

Une question à l'ia mistral : symétrie de la matrice de Weil et hypothèse de Riemann : pourrait-on se passer du plan complexe pour calculer les zéros de la fonction ζ de Riemann ?

Denise Vella-Chemla, 7 octobre 2026.

Du fait d'une erreur de programmation en testant à nouveau ces formules pour le calcul simplifié de la formule explicite de Connes et al., j'obtiens une contribution réelle toujours nulle, je me suis trompée dans mon programme ; une fois celui-ci corrigé, je remarque la symétrie systématique et j'interroge l'ia mistral à ce propos, puis en dernier lieu, je l'interroge sur le fait que si l'on n'a plus que des réels, on pourrait peut-être se passer du plan complexe pour calculer les zéros de la fonction ζ de Riemann (si ce n'est que c'est le passage au plan complexe qui a permis toutes ces réflexions, avancées et inventions de concepts).

L'intégralité de la suite de cette note a été écrite par l'ia mistral.

Résumé

On étudie la matrice de Weil τ intervenant dans la construction spectrale de Connes et al. (<https://arXiv.org/pdf/2511.22755>). Après avoir vérifié numériquement sa symétrie sur chaque contribution (pôle, place archimédienne, places p -adiques), on discute de la portée épistémologique de cette symétrie : en quel sens la reformulation spectrale permet-elle de “linéariser” l'hypothèse de Riemann, et pourquoi le plan complexe reste néanmoins indispensable à plusieurs étages.

1. La matrice de Weil et ses trois contributions

Dans la construction de Connes et al., la matrice de Weil τ (pour une fenêtre archimédienne λ^2 , avec $L = \log \lambda^2$) s'écrit comme la somme de trois contributions correspondant aux trois familles de places de $\mathbb{Q}$:

$$\tau = \tau_{\text{pôle}} - \tau_{\mathbb{R}} - \tau_{p\text{-adique}}. \quad (1)$$

1.1. Le terme de pôle

Le pôle double de ζ en $s = 1$ (une *place* manquante dans le formalisme adélique) fournit, pour $n \neq m$:

$$\tau_{\text{pôle}}(n, m) = \frac{32 L \sinh^2(L/4) (L^2 - 16\pi^2 mn)}{(16\pi^2 n^2 + L^2)(16\pi^2 m^2 + L^2)}. \quad (2)$$

On prendra garde que le dénominateur est le *produit* de deux facteurs distincts, l'un en n , l'autre en m .

1.2. La place archimédienne

Avec les notations de l'article (éq. (4.12)-(4.14)) :

$$\alpha_L(n) := \frac{1}{\pi} \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \rho(x) dx, \quad \rho(x) = \frac{e^{x/2}}{2 \sinh x}, \quad (3)$$

$$\beta_L(n) := \frac{1}{L} \int_0^L x \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \rho(x) dx, \quad (4)$$

$$\gamma_L(n) := \int_0^L \left[\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) - e^{-x/2} \right] \rho(x) dx + c(L) + w(L), \quad (5)$$

la Proposition 4.3 de l'article donne la place réelle :

$$\tau_{\mathbb{R}}(n, m) = \begin{cases} \frac{\alpha_L(m) - \alpha_L(n)}{n - m}, & m \neq n, \\ 2\gamma_L(n) - 2\beta_L(n), & m = n. \end{cases} \quad (6)$$

1.3. Les places p -adiques

Les puissances de nombres premiers $k = p^j \leq \lambda^2$ contribuent avec le poids de von Mangoldt $\Lambda(k)/\sqrt{k} = \log p/\sqrt{k}$; en posant $w_n = 2\pi n/L$ et $\ell_k = \log k$:

$$\tau_p(n, m) = \sum_{k \leq \lambda^2} \frac{\Lambda(k)}{\sqrt{k}} \times \begin{cases} \frac{\sin(w_m \ell_k) - \sin(w_n \ell_k)}{\pi(n - m)}, & m \neq n, \\ 2 \left(1 - \frac{\ell_k}{L}\right) \cos(w_n \ell_k), & m = n. \end{cases} \quad (7)$$

2. Symétrie : vérification numérique

2.1. Symétrie exacte de chaque contribution

Chaque terme est invariant sous l'échange $n \longleftrightarrow m$:

Proposition 1 : Pour les trois contributions ci-dessus,

$$\tau(n, m) = \tau(m, n) \quad \text{pour tous } m, n. \quad (8)$$

Démonstration. (i) Pour le pôle, le numérateur $L^2 - 16\pi^2 mn$ de (2) est symétrique en (n, m) , et le dénominateur est un produit commutatif : l'expression est invariante par $n \longleftrightarrow m$.

(ii) Pour la place réelle, hors diagonale :

$$\frac{\alpha_L(m) - \alpha_L(n)}{n - m} = \frac{\alpha_L(n) - \alpha_L(m)}{m - n},$$

égalité purement algébrique (numérateur et dénominateur changent tous deux de signe). Le cas diagonal est trivial.

(iii) Pour les places p -adiques, hors diagonale : numérateur et dénominateur changent de signe sous l'échange, comme en (ii) ; le cas diagonal ne dépend que de n . $\square$

2.2. Témoignage numérique

Pour $L = 1$, le calcul (après correction d'un bug de fermeture : les intégrandes doivent être paramétrées par leur mode k , faute de quoi $\alpha(m)$ et $\alpha(n)$ évaluent la même intégrale et la différence est identiquement nulle) donne :

$$\text{pôle} : \tau_{\text{pôle}}(2, 3) = \tau_{\text{pôle}}(3, 2) \approx -2,1480 \times 10^{-3}, \quad (9)$$

$$\text{archimédien} : \frac{\alpha(3) - \alpha(2)}{2 - 3} = \frac{\alpha(2) - \alpha(3)}{3 - 2} \approx -3,7040 \times 10^{-3}, \quad (10)$$

$$\text{diagonales} : 2(\gamma(2) - \beta(2)) \approx -0,698376, \quad 2(\gamma(3) - \beta(3)) \approx -1,100989. \quad (11)$$

La symétrisation explicite dans le code (moyenner $\tau[i][j]$ et $\tau[j][i]$) ne fait que nettoyer des erreurs d'arrondi de la quadrature ; la symétrie exacte est une propriété *des formules*, ce que l'expérience confirme.

2.3. Conséquences linéaires de la symétrie

La matrice τ est réelle symétrique, donc :

1. son spectre est réel ;
2. elle est diagonalisable dans une base orthonormée (algorithme de Jacobi) ;
3. l'opérateur associé est auto-adjoint : c'est la structure requise pour que les zéros de la fraction rationnelle

$$R(z) = \sum_{n=-N}^N \frac{\xi_n}{z - 2\pi n/L}, \quad (12)$$

construite sur le plus petit vecteur propre ξ , soient *réels*. Si la symétrie était brisée, ces zéros dériveraient dans le plan complexe.

3. Portée : peut-on se passer du plan complexe ?

3.1. Ce que la construction réussit : linéariser

Le succès du formalisme est de remplacer la recherche des zéros d'une fonction méromorphe par un problème *spectral réel* : les ordonnées t des zéros non triviaux apparaissent comme zéros réels de $R(z)$, grâce à l'auto-adjonction.

C'est l'esprit des formules explicites de Weil et de l'identité de Guinand-Weil : la dualité de Fourier entre $\log|\zeta|$ et les zéros devient une dualité opératorielle entre places (pôle, archimédienne, p -adiques) et modes de Fourier. C'est le rêve Hilbert-Selberg : ramener une question d'analyse complexe à du spectral réel, auto-adjoint.

Mais attention à ce que cela signifie : le plan complexe n'est pas éliminé, il est *condensé* dans la structure.

3.2. Où le plan complexe revient nécessairement

1. **l'énoncé de l'hypothèse de Riemann est complexe.** Même reformulée, la conjecture parle de la droite critique $\text{Re}(s) = 1/2$ et de la symétrie $s \longleftrightarrow 1 - s$: deux objets de $\mathbb{C}$. La version spectrale dit en réalité : *le spectre réel capture tous les zéros, sans en oublier ni en inventer* (complétude et non-redondance). C'est un énoncé de tracé spectral, pas une élimination du plan complexe.
2. **l'équation fonctionnelle est la source de tout.** Le terme archimédien (facteur Gamma, fonction ρ , constantes $c(L) + w(L)$ avec la constante d'Euler $\gamma/2$ et $\log 8\pi$) et le terme de pôle proviennent de l'équation fonctionnelle de ζ - un théorème d'analyse complexe (prolongement méromorphe, produit de Hankel pour Γ). La symétrie de τ observée expérimentalement est la trace matricielle de l'équation fonctionnelle.
3. **les places p -adiques encodent la transformée de Fourier de $\log |\zeta|$,** via les formules explicites de Riemann-von Mangoldt, encore de l'analyse complexe.
4. **numériquement aussi :** le programme compare à une liste de “vrais zéros” calculée par méthodes complexes (Odlyzko-Schönhage, Brent-te Riele...).

Remarque [honnêteté scientifique] : la symétrie de τ est démontrée (ci-dessus, et dans l'article via le Lemme 2.3). En revanche, l'étape qui *ferait* de cette construction une preuve de l'hypothèse de Riemann - montrer que l'opérateur a *assez* de valeurs propres dans la fenêtre, autrement dit une minoration spectrale du type positivité de Weil : l'hypothèse de Riemann équivaut à la positivité de la forme hermitienne apparaissant dans la formule explicite (Weil 1952 [1]; Connes 2006) [2], et l'étape manquante est de démontrer que l'opérateur de Weil, dans la limite $N \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$, possède bien toutes les valeurs propres requises dans la fenêtre archimédienne - ni plus, ni moins. C'est un programme ouvert.

3.3. Conclusion

Le plan complexe n'est pas supprimé par le formalisme spectral : il est placé *ailleurs* - dans l'équation fonctionnelle qui fabrique la place archimédienne, dans l'énoncé même de la conjecture, et dans les outils numériques de calibration. La symétrie $s \longleftrightarrow 1 - s$ de ζ devient la symétrie de la matrice de Weil ; l'analyse complexe a construit l'objet, le spectral doit prouver son adéquation. On peut donc se passer du plan complexe *pour chercher*, pas pour *savoir ce que l'on cherche*.

Références

- [1] A. Weil, *Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres premiers*, Meddelanden Från Lunds Universitets Matematiska Seminarium (Communication du Séminaire mathématique de l'Université de Lund), tome supplémentaire dédié à Marcel Riesz, 1952, p. 252–265. Repris dans André Weil, *Œuvres Scientifiques / Collected Papers*, vol. II, Springer-Verlag, 1980.
- [2] A. Connes, Trace formula on the adèle class space and Weil positivity, dans *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry I* (éd. P. Cartier, B. Julia, P. Moussa, P. Vanhove), Springer-Verlag, Berlin, 2006, p. 49–82. Actes de la conférence de Les Houches (mars 2003).
- [3] A. Connes, C. Consani, H. Moscovici, *Zeta Spectral Triples*, arXiv :2511.22755.
- [4] A. Connes, *Trace formula on the adelic class space and Weil positivity*, dans *Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry I*, Springer (2006).