

Reprise-résumé¹ de la traduction de la section 6 de l'article "Positivité de Weil et formule de trace, la place archimédienne" d'Alain Connes et Caterina Consoni, juin 2020, cette section traitant du calcul du spectre

L'idéal serait de programmer en python les résultats de l'article en utilisant les dpss (pour discrete prolate spheroidal frequencies) du package scipy.

1 Calcul du spectre de l'opérateur compact \mathbf{K}_I

Alain Connes cherche à calculer un opérateur dont les valeurs propres seraient les zéros de la fonction zeta de Riemann, noté \mathbf{K}_I . Il avait introduit cet opérateur en 1998 dans un célèbre article.

$$\langle \eta | \mathbf{K}_I(\xi) \rangle = \frac{1}{2e'(1_+)} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) (Q\epsilon)(\exp(|v|)) dx dv, \quad (1)$$

avec $I = \left[-\frac{\log 2}{2}, \frac{\log 2}{2} \right]$.

$$Q\epsilon(\rho) = \sum \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} T_n(\rho), \quad (2)$$

Une première difficulté concerne le calcul d'une certaine fonction $T_n(\rho)$ nécessaire pour pouvoir calculer l'opérateur. Elle utilise des fonctions sphéroïdales prolates et leurs dérivées (qui interviennent dans le calcul de spectre d'ellipsoïdes allongées).

$$T_n(\rho) = \rho^{1/2} \int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x) (D_u \zeta_n)(\rho x) dx + \rho^{-1/2} (D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1) - \rho^{1/2} \xi_n(1) (D_u \zeta_n)(\rho) \quad (3)$$

C'est la décroissance rapide qui permet le calcul et on peut s'arrêter aux 11 premiers termes pour le calcul de $Q\epsilon(\rho)$ (démontré dans l'appendice qui traite des problèmes de convergence).

$$|\lambda(n)| \leq \frac{2^{2n} \pi^{2n + \frac{1}{2}} ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})} \sim (4n + 1)^{-2n - \frac{1}{2}} (e\pi)^{2n + \frac{1}{2}}. \quad (4)$$

La seconde difficulté est de gérer la dimension *infinie* de l'espace de Hilbert sur lequel l'opérateur \mathbf{K}_I agit. On remplace le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* par le sous-groupe discret $q^{\mathbb{Z}}$, et on approxime l'espace de dimension infinie par celui de dimension *finie* où l'intervalle I (en notation additive) est remplacé par l'ensemble fini I_q de taille $N \sim \log 2 / \log q$, des multiples entiers de $\omega = \log q$ qui appartiennent à I . La discrétisation \mathbf{N}_I de l'opérateur \mathbf{K}_I est une matrice de Toeplitz et on peut rechercher numériquement son spectre pour voir comment il varie, quand $q \rightarrow 1$. Ce qu'on découvre, c'est que l'écart à la plus grande valeur propre reste toujours plus petit que 1! (*note de la programmeuse* : et peut-être que c'est cela qui permet d'obtenir les entiers les uns après les autres, en prenant le floor des réels obtenus). On approxime le spectre en calculant les valeurs propres d'une matrice de Toeplitz remplie de racines n -ièmes de l'unité, et le fait d'étudier cette approximation par matrice de Toeplitz va permettre de "deviner" comment approximer $Q\epsilon(\rho)$.

La preuve du théorème principal (Théorème 10) peut être trouvée dans l'article original².

1.1 Approximation discrète des intervalles variables

L'espace est discrétisé en remplaçant \mathbb{R}_+^* par $q^{\mathbb{Z}}$, où $q > 1$ et en faisant tendre $q \rightarrow 1$. En posant $\omega = \log q$, on remplace l'intervalle $I = [0, a]$ par ses intersections finies avec le réseau $\omega\mathbb{Z}$, dont les éléments $j\omega$ sont

1. parfois dit "fascicule (de résultats)" par les Bourbakistes ou bien en français "cover version", pour la reprise d'une chanson.

trad. Denise Vella-Chemla, 12 novembre 2020.

L'article original en anglais est à lire ici : <https://arxiv.org/pdf/2006.13771.pdf>.

2. <https://arxiv.org/pdf/2006.13771.pdf>, section 6.7.

étiquetés par $j \in \{0, \dots, N\}$, où N est la partie entière de a/ω . On remplace les intégrales par des sommes et on considère dans $\ell^2(\{0, \dots, N\})$ ³, la forme quadratique suivante qui est la version discrétisée de (7)

$$\mathcal{Q}_q(\xi) := \omega \sum_{j=0}^N \sum_{k=-j}^{N-j} \overline{\xi(j)} \xi(j+k) (Q\epsilon)(q^{|k|}). \quad (5)$$

En suivant la proposition

Soit $I \subset [-\log 2, \log 2]$ un intervalle de longueur $\leq \log 2$.

(i) L'égalité suivante définit un opérateur borné \mathbf{N}_I dans l'espace de Hilbert $L^2(I, dx)$

$$\langle \eta | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle = E_+(Q_+ f), \quad f = \eta^* * \xi, \quad f(v) = \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) dx. \quad (6)$$

(ii) On a $\mathbf{N}_I = -2\epsilon'(1_+) (Id - \mathbf{K}_I)$, où \mathbf{K}_I est l'opérateur compact défini par

$$\langle \eta | \mathbf{K}_I(\xi) \rangle = \frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) (Q\epsilon)(\exp(|v|)) dx dv, \quad (7)$$

on doit comparer \mathcal{Q}_q avec le produit intérieur $2\epsilon'(1_+) \sum_{j=0}^N \overline{\xi(j)} \xi(j)$.

On remplace (5) par

$$\mathcal{Q}_q(\xi) = \omega \langle \xi | \mathcal{T}_q \xi \rangle, \quad (8)$$

où la matrice de Toeplitz \mathcal{T}_q est de la forme

$$\mathcal{T}_q = \begin{pmatrix} Q\epsilon(1) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(q^2) & Q\epsilon(q^3) & \dots & Q\epsilon(q^N) \\ Q\epsilon(q) & Q\epsilon(1) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(q^2) & \dots & Q\epsilon(q^{N-1}) \\ Q\epsilon(q^2) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(1) & Q\epsilon(q) & \dots & Q\epsilon(q^{N-2}) \\ Q\epsilon(q^3) & Q\epsilon(q^2) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(1) & \dots & Q\epsilon(q^{N-3}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q\epsilon(q^N) & Q\epsilon(q^{N-1}) & Q\epsilon(q^{N-2}) & Q\epsilon(q^{N-3}) & \dots & Q\epsilon(1) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Puis on compare la plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \omega \mathcal{T}_q$ avec 1 puisque cela teste la positivité de $Id - \mathbf{K}_I$.

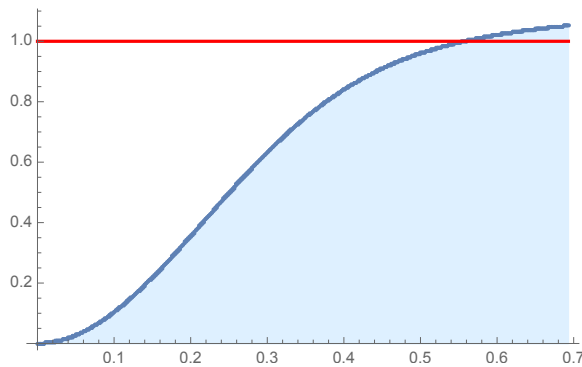


FIGURE 1 : Plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \omega \mathcal{T}_q$, pour $a \in [0, \log 2]$ et $q = \exp(10^{-3})$.

La figure 1 montre que, pour $\omega = 10^{-3}$ et $q = \exp(10^{-3})$, la plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \omega \mathcal{T}_q$, i.e. $\lambda \sim 1.05177$, excède légèrement 1 quand on considère l'intervalle complet $[0, \log 2]$.

3. espace de Hilbert de dimension finie.

1.2 Approximation discrète et matrices de Toeplitz

On fixe $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$. On constate un gros écart entre les deux premières valeurs propre \implies le manque de positivité de $\text{Id} - \mathbf{K}_I$ est dû à un seul vecteur propre ζ .

Il y a un résultat intéressant de la théorie matrices de Toeplitz qui est que le vecteur propre de valeur propre maximale d'une matrice auto-adjointe de Toeplitz est d'une forme très spéciale : l'équation polynomiale associée a ses racines de module 1. Notations :

$$z \in \mathbb{C} \ \& \ \tilde{\zeta}(z) = 0 \implies |z| = 1. \quad (10)$$

Avec le choix symétrique de $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$, le nombre fini N d'éléments dans $I \cap \omega\mathbb{Z}$ est impair $N = 2m + 1$ et le calcul montre que les N racines de $\tilde{\zeta}(z) = 0$ ressemblent aux racines $N + 1$ -ièmes non triviales de l'unité, *i.e.* toutes sauf $z = 1$. Puisqu'elles sont symétriques, ces racines peuvent être mieux écrites sous la forme

$$z_j^\pm = \exp\left(\pm \frac{2\pi i \alpha_j}{N+1}\right), \quad j = 1, \dots, m, \quad (11)$$

et il s'avère que $z = -1$ est aussi une racine et qu'ainsi, elle devrait être ajoutée à cette liste de $2m$ éléments.

Les valeurs α_j se stabilisent quand $q \rightarrow 1$ et sont de plus en plus proches des entiers correspondant. Premières valeurs rangées dans l'ordre croissant :

$$\begin{array}{lllll} \alpha_1 = 1.33371 & \alpha_2 = 2.10964 & \alpha_3 = 3.07018 & \alpha_4 = 4.0524 & \alpha_5 = 5.04184 \\ \alpha_6 = 6.03484 & \alpha_7 = 7.02984 & \alpha_8 = 8.0261 & \alpha_9 = 9.0232 & \alpha_{10} = 10.0209 \\ \alpha_{11} = 11.019 & \alpha_{12} = 12.0174 & \alpha_{13} = 13.016 & \alpha_{14} = 14.0149 & \alpha_{15} = 15.0139 \\ \alpha_{16} = 16.013 & \alpha_{17} = 17.0123 & \alpha_{18} = 18.0116 & \alpha_{19} = 19.011 & \alpha_{20} = 20.0104 \\ \alpha_{21} = 21.0099 & \alpha_{22} = 22.0095 & \alpha_{23} = 23.0091 & \alpha_{24} = 24.0087 & \alpha_{25} = 25.0083 \\ \alpha_{26} = 26.008 & \alpha_{27} = 27.0077 & \alpha_{28} = 28.0074 & \alpha_{29} = 29.0072 & \alpha_{30} = 30.007 \\ \alpha_{31} = 31.0067 & \alpha_{32} = 32.0065 & \alpha_{33} = 33.0063 & \alpha_{34} = 34.0061 & \alpha_{35} = 35.006 \\ \alpha_{36} = 36.0058 & \alpha_{37} = 37.0056 & \alpha_{38} = 38.0055 & \alpha_{39} = 39.0053 & \alpha_{40} = 40.0052 \\ \alpha_{41} = 41.0051 & \alpha_{42} = 42.005 & \alpha_{43} = 43.0048 & \alpha_{44} = 44.0047 & \alpha_{45} = 45.0046 \\ \alpha_{46} = 46.0045 & \alpha_{47} = 47.0044 & \alpha_{48} = 48.0043 & \alpha_{49} = 49.0043 & \alpha_{50} = 50.0042 \\ \alpha_{51} = 51.0041 & \alpha_{52} = 52.004 & \alpha_{53} = 53.0039 & \alpha_{54} = 54.0039 & \alpha_{55} = 55.0038 \\ \alpha_{56} = 56.0037 & \alpha_{57} = 57.0037 & \alpha_{58} = 58.0036 & \alpha_{59} = 59.0035 & \alpha_{60} = 60.0035 \end{array} \quad (12)$$

Le second résultat-clef classique : décomposition de la matrice : rappel : λ est la plus grande valeur propre, elle est simple⁴. $\omega = 1/5000$.

$$\begin{aligned} S &= \lambda \text{Id} - \frac{1}{2e^{I_+}} \omega \mathcal{T}_q \\ &= \lambda \sum d(j) e(z_j), \quad \{z_j\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \tilde{\zeta}(z) = 0\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Les $d(j)$ convergent vers une valeur fixe ? (0.999...?)

$$\begin{array}{lllll} d(1) = 1.17111 & d(2) = 1.12443 & d(3) = 1.05904 & d(4) = 1.03248 & d(5) = 1.02052 \\ d(6) = 1.01414 & d(7) = 1.01033 & d(8) = 1.00787 & d(9) = 1.00619 & d(10) = 1.005 \\ d(11) = 1.00411 & d(12) = 1.00344 & d(13) = 1.00292 & d(14) = 1.00251 & d(15) = 1.00217 \\ d(16) = 1.0019 & d(17) = 1.00167 & d(18) = 1.00148 & d(19) = 1.00132 & d(20) = 1.00119 \\ d(21) = 1.00107 & d(22) = 1.00097 & d(23) = 1.00088 & d(24) = 1.0008 & d(25) = 1.00073 \\ d(26) = 1.00067 & d(27) = 1.00062 & d(28) = 1.00057 & d(29) = 1.00052 & d(30) = 1.00048 \\ d(31) = 1.00045 & d(32) = 1.00042 & d(33) = 1.00039 & d(34) = 1.00036 & d(35) = 1.00034 \\ d(36) = 1.00031 & d(37) = 1.00029 & d(38) = 1.00027 & d(39) = 1.00026 & d(40) = 1.00024 \\ d(41) = 1.00022 & d(42) = 1.00021 & d(43) = 1.0002 & d(44) = 1.00018 & d(45) = 1.00017 \\ d(46) = 1.00016 & d(47) = 1.00015 & d(48) = 1.00014 & d(49) = 1.00013 & d(50) = 1.00013 \\ d(51) = 1.00012 & d(52) = 1.00011 & d(53) = 1.0001 & d(54) = 1.0001 & d(55) = 1.00009 \\ d(56) = 1.00008 & d(57) = 1.00008 & d(58) = 1.00007 & d(59) = 1.00007 & d(60) = 1.00006 \end{array} \quad (14)$$

4. Cela signifie que sa multiplicité est égale à 1, elle n'est racine qu'une fois.

Pour obtenir un bon contrôle de l'opérateur compact \mathbf{K}_I , on doit approximer la fonction $(Q\epsilon)(\exp(x))$ pour tout $x \in [0, \log 2]$, et non juste seulement pour un ensemble fini de multiples de ω .

Dans la prochaine section, on montre comment la décomposition de la matrice de Toeplitz permet de deviner une approximation efficace de la fonction $(Q\epsilon)(\exp(x))$ par une somme trigonométrique finie.

Cette approximation permet, par un calcul par ordinateur, d'obtenir le contrôle souhaité.

1.3 L'approximation de base de $(Q\epsilon)(\exp(x))$

La matrice de Toeplitz $T_q = \frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$ peut être réécrite ainsi

$$T_q = \lambda \left(\text{Id} - \sum d(j)e(z_j) \right) \quad (15)$$

où les $e(z_j)$ sont les matrices de projections sur une dimension obtenues en conjuguant la projection à une dimension sur la fonction constante par les opérateurs unitaires

$$(U(\alpha)\xi)(x) := \exp\left(\frac{i2\pi\alpha x}{\log 2}\right) \xi(x). \quad (16)$$

Cela suggère que l'on peut approximer la fonction $\chi(x) := (Q\epsilon)(\exp(x))/(2\epsilon'(1_+))$ dans $[0, \log 2]$ par une expression trigonométrique de la forme

$$\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x) := \frac{2\lambda}{\log 2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \left(\cos \frac{2\pi n x}{\log 2} - d(n) \cos \frac{2\pi \alpha_n x}{\log 2} \right) \right). \quad (17)$$

Le fait suivant est vérifié :

La distance dans $L^1([0, \log 2], dx)$ de la fonction $\chi(x) := (Q\epsilon)(\exp(|x|))/(2\epsilon'(1_+))$ à la fonction $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ de (17) (pour $m = 1732$, et avec les valeurs des angles α_j et des coefficients $d(j)$ fixés ci-dessus) vérifie

$$2 \int_0^{\log 2} |\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x) - \chi(x)| dx \sim 0.00122. \quad (18)$$

1.4 L'approximation de \mathbf{K}_I par un opérateur de rang fini T

A cause de la théorie des opérateurs de Toeplitz, on peut obtenir

$$\langle \eta | \mathbf{e}_\alpha(\xi) \rangle = \frac{1}{\log 2} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) \exp\left(\frac{-2\pi i \alpha v}{\log 2}\right) dx dv. \quad (19)$$

Considérons alors l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2\left[-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2\right], dx$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous appelons

$$\xi_\alpha(x) := (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i \alpha x}{\log 2}\right), \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2\right] \quad (20)$$

et $\mathbf{e}_\alpha = |\xi_\alpha\rangle\langle\xi_\alpha|$ la projection orthogonale associée,

$$\mathbf{e}_\alpha(\xi) = \xi_\alpha \langle \xi_\alpha | \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

On a alors pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, en utilisant la forme spéciale (34) du vecteur ξ_α

$$\langle \eta | \mathbf{e}_\alpha(\xi) \rangle = \langle \eta | \xi_\alpha \rangle \langle \xi_\alpha | \xi \rangle = \frac{1}{\log 2} \int_{I \times I} \overline{\eta(x)} \exp\left(\frac{2\pi i \alpha x}{\log 2}\right) \xi(y) \exp\left(\frac{-2\pi i \alpha y}{\log 2}\right) dx dy$$

de telle façon que l'on obtient

$$\langle \eta | \mathbf{e}_\alpha(\xi) \rangle = \frac{1}{\log 2} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) \exp\left(\frac{-2\pi i \alpha v}{\log 2}\right) dx dv. \quad (21)$$

Le lemme suivant joue un rôle crucial dans le processus d'approximation.

Lemme 1. *Appelons $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ une approximation de la fonction $\chi(x)$ de telle façon que la norme L^1 de la différence $\tau(\lambda, \alpha, d, m) - \chi$ soit $\leq \epsilon$. Alors l'opérateur compact \mathbf{K}_I de (7), pour $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$, est à une distance normée moindre que ϵ de l'opérateur de rang fini*

$$T = \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathbf{e}_n - d(|n|) \mathbf{e}_{\alpha_n}). \quad (22)$$

Ici, on définit $\alpha_{-n} = -\alpha_n \forall n$ et $d(0) = 0$; alors que pour $n > m$, on définit $\alpha_n = n$ et $d(n) = 1$ de telle façon que tous les termes dans la somme ci-dessus pour $|n| > m$ s'évanouissent.

1.5 Le vecteur propre de valeur propre maximale

Pour comprendre l'opérateur de rang fini T de (22), on considère d'abord le produit infini

$$h(z) := \prod_{n>0} \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_n^2}\right) \quad (23)$$

qui est convergent comme le produit définissant $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ et est, par construction, le produit de $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ par une fraction rationnelle dont le rôle est de remplacer les zéros $\pm n$ pour $n \in \{1, \dots, m\}$, par les $\pm \alpha_n$.

Lemme 2. *La transformée de Fourier $\psi(x) = \frac{1}{\log 2} \widehat{h}\left(\frac{x}{\log 2}\right)$ de $h(z \log 2)$ a son support dans l'intervalle $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$. On a $T\psi = \lambda\psi$ et (en utilisant les conventions du Lemme 1)*

$$\langle \xi_0 | \psi \rangle = (\log 2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \langle \xi_{\alpha_n} | \psi \rangle = 0, \quad \forall n \neq 0. \quad (24)$$

Notons que la fonction ψ n'est pas normalisée. Le calcul des normes L^2 donne

$$\|\psi\|_2 = (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \|h\|_2, \quad \|h\|_2 \sim 1.05143, \quad \text{pour } m = 1732 \quad (25)$$

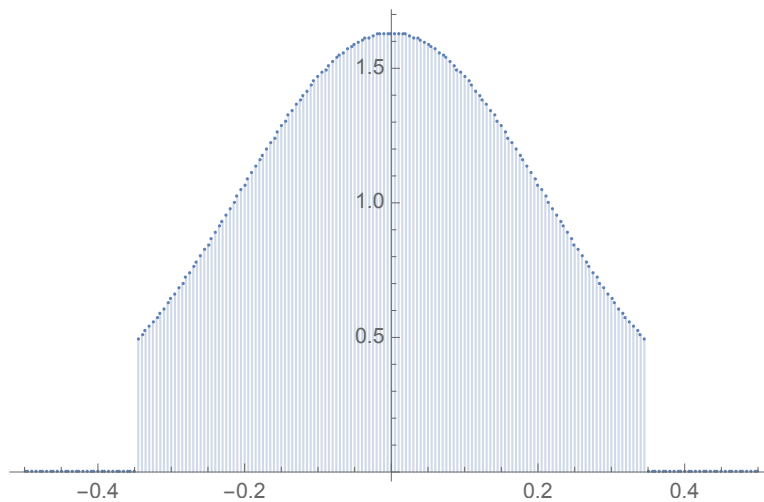


FIGURE 4 : Graphe de $\zeta(x) = \psi(x)/\|\psi\|_2$ dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

L'important fait numérique est que :

$$\text{Pour } m = 1732, \text{ on a } : \langle \xi_0 | \zeta \rangle \sim 0.94865, \text{ où } \zeta(x) = \psi(x)/\|\psi\|_2. \quad (26)$$

1.6 Calcul du spectre de T

a) **Méthode 1** : pour calculer le spectre de l'opérateur T de (22), on approxime cet opérateur de rang fini en utilisant la projection orthogonale $P(n)$ sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs ξ_j , pour $|j| < n$. Nous utilisons l'expression suivante du carré de la norme $\|\xi_\alpha - P(n)\xi_\alpha\|^2$.

Lemme 3. Soit $(\log \Gamma)^{(2)}$ la dérivée logarithmique de la fonction Γ , alors on a⁵

$$\|\xi_\alpha - P(n)\xi_\alpha\|^2 = \pi^{-2} \sin^2(\pi\alpha) \left((\log \Gamma)^{(2)}(n - \alpha) + (\log \Gamma)^{(2)}(\alpha + n) \right), \quad \forall \alpha \in [-n, n] \quad (27)$$

L'égalité

$$P(n)\mathbf{e}_\alpha(P(n)\xi) = \langle \xi_\alpha | P(n)\xi \rangle P(n)\xi_\alpha = \langle P(n)\xi_\alpha | \xi \rangle P(n)\xi_\alpha \quad (28)$$

donne l'estimation simple de la norme de l'opérateur

$$\|P(n)\mathbf{e}_\alpha P(n) - \mathbf{e}_\alpha\| \leq 2\|\xi_\alpha - P(n)\xi_\alpha\|. \quad (29)$$

Cela permet de contrôler la norme de la différence $T - P(m)TP(m)$ comme suit

$$\|T - P(m)TP(m)\| \leq 2\lambda \sum_{|n| < m} d(|n|) \|\xi_{\alpha_n} - P(m)\xi_{\alpha_n}\|. \quad (30)$$

En utilisant (27) et le comportement asymptotique

$$(\log \Gamma)^{(2)}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x}\right)^3, \quad (31)$$

on obtient un premier contrôle de $\|T - P(m)TP(m)\|$. Alors, on peut calculer les valeurs propres de la matrice de dimension finie $P(m)TP(m)$. Nous l'avons fait pour $m = 1733$ ⁶, après avoir divisé par λ , pour vérifier que la plus grande valeur propre était bien 1. On peut alors obtenir la liste de ses valeurs propres ; les premières d'entre elles, ordonnées selon un ordre décroissant sont les suivantes

$$\{1., \quad 0.652824, \quad 0.027475, \quad 0.000290146, \quad 0.0000877245, \quad 0.0000756436\}. \quad (32)$$

Seules les trois premières valeurs propres se démarquent comme valeurs propres positives stables pour T/λ . Après multiplication par λ , elles deviennent⁷

$$\lambda = 1.05158, \quad \lambda_2 = 0.686494, \quad \lambda_3 = 0.0288921. \quad (33)$$

5. *Note de la traductrice* : Appelée fonction digamma et souvent noté Ψ , si l'on considère la fonction gamma (Γ) comme une généralisation de la factorielle aux complexes, la fonction digamma (Ψ) serait une généralisation des nombres harmoniques aux complexes. Sur la toile, on trouve comme asymptote de digamma $\log z - 1/2 z - 1/12 z^2 \dots$

6. *Note de la traductrice* : différent du $m = 1732$ des autres cas. $1732 = 2^2 \times 433$ tandis que 1733 est un nombre premier.

7. *Note de la traductrice* : Pour λ_2 , $0.652824 \times 1.05158 = 0.686496662$.

On peut aussi obtenir les composantes c_n , sur la base des ξ_n , du vecteur propre associé à la valeur propre λ . Ces composantes sont plus petites que 10^{-4} pour $n > 30$ et leur graphe pour n proche de 0 (et pour n allant un peu plus loin) est reproduit ci-dessous.

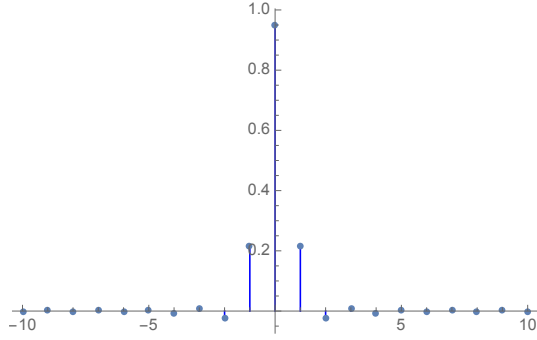


FIGURE 5 : Graphe des composantes c_n pour $|n| < 10$.

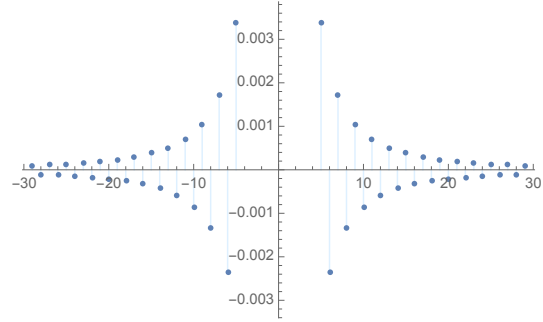


FIGURE 6 : Graphe des composantes c_n pour $7 < |n| < 30$.

On vérifie aussi que le graphe (Figure 7) de la fonction reconstruite $\sum c_n \xi_n$ coïncide avec le graphe (Figure 4) du vecteur propre théorique du §1.5.

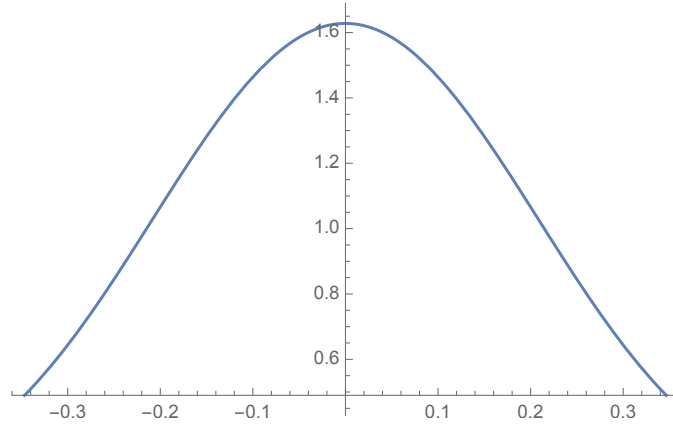


FIGURE 7 : Graphe de la fonction reconstruite $\sum c_n \xi_n$.

Le fait important est que la première composante $c_0 \sim 0.951067$ est très proche de 1.

Pour nos objectifs, l'estimation (30) ne garantit pas suffisamment de précision dans le calcul du spectre de T et de plus, le besoin d'entrer la somme (22) rend les calculs très lents.

b) **Méthode 2** : cette seconde méthode améliore la précision pour calculer le spectre de T ⁸.

On considère une nouvelle base (ζ_n) de $\mathcal{H} = L^2([-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2], dx)$ qui n'est plus orthonormée. Plus précisément, on pose⁹

$$\zeta_0 = \zeta, \quad \zeta_k = \begin{cases} \xi_k, & \text{pour } |k| > m, \\ \xi_{-\alpha|k|} & \text{pour } -m \leq k \leq -1, \\ \xi_{\alpha k} & \text{pour } 1 \leq k \leq m. \end{cases} \quad (35)$$

8. *Note de la rédactrice* : la fonction ci-dessous n'est pas définie sur $]-1, 1[$?

9. avec la notation de

$$\xi_\alpha(x) := (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i \alpha x}{\log 2}\right), \quad \forall x \in [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2] \quad (34)$$

Lemme 4. (i) Le spectre de l'opérateur T de (22) est $\{\lambda_{\max}(1 - \beta_j)\}$, où les variables β_j sont les valeurs propres de la matrice $A : A_{n,k} := d(|k|)\langle \zeta_n | \zeta_k \rangle$.

(ii) Prenons $N > m$. Les valeurs propres de la matrice A sont approximées par les valeurs propres de la matrice $A^{(N)}$ définie par : $A_{i,j}^{(N)} = A_{i,j}$ si $|i| \leq N$, $|j| \leq N$ et $A_{i,j}^{(N)} = \delta_{i,j}$ sinon, à une erreur près de $11 \epsilon(N)$ où

$$\epsilon(N) = \max(e(N), e'(N)), \quad e(N)^2 = \sum_{|j| \leq N} \epsilon(j, N), \quad e'(N)^2 = \sum_{|j| \leq N} d(|j|)^2 \epsilon(j, N) \quad (36)$$

avec

$$\epsilon(j, N) := \pi^{-2} \sin^2(\pi \alpha_j) \left((\log \Gamma)^{(2)}(N - \alpha_j) + (\log \Gamma)^{(2)}(\alpha_j + N) \right). \quad (37)$$

(iii) Le spectre de T est contenu dans $\{\lambda_{\max}\} \cup [-2, \lambda_2]$, où $\lambda_2 \leq 0.772216$.

1.7 Preuve du théorème 1 de l'article original

Voici comment on transfère les résultats obtenus pour T à \mathbf{K}_I :

$$\|\mathbf{K}_I - T\| \leq \epsilon_1, \quad |\lambda_n(\mathbf{K}_I) - \lambda_n(T)| \leq \epsilon_1. \quad (38)$$

Le prochain lemme montre comment restaurer la positivité d'une forme quadratique qui est positive sur un sous-espace de codimension 1, en lui ajoutant une forme quadratique de rang 1.

Lemme 5. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ les vecteurs unitaires et P_ϕ la projection orthogonale sur $\phi^\perp := \{\eta \in \mathcal{H} \mid \langle \phi | \eta \rangle = 0\}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Alors la forme quadratique suivante sur \mathcal{H}

$$B(\xi) := -b|\langle \phi | \xi \rangle|^2 + a|\langle \psi | \xi \rangle|^2 + c\|P_\phi(\xi)\|^2 \quad (39)$$

est positive si et seulement si

$$a + c \geq b, \quad b(a + c) \leq a(b + c)|\langle \phi | \psi \rangle|^2. \quad (40)$$

Quand (47) est vérifiée, on a : $B(\xi) \geq \epsilon \|\xi\|^2 \forall \xi \in \mathcal{H}$, où

$$2\epsilon = a - b + c - \left((a + b + c)^2 - 4a(b + c)|\langle \phi | \psi \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (41)$$

Lemme 6. Soit $\mathbf{N}_I = -2\epsilon'(1_+) (Id - \mathbf{K}_I)$ l'opérateur dans $\mathcal{H} = L^2(I)$, $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$ qui représente la forme quadratique associée à $E_+ \circ Q_+$ comme dans la Proposition 1.1. Alors, avec $\gamma \sim 2.94355$,

$$\langle \xi | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle \leq \gamma |\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}. \quad (42)$$

Nous pouvons finalement établir notre résultat principal :

Théorème 7. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ une fonction lisse à support dans l'intervalle $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$ et dont la transformée de Fourier s'évanouit en $-\frac{1}{2}$. Soit \mathbf{S} la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ sur le sous-espace des fonctions paires qui s'évanouissent ainsi que leur transformée de Fourier dans l'intervalle $[-1, 1]$. Alors

$$W_\infty(g * g^*) \geq \text{Tr}(\vartheta(g) \mathbf{S} \vartheta(g)^*) - c |\widehat{g}(0)|^2, \quad c = \frac{4\gamma}{\log 2}. \quad (43)$$

1) Les trois plus grandes valeurs propres de T sont fournies par (33) :

$$\lambda_{\max} = 1.05158, \quad \lambda_2 = 0.686494, \quad \lambda_3 = 0.0288921.$$

2) Le produit intérieur de ζ avec la fonction constante¹⁰ ξ_0 est ~ 0.94865 .

Appelons P_ζ la projection orthogonale sur $\zeta^\perp := \{\eta \in \mathcal{H} \mid \langle \zeta \mid \eta \rangle = 0\}$. La décomposition spectrale

$$T = \lambda_{\max} |\zeta\rangle\langle\zeta| + R, \quad R \leq \lambda_2 P_\zeta \quad (44)$$

montre que la forme quadratique associée à $\text{Id} - T$ est donnée, en utilisant $\text{Id} = |\zeta\rangle\langle\zeta| + P_\zeta$, par

$$\langle \xi \mid (\text{Id} - T)\xi \rangle = (1 - \lambda_{\max}) |\langle \zeta \mid \xi \rangle|^2 + \langle P_\zeta \xi \mid (P_\zeta - R)\xi \rangle \quad (45)$$

et puisque $R \leq \lambda_2 P_\zeta$, le dernier terme vérifie

$$\langle P_\zeta \xi \mid (P_\zeta - R)\xi \rangle \geq (1 - \lambda_2) \|P_\zeta \xi\|^2. \quad (46)$$

Le prochain lemme montre comment restaurer la positivité d'une forme quadratique qui est positive sur un sous-espace de codimension 1, en lui ajoutant une forme quadratique de rang 1.

Lemme 8. Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ les vecteurs unitaires et P_ϕ la projection orthogonale sur $\phi^\perp := \{\eta \in \mathcal{H} \mid \langle \phi \mid \eta \rangle = 0\}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Alors la forme quadratique suivante sur \mathcal{H}

$$B(\xi) := -b |\langle \phi \mid \xi \rangle|^2 + a |\langle \psi \mid \xi \rangle|^2 + c \|P_\phi(\xi)\|^2$$

est positive si et seulement si

$$a + c \geq b, \quad b(a + c) \leq a(b + c) |\langle \phi \mid \psi \rangle|^2. \quad (47)$$

Quand (47) est vérifiée, on a : $B(\xi) \geq \epsilon \|\xi\|^2 \forall \xi \in \mathcal{H}$, où

$$2\epsilon = a - b + c - ((a + b + c)^2 - 4a(b + c) |\langle \phi \mid \psi \rangle|^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (48)$$

Lemme 9. Soit $\mathbf{N}_I = -2\epsilon'(1_+) (\text{Id} - \mathbf{K}_I)$ l'opérateur dans $\mathcal{H} = L^2(I)$, $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$ qui représente la forme quadratique associée à $E_+ \circ Q_+$ comme dans la Proposition 1.1. Alors, avec $\gamma \sim 2.94355$,

$$\langle \xi \mid \mathbf{N}_I(\xi) \rangle \leq \gamma |\langle \xi_0 \mid \xi \rangle|^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}. \quad (49)$$

Résultat principal : le

Théorème 10. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ une fonction lisse à support dans l'intervalle $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$ et dont la transformée de Fourier s'évanouit en $-\frac{1}{2}$. Soit \mathbf{S} la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ sur le sous-espace des fonctions paires qui s'évanouissent ainsi que leur transformée de Fourier dans l'intervalle $[-1, 1]$. Alors

$$W_\infty(g * g^*) \geq \text{Tr}(\vartheta(g) \mathbf{S} \vartheta(g)^*) - c |\widehat{g}(0)|^2, \quad c = \frac{4\gamma}{\log 2}. \quad (50)$$

Remarque 8 :¹¹ La meilleure constante c vérifiant (50) est telle que $13 < c < 17$.

10. normalisée pour être de norme 1.

11. Note de la rédactrice : Peut-être à rapprocher de la constante κ_3 du théorème 3.3 égale à 14 de l'article de Aline Bonami et Abderrazed Karoui, *Bornes uniformes des fonctions d'ondes sphéroïdales et décroissance des valeurs propres*, C. R. A. S., Paris, Ser. 1, 352, 2014, p. 229-234

Sont rassemblées des inégalités qui assurent la convergence de $T_n(\rho)$.

Lemme 11. (i) La série (3) de la proposition P de l'appendice est convergente et le reste (après avoir remplacé la somme infinie par la somme des N premiers termes) est majoré comme suit

$$|Q\epsilon(\rho) - \sum_0^N \frac{\lambda(k)}{\sqrt{1-\lambda(k)^2}} T_k(\rho)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{2^{2n+2} \pi^{2n+\frac{3}{2}} p(n) ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})} \quad (51)$$

où $p(n) = 16n^2 + 8(1 + 3\pi)n + (4 + \sqrt{2})\sqrt{4n+1} + 32\pi^2 + 24\pi + 2$.

(ii) Pour $N = 10$, le reste est inférieur à 2.366×10^{-12} pour tout $\rho \in [1, 2]$:

$$|Q\epsilon(\rho) - \sum_0^{10} \frac{\lambda(k)}{\sqrt{1-\lambda(k)^2}} T_k(\rho)| \leq 2.366 \times 10^{-12}, \quad \forall \rho \in [1, 2]. \quad (52)$$

Annexe : Rappels

Rappel du Théorème 1 de l'article initial d'Alain Connes ([1]) fournissant la formule de trace pour les zéros de la fonction zeta de Riemann de 1998.

Soient :

$$K = \{g \in C_k ; |g| = 1\},$$

N , le domaine de la mesure $|| \subset \mathbb{R}_+^*$

($N = \mathbb{R}_+^*$ pour des corps de nombres,

$N \simeq \mathbb{Z}$ est le sous-groupe $q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*$ pour des corps de caractéristique nulle.)

$$C_k \simeq K \times N.$$

L'espace de Hilbert \mathcal{H} se scinde en une somme directe canonique de sous-espaces orthogonaux 2 à 2,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{K}} \mathcal{H}_\chi, \quad \mathcal{H}_\chi = \{\xi ; W(g)\xi = \chi(g)\xi, \forall g \in K\}$$

où χ parcourt le groupe dual de Pontrjagin K , qui est le groupe abélien discret \widehat{K} des caractères de K .

Quand la caractéristique de k est nulle, on travaille avec une action de $\mathbb{R}_+^* \sim \mathbb{R}$ sur \mathcal{H}_χ et cette représentation est engendrée par un opérateur clos non-borné D_χ à spectre purement imaginaire.

Théorème 1. Soient $\chi \in \widehat{K}$, $\delta > 1$, \mathcal{H}_χ et D_χ comme ci-dessus. Alors D_χ a un spectre discret, $\text{Sp } D_\chi \subset i\mathbb{R}$ est l'ensemble des parties imaginaires des zéros de la fonction L à Grössencharakter $\tilde{\chi}$ de partie réelle $\frac{1}{2}$; $\rho \in \text{Sp } D \Leftrightarrow L(\tilde{\chi}, \frac{1}{2} + \rho) = 0$ et $\rho \in i\mathbb{R}$, où $\tilde{\chi}$ est l'unique extension de χ à C_k qui est égale à 1 sur \tilde{N} . De plus, la multiplicité des ρ dans $\text{Sp } D$ est égale au plus grand entier $n < \frac{1+\delta}{2}$, n étant inférieur à la multiplicité de $n \leq \frac{1}{2} + \rho$ comme zéro de L .

Explicitation du **triplet spectral** et de son alternative dans le présent article :

<p><i>l'algèbre :</i></p> <p>\mathcal{A} : algèbre des fonctions paires sur $I = [-L/2, L/2]$ <i>exemple</i> : $I = [-\frac{\log 2}{2}, \frac{\log 2}{2}]$</p>	<p>\mathcal{A}' : algèbre des fonctions paires sur $I' = [\exp(L)^{-1/2}, \exp(L)^{1/2}]$ <i>exemple</i> : $I' = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$</p>
<p><i>l'espace de Hilbert :</i></p> <p>$\mathcal{H} = L^2(I, dx)$</p>	<p>$\mathcal{H}' = L^2(I', d^*\lambda)$</p>
<p><i>l'opérateur :</i></p> <p>$D = \partial_r + P'$</p>	<p>$D' = \lambda \partial_\lambda + P$</p>

Référence

- [1] A. Connes, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function. *Selecta Math.* (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.