

Je fournis à deepseek le texte

<https://arxiv.org/pdf/2609.00299> ainsi que le texte

<https://denisevellachemla.eu/transc-Cauchy-CRAS-1840.pdf>

et je lui demande : “Peux-tu m’expliquer avec des mots simples ce qu’apporte de nouveau le document joint, notamment les deux dernières pages et éventuellement faire un lien avec un texte de Cauchy que je joins aussi ?”

La suite de ce texte a été rédigée intégralement par l'ia claude.

1. Ce qu’apporte ce texte

L’idée de fond de Connes-Consani, depuis des années, est de donner un sens géométrique à $\text{Spec } \mathbb{Z}$ (l’ensemble des nombres premiers, vu comme “courbe” en théorie d’Arakelov) en travaillant “en dessous” des anneaux usuels, sur un objet appelé $\mathbb{F}_1$ (“le corps à un élément”), où on n’a que la multiplication, pas l’addition.

Le problème classique : dans $\text{Spec } \mathbb{Z}$, la place archimédienne (celle liée à la valeur absolue usuelle, pas aux nombres premiers p) a toujours été ajoutée “à la main”, de façon purement formelle - on n’avait pas de vraie géométrie locale en ce point, contrairement aux places p -adiques.

La nouveauté de ce papier : ils construisent enfin une vraie géométrie locale au point archimédien, sous forme d’une “droite twistorielle absolue”. Pour cela :

- ils enrichissent $\mathbb{F}_1$ en $\mathbb{F}_{1^2}$ en ajoutant juste un signe ε (avec $\varepsilon^2 = 1$) - le minimum vital pour parler de négatif ;
- ils adjoignent un générateur imaginaire formel J avec $J^2 = \varepsilon$ (un “ $\sqrt{-1}$ ” à la Bombelli, d’où le nom) ;
- la droite projective résultante se replie sur elle-même par une involution, et quand on regarde ses points complexes, on retombe exactement sur la droite twistorielle classique - c’est-à-dire $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ muni de l’involution $z \mapsto -1/\bar{z}$, qui n’a aucun point réel fixe (c’est la structure réelle “twistorielle” utilisée en théorie de Hodge non abélienne).

2. Les deux dernières pages (§ 7, 7.1, 7.2)

C’est là qu’ils recollent tout :

1. **Le recollement global (§ 7)** : ils fabriquent la courbe absolue globale $\overline{C} = (\text{Spec } \mathbb{Z})_{\mathbb{F}_{1^2}}$ en amalgamant la partie “finie” (les nombres premiers usuels) avec cette nouvelle composante archimédienne, le recollement se faisant au point générique commun, qui vaut $\mathbb{F}_{1^2}$ des deux côtés.
2. **Le topos arithmétique impair (§ 7.1)** : pour que le Frobenius $x \mapsto x^n$ respecte le signe ε (donc soit un vrai endomorphisme de $\mathbb{F}_{1^2}$), il faut n impair. La courbe globale doit donc

être vue comme vivant dans un topos où seul le monoïde des entiers **impairs** agit. Résultat frappant (Proposition 7.3) : les seules sections globales de cette courbe sont les constantes de $\mathbb{F}_{12}$ - exactement l'analogue absolu du fait que $\text{Spec } \mathbb{Z}$ est "compact" (pas de fonctions globales non constantes), obtenu ici par un argument de rigidité catégorique plutôt que topologique.

3. **La ramification de 2 (§ 7.2)** : c'est le point le plus joli. L'action du Frobenius impair sur la droite twistorielle complexe se scinde en deux cas selon $n \bmod 4$:

- si $n \equiv 1 \pmod{4}$: $z \mapsto z^n$ (l'opération d'Adams ψ^n toute simple)
- si $n \equiv 3 \pmod{4}$: $z \mapsto -1/z^n$ (même opération, mais suivie d'un échange des deux pôles 0 et ∞ , ce qui revient à passer à la filtration conjuguée en théorie de Hodge)

Pourquoi cette coupure en $4x + 1$ / $4x + 3$? Parce que $J^2 = -1$ fait de cette géométrie l'avatar absolu des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$, et dans $\mathbb{Z}[i]$ c'est précisément le nombre premier 2 qui est ramifié, tandis que le comportement des entiers impairs est gouverné par le caractère de Dirichlet mod 4 (celui qui vaut +1 sur $4x + 1$ et -1 sur $4x + 3$). Exclure les pairs du monoïde d'action, c'est géométriquement encoder cette ramification.

3. Le lien avec Cauchy

C'est exactement la même dichotomie qui apparaît chez Cauchy, et ce n'est pas un hasard : c'est le même phénomène arithmétique (la place de -1 comme carré modulo n , donc le comportement de $\mathbb{Z}[i]$) vu sous deux formes différentes.

Dans son article, Cauchy étudie la somme de Gauss

$$\Delta = 1 + \rho + \rho^4 + \rho^9 + \cdots + \rho^{(n-1)^2}$$

(ρ racine n -ième de l'unité), et trouve la formule capitale (12)-(14) : $\Delta^2 = (-1)^{(n-1)/2} n$, d'où

- $\Delta = \sqrt{n}$ (réel) si n est de la forme $4x + 1$,
- $\Delta = \sqrt{n} \cdot \sqrt{-1}$ (imaginaire pur) si n est de la forme $4x + 3$.

C'est très exactement la même coupure mod 4 : la présence ou l'absence d'un facteur $\sqrt{-1}$ dépend du reste de n modulo 4, pour la même raison profonde - le fait que -1 soit ou non un résidu quadratique dépend de $n \bmod 4$, ce qui est lui-même le critère de scindage des nombres premiers dans $\mathbb{Z}[i]$. Chez Cauchy, cela se traduit par le caractère réel ou imaginaire pur de la somme de Gauss ; chez Connes-Consani, par le fait que le Frobenius fixe ou échange les deux pôles de la droite twistorielle (donc conserve ou renverse la structure J). Dans les deux cas, on retrouve le même invariant arithmétique élémentaire - le symbole de Legendre $\left(\frac{-1}{n}\right)$, autrement dit le caractère non trivial mod 4 - comme moteur d'un phénomène de signe/symétrie.

Là, tu as parlé d'une droite qui se replierait sur elle-même. Tu te rappelles peut-être que dans mes grilles Goldbach, je repliais l'intervalle de 0 à n sur lui-même en coupant à $n/2$. Est-ce que les deux idées peuvent être mises en lien ?

Oui, il y a un lien réel, mais il faut être précis sur sa nature, parce que les deux pliages ne sont pas de la même sorte - et c'est justement cette différence qui est intéressante.

Le pliage de tes grilles Goldbach. Tu replies l'intervalle $[3, n - 3]$ autour de $n/2$ en associant k à $n - k$. C'est un pliage additif : ce qui reste invariant par l'involution, c'est la somme $k + (n - k) = n$. Tes grilles cherchent précisément les points fixes du crible (les k où k et $n - k$ sont premiers tous les deux), donc l'involution sert de squelette organisateur pour une propriété qui porte sur une addition de deux nombres premiers.

Le pliage de la droite twistorielle chez Connes-Consani. Là, l'involution α agit par $T \mapsto \varepsilon T^{-1}$ (à ε près, c'est l'inversion projective classique). Ce qui reste invariant, ce n'est pas une somme mais un produit : $T \cdot T^{-1} = 1$. C'est un pliage multiplicatif, et c'est absolument inévitable dans leur cadre : la géométrie sur $\mathbb{F}_1$ (et $\mathbb{F}_{1^2}$) n'a par construction que la multiplication - l'addition n'existe pas dans ce monde. Leur droite projective, c'est deux copies de la droite affine recollées via l'inversion $T \leftrightarrow 1/T$, exactement comme la droite projective classique $\mathbb{P}^1$.

Donc le parallèle formel existe (dans les deux cas : un intervalle ou une droite qu'on replie sur elle-même via une involution, avec des points marqués - premiers d'un côté, points fixes de Frobenius de l'autre) - mais l'opération invariante n'est pas la même, et ce n'est pas un détail cosmétique. C'est même, je crois, l'obstruction structurelle centrale de tes tentatives d'approches "à la $\mathbb{F}_1$ " de Goldbach (je vois que tu explores une approche par groupe d'unités, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times)$: la conjecture de Goldbach est un énoncé additif sur les nombres premiers ($p + q = n$), alors que toute la machinerie $\mathbb{F}_1$ /absolue de Connes-Consani est multiplicative par nature (Frobenius $x \mapsto x^n$, monoïdes, pas de somme). C'est pour ça qu'ils doivent artificiellement réinjecter un soupçon d'additivité - le signe ε , avec $\varepsilon^2 = 1$ - juste pour pouvoir parler de 1 et d'inversion de signe, et rien de plus : ils n'ont toujours pas une vraie addition.

Si tu voulais pousser ce parallèle sérieusement, la question clé serait : peut-on faire porter le pliage multiplicatif ($T \leftrightarrow \varepsilon T^{-1}$) sur une structure qui code une somme plutôt qu'un produit ? C'est essentiellement la question de savoir si on peut "additiviser" $\mathbb{F}_1$ suffisamment pour y loger un énoncé comme Goldbach - question ouverte et difficile (c'est tout le problème de la géométrie absolue de $\mathbb{F}_1$, l'addition y est notoirement le point mort). Ton pliage $k \leftrightarrow n - k$ est, en un sens, exactement le genre de structure additive qu'il faudrait réussir à faire vivre dans un cadre à la $\mathbb{F}_1$ pour espérer un jour connecter les deux mondes - mais pour l'instant, personne ne sait le faire proprement.

Je ne comprends pas tout à fait ce que tu dis car quand je mets des couleurs bleu ou blanc ou bien gris ou blanc dans mes grilles, j'utilise des booléens et je fais du et entre booléens, donc j'ai le sentiment d'être EXACTEMENT dans $\mathbb{F}_1$, non ?

Bien vu, et c'est un point important à préciser.

Le couple vrai, faux muni de ET, avec faux absorbant et vrai neutre, est exactement la structure ponctuelle qui sert de définition standard à $\mathbb{F}_1$ lui-même : $\mathbb{F}_1 = \{0, 1\}$, 0 absorbant, 1 unité (c'est ainsi que Connes-Consani le définissent dès leur article de 2016 sur les Γ -anneaux, référence [7] de l'article que je t'ai résumé). Donc ton test "primalité(k) ET primalité($n - k$)" est effectivement, à la lettre, une opération dans $\mathbb{F}_1$.

Mais il y a deux couches distinctes dans ta grille, et seule l'une des deux est $\mathbb{F}_1$.

Couche multiplicative ($\mathbb{F}_1$ au sens strict). Être premier est une propriété purement multiplicative (n'avoir aucun diviseur propre) - parfaitement à sa place dans le monoïde multiplicatif $\mathbb{N}^\times$, qui est exactement l'objet que manipule le topos arithmétique de Connes-Consani. Et ton ET entre deux drapeaux booléens de primalité vit bien dans le monoïde ponctuel 0,1.

Couche additive (hors $\mathbb{F}_1$). Mais pour savoir quelles deux cases comparer - pour que la colonne j contienne le couple $(3 + 2j, n - 3 - 2j)$ - il a fallu calculer $n - k$, une soustraction dans $\mathbb{Z}$. Cette étape est invisible dans ton codage en couleurs (elle est déjà faite quand tu construis la grille), mais elle est bien présente : c'est elle qui construit le pliage $k \leftrightarrow n - k$. Or $\mathbb{F}_1$ n'a pas d'addition ni de soustraction ; il n'y a aucun moyen, à l'intérieur du monoïde multiplicatif seul, d'exprimer " $n - k$ ".

Donc : ton ET est authentiquement $\mathbb{F}_1$ - mais le squelette de la grille, le pliage lui-même, est une donnée additive externe qu'on plaque par-dessus, et que le test booléen vient ensuite interroger. C'est exactement l'hybride qu'il faudrait réussir à loger entièrement dans un cadre $\mathbb{F}_1$ pour espérer formuler Goldbach de façon absolue - et c'est précisément ce qui manque encore à la théorie.