples ; cela engendre dans l'esprit une sorte d'impression d'ensemble, une sorte de bain de langage, qui est très important d'une part parce qu'il fait que les sens et le cerveau sont constamment actifs et d'autre part, parce qu'il remplit la mémoire de nombreux éléments, d'images mentales, qui pourront ensuite être mis en relation les uns avec les autres. Je prends des bribes, qui vont conforter mes intuitions et cheminements, me donner un peu d'assurance, et c'est important parce que dans cette recherche, j'étais constamment perdue, c'est un peu inquiétant. Les bribes sont comme des bouts de bois auxquels se raccroche la naufragée, lors des moments de découragement. Dans le but d'encourager les jeunes à s'engager dans la recherche, AC insiste sur deux points : le fait d'une part que ça peut être normal de ne rien comprendre à une conférence, et qu'il ne faut pas se décourager pour autant, les éléments de compréhension se dégageront peut-être un jour. Il explique d'autre part que c'est lorsqu'on a l'impression d'être la plus perdue qu'on avance alors que lorsqu'on est sur des éléments bien maîtrisés, le cerveau n'est pas en mouvement. Caché derrière cela, il y a également la notion de prise de risque et d'acceptation du ridicule, qu'on retrouve dans les écrits de Galois. Ce n'est pas glorieux que de ne pas se mettre en danger et de ne montrer qu'une belle façade de maîtrise, en cachant tous les moments où l'on a douté. Il n'y a pas de honte à montrer ses doutes et faiblesses, s'ils n'ont pas comme conséquence un blocage total de l'activité mentale, par perte totale de l'estime de soi. Il faut également réussir, et c'est difficile quand on a un naturel un rien obsessionnel, à se détendre et se détourner de son objectif, pour mieux le retrouver ensuite, l'esprit moins englué.

Il y a par exemple un petit élément qui à un moment m'a donné du courage. AC a expliqué en conférence que les algèbres non-commutatives si complexes qu'ils étudiaient pouvaient trouver leur illustration dans la très simple structure de monoïde. La structure de monoïde est enseignée en général au tout début d'un cursus informatique. On suit des cours de Théorie des langages, qui sont vraiment des cours de base. On y étudie la notion de langage, de mots, de concaténation. La concaténation des mots est une des opérations non-commutatives les plus simples. La structure de chaîne de caractères (*string*) est une structure de données essentielle en informatique et toutes les autres opérations sur les chaînes de caractères (reconnaissance de sous-chaînes, comptage de lettres, etc) sont des concepts sous-jacents à la programmation informatique.

En mai 2013, j'ai lu *Le théâtre quantique*, écrit conjointement par Alain Connes, Danye Chéreau et Jacques Dixmier. Il y est question d'anagrammes et j'en ai alors cherché beaucoup, parce que ça m'amusait. AC présente cette idée de permutation des lettres des mots à de multiples reprises en conférences, par une anecdote marrante au sujet d'une carte postale pleine d'anagrammes que lui avait envoyée un ami ; dans *Le* *théâtre quantique* est citée l'anagramme de Jacques Perry-Salkow de *L'horloge des anges ici-bas*. Le goût des mots peut être aussi une seconde nature quand on cotoie des cruciverbistes, quand on pratique souvent dans son enfance des jeux de lettres ou mots (Diamino, Scrabble, culture familiale du calembour). Il s'agit de développer une certaine attention aux permutations de lettres qui font sens, d'acquérir des réflexes de comptages de lettres qui permettent ou pas d'obtenir certains mots étant donné tel ou tel ensemble de lettres. Le jeu télévisé des chiffres et des lettres a développé ces capacités pour nombre d'entre nous.

Une idée souvent reprise en conférence par AC est l'idée de rébellion, de décision de s'aventurer tout seul, sans suivre les chemins tracés. C'est une idée développée par Galois également. En fait, mon acte salutaire de rébellion a consisté à prendre la décision de revenir aux fondamentaux informatiques que j'avais le sentiment de maîtriser du fait de mon expérience en recherche et ingéniorat à Noël 2013 (la programmation, les instructions, les variables, les booléens, les invariants de Hoare) quand j'ai vraiment réalisé que malgré toute ma bonne volonté, je ne comprendrais jamais rien aux tenants et aboutissants de la géométrie non-commutative. La compréhension d'articles de recherche actuels nécessite d'être titulaire d'une thèse et d'avoir passé une vingtaine d'années à pratiquer intensivement la recherche au plus haut niveau (suivi constant et régulier de tout ce qui se fait dans un domaine donné et bien circonscrit des mathématiques, participation / animation de colloques et conférences, discussions régulières et intensives avec d'autres chercheurs).

Je voudrais également évoquer une notion fondamentale en géométrie non-commutative qui a été très importante dans cette quête et qui est la notion de points géométriques. Ce qui a été extraordinaire, c'est le fait de m'être focalisée 8 ans durant, jusqu'à février 2014, sur des espaces géométriques qui me semblaient pertinents pour l'étude de la conjecture de Goldbach binaire et qui consistaient en des produits cartésiens de corps premiers. Je crois que ces points commutaient. Mais brutalement, en février 2014, s'est imposée à moi l'idée de "tout écraser du point de vue de l'information", en me concentrant sur de simples booléens qui agrégeaient cette information en leur sein en postulant que, comme dans le domaine de la compression d'images, je ne perdrais pas d'information ce-faisant. Ce choix a engendré la découverte de règles de réécriture, au nombre de 16. L'opération travaillant sur deux doublons de booléens ne commutait pas et les règles de réécriture semblaient suivre un principe physique qui s'appelle le principe de Ritz-Rydberg. Tout ça me confortait dans une conviction qu'il ne fallait pas lâcher ce fil pertinent d'idées. Un autre élément renforçait encore cette conviction : j'avais en quelque sorte deux droites de booléens, fonctions de la droite des entiers, qui codaient le caractère de primalité des entiers successifs, et que je devais mettre tête-bêche, ce que j'appelais avoir une copie de mon espace. Et j'ai alors lu dans le livre de géométrie non-commutative qu'AC avait lui aussi eu l'idée de cette copie d'espace mais dans un tout autre domaine : pour son travail en physique, pour représenter l'espace-temps. C'était d'ailleurs le fil conducteur de l'une de ses conférences très importante, qui s'appelle *Espace-temps et nombres premiers, deux défis pour la géométrie*. Il y présente son paradigme de la géométrie non-commutative comme permettant d'adresser tout à la fois les deux graals des scientifiques contemporains que sont la représentation de l'espace-temps et celle de l'espace de l'ensemble des nombres premiers. Tous ces petits éléments de réassurance, même s'ils étaient parfois totalement infondés, ont vraiment été d'une grande aide pour que j'avance. Je peux cependant illustrer par un exemple que si ces éléments me rassuraient, j'étais parfois très loin à côté de la plaque : par exemple, j'ai interprété certains restes modulo 8, correspondant à la KO-dimension, comme des codages par des 1 et -1 de spins et j'ai trouvé un pont entre mon espace de lettres et ce qu'on appelle en physique un espace de Yang-Mills. J'interprétais tout pour conforter ma conviction que mes intuitions étaient bonnes et ceux à qui j'en parlais n'avaient aucune hésitation à me dire que je nageais en plein délire, leur attitude me ramenant brutalement au sol. Il est aussi aisé de trouver de nombreux interlocuteurs, qui vous prouvent par $a + b$ que toutes vos tentatives seront de toute façon vouées à l'échec. Ces personnes nous repositionnent correctement face au réel et si leur pessimisme n'est pas bloquant de la pensée, il peut aider aussi. Ce côté obsessionnel totalement délirant peut faire craindre pour sa santé mentale et il est toujours le signe qu'il est temps d'aller se balader.

Il se trouve également que j'avais trouvé de petites représentations graphiques sympathiques de mes règles de réécriture, qui me permettaient d'avoir un oeil neuf sur une représentation graphique des décompositions de Goldbach binaires sous la forme d'un maillage, dont j'avais ressenti au début de mes recherches la découverte comme une illumination parce qu'il était un beau moyen de présenter graphiquement la conjecture. Cette représentation graphique, bien que toute simple, me fait penser aux petits schémas de Richard Feynman, toutes proportions gardées. Elle condense des assertions logiques triviales qui lient les décompositions en somme de deux impairs de n et $n + 2$. J'avais ainsi un nouveau regard sur mon travail comme se situant dans la lignée, à très modeste échelle, du travail de Galois : les lettres utilisées dans l'approche proposée représentent des nombres d'assertions logiques existentielles de solutions d'équations plutôt que des solutions d'équations elles-mêmes.

La preuve que j'ai proposée est résolument algorithmique ; j'explique par de multiples raisonnements par récurrence, correspondant aux différents cas à envisager, comment on ne perd pas l'une au moins des décompositions de Goldbach, lors du passage d'un entier pair à l'entier pair suivant.

Tout récemment seulement, j'ai lu que les algèbres de Boole, que je ne connaissais que de manière utilitaire, pour leur utilisation en programmation, avaient des propriétés particulières, ces propriétés pouvant peut-être être utilisées pour présenter mon travail d'une manière plus statique, en termes de structures. J'ai par exemple appris qu'une algèbre de Boole obéissait au principe d'idempotence, tel que $x^2 = x$, une formule qui n'arrête pas d'apparaître dans le livre et dans de nombreuses notes d'AC. J'ai aussi lu un court paragraphe concernant le principe de dualité vérifié par une algèbre de Boole : tout théorème demeure vrai quand on échange le *et logique* ($\wedge$) et le ou ($\vee$) d'une part, et le 0 et le 1 d'autre part. $x \wedge \neg x = 0$ devient par ce changement $x \vee \neg x = 1$. Cette symétrie tendrait à faire croire que les deux valeurs de vérité ne sont en fait que les deux faces d'une même pièce, et rappelle les deux faces d'espace vues plus haut.

Je formule ce souhait que mon approche informatique de la conjecture de Goldbach binaire puisse être un jour totalement décrite en utilisant le paradigme de la géométrie non-commutative et j'imagine que lorsqu'elle le sera, la profondeur que je ne fais que pressentir de ce modèle de représentation des espaces en allègera considérablement la formulation.