Où se trouvait l'erreur dans l'énoncé Lean initial

IA CLAUDE pour Denise Vella-Chemla

23 juin 2026

1. L'énoncé tel qu'il avait été soumis à Numina

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 6 \text{ et } 2 \mid n,\ \exists p \in \mathbb{N},\ p \leq n/2,\ \forall q \in \mathbb{N},\ q \leq \sqrt{n} \text{ tel que}$$
$$\forall r \leq \sqrt{n},\ r \nmid q, \quad p \not\equiv 0 \pmod{q} \text{ et } p \not\equiv n \pmod{q}.$$

En fait, je n'avais pas fourni exactement ce prompt, j'avais mis des parenthésages pour indiquer que “il existe un (p tel que (pour tout q tel que pour tout r premier ne divisant pas q)), etc.”, r ne servait à rien pour rendre q premier, j'avais oublié une condition, de toute façon, la condition q premier n'est pas nécessaire pour que la formalisation en logique du premier ordre soit bien équivalente à CG, ce qui importe c'est que le système teste que les conditions souhaitées ne sont pas vraies par vacuité (l'ensemble vide vérifierait toutes les conditions souhaitées, mais il serait vide, or on souhaite démontrer l'existence d'un élément dans un ensemble, i.e. le fait que cet ensemble n'est pas vide).

2. Le problème

La partie surlignée en rouge,
$$\forall r \leq \sqrt{n},\ r \nmid q,$$
était censée exprimer “q est premier”. Mais telle qu'elle est écrite, elle est **auto-contradictoire** pour tout $q \leq \sqrt{n}$: en prenant $r = q$ lui-même (qui vérifie bien $r \leq \sqrt{n}$ puisque $q \leq \sqrt{n}$), on obtient la condition $q \nmid q$, qui est **toujours fausse** (tout entier se divise lui-même).

$$\underbrace{\forall r \leq \sqrt{n},\ r \nmid q}_{\text{en particulier pour } r=q} \quad \Longrightarrow \quad q \nmid q \quad (\text{faux, car } q \mid q \text{ toujours})$$

Conséquence : aucun q ne peut jamais satisfaire cette condition, quel que soit n. L'ensemble des q valides est donc *vide par construction*, et l'implication

$$\left[\forall r \leq \sqrt{n},\ r \nmid q\right] \to \left[p \not\equiv 0\ (q) \wedge p \not\equiv n\ (q)\right]$$

est **vraie “par vacuité”** (vacuous truth) pour tout p et tout q : la prémisse n'étant jamais satisfaite, l'implication ne dit plus rien.

3. Ce qu'il aurait fallu écrire

L'intention initiale était de quantifier sur les nombres premiers $r \leq \sqrt{n}$, et non sur tous les entiers :

$$\forall r,\ \left(r \text{ premier} \wedge 2 \leq r \leq \sqrt{n}\right) \to r \nmid q,$$

ou, en notation Lean (`Nat.Prime`) :

$$\forall\, r : \mathbb{N}, \quad r.\text{Prime} \to r \leq \sqrt{n} \to \neg(r \mid q).$$

Avec cette correction, la condition "q n'est divisible par aucun nombre premier $\leq \sqrt{n}$" redevient satisfiable (par exemple par les nombres premiers q eux-mêmes, ou par $q = 1$), et n'est plus vide par construction.

4. Pourquoi la preuve Lean a quand même "réussi"

L'agent Numina a exploité (sans le présenter comme un problème, mais en le signalant dans son raisonnement intermédiaire) le fait que l'ensemble des q valides était vide : un énoncé de la forme $\forall q,\ P(q) \to Q(p, q)$ est trivialement vrai si $P(q)$ est toujours faux, indépendamment de Q. La preuve Lean produite est donc *syntaxiquement correcte* mais *sémantiquement vide* : elle ne démontre rien sur la conjecture de Goldbach.

5. La reformulation proposée (sans piège identifié)

$$\forall n,\ n \geq 6 \wedge 2 \mid n \ \to\ \exists p,\ 3 \leq p \leq n/2 \ \wedge\ \forall q,\ 2 \leq q \leq \sqrt{n} \ \to\ p \not\equiv 0\ (q) \wedge p \not\equiv n\ (q)$$

Ici, on ne demande plus que q soit premier : on quantifie sur *tous* les entiers de 2 à $\sqrt{n}$. Cet ensemble de q n'est jamais vide pour $n \geq 6$ (il contient au moins $q = 2$), donc plus de piège de ce type. C'est d'ailleurs mathématiquement équivalent à la version "q premier" par l'argument du Lemme 1 de L. Schneps : un entier non divisible par aucun nombre premier $\leq \sqrt{n}$ n'est divisible par aucun entier (premier ou composé) $\leq \sqrt{n}$ non plus, puisque tout diviseur composé a lui-même un facteur premier plus petit.