Un exemple pour les théorèmes de Shimura : la suite des carrés
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude

Je fournis à l'ia claude la copie d'écran ci-dessous en lui en ayant copié le texte brut (il s'agit d'une page d'un article de Gorō Shimura [1] à un colloque à Anvers (Antwerp) en 1972 au sujet des formes modulaires.

THEOREM 1: Let p be a prime, and f an element of $M_k(N, \chi)$. Put

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e^{2\pi inz},$$

$$(f|T(p^2))(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)e^{2\pi inz}.$$

Then

$$b(n) = a(p^2n) + \chi_1(p)\left(\frac{n}{p}\right) p^{\lambda-1}a(n) + \chi(p^2)p^{k-2}a(n/p^2),$$

where $\lambda = (k - 1)/2$, $\chi_1(m) = \chi(m)\left(\frac{-1}{m}\right)^{\lambda}$; we put $a(n/p^2) = 0$ if p^2 does not divide n, and $\chi(m) = \chi_1(m) = 0$ if $(m, N) \neq 1$.

This can easily be verified by writing explicitly the representatives ζ_ν of $\Gamma_0\zeta\Gamma_0$, and checking their effect on the Fourier coefficients. It is noteworthy that the computation involves the Gauss sum $\sum\left(\frac{m}{p}\right)e^{2\pi im/p}$.

THEOREM 2: Let f be as above. Suppose that f is a common eigen-function of $T(p^2)$ for all primes p, and put $f|T(p^2) = \omega_p f$. Let t be a positive integer which has no square factor prime to N, other than 1. Then one

has, formally,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(tn^2)n^{-s} = a(t) \prod_p [1 - \chi_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{\lambda-1-s}] [1 - \omega_p p^{-s} + \chi(p)^2 p^{k-2-2s}]^{-1},$$

where the product is taken over all primes p.

1. Pour le personnifier, voir https://wstein.org/antwerp_photo/, il est la personne numéro 61 sur la photo.

et lui demande : “Regarde, il est question d'une fonction propre qui est fonction propre pour tous les nombres premiers, est-ce possible ? Pourrais-tu me donner un exemple et m'expliquer ? Je joins le screenshot pour te faciliter la lecture, c'est un article de Shimura”.

La suite de cette note a été intégralement rédigée par l'ia claude.

1. La suite

On considère la suite $a(n)$, $n \geq 0$, définie par

$$a(0) = 1, \qquad a(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est un carré parfait non nul,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est la suite des coefficients de $\theta(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i m^2 z}$ (poids $k/2$ avec $k = 1$, donc $\lambda = (k-1)/2 = 0$, niveau $N = 4$, caractère trivial).

Ici $\chi_1(p) = 1$ et $\chi(p^2) = 1$ pour p premier impair.
On note :

$$f(n,p) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré non nul modulo } p, \\ -1 & \text{si } n \text{ n'est pas un carré modulo } p, \\ 0 & \text{si } p \text{ divise } n. \end{cases}$$

2. La machine $T(p^2)$

Le théorème 1 donne, pour p premier impair ($k - 2 = -1$, $\lambda - 1 = -1$) :

$$b(n) = a(p^2 n) + \frac{1}{p}\, f(n,p)\, a(n) + \frac{1}{p}\, a\left(\frac{n}{p^2}\right),$$

avec la convention $a(n/p^2) = 0$ si $p^2 \nmid n$. Le symbole $f(n,p)$ vaut 1 si n est un carré non nul dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, -1 si n n'en est pas un, et 0 si $p \mid n$.

3. La suite est propre : preuve pour tout p impair

On montre $b(n) = \left(1 + \frac{1}{p}\right) a(n)$ pour tout n.

- n **non carré.** Alors $p^2 n$ et $\frac{n}{p^2}$ (s'il est entier) ne sont pas des carrés non plus : $b(n) = 0$.

- $n = m^2$, $m \geq 1$, $p \nmid m$. On a $a(p^2 m^2) = 2$, $f(m^2, p) = 1$, $a(m^2) = 2$, et $a\left(\frac{m^2}{p^2}\right) = 0$. Donc $b(n) = 2 + \frac{2}{p}$.

- $n = m^2$, $m \geq 1$, $p \mid m$. On a $a(p^2m^2) = 2$, $f(n,p) = 0$, et $a\left(\dfrac{m^2}{p^2}\right) = 2$. Donc $b(n) = 2 + \dfrac{2}{p}$.

- $n = 0$. $b(0) = a(0) + 0 + \dfrac{1}{p}a(0) = 1 + \dfrac{1}{p}$.

Dans tous les cas $b(n) = \omega_p\, a(n)$ avec $\omega_p = 1 + \dfrac{1}{p}$.

4. Vérification numérique pour $p = 3$ ($\omega_3 = 4/3$)

n	$a(n)$	$a(9n)$	$f(n,3)$	$a(n/9)$	$b(n)$	$4/3\, a(n)$
0	1	1	0	1	$4/3$	$4/3$
1	2	2	1	0	$8/3$	$8/3$
2	0	0	-1	0	0	0
4	2	2	1	0	$8/3$	$8/3$
9	2	2	0	2	$8/3$	$8/3$
36	2	2	0	2	$8/3$	$8/3$

5. Le cas $p = 2$

Comme $2 \mid N = 4$, on a $\chi(2) = 0$ et la formule devient $b(n) = a(4n)$. Pour la suite des carrés, $a(4n) = a(n)$ pour tout n : donc $\omega_2 = 1$.

6. Théorème 2 avec $t = 1$

Le membre de gauche est

$$\sum_{n\geq 1} a(n^2)\, n^{-s} = 2\sum_{n\geq 1} n^{-s} = 2\zeta(s).$$

Pour p impair, le facteur du produit eulérien est

$$\frac{1 - p^{-1-s}}{1 - \omega_p p^{-s} + p^{-1-2s}} = \frac{1 - p^{-1-s}}{(1 - p^{-s})(1 - p^{-1-s})} = \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

car $1 - \left(1 + \dfrac{1}{p}\right) p^{-s} + p^{-1-2s} = (1 - p^{-s})(1 - p^{-1-s})$.

Pour $p = 2$ ($\chi = 0$, $\omega_2 = 1$), le facteur est $\dfrac{1}{1 - 2^{-s}}$.

Avec $a(1) = 2$, le membre de droite vaut donc

$$2 \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} = 2\zeta(s),$$

ce qui coïncide avec le membre de gauche.

7. Les suites de valuations ne sont pas des suites propres

Soit q un nombre premier fixé et $a(n) = v_q(n)$ l'exposant de q dans n ($n \geq 1$). On utilise la machine $T(p^2)$ du théorème 1 avec $k = 1$, $N = 4$, χ trivial, pour p premier impair :

$$b(n) = a(p^2 n) + \frac{1}{p}\, f(n,p)\, a(n) + \left(\frac{1}{p}\right)\, a\left(\frac{n}{p^2}\right),$$

avec $a\left(\dfrac{n}{p^2}\right) = 0$ si $p^2 \nmid n$.

Proposition 1. *Pour tout premier q, la suite v_q n'est pas propre pour $T(p^2)$ dès que p est un premier impair différent de q.*

Démonstration. Soit $p \neq q$ impair. Comme $p \neq q$, on a $v_q(p^2 n) = v_q(n)$.
Premier calcul : $n = q$. Alors $a(q) = 1$, $p^2 \nmid q$, donc

$$b(q) = 1 + \frac{1}{p} f(q,p) = \left(1 + \frac{1}{p}\, f(q,p)\right)\, a(q).$$

Second calcul : $n = qu$. On choisit un entier u non multiple de p ni de q, avec $f(u,p) = -1$ (un non-résidu modulo p existe, et on peut ajuster u modulo q). Alors $a(qu) = 1$, $p^2 \nmid qu$ et $f(qu,p) = -f(q,p)$, donc

$$b(qu) = 1 - \frac{1}{p} f(q,p) = \left(1 - \frac{1}{p}\, f(q,p)\right)\, a(qu).$$

Comme $f(q,p) = \pm 1$, les deux rapports b/a diffèrent de $\dfrac{2}{p} \neq 0$. Il n'existe donc pas de constante ω_p telle que $b(n) = \omega_p\, a(n)$ pour tout n. □

Exemples pour $p = 3$.

	n	$b(n)/a(n)$
v_5	5	$1 + \frac{1}{3} f(5,3) = \frac{2}{3}$
v_5	10	$1 + \frac{1}{3} f(10,3) = \frac{4}{3}$
v_7	7	$1 + \frac{1}{3} f(7,3) = \frac{4}{3}$
v_7	14	$1 + \frac{1}{3} f(14,3) = \frac{2}{3}$

Proposition 2. *Aucune combinaison $a = \alpha v_5 + \beta v_7$ non nulle n'est propre pour $T(9)$.*

Démonstration. Avec $p = 3 : a(5) = a(10) = \alpha$, $b(5) = \dfrac{2}{3}\alpha$, $b(10) = \dfrac{4}{3}\alpha$. Une suite propre imposerait $b(5) = b(10)$ (même ω_3, même valeur a), donc $\alpha = 0$. Le même raisonnement avec $n = 7$ et $n = 14$ donne $\beta = 0$. □

On ne peut donc pas transformer v_5 en v_7, ni les fondre dans une troisième suite propre, avec les machines de Hecke $T(p^2)$.

Pourquoi. Les valuations sont *additives* : $v_q(mn) = v_q(m) + v_q(n)$. Une suite propre pour tous les $T(p^2)$ a un produit eulérien (théorème 2), donc une structure *multiplicative*. Elle doit en outre "voir" le comportement de n modulo p à travers $f(n, p)$, ce que les valuations ne font pas.

Ce qui reste vrai (séries de Dirichlet).

$$\sum_{n\geq 1} \frac{v_q(n)}{n^s} = \sum_{j\geq 1} \sum_{q^j | n} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \sum_{j\geq 1} q^{-js} = \frac{\zeta(s)}{q^s - 1}.$$

Donc

$$\sum_{n\geq 1} \frac{v_7(n)}{n^s} = \frac{5^s - 1}{7^s - 1} \sum_{n\geq 1} \frac{v_5(n)}{n^s},$$

et, en sommant sur tous les premiers, $\sum_n \Omega(n) n^{-s} = \zeta(s) \sum_p \dfrac{1}{p^s - 1}$.

Ce sont des relations exactes entre séries de Dirichlet, mais elles ne proviennent pas d'un opérateur de Hecke.

Concernant les articles de Deligne sur la conjecture de Weil

Il s'agit des deux articles de référence [1] et [2].

L'article II [2] contient le résultat de l'article I [1] et l'étend dans plusieurs directions.

L'article I démontre que, pour une variété projective et lisse X sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, les valeurs propres du Frobenius sur $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ sont des nombres algébriques dont tous les conjugués complexes ont pour valeur absolue $q^{i/2}$.

L'article II étudie la cohomologie à valeurs dans un faisceau. Son théorème principal (3.3.1) dit que, pour un morphisme $f\colon X_0 \to S_0$ de schémas de type fini sur $\mathbb{F}_q$ et un faisceau mixte $\mathcal{F}_0$ de poids $\leq n$ sur X_0, les faisceaux $R^i f_! \mathcal{F}_0$ sont mixtes de poids $\leq n+i$. Pour $\mathcal{F}_0 = \mathbb{Q}_\ell$ (de poids 0), on retrouve le résultat de I, avec "propre et lisse" à la place de "projectif et lisse". Si X_0 est propre et lisse et que $\mathcal{F}_0$ est lisse et ponctuellement pur de poids n, alors $H^i(X, \mathcal{F})$ est pur de poids $n+i$.

L'article contient aussi un théorème d'équidistribution (3.5), dont un cas particulier est l'analogue, pour un corps de fonctions, de la conjecture de Sato-Tate, la démonstration du théorème de Lefschetz difficile dans ce cadre (4.1.1) et un formalisme des faisceaux mixtes (§ 6). Deligne renvoie à SGA $4\frac{1}{2}$ [Sommes trigonométriques] pour les applications aux majorations de sommes trigonométriques.

L'article II ne se déduit pas de I : sa démonstration s'inspire des méthodes de I (pinceaux de Lefschetz, passage à $X \times X$ dans l'esprit de la méthode de Rankin) et y ajoute des arguments nouveaux (notamment une variante de la méthode de Hadamard-de la Vallée-Poussin).

Références

[1] P. Deligne, *La conjecture de Weil : I*, Publ. Math. IHÉS **43** (1974), 273-307.
https://www.numdam.org/item/PMIHES_1974__43__273_0/

[2] P. Deligne, *La conjecture de Weil : II*, Publ. Math. IHÉS **52** (1980), 137-252.
https://www.numdam.org/articles/10.1007/BF02684780/