Résumé, en vue de le vérifier par programme pour le comprendre un peu, du texte "*Sur les équations du 3$^{\text{ème}}$ et du 4$^{\text{ème}}$ degré : de Galois et Lagrange au miracle de Morley*", d'Alain Connes et Jacques Dixmier.[1], Denise Vella-Chemla, octobre 2024.

1) Exposé des formules pour le troisième degré (§ 3 de l'article de référence)

On a une équation du 3$^{\text{ème}}$ degré sous la forme :

$$X^3 - 3sX + s = 0.$$

Si elle n'est pas sous cette forme, on peut la transformer pour qu'elle le soit : on passe de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ à la forme $x^3 + px + q = 0$ en posant $b' = \frac{b}{a}, c' = \frac{c}{a}, d' = \frac{d}{a}, p = -\frac{b'^2}{3} + c', q = \frac{2b'^3}{27} - \frac{b'c'}{3} + d'$. On passe de la forme $x^3 + px + q = 0$ à la forme $x^3 - 3sx + s = 0$ en multipliant les racines par $-\frac{p}{3q}$.

L'article fournit les fonctions qui permettent de "boucler sur les 3 racines" : on pose

$$V(a, b, c) = \frac{a - c}{b - c}$$

qui brise la symétrie en particularisant c.

V est une fonction des racines qui a deux propriétés :

- quand on permute les racines de toutes les manières possibles, on obtient des valeurs différentes pour $V(a, b, c)$;
- les racines a, b, c peuvent s'exprimer en fonction de V.

Supposons qu'on dispose des 3 racines. On peut calculer :

$$f_1(a, b, c) = -\frac{V^2 - V + 1}{(V - 2)(V + 1)}, \quad f_2(a, b, c) = \frac{V^2 - V + 1}{2(V - 0.5)(V + 1)}, \quad f_3(a, b, c) = \frac{V^2 - V + 1}{2(V - 0.5)(V - 2)}.$$

et on voit que ces 3 fonctions envoient les racines l'une sur l'autre. On peut permuter les racines passées en arguments des 3 fonctions et on obtient toute la combinatoire possible des bijections du triplet de racines vers lui-même.

On a :

$$f_1(a, b, c) + f_2(a, b, c) + f_3(a, b, c) = 0$$

et

$$\frac{1}{f_1(a, b, c)} + \frac{1}{f_2(a, b, c)} + \frac{1}{f_3(a, b, c)} = 3$$

On peut également exprimer deux racines en fonction de la troisième, par les formules

$$b = -\frac{a}{2} + \frac{-6pa^2 + 9qa - 4p^2}{2\sqrt{\Delta}}, \quad c = -\frac{a}{2} - \frac{-6pa^2 + 9qa - 4p^2}{2\sqrt{\Delta}},$$

[1] Voir https://ems.press/journals/lem/articles/13958353, article en libre accès ou fichier pdf stocké ici https://denisevellachemla.eu/AC-JD-enseignent.pdf

avec $\Delta = -4p^3 - 27q^2$.

Est noté dans l'article de référence : "*En adjoignant au corps k une racine carrée du discriminant Δ et en faisant un certain nombre de calculs, on obtient la matrice de l'automorphisme de Galois d'ordre 3 de $k(\sqrt{\Delta})[x]/P$*",

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \\ \dfrac{2p^2}{\sqrt{\Delta}} & -\dfrac{9q}{2\sqrt{\Delta}} - \dfrac{1}{2} & \dfrac{3p}{\sqrt{\Delta}} \\ \\ \dfrac{3pq}{\sqrt{\Delta}} - p & \dfrac{p^2}{\sqrt{\Delta}} & \dfrac{9q}{2\sqrt{\Delta}} - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Mais en appliquant cet opérateur matriciel à un vecteur $[\alpha, \beta, \gamma]$, on ne parvient pas à retrouver la seconde et la troisième racine.

2) Vérification par programme de l'exactitude des fonctions fournies pour le troisième degré (§ 3 de l'article de référence)

Le Programme pour le troisième degré (§ 3 de l'article de référence)

```
import cmath
from cmath import sqrt,pi,exp
import numpy as np
from numpy import matmul

def poly1(x):
     return(x*x*x+3*x+1)

def poly2(x):
     return(x*x*x+9*x-2)

def poly3(x):
     return(x*x*x-3*x+1)

def fonction1(a,b,c):
     v = (a-c)/(b-c)
     return((v*v-v+1)/((v-2)*(v+1)))
def fonction2(a,b,c):
     v = (a-c)/(b-c)
     return(-(v*v-v+1)/(2*(v-0.5)*(v+1)))
def fonction3(a,b,c):
     v = (a-c)/(b-c)
     return(-(v*v-v+1)/(2*(v-2)*(v-0.5)))

def finvariante(x):
     return((4/27)*(((1-x+x*x)**3)/(x*x*(1-x)*(1-x))))

def invariantorbite(k):
     print(k,' ',1-k,' ',1/k,' ',(k-1)/k,' ',1/(1-k),' ',k/(k-1))
```

```
print('Equation cubique :  x^3+3x+1=0 de forme x^3+px+q=0 ou x^3+(3s)x+s=0')
p = 3
q = 1
discrim = -4*p*p*p-27*q*q
print('avec p = ',p,' q = ',q, ' discrim = ',discrim)
s=1
print('les racines de l equation')
r1poly1 = -0.32219 ; print('r1poly1 = ',r1poly1)
r2poly1 = 0.16109+1.75438*1j ; print('r2poly1 = ',r2poly1)
r3poly1 = 0.16109-1.75438*1j ; print('r3poly1 = ',r3poly1)
print('verifie que les racines de l equation en sont bien,'
print(' i.e.  qu elles ont pour image 0 comme polynome associe.  ')
print('poly1(r1poly1) = ',poly1(r1poly1))
print('poly1(r2poly1) = ',poly1(r2poly1))
print('poly1(r3poly1) = ',poly1(r3poly1))
print('somme des racines est nulle et la somme de leurs inverses vaut -3')
print('r1poly1+r2poly1+r3poly1 = ',r1poly1+r2poly1+r3poly1)
print('1/r1poly1+1/r2poly1+1/r3poly1 = ',1/r1poly1+1/r2poly1+1/r3poly1)
print('fait tourner les racines en les permutant des 6 facons possibles par les
fonctions rationnelles R1, R2, R3, '
print(' du theoreme 2.1 p.5 de l article d Alain Connes, Jacques Dixmier (2024)
:',end=''
print(' Sur les equations du 3e et du 4e degre :  de Galois et Lagrange au miracle de
Morley', ca tourne bien.')
print('fonction1(r1poly1,r2poly1,r3poly1) = ',fonction1(r1poly1,r2poly1,r3poly1))
print('fonction2(r1poly1,r2poly1,r3poly1) = ',fonction2(r1poly1,r2poly1,r3poly1))
print('fonction3(r1poly1,r2poly1,r3poly1) = ',fonction3(r1poly1,r2poly1,r3poly1))
print('produit des 3 = ')
print(fonction1(r1poly1,r2poly1,r3poly1)*fonction2(r1poly1,r2poly1,r3poly1)
*fonction3(r1poly1,r2poly1,r3poly1))
print('')
print('fonction1(r1poly1,r3poly1,r2poly1) = ',fonction1(r1poly1,r3poly1,r2poly1))
print('fonction2(r1poly1,r3poly1,r2poly1) = ',fonction2(r1poly1,r3poly1,r2poly1))
print('fonction3(r1poly1,r3poly1,r2poly1) = ',fonction3(r1poly1,r3poly1,r2poly1))
print('produit des 3 = ')
print(fonction1(r1poly1,r3poly1,r2poly1)*fonction2(r1poly1,r3poly1,r2poly1)
*fonction3(r1poly1,r3poly1,r2poly1))
print('')
print('fonction1(r2poly1,r1poly1,r3poly1) = ',fonction1(r2poly1,r1poly1,r3poly1))
print('fonction2(r2poly1,r1poly1,r3poly1) = ',fonction2(r2poly1,r1poly1,r3poly1))
print('fonction3(r2poly1,r1poly1,r3poly1) = ',fonction3(r2poly1,r1poly1,r3poly1))
print('produit des 3 = ')
print(fonction1(r2poly1,r1poly1,r3poly1)*fonction2(r2poly1,r1poly1,r3poly1)
*fonction3(r2poly1,r1poly1,r3poly1))
print('')
print('fonction1(r2poly1,r3poly1,r1poly1) = ',fonction1(r2poly1,r3poly1,r1poly1))
print('fonction2(r2poly1,r3poly1,r1poly1) = ',fonction2(r2poly1,r3poly1,r1poly1))
print('fonction3(r2poly1,r3poly1,r1poly1) = ',fonction3(r2poly1,r3poly1,r1poly1))
print('produit des 3 = ')
print(fonction1(r2poly1,r3poly1,r1poly1)*fonction2(r2poly1,r3poly1,r1poly1)
*fonction3(r2poly1,r3poly1,r1poly1))
print('')
print('')
```

```
print('fonction1(r3poly1,r1poly1,r2poly1) = ',fonction1(r3poly1,r1poly1,r2poly1))
print('fonction2(r3poly1,r1poly1,r2poly1) = ',fonction2(r3poly1,r1poly1,r2poly1))
print('fonction3(r3poly1,r1poly1,r2poly1) = ',fonction3(r3poly1,r1poly1,r2poly1))
print('produit des 3 = ')
print(fonction1(r3poly1,r1poly1,r2poly1)*fonction2(r3poly1,r1poly1,r2poly1)
*fonction3(r3poly1,r1poly1,r2poly1))
print('')
print('fonction1(r3poly1,r2poly1,r1poly1) = ',fonction1(r3poly1,r2poly1,r1poly1))
print('fonction2(r3poly1,r2poly1,r1poly1) = ',fonction2(r3poly1,r2poly1,r1poly1))
print('fonction3(r3poly1,r2poly1,r1poly1) = ',fonction3(r3poly1,r2poly1,r1poly1))
print('produit des 3 = ')
fonction1(r3poly1,r2poly1,r1poly1)*fonction2(r3poly1,r2poly1,r1poly1)
*fonction3(r3poly1,r2poly1,r1poly1))
print('d autres formules :  exprimer deux des trois racines en fonction de la meme
troisieme (voir page 7 de l article).')
alpha = r1poly1
beta = -(alpha/2)+(-4*p*p+9*q*alpha-6*p*alpha*alpha)/(2*sqrt(discrim))
gamma = -(alpha/2)-(-4*p*p+9*q*alpha-6*p*alpha*alpha)/(2*sqrt(discrim))
print('alpha = ',alpha,' beta = ',beta,' gamma = ',gamma)
print('Matrice de l automorphisme du groupe de Galois de l equation ')
M = np.zeros((3,3),dtype='complex')
M = [[1,0,0],
[2*p*p/sqrt(discrim),-0.5-9*q/(2*sqrt(discrim)),3*p/sqrt(discrim)],
[-p-3*p*q/sqrt(discrim),p*p/sqrt(discrim),-0.5+9*q/(2*sqrt(discrim))]]
print('M = ',M)
print('dernier test :  Omega invariant de l orbite ?  (voir page 4 de l article, entre
les equations (4) et (5).')
for x in [r1poly3,r2poly3,r3poly3]:
     print(finvariante(x),' ',finvariante(1-x),' ',finvariante(1/x),'
',finvariante((x-1)/x),' ',finvariante(1/(1-x)),' ',finvariante(x/(x-1)))
```

b) Le résultat du programme ci-dessus pour le troisième degré (§ 3 de l'article de référence)

Equation cubique : $x^3 + 3x + 1 = 0$ de forme $x^3 + px + q = 0$ ou $x^3 + (3s)x + s = 0$
avec p = 3 q = 1 discrim = -135

```
Voici les racines de l equation
r1poly1 = -0.32219
r2poly1 = (0.16109+1.75438j)
r3poly1 = (0.16109-1.75438j)

On verifie que les racines de l equation en sont bien, i.e.  qu elles ont pour image 0
comme polynome associe.
poly1(r1poly1) = -1.5382759458892892e-05
poly1(r2poly1) = (1.8108238040825952e-05+1.3682409605308976e-06j)
poly1(r3poly1) = (1.8108238040825952e-05-1.3682409605308976e-06j)

La somme des racines est nulle et la somme de leurs inverses vaut -3
r1poly1+r2poly1+r3poly1 = (-9.99999999995449e-06+0j)
1/r1poly1+1/r2poly1+1/r3poly1 = (-2.9999568327002413+0j)

On fait tourner les racines en les permutant des 6 facons possibles par les fonctions
rationnelles R1, R2, R3,
du theoreme 2.1 p.5 de l article d Alain Connes, Jacques Dixmier (2024)
Sur les equations du 3e et du 4e degre :  de Galois et Lagrange
au miracle de Morley, ca tourne bien.
fonction1(r1poly1,r2poly1,r3poly1) = (-0.32218525249311275-0j)
fonction2(r1poly1,r2poly1,r3poly1) = (0.1610926262465564+1.7543722995019468j)
fonction3(r1poly1,r2poly1,r3poly1) = (0.1610926262465564-1.7543722995019468j)
produit des 3 = (-0.9999898875222369+0j)

fonction1(r1poly1,r3poly1,r2poly1) = (-0.32218525249311275-0j)
fonction2(r1poly1,r3poly1,r2poly1) = (0.1610926262465564-1.7543722995019468j)
fonction3(r1poly1,r3poly1,r2poly1) = (0.1610926262465564+1.7543722995019468j)
produit des 3 = (-0.9999898875222369+0j)

fonction1(r2poly1,r1poly1,r3poly1) = (0.1610926262465564+1.7543722995019468j)
fonction2(r2poly1,r1poly1,r3poly1) = (-0.3221852524931127-2.2608813431248678e-17j)
fonction3(r2poly1,r1poly1,r3poly1) = (0.16109262624655635-1.7543722995019466j)
produit des 3 = (-0.9999898875222366-4.163336342344337e-17j)

fonction1(r2poly1,r3poly1,r1poly1) = (0.1610926262465563+1.7543722995019468j)
fonction2(r2poly1,r3poly1,r1poly1) = (0.16109262624655646-1.7543722995019468j)
fonction3(r2poly1,r3poly1,r1poly1) = (-0.3221852524931127-4.5217626862497356e-17j)
produit des 3 = (-0.9999898875222367-2.4765449501062445e-16j)

fonction1(r3poly1,r1poly1,r2poly1) = (0.1610926262465564-1.7543722995019468j)
fonction2(r3poly1,r1poly1,r2poly1) = (-0.3221852524931127+2.2608813431248678e-17j)
fonction3(r3poly1,r1poly1,r2poly1) = (0.16109262624655635+1.7543722995019466j)
produit des 3 = (-0.9999898875222366+4.163336342344337e-17j)

fonction1(r3poly1,r2poly1,r1poly1) = (0.1610926262465563-1.7543722995019468j)
fonction2(r3poly1,r2poly1,r1poly1) = (0.16109262624655646+1.7543722995019468j)
fonction3(r3poly1,r2poly1,r1poly1) = (-0.3221852524931127+4.5217626862497356e-17j)
produit des 3 = (-0.9999898875222367+2.4765449501062445e-16j)
```

```
Application d autres formules :  exprimer deux des trois racines en fonction de la
meme troisieme (voir page 7 de l article).
alpha = -0.32219 beta = (0.161095+1.7543850775794458j) gamma =
(0.161095-1.7543850775794458j)
Matrice de l automorphisme du groupe de Galois de l equation
```

$M = [[1, 0, 0]$,
$[-1.5491933384829668j, (-0.5 + 0.3872983346207417j), -0.7745966692414834j]$,
$[(-3 + 0.7745966692414834j), -0.7745966692414834j, (-0.5 - 0.3872983346207417j)]]$

```
dernier test :  Omega invariant de l orbite ?  (voir page 4 de l article, entre les
equations (4) et (5).
2.367225666165533 2.3672256661655333 2.3672256661655333 2.3672256661655333
2.3672256661655338 2.3672256661655333
(-0.14363546383067707-0.139360118829165j) (-0.14363546383067705-0.13936011882916507j)
(-0.14363546383067696-0.13936011882916494j) (-0.14363546383067696-0.13936011882916507j)
(-0.143635463830677-0.139360118829165j) (-0.143635463830677-0.1393601188291649j)
(-0.14363546383067707+0.139360118829165j) (-0.14363546383067705+0.13936011882916507j)
(-0.14363546383067696+0.13936011882916494j) (-0.14363546383067696+0.13936011882916507j)
(-0.143635463830677+0.139360118829165j) (-0.143635463830677+0.1393601188291649j)
```

En annexe 2, on fournit les résultats pour 2 autres équations du troisième degré, pour lesquelles les formules R_i, etc donnent systématiquement les opposés des racines.

Tout fonctionne bien, sauf 2 soucis :

- pour les deux dernières équations étudiées, par les formules des R_j du théorème 2.1, on obtient les opposés des nombres complexes escomptés.
- dans la proposition 2.4, l'utilisation de l'opérateur plutôt que des formules (12) fournissant β et γ en fonction de α ne renvoie pas les racines attendues.

Équations du 4$^{\text{ème}}$ degré

L'équation est de la forme : $X^4 + pX^2 + qX + r = 0$.

Il y a trois cas différents :

1) $\boxed{\begin{array}{l} p^2 + 12r \neq 0 \\ -2p^3 + 72pr - 17q^2 \neq 0 \end{array}}$.

L'action du groupe du matelas M_4 (ou groupe de Klein K_4) obéit à la formule :

$$T_j(x) := x - P'(x)\left(\frac{p}{3} + 12\frac{J}{I}R_j(\omega) + 2x^2\right)^{-1}$$

avec $I = \dfrac{p^2 + 12r}{12}$, $J = \dfrac{-2p^3 + 72pr - 27q^2}{432}$, $P'(X) = 4X^3 + 2pX + q$.

Cette transformation échange α et δ d'une part, et β et γ d'autre part.

Un exemple fourni : $x^4 - \frac{15}{2}x^2 + 5x + \frac{5}{16} = 0$: le groupe de Klein K_4 (ou groupe du matelas M_4) opère sur les racines.

2) $\boxed{\begin{array}{l} p^2 + 12r \neq 0 \\ -2p^3 + 72pr - 17q^2 = 0 \end{array}}$

On pose $\rho = P'(\alpha) = 4\alpha^3 + 2p\alpha + q$, $\sigma = \frac{1}{2}P''(\alpha) = 6\alpha^2 + p$.

Les relations que vérifient les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les relations (23) de l'article de référence.

(23) $$\frac{1}{\beta - \alpha} = -\frac{\sigma}{3\rho}, \quad \frac{1}{\gamma - \alpha} = -\frac{\sigma - 6\sqrt{I}}{3\rho}, \quad \frac{1}{\delta - \alpha} = -\frac{\sigma + 6\sqrt{I}}{3\rho}.$$

Les formules qui expriment les 3 autres racines β, γ, δ en fonction de α sont :

(24) $$\beta = \alpha - \frac{3\rho}{\sigma}, \quad \gamma = \alpha - \frac{3\rho}{\sigma - 6\sqrt{I}}, \quad \delta = \alpha - \frac{3\rho}{\sigma + 6\sqrt{I}},$$

Un exemple fourni : $x^4 + 6x^2 + 1 = 0$.

3) $\boxed{p^2 + 12r = 0}$

Pour simplifier, on suppose que le corps k contient une racine cubique de l'unité.

Les équations qui permettent de trouver β, γ, δ en fonction de α (et ρ et σ et $\sqrt[3]{2J}$) sont :

$$\beta = \alpha + \frac{3\rho}{6\sqrt[3]{2J} - \sigma}, \qquad \gamma = \alpha + \frac{3\rho}{6j\sqrt[3]{2J} - \sigma}, \qquad \delta = \alpha + \frac{3\rho}{6j^2\sqrt[3]{2J} - \sigma}.$$

Un exemple fourni : $x^4 - 3x^2 + 3x - \frac{3}{4} = 0$: le groupe de Klein K_4 (ou groupe du matelas M_4) opère sur les racines.

Annexe 1 : les 6 brisures de symétrie

Dans toute la suite, $\omega = \dfrac{a-c}{b-c}$.

- en permutant a et b dans l'expression de ω, i.e. en faisant agir l'opérateur $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$, on obtient la fraction $\dfrac{b-c}{a-c}$ qui est égale à $\dfrac{1}{\omega}$ trivialement.
- en permutant b et c dans l'expression de ω, i.e. en faisant agir l'opérateur $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$, on obtient la fraction $\dfrac{a-b}{c-b}$ qui est égale à $1-\omega$. En effet, $1 - \dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{b-c-a+c}{b-c} = \dfrac{b-a}{b-c} = \dfrac{a-b}{c-b}$.
- en permutant a et c dans l'expression de ω, i.e. en faisant agir l'opérateur $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$, on obtient la fraction $\dfrac{c-a}{b-a}$ qui est égale à $\dfrac{\omega}{\omega-1}$.
- en effectuant une rotation horaire sur a, b, c dans l'expression de ω, i.e. en faisant agir l'opérateur $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$, on obtient la fraction $\dfrac{c-b}{a-b}$ qui est égale à $\dfrac{1}{1-\omega}$. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\dfrac{a-c}{b-c}} &= \frac{1}{\dfrac{b-c-a+c}{b-c}} \\ &= \frac{b-c}{b-a} = \frac{c-b}{a-b} \end{aligned}$$

- en effectuant une rotation anti-horaire sur a, b, c dans l'expression de ω, i.e. en faisant agir l'opérateur $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, on obtient la fraction $\dfrac{b-a}{c-a}$ qui est égale à $\dfrac{\omega-1}{\omega}$. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\dfrac{a-c}{b-c}-1}{\dfrac{a-c}{b-c}} &= \frac{\dfrac{a-c-b+c}{b-c}}{\dfrac{a-c}{b-c}} \\ &= \frac{a-b}{a-c} = \frac{b-a}{c-a} \end{aligned}$$

- en n'opérant pas dans l'expression de ω, i.e. en faisant agir l'opérateur $\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, on obtient la fraction $\dfrac{a-c}{b-c}$ qui est égale à ω.

Annexe 2 : résultat du programme appliqué à deux autres équations

Equation cubique : $x^3 + 6x - 2 = 0$ de forme $x^3 + px + q = 0$ ou $x^3 + (3s)x + s = 0$
avec p = 6 q = -2 discrim = -972

```
Voici les racines de l equation
r1poly2 = 0.32748
r2poly2 = (-0.16374+2.46585j)
r3poly2 = (-0.16374-2.46585j)

On verifie que les racines de l equation en sont bien, i.e.  qu elles ont pour image 0
comme polynome associe.
poly2(r1poly2) = -1.310700814549648e-08
poly2(r2poly2) = (-7.94154517391732e-06+3.9799558754438635e-05j)
poly2(r3poly2) = (-7.94154517391732e-06-3.9799558754438635e-05j)

La somme des racines est nulle et la somme de leurs inverses vaut -3
r1poly2+r2poly2+r3poly2 = 0j
1/r1poly2+1/r2poly2+1/r3poly2 = (2.9999998779483548+0j)

On fait tourner les racines en les permutant des 6 facons possibles par les fonctions
rationnelles R1, R2, R3,
du theoreme 2.1 p.5 de l article d Alain Connes, Jacques Dixmier (2024) :  Sur les
equations du 3e et du 4e degre :  de Galois et Lagrange au miracle de Morley, ca
tourne bien.
fonction1(r1poly2,r2poly2,r3poly2) = (-0.32747998667684236-0j)
fonction2(r1poly2,r2poly2,r3poly2) = (0.16373999333842118-2.46584989967965j)
fonction3(r1poly2,r2poly2,r3poly2) = (0.16373999333842118+2.46584989967965j)
produit des 3 = (-1.9999944571649133-2.7755575615628914e-17j)

fonction1(r1poly2,r3poly2,r2poly2) = (-0.32747998667684236-0j)
fonction2(r1poly2,r3poly2,r2poly2) = (0.16373999333842118+2.46584989967965j)
fonction3(r1poly2,r3poly2,r2poly2) = (0.16373999333842118-2.46584989967965j)
produit des 3 = (-1.9999944571649133+2.7755575615628914e-17j)

fonction1(r2poly2,r1poly2,r3poly2) = (0.16373999333842104-2.46584989967965j)
fonction2(r2poly2,r1poly2,r3poly2) = (-0.3274799866768424+0j)
fonction3(r2poly2,r1poly2,r3poly2) = (0.16373999333842137+2.46584989967965j)
produit des 3 = (-1.9999944571649138+2.498001805406602e-16j)

fonction1(r2poly2,r3poly2,r1poly2) = (0.16373999333842088-2.46584989967965j)
fonction2(r2poly2,r3poly2,r1poly2) = (0.1637399933384216+2.4658498996796503j)
fonction3(r2poly2,r3poly2,r1poly2) = (-0.32747998667684236+0j)
produit des 3 = (-1.9999944571649138+5.635425230344834e-16j)

fonction1(r3poly2,r1poly2,r2poly2) = (0.16373999333842104+2.46584989967965j)
fonction2(r3poly2,r1poly2,r2poly2) = (-0.3274799866768424+0j)
fonction3(r3poly2,r1poly2,r2poly2) = (0.16373999333842137-2.46584989967965j)
produit des 3 = (-1.9999944571649138-2.498001805406602e-16j)

fonction1(r3poly2,r2poly2,r1poly2) = (0.16373999333842088+2.46584989967965j)
fonction2(r3poly2,r2poly2,r1poly2) = (0.1637399933384216-2.4658498996796503j)
fonction3(r3poly2,r2poly2,r1poly2) = (-0.32747998667684236+0j)
produit des 3 = (-1.9999944571649138-5.635425230344834e-16j)
```

```
Application d autres formules :  exprimer deux des trois racines en fonction de la
meme troisieme (voir page 7 de l article).
alpha = 0.32748
beta = (-0.16374+2.465853271587796j)
gamma = (-0.16374-2.465853271587796j)
Matrice de l automorphisme du groupe de Galois de l equation
```

$M = [[1, 0, 0],$
$[-2.309401076758503j, (-0.5 - 0.28867513459481287j), -0.5773502691896257j],$
$[(-6 - 1.1547005383792515j), -1.1547005383792515j, (-0.5 + 0.28867513459481287j)]]$

```
dernier test :  Omega invariant de l orbite ?  (voir page 4 de l article, entre les
equations (4) et (5).
1.4481194217899915 1.4481194217899915 1.4481194217899915 1.4481194217899915
1.448119421789992 1.4481194217899918
(-0.48405742770126126-0.45567316431301746j) (-0.48405742770126087-0.45567316431301724j)
(-0.48405742770126114-0.4556731643130174j) (-0.4840574277012606-0.4556731643130178j)
(-0.4840574277012612-0.4556731643130175j) (-0.4840574277012615-0.4556731643130173j)
(-0.48405742770126126+0.45567316431301746j) (-0.48405742770126087+0.45567316431301724j)
(-0.48405742770126114+0.4556731643130174j) (-0.4840574277012606+0.4556731643130178j)
(-0.4840574277012612+0.4556731643130175j) (-0.4840574277012615+0.4556731643130173j)
```

Equation cubique : $x^3 - 3x + 1 = 0$ de forme $x^3 + px + q = 0$ ou $x^3 + (3s)x + s = 0$

```
avec p = -3 q = 1 discrim = 81

Voici les racines de l equation
r1poly3 = 1.53209
r2poly3 = -1.87939
r3poly3 = 0.3473

On verifie que les racines de l equation en sont bien, i.e.  qu elles ont pour image 0
comme polynome associe.
poly3(r1poly3) = 4.501708329218701e-06
poly3(r2poly3) = -3.614641701865651e-05
poly3(r3poly3) = -9.615183000022398e-06

La somme des racines est nulle et la somme de leurs inverses vaut 3
r1poly3+r2poly3+r3poly3 = 5.551115123125783e-17
1/r1poly3+1/r2poly3+1/r3poly3 = 2.999970655611892

On fait tourner les racines en les permutant des 6 facons possibles par les fonctions
rationnelles R1, R2, R3, du theoreme 2.1 p.5 de l article d Alain Connes, Jacques
Dixmier (2024) :  Sur les equations du 3e et du 4e degre :  de Galois et Lagrange au
miracle de Morley, ca tourne bien.
fonction1(r1poly3,r2poly3,r3poly3) = -1.5320750139188077
fonction2(r1poly3,r2poly3,r3poly3) = 1.8793716168168109
fonction3(r1poly3,r2poly3,r3poly3) = -0.3472966028980033
produit des 3 = 0.9999844087925736

fonction1(r1poly3,r3poly3,r2poly3) = -1.5320750139188082
fonction2(r1poly3,r3poly3,r2poly3) = -0.34729660289800335
fonction3(r1poly3,r3poly3,r2poly3) = 1.8793716168168115
produit des 3 = 0.9999844087925742
```

```
fonction1(r2poly3,r1poly3,r3poly3) = 1.879371616816811
fonction2(r2poly3,r1poly3,r3poly3) = -1.5320750139188075
fonction3(r2poly3,r1poly3,r3poly3) = -0.3472966028980034
produit des 3 = 0.9999844087925737

fonction1(r2poly3,r3poly3,r1poly3) = 1.879371616816811
fonction2(r2poly3,r3poly3,r1poly3) = -0.3472966028980034
fonction3(r2poly3,r3poly3,r1poly3) = -1.5320750139188075
produit des 3 = 0.9999844087925737

fonction1(r3poly3,r1poly3,r2poly3) = -0.3472966028980034
fonction2(r3poly3,r1poly3,r2poly3) = -1.5320750139188077
fonction3(r3poly3,r1poly3,r2poly3) = 1.8793716168168109
produit des 3 = 0.9999844087925737

fonction1(r3poly3,r2poly3,r1poly3) = -0.3472966028980034
fonction2(r3poly3,r2poly3,r1poly3) = 1.8793716168168109
fonction3(r3poly3,r2poly3,r1poly3) = -1.5320750139188077
produit des 3 = 0.9999844087925739

Application d autres formules :  exprimer deux des trois racines en fonction de la
meme troisieme (voir page 7 de l article).
alpha = 1.53209 beta = (0.34729976809999974+0j) gamma = (-1.8793897680999998+0j)
Matrice de l automorphisme du groupe de Galois de l equation
M = [[1, 0, 0], [(2+0j), (-1+0j), (-1+0j)], [(4+0j), (1+0j), 0j]]

dernier test :  Omega invariant de l orbite ?  (voir page 4 de l article, entre les
equations (4) et (5).
1.333330879050212 1.3333308790502119 1.3333308790502116 1.3333308790502119
1.3333308790502119 1.333330879050212
1.333336302033247 1.3333363020332463 1.333336302033247 1.3333363020332463
1.333336302033247 1.3333363020332474
1.333314481634212 1.3333144816342122 1.333314481634212 1.3333144816342117
1.3333144816342117 1.3333144816342117
```

Annexe 3 : programme pour le degré 4 et son résultat pour trois équations correspondant aux trois cas : général, harmonique et équiharmonique.

Note : bien que noté dans l'article de référence comme étant un cas harmonique, il s'avère que la première équation traitée ci-dessous devrait se voir appliquer les équations du cas général (§ 3.2 de l'article de référence). Comme le fait de lui appliquer les équations du § 3.3 fonctionne très bien, on laisse ainsi.

```
import cmath
from cmath import sqrt,pi,exp
import numpy as np
from numpy import matmul

def poly2(x):
     return(x**4-7.5*(x**2)+5*x+5/16)
```

```
def poly3(x):
     return(x**4+6*(x**2)+1)

def poly4(x):
     return(x**4-3*(x**2)+3*x-0.75)

petitj = exp(2*1j*pi/3)
print('Equation du quatrieme degre :  x^4 - 7.5 * (x * *2) + 5 * x + 5/16 = 0 de forme
x^4 + px^2 + qx + r = 0')
p = -7.5
q = 5
r = 5/16
I = (p*p+12*r)/12
J = (-2*p*p*p+72*p*r-27*q*q)/432
print('avec p = ',p,' q = ',q,' r = ',r)
print('I = ',I)
print('J = ',J)
res1 = p*p+12*r
res2 = -2*p*p*p+72*p*r-17*q*q
print('p^2 + 12r = ',res1)
print('-2p^3 + 72pr - 17q^2 = ',res2)
if res1 != 0 and res2 != 0:
     print('on est dans le cas 1.')
else:
     if res1 != 0 and res2 == 0:
          print('on est dans le cas 2.')
     else:
          if res1 == 0:
               print('on est dans le cas 3.')
print('les racines de l equation')
# [-3.02014702134020, -0.0575365158350514, 0.784079043840412, 2.29360449333484]
r1poly2 = -3.02014702134020 ; print('r1poly2 = ',r1poly2)
r2poly2 = -0.0575365158350514 ; print('r2poly2 = ',r2poly2)
r3poly2 = 0.784079043840412 ; print('r3poly2 = ',r3poly2)
r4poly2 = 2.29360449333484 ; print('r4poly2 = ',r4poly2)
print('verifie que les racines de l equation en sont bien, i.e.  qu elles ont pour
image 0 comme polynome associe.  ')
print('poly2(r1poly2) = ',poly2(r1poly2))
print('poly2(r2poly2) = ',poly2(r2poly2))
print('poly2(r3poly2) = ',poly2(r3poly2))
print('poly2(r4poly2) = ',poly2(r4poly2))
alpha = r1poly2
rho = 4*(alpha**3)+2*p*alpha+q
sigma = 6*(alpha**2)+p
beta = alpha-(3*rho)/sigma
gamma = alpha-(3*rho)/(sigma-6*sqrt(I))
delta = alpha-(3*rho)/(sigma+6*sqrt(I))
print('verifie les relations (23) entre les racines')
print('gauche1 = ',1/(beta-alpha))
print('droite1 = ',-sigma/(3*rho))
print('gauche2 = ',1/(gamma-alpha))
print('droite2 = ',-(sigma-6*sqrt(I))/(3*rho))
print('gauche3 = ',1/(delta-alpha))
print('droite3 = ',-(sigma+6*sqrt(I))/(3*rho))
```

```
print('trouve la seconde, la troisieme racine et la quatrieme a partir de la
premiere.')
print('beta = ',beta)
print('gamma = ',gamma)
print('delta = ',delta)

print('Equation du quatrieme degre :  x^4+6*(x**2)+1=0 de forme x^4+px^2+qx+r=0')
p = 6
q = 0
r = 1
I = (p*p+12*r)/12
J = (-2*p*p*p+72*p*r-27*q*q)/432
print('avec p = ',p,' q = ',q,' r = ',r)
print('I = ',I)
print('J = ',J)
res1 = p*p+12*r
res2 = -2*p*p*p+72*p*r-17*q*q
print('p^2+12r = ',res1)
print('-2p^3+72pr-17q^2 = ',res2)
if res1 != 0 and res2 != 0:
    print('on est dans le cas 1.')
else:
    if res1 != 0 and res2 == 0:
        print('on est dans le cas 2.')
    else:
        if res1 == 0:
            print('on est dans le cas 3.')
print('les racines de l equation')
# [-I*sqrt(3 - 2*sqrt(2)), I*sqrt(3 - 2*sqrt(2)), -I*sqrt(2*sqrt(2) + 3),
I*sqrt(2*sqrt(2) + 3)]
r1poly3 = -1j*sqrt(3 - 2*sqrt(2)) ; print('r1poly3 = ',r1poly3)
r2poly3 = 1j*sqrt(3 - 2*sqrt(2)) ; print('r2poly3 = ',r2poly3)
r3poly3 = -1j*sqrt(2*sqrt(2) + 3) ; print('r3poly3 = ',r3poly3)
r4poly3 = 1j*sqrt(2*sqrt(2) + 3) ; print('r4poly3 = ',r4poly3)
print('verifie que les racines de l equation en sont bien, i.e.  qu elles ont pour
image 0 comme polynome associe.  ')
print('poly3(r1poly3) = ',poly3(r1poly3))
print('poly3(r2poly3) = ',poly3(r2poly3))
print('poly3(r3poly3) = ',poly3(r3poly3))
print('poly3(r4poly3) = ',poly3(r4poly3))
alpha = r1poly3
rho = 4*(alpha**3)+2*p*alpha+q
sigma = 6*(alpha**2)+p
beta = alpha-(3*rho)/sigma
gamma = alpha-(3*rho)/(sigma-6*sqrt(I))
delta = alpha-(3*rho)/(sigma+6*sqrt(I))
print('verifie les relations (23) entre les racines')
print('gauche1 = ',1/(beta-alpha))
print('droite1 = ',-sigma/(3*rho))
print('gauche2 = ',1/(gamma-alpha))
print('droite2 = ',-(sigma-6*sqrt(I))/(3*rho))
print('gauche3 = ',1/(delta-alpha))
print('droite3 = ',-(sigma+6*sqrt(I))/(3*rho))
```

```
print('trouve la seconde, la troisieme racine et la quatrieme a partir de la
premiere.')
print('beta = ',beta)
print('gamma = ',gamma)
print('delta = ',delta)

print('Equation du quatrieme degre : x^4 - 3 * (x * *2) + 3 * x - 0.75 = 0 de forme
x^4 + px^2 + qx + r = 0')
p = -3
q = 3
r = -0.75
I = (p*p+12*r)/12
J = (-2*p*p*p+72*p*r-27*q*q)/432
print('avec p = ',p,' q = ',q,' r = ',r)
print('I = ',I)
print('J = ',J)
res1 = p*p+12*r
res2 = -2*p*p*p+72*p*r-17*q*q
print('p^2 + 12r = ',res1)
print('-2p^3 + 72pr - 17q^2 = ',res2)
if res1 != 0 and res2 != 0:
     print('on est dans le cas 1.')
else:
     if res1 != 0 and res2 == 0:
          print('on est dans le cas 2.')
     else:
          if res1 == 0:
               print('on est dans le cas 3.')
print('les racines de l equation')
# [-2.13725528220314, 0.405204474634268, 0.866025403784439 - 0.340625019316607*I,
0.866025403784439 + 0.340625019316607*I]
r1poly4 = -2.13725528220314 ; print('r1poly4 = ',r1poly4)
r2poly4 = 0.405204474634268 ; print('r2poly4 = ',r2poly4)
r3poly4 = 0.866025403784439 - 0.340625019316607*1j ; print('r3poly4 = ',r3poly4)
r4poly4 = 0.866025403784439 + 0.340625019316607*1j ; print('r4poly4 = ',r4poly4)
print('verifie que les racines de l equation en sont bien, i.e.  qu elles ont pour
image 0 comme polynome associe.  ')
print('poly4(r1poly4) = ',poly4(r1poly4))
print('poly4(r2poly4) = ',poly4(r2poly4))
print('poly4(r3poly4) = ',poly4(r3poly4))
print('poly4(r4poly4) = ',poly4(r4poly4))
alpha = r1poly4
rho = 4*(alpha**3)+2*p*alpha+q
sigma = 6*(alpha**2)+p
beta = alpha+(3*rho)/(6*((2*J)**(1/3))-sigma)
gamma = alpha+(3*rho)/(6*petitj*((2*J)**(1/3))-sigma)
delta = alpha+(3*rho)/(6*(petitj**2)*((2*J)**(1/3))-sigma)
print('trouve la seconde, la troisieme racine et la quatrieme a partir de la
premiere.')
print('beta = ',beta)
print('gamma = ',gamma)
print('delta = ',delta)
```

Equation du quatrieme degre : $x^4 - 7.5*(x**2) + 5*x + 5/16 = 0$ de forme $x^4 + px^2 + qx + r = 0$
avec p = -7.5 q = 5 r = 0.3125
I = 5.0
J = 0.0
$p^2 + 12r$ = 60.0
$-2p^3 + 72pr - 17q^2$ = 250.0
on est dans le cas 1.

Voici les racines de l equation
r1poly2 = -3.0201470213402
r2poly2 = -0.0575365158350514
r3poly2 = 0.784079043840412
r4poly2 = 2.29360449333484

On verifie que les racines de l equation en sont bien, i.e. qu elles ont pour image 0 comme polynome associe.
poly2(r1poly2) = -1.1901590823981678e-13
poly2(r2poly2) = 1.1102230246251565e-16
poly2(r3poly2) = 0.0
poly2(r4poly2) = -2.1316282072803006e-14

On verifie les relations (23) entre les racines
gauche1 = 0.2628655560595672
droite1 = 0.2628655560595672
gauche2 = (0.18819096023558693+0j)
droite2 = (0.18819096023558693+0j)
gauche3 = (0.33754015188354747+0j)
droite3 = (0.33754015188354747+0j)

On trouve la seconde, la troisieme racine et la quatrieme a partir de la premiere.
beta = 0.7840790438404088
gamma = (2.2936044933348385+0j)
delta = (-0.057536515835054924+0j)

```
Equation du quatrieme degre :  x^4+6*(x**2)+1=0 de forme x^4+px^2+qx+r=0
avec p = 6 q = 0 r = 1
I = 4.0
J = 0.0
p^2+12r = 48
-2p^3+72pr-17q^2 = 0
on est dans le cas 2.

Voici les racines de l equation
r1poly3 = -0.4142135623730948j
r2poly3 = 0.4142135623730948j
r3poly3 = -2.414213562373095j
r4poly3 = 2.414213562373095j

On verifie que les racines de l equation en sont bien, i.e.  qu elles ont pour image 0
comme polynome associe.
poly3(r1poly3) = (1.1102230246251565e-15+0j)
poly3(r2poly3) = (1.1102230246251565e-15+0j)
poly3(r3poly3) = 0j
poly3(r4poly3) = 0j

On verifie les relations (23) entre les racines
gauche1 = -0.353553390593274j
droite1 = (-0-0.35355339059327406j)
gauche2 = (-0+0.5000000000000002j)
droite2 = 0.5000000000000002j
gauche3 = -1.2071067811865483j
droite3 = (-0-1.2071067811865483j)

On trouve la seconde, la troisieme racine et la quatrieme a partir de la premiere.
beta = 2.414213562373093j
gamma = -2.414213562373094j
delta = 0.4142135623730947j
```

```
Equation du quatrieme degre :  x^4-3*(x**2)+3*x-0.75=0 de forme x^4+px^2+qx+r=0
avec p = -3 q = 3 r = -0.75
I = 0.0
J = -0.0625
p^2+12r = 0.0
-2p^3+72pr-17q^2 = 63.0
on est dans le cas 3.

Voici les racines de l equation
r1poly4 = -2.13725528220314
r2poly4 = 0.405204474634268
r3poly4 = (0.866025403784439-0.340625019316607j)
r4poly4 = (0.866025403784439+0.340625019316607j)

On verifie que les racines de l equation en sont bien, i.e.  qu elles ont pour image 0
comme polynome associe.
poly4(r1poly4) = -1.1013412404281553e-13
poly4(r2poly4) = 3.3306690738754696e-16
poly4(r3poly4) = (-8.881784197001252e-16+0j)
poly4(r4poly4) = (-8.881784197001252e-16+0j)

On trouve la seconde, la troisieme racine et la quatrieme a partir de la premiere.
beta = (0.8660254037844295+0.3406250193166069j)
gamma = (0.4052044746342589+8.239298851554292e-17j)
delta = (0.8660254037844295-0.340625019316607j)
```