

1. Cadre et objectif

On considère le triangle entier

$$T_n = \{(i, j) : 0 \leq j \leq i \leq n\},$$

muni de la métrique unité (toutes les arêtes ont un poids 1).

L'excentricité d'un sommet se calcule en forme close :

$$e(i, j) = \max(i + j, 2n - i - j), \quad (1)$$

de sorte que les centres géométriques du graphe sont *exactement* les sommets de la diagonale

$$\Delta_n = \{(i, j) \in T_n : i + j = n\}.$$

Le problème de Goldbach se reformule alors : *existe-t-il un centre $(p, n - p)$ dont les deux coordonnées sont premières ?*

J'ai demandé à mistral de tester l'idée consistant à ne *pas* faire entrer l'information multiplicative dans la métrique (ce qui déformerait les centres), mais à la poser *au-dessus* du graphe comme une *fibre*.

À chaque centre (i, j) on associe

$$(i, j) \longmapsto \left((i \bmod q, j \bmod q) \right)_{q \leq \sqrt{n}}.$$

La question est de savoir si la structure de cette fibre peut *contraindre* l'existence d'un centre qui fournisse une décomposition de Goldbach de n .

2. Premier constat : le crible complet est une tautologie

Si l'on crible avec *tous* les modules $2 \leq q \leq \sqrt{n}$, dire qu'un nombre $k \leq n$ passe à travers le crible (aucun q ne le divise, à l'exception triviale $k = q$) est *exactement* la définition classique de la primalité par division d'essai : un nombre est premier si et seulement si aucun diviseur $\leq \sqrt{k}$ ne le divise, et $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$.

Observation 1 : [tautologie] Le critère “fibre sans collision sur $\{2, \dots, \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}$ ” coïncide par construction avec le test de primalité. Un programme qui compare les deux verdicts obtient une concordance de 100%, sans information nouvelle : il vérifie que le test de primalité est d'accord avec lui-même.

C'est ce qu'a montré la première version du programme : sur toute la plage $6 \leq n \leq 60$ (et cela vaut jusqu'à l'infini), les centres “admissibles par fibre” sont exactement les vraies partitions de Goldbach.

3. Deuxième constat : le crible incomplet et l'ombre des semipremiers

Pour que l'expérience soit instructive, il faut un test qui *peut se tromper*. On fixe donc une borne B (la profondeur du crible) et l'on dit qu'un nombre *passse à travers le crible* si aucun nombre premier $q \leq B$ ne le divise (hors cas trivial $k = q$). Un nombre qui passe à travers le crible peut être : un vrai premier, ou un *semipremier à grands facteurs*, produit de deux facteurs tous deux $> B$.

On compte alors, pour chaque n pair, les paires $(i, n - i)$ de nombres qui sont passés à travers le crible de profondeur B , et on les compare aux vraies partitions de Goldbach (tableau 3.).

n	vraies partitions	nombres tamisés ($B = 20$)	excès
500	13	13	0
1000	28	31	3
2000	37	51	14
4000	65	104	39
8000	106	211	105

L'excès de nombres qui passent à travers le crible croît sans ralentir :
le crible seul ne converge jamais vers Goldbach.

Le seuil d'apparition de l'excès est net : pour $n \lesssim 2B^2$, le crible de profondeur B est *exact* (tout composé $\leq n$ a un facteur $\leq \sqrt{n} \leq \sqrt{2}B$) ; au-delà, apparaissent les paires de semipremiers, invisibles au crible. Avec $B = 3$, on compte environ *deux fois trop* de paires ; avec $B = 7$, environ 15% de trop ; avec $B = 20$, l'excès est nul jusqu'à $n \approx 800$ puis explose.

4. Troisième constat : le plafond prouvable de la fibre

Le résultat le plus important de l'expérience est un résultat *négatif* précis. On cherche des couples (premier, composé) à fibre *strictement identique* modulo un ensemble fixé de modules. Ils existent en masse dès que le produit des modules est dépassé. Par exemple, modulo $\{2, 3, 5, 7\}$:

11 (premier)	$\sim$	221 = 13×17 ,
17 (premier)	$\sim$	437 = 19×23 ,
29 (premier)	$\sim$	869 = 11×79 ,
37 (premier)	$\sim$	247 = 13×19 .

Chaque ligne : les deux nombres ont les *mêmes restes* modulo 2, 3, 5 et 7. (L'apparition systématique d'un écart multiple de $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ est une conséquence directe du théorème chinois.)

Observation 2 : [point aveugle] Toute règle d'admissibilité qui ne lit que les résidus modulo un ensemble fixe de modules donne obligatoirement le même verdict à 37 et à 247. La fibre ne contient exactement que l'information "pas de petit facteur", et rien de plus.

Ce plafond ne dépend pas de la manière d'exploiter la fibre (poids λ , comptage de collisions, conditions de symétrie, etc.) : il tient au fait que le premier composé invisible est toujours petit (ici 221).

C'est précisément pour cette raison que les méthodes de crible démontrent le théorème de Chen (1973) - tout nombre pair assez grand est somme d'un premier et d'un nombre ayant au plus deux facteurs premiers - mais butent sur Goldbach :

franchir le dernier pas "semipremier $\rightarrow$ premier" est hors de portée de toute information purement modulaire.

5. Confirmation du côté "Chen"

L'expérience du type Chen

existe-t-il toujours un premier p tel que $n - p$ passe à travers le crible de profondeur B ?

a réussi pour la totalité des 498 nombres pairs $n \leq 1000$ testés, sans exception. C'est cohérent : la structure faible (celle que Chen a prouvée) est capturée gratuitement par le crible, et c'est tout.

6. Verdict

Cette piste a apporté quelque chose de réel, mais de signe négatif : elle localise le mur.

1. La partie géométrique est saine : les centres sont exactement la diagonale $i + j = n$, et Goldbach est bien l'existence d'un centre admissible.
2. Le crible complet est une tautologie (observations 1) ; le crible incomplet surestime toujours, et son erreur croît avec n : voir le tableau 3.
3. Toute information modulaire souffre de l'angle mort $37 \sim 247$ (observation 2) : le problème de Goldbach, dans ce langage, est exactement de distinguer un premier d'un semipremier à fibre identique - et aucune donnée résiduelle ne le permet.

Le problème n'est donc pas dans le réglage de la fibre, mais dans sa nature même : *une fibre ne peut pas voir ce qui, par construction, ne laisse aucune trace modulaire.*