

Conjecture de Goldbach et points fixes d'une projection

Denise Vella-Chemla

24 février 2026.

1. Introduction

La conjecture dite *conjecture paire de Goldbach*, qui date de 1742 ([5])¹, énonce que tout nombre pair n supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers² (voir [7] pour un compte-rendu historique à son sujet). Elle a intéressé de nombreux savants (tels que Cantor [4] qui a vérifié, à l'époque à la main, qu'elle était vraie pour tous les nombres jusqu'à 1000, ou Laisant [6] qui a proposé un procédé expérimental permettant de la vérifier). Est proposée ci-après une modélisation de la conjecture de Goldbach qui est basée sur l'idée de considérer certaines sommes égales à n comme des points du plan \mathbb{N}^2 . On place les nombres p_k et $n - p_k$, avec p_k un nombre premier compris entre 3 et $n - 3$, l'un, p_k , sur l'axe des abscisses, et l'autre, $n - p_k$, sur l'axe des ordonnées. La modélisation utilise comme idée-clé le fait que les décomposants de Goldbach de n , s'ils existent, sont points fixes de la projection des points du réseau associé à n sur la diagonale ascendante d'un carré.

2. Représentation des décompositions de n en sommes $p_k + (n - p_k)$, avec p_k un nombre premier, dans le plan \mathbb{N}^2

Appelons E_n l'ensemble des nombres premiers impairs compris entre 3 et $n - 3$ inclus.

On note E'_n l'ensemble des nombres $n - p_k$ avec $p_k \in E_n$.

E_n et E'_n ont même cardinal.

$$E_n = \{p_k \mid 3 \leq p_k \leq n - 3, p_k \text{ est un nombre premier}\}$$

$$E'_n = \{n - p_k \mid p_k \in E_n\}.$$

Par commodité, on représente les points qui sont utiles pour la justification par des points (x, y) dans un carré C de côté de longueur n , carré dont les sommets sont les points $(0, 0)$, $(n, 0)$, $(0, n)$ et (n, n) . Les nombres premiers p_k sont positionnés sur l'axe des abscisses. Les nombres $n - p_k$ sont positionnés sur l'axe des ordonnées.

On trace dans le carré C un réseau de droites :

- chaque droite verticale a pour équation $x = p_k$ pour chaque nombre premier $p_k \in E_n$;
- chaque droite horizontale a pour équation $y = n - p_k$ pour chaque nombre $n - p_k \in E'_n$.

L'ensemble U_n des points d'intersection du réseau de droites dans le carré C est défini par

$$U_n = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in E_n, y \in E'_n\}.$$

L'ensemble U_n est de cardinal³ $\#(E_n \times E'_n) = (\#E_n)^2$.

1. On trouve aussi la phrase latine "*Sed et omnis numerus par fit ex uno vel duobus vel tribus primis*", traduisible en "*Mais tout nombre pair est composé d'un, deux ou trois nombres premiers.*" dans un écrit posthume, publié en 1701, de Descartes (cf. [2] et [3]).

2. On considérera ici seulement les nombres pairs supérieurs à 4, comme sommes de deux nombres premiers impairs.

3. On utilise le symbole $\#E$ pour désigner le cardinal de l'ensemble E .

Exemples : Donnons pour exemples les ensembles E_{16} , E'_{16} , E_{24} et E'_{24} . On a

$$\begin{array}{l|l|l} E_{16} = \{3, 5, 7, 11, 13\} & \#E_{16} = 5 \quad (\#E_{16} \text{ est impair}). & E'_{16} = \{13, 11, 9, 5, 3\} \\ E_{24} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} & \#E_{24} = 7 \quad (\#E_{24} \text{ est impair}). & E'_{24} = \{21, 19, 17, 13, 11, 7, 5\} \end{array}$$

Remarque : Un nombre pair qui est le double d'un nombre premier p_k (comme $38 = 2 \times 19$, ou $94 = 2 \times 47$) vérifie trivialement la conjecture de Goldbach, car ce nombre étant de la forme $2p_k$, il a une décomposition en somme de la forme $n = 2p_k = p_k + p_k$ quel que soit p_k un nombre premier ; un tel nombre est la somme de deux nombres premiers confondus (identiques). Leur graphique (voir ci-dessous) associé présente un point rouge au centre du carré, à l'intersection de la droite verticale (d'équation $x = p_k$), et de la droite horizontale (d'équation $y = p_k$) (et donc à l'intersection des deux diagonales du carré).

3. Illustration graphique d'un exemple

Pour illustrer la modélisation, on va traiter le cas $n = 16$ en caractérisant les décomposants de Goldbach de 16 qui sont 3 et 13 d'une part, et 5 et 11, d'autre part.

La figure 1 montre le carré représentant les décompositions de Goldbach du nombre $n = 16$ en rouge sur la diagonale ascendante (il s'agit des points $(3, 3)$, $(5, 5)$, $(11, 11)$ et $(13, 13)$).

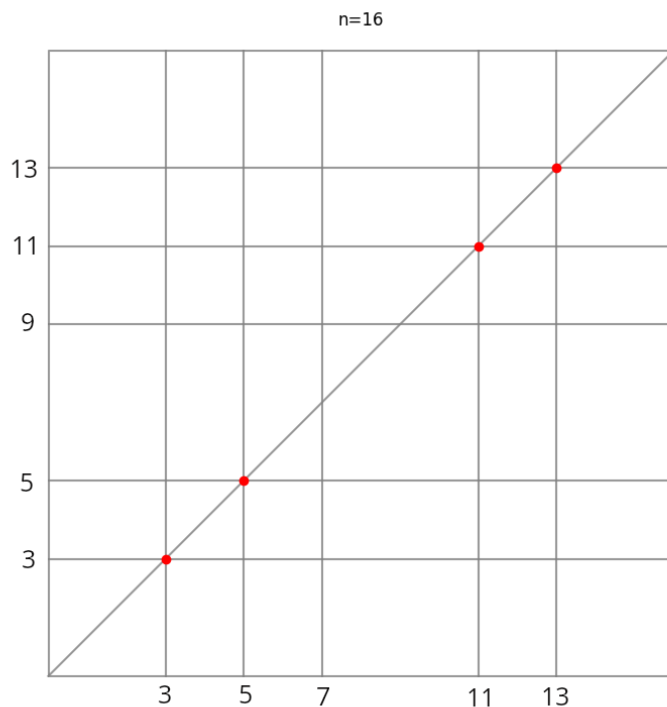


FIG. 1 : L'exemple du carré pour $n = 16$.

Pour $n = 16$, on a vu que $\#E_{16} = 5$ est impair. Le réseau U_n contient $\#E_{16} = 25$ points.

4. Projection des points de U_n sur la diagonale $y = x$

On projette les points de U_n sur la diagonale ascendante $D = ((0, 0), (n, n))$, d'équation $y = x$, en utilisant la projection P_{diag} définie par :

$$P_{\text{diag}} : U_n \longrightarrow D$$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right)$$

Les décomposants de Goldbach de n sont les points fixes de la projection P_{diag} .

Notons les images des points de U_n (les projetés) dans un tableau, pour mémoire (les images sont colorées en bleu). Les points fixes (qui correspondent aux décomposants de Goldbach de n sont marqués d'une étoile rouge.

(3, 13)	(8, 8)	(5, 13)	(9, 9)	(7, 13)	(10, 10)	(11, 13)	(12, 12)	(13, 13)	(13, 13) *
(3, 11)	(7, 7)	(5, 11)	(8, 8)	(7, 11)	(9, 9)	(11, 11)	(11, 11) *	(13, 11)	(12, 12)
(3, 9)	(6, 6)	(5, 9)	(7, 7)	(7, 9)	(8, 8)	(11, 9)	(10, 10)	(13, 9)	(11, 11)
(3, 5)	(4, 4)	(5, 5)	(5, 5) *	(7, 5)	(6, 6)	(11, 5)	(8, 8)	(13, 5)	(9, 9)
(3, 3)	(3, 3) *	(5, 3)	(4, 4)	(7, 3)	(5, 5)	(11, 3)	(7, 7)	(13, 3)	(8, 8)

Une projection⁴ est un idempotent d'un ensemble, i.e. une application $f : E \rightarrow E$ (appelée P_{diag} ici), telle que $f \circ f = f$.

Si E est non vide et si f est un idempotent de E , alors l'ensemble des points fixes de f coïncide avec l'image de f , $\text{Im}(f) = \{y \mid \exists x \text{ tel que } y = f(x)\}$.

En effet, si $y \in \text{Im}(f)$, alors il existe x avec $y = f(x)$. Alors $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$ puisque $f \circ f = f$. Inversement, si y est un point fixe de f , alors $y = f(y)$ et donc il existe un élément dont y est l'image (en l'occurrence lui-même, ce qui fait appartenir y à $\text{Im } f$, i.e. $y \in \text{Im}(f)$).

Dans le cas qui nous intéresse, U_n est non vide, et la projection P_{diag} telle qu'on l'a définie admet donc au moins un point fixe. **Non, là, il y a un problème : la projection en question n'est pas un idempotent de U_n parce que certains points de U_n ont leur image par la projection P_{diag} qui n'est pas dans U_n , ce qui empêche de la réappliquer (de faire la composée $f \circ f$ qui devrait être égale à f). Pour avoir un idempotent, il faut que l'image de f soit incluse dans le domaine de départ de f réappliquée, ce qui ne peut pas être le cas si certains points ont leur image qui "sort de U_n ". Conclusion : il faut trouver autre chose.**

6. Justification de la conjecture de Goldbach

C'est l'existence d'un point fixe au moins pour la projection ($f = P_{\text{diag}}$) choisie, qui projette les points de U_n (U_n étant non vide) sur la diagonale ascendante, qui a pour conséquence l'existence d'un décomposant de Goldbach au moins pour tout nombre pair $n > 4$.

4. appelée parfois un projecteur.

Références

- [1] Michèle Audin, *Géométrie*, 2006, éd. EDP Sciences.
- [2] C. Adam, P. Tannery, *Œuvres de Descartes - Physico-mathematica, Compendium Musicae, Regulae ad directionem ingenii - Recherche de la vérité, Supplément à la Correspondance*, chap. vol. X, Excerpta ex Mss. R. Des-Cartes. III : Numeri polygoni, édit. Amsterdam, 1701, p. 1-4. Copie MS. : Leyde, Bibliothèque de l'Université, Hug. 29 ex Hug. 27, 1908.
- [3] G. Belgioioso, *René Descartes : Opere Posthume 1650-2009*, Bompiani – il pensiero occidentale, 2009.
- [4] Georg Cantor, *Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach*, 1894, Assoc. franç. Caen, XXIII, 117-134.
- [5] Christian Goldbach, *Lettre de Christian Goldbach à Leonhard Euler (XLIII, OO765)*, Correspondances mathématiques et physiques de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle (lettre à Euler en allemand), Académie Impériale des Sciences, Saint-Petersbourg, 1988, P. H. Fuss éd., 125-129, <http://eulerarchive.MAA.org>.
- [6] Charles-Ange Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la Société Mathématique de France : Vie de la Société, n° 25, 1897, 208-211.
- [7] Robert-Charles Vaughan, *Goldbach's conjectures : a historical perspective*, Open problems in Mathematics, Springer International Publishing 2016, 479-520.