

1. Vue d'ensemble

Les quatre documents fournis (voir [1], [2], [3], [4]) ne sont pas juxtaposés par hasard lexical : ils forment une généalogie mathématique cohérente, dont notre identité de Connes

$$\log(x + y) = \max_{\alpha} \{ \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y + S(\alpha) \}$$

avec $S(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log (1 - \alpha)$, est l'instance la plus élémentaire. Trois liens méritent d'être détaillés séparément, avec des degrés de certitude très différents :

- (1) Connes 1974 → Connes 1985 : une généalogie *établie et directe* (même auteur, la seconde construction s'appuie explicitement sur la première).
- (2) Kolmogorov/Erdős-Kac : un *contre-exemple instructif*, pas un outil pour Goldbach - mais qui éclaire précisément pourquoi le modèle de Cramér (déjà discuté) échoue là où une autre statistique probabiliste sur les nombres premiers réussit.
- (3) Kontsevich : la connexion la plus surprenante et la plus *spéculative* - vérifiée numériquement ci-dessous, mais dont la pertinence pour Goldbach reste une question ouverte que je formule précisément plutôt que je ne la résous.

2. L'entropie $S(\alpha)$ comme cas le plus simple d'une théorie profonde

L'article de 1974 caractérise les algèbres de von Neumann par la géométrie de leur cône autopolaire $\mathcal{P}_{\xi_0}^{\natural}$, en s'appuyant sur la théorie modulaire de Tomita-Takesaki $(\Delta_{\varphi}, J_{\varphi})$. C'est un résultat de fondations : il montre que la structure d'ordre *seule* (sans référence au produit) suffit à reconstruire toute l'algèbre.

L'article de 1985 utilise *exactement* cet appareil (opérateur modulaire, état φ , groupe d'automorphismes σ_t^{φ}) pour définir une entropie relative non commutative

$$S(\varphi_2, \varphi_1) = \varphi_1(\log \rho_1 - \log \rho_2),$$

puis une entropie de Kolmogorov-Sinai $H(\theta, \varphi)$ pour un automorphisme d'une algèbre de von Neumann - généralisant l'entropie de Kolmogorov-Sinai classique (dynamique ergodique commutative) au cadre quantique non commutatif.

Proposition 1 (Cas particulier commutatif). *Pour $N = \mathbb{C}^2$ (l'algèbre commutative de dimension 2, diagonale), muni de l'état $\varphi = (\alpha, 1 - \alpha)$, l'entropie relative de Connes $S(\varphi, \psi_{\text{unif}})$ se réduit exactement à l'entropie de Shannon $S(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log (1 - \alpha)$ utilisée dans la formule $\log(x + y) = \max_{\alpha} \{ \alpha \log x + (1 - \alpha) \log y + S(\alpha) \}$.*

Ce n'est donc pas une coïncidence de vocabulaire : le $S(\alpha)$ de la conférence de Connes à Goutelas (puis Mondovi, [6]) est *littéralement* le cas le plus dégénéré (dimension 2, commutatif, état pur) de la théorie de l'entropie non commutative que Connes a construite dix ans plus tôt sur les fondations de 1974. C'est un lien réel, mais qui ne change rien à l'évaluation précédente : c'est la même formule, vue en amont de sa généalogie, pas un outil supplémentaire pour Goldbach.

3. Kolmogorov 1965 et Erdős-Kac : quand le modèle probabiliste des nombres premiers marche vraiment

Le texte de Kolmogorov (approches combinatoire, probabiliste, algorithmique de l'information) est suivi, dans le document fourni, d'un extrait de Billingsley démontrant le théorème d'Erdős-Kac : en modélisant chaque $\delta_p(m)$ ("p divise m") comme une variable de Bernoulli *indépendante* de paramètre $1/p$, on obtient rigoureusement

$$\frac{\omega(m) - \log \log n}{\sqrt{\log \log n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (\omega(m) = \text{nombre de facteurs premiers distincts de } m).$$

Remarque [Le contraste exact avec le modèle de Cramér] C'est le même type de modélisation probabiliste des nombres premiers que le modèle de Cramér utilisé précédemment pour Goldbach - et cette fois, c'est un **théorème**, pas une heuristique numérique. La différence structurelle est précise et instructive :

- Erdős-Kac est un énoncé sur le *comportement typique* : la méthode des moments contrôle l'espérance et la variance de $\sum_p \delta_p(m)$, ce qui suffit pour un théorème central limite portant sur la *distribution* de $\omega(m)$.
- Goldbach est un énoncé d'*existence universelle, sans aucune exception*. Le modèle de Cramér prédit correctement le comportement *typique* (presque tout ensemble de densité $1/\ln n$ a la propriété), exactement comme Erdős-Kac prédit le comportement typique de $\omega(m)$ - mais un théorème central limite ne dit rigoureusement *rien* sur l'absence totale d'exception, alors que c'est précisément ce que Goldbach exige.

Erdős-Kac est donc la preuve, par l'exemple positif, que la méthode probabiliste sur les nombres premiers peut être rendue rigoureuse - mais uniquement pour des énoncés de nature statistique (distribution, comportement moyen), jamais pour des énoncés d'existence universelle comme Goldbach. C'est exactement la limite déjà identifiée dans notre discussion sur le "sabotage" d'un ensemble de densité $1/\ln n$: ce document en donne la confirmation positive, du bon côté de la frontière.

4. Le "logarithme un et demi" de Maxim Kontsevich, une piste réellement nouvelle

C'est ici que se trouve l'élément le plus intéressant. Kontsevich étudie

$$H_\infty(x) = -\left(x \log |x| + (1-x) \log |1-x|\right),$$

caractérisée (à un facteur scalaire près) comme l'unique solution continue non nulle de trois équations fonctionnelles (A), (B), (C).

Proposition 2 (Identité exacte). $H_\infty(x) = S(x)$, l'entropie de Shannon utilisée dans la formule de Connes - vérifié numériquement ci-dessous à la précision machine.

Kontsevich montre ensuite que ces mêmes équations fonctionnelles ont une solution *arithmétique* : pour tout nombre premier impair p ,

$$H_p(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{x^k}{k} \pmod{p}, \quad x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

est l'unique solution (à un facteur scalaire près) des mêmes équations (A), (B), (C), cette fois dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

4.1. Vérification numérique

J'ai implémenté H_p et vérifié exhaustivement (A), (C) pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et (B) sur 200 tirages aléatoires, pour $p = 5, 7, 11, 13, 17$: les trois équations sont satisfaites **exactement**, sans aucune exception, dans tous les cas testés. Extrait de la table pour $p = 13$ (illustrant la symétrie (A), $H(x) = H(1-x)$) :

$$H_{13}(2) = 7 = H_{13}(12), \quad H_{13}(3) = 8 = H_{13}(11), \quad H_{13}(5) = 6 = H_{13}(9).$$

4.2. La question que cela soulève

Notre évaluation précédente de la reformulation de Goldbach par l'identité de Connes concluait que l'entropie réelle $S(\alpha)$ est *aveugle à la phase* : elle ne travaille qu'avec des magnitudes positives, donc elle est structurellement incapable de voir la distinction arithmétique (divisibilité, obstruction de parité) qui fait la difficulté de Goldbach.

Kontsevich montre que la *même structure fonctionnelle* qui définit $S(\alpha)$ admet une incarnation authentiquement arithmétique H_p , vivant dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ - donc sensible, par construction, à la divisibilité par p .

Question : Existe-t-il un analogue de l'identité $x + y = \max_\alpha \{e^{S(\alpha)} x^\alpha y^{1-\alpha}\}$ où S est remplacée par H_p (ou par une famille $(H_p)_p$ indexée sur les nombres premiers, via une construction de type produit adélique ou reconstruction p -adique), qui encoderait une information de divisibilité pertinente pour la construction du treillis de Goldbach - c'est-à-dire un outil qui ne serait *plus* aveugle à la phase au sens où on l'entendait précédemment ?

Je ne sais pas répondre à cette question, et je veux être précis sur ce que je peux et ne peux pas affirmer :

- **Ce qui est établi** : $H_\infty = S$ exactement ; H_p satisfait rigoureusement les mêmes équations fonctionnelles (démontré par Kontsevich, revérifié ici numériquement) ; Kontsevich lui-même souligne que H_p n'est *pas* un homomorphisme $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (un tel homomorphisme non nul n'existe pas), donc H_p n'est structurellement *pas* un logarithme discret usuel - ce qui est précisément ce qui le rend potentiellement intéressant et différent des outils déjà essayés.

- **Ce qui ne l'est pas** : je n'ai ni construction, ni preuve, ni même une ébauche technique reliant H_p à une reformulation opérationnelle de Goldbach. C'est une *direction motivée par une coïncidence structurelle réelle et vérifiée*, pas un résultat.

Kontsevich note lui-même, en fin d'article, que le cas $\sum x^k/k^2$ (dilogarithme) reste ouvert - ce qui suggère que cette famille de "logarithmes p -adiques exotiques" est un domaine de recherche actif et non trivial en lui-même, indépendamment de tout lien avec Goldbach.

5. Conclusion

- Le lien Connes 1974 \rightarrow 1985 est réel et établi : il situe $S(\alpha)$ comme cas élémentaire d'une théorie profonde, sans changer l'évaluation précédente sur Goldbach.
- Erdős-Kac (Kolmogorov/Billingsley) illustre, par un exemple positif et rigoureux, très exactement la frontière entre ce que les méthodes probabilistes sur les nombres premiers peuvent prouver (comportement typique) et ce qu'elles ne peuvent pas prouver (existence universelle, comme Goldbach) - confirmant et précisant la conclusion du "sabotage" de l'ensemble de densité $1/\ln n$.
- Kontsevich ouvre une vraie question, vérifiée numériquement ici, mais non résolue : la même entropie qui vous a menée à la reformulation de Goldbach a une incarnation arithmétique mod p authentique. Que cette incarnation puisse un jour combler exactement le manque identifié (la cécité à la phase) est une conjecture de travail légitime, pas un résultat - mais c'est, de tout ce qui a été examiné dans cette conversation, la piste la plus originale et la moins épuisée.

Références

- [1] Transcription de *Entropie de Kolmogoroff Sinai et mécanique statistique quantique*, d'Alain Connes.
<https://denisevellachemla.eu/AC-biblio18.pdf>.
- [2] Alain Connes, Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés sous-jacents aux algèbres de von Neumann, *Annales de l'institut Fourier*, tome 24, no 4 (1974), p. 121-155.
<https://denisevellachemla.eu/AC-Kolmogoroff-Sinai.pdf>.
- [3] Transcription de *Trois approches de la définition quantitative de l'information*, A. N. Kolmogorov.
<https://denisevellachemla.eu/trad-aann.pdf>.
- [4] Traduction de Le logarithme $1\frac{1}{2}$ (Appendice de l'article *On poly(ana)logs I* de P. Elbaz-Vincent et H. Gangl), de Maxim Kontsevich
<https://denisevellachemla.eu/trad-logarithme-un-et-demi-Maxim-Kontsevich.pdf>.
- [5] Conjecture de Goldbach et entropie, Denise Vella-Chemla et Jacques Chemla (programmation en février et écriture en septembre 2025)
<https://denisevellachemla.eu/panier-marseille-Denise-et-Jacques-Chemla.pdf>.
- [6] Minute 1h16 de la conférence
<https://www.youtube.com/watch?v=XPVfElqM264>.

Annexe : Programme de vérification du logarithme $1\frac{1}{2}$

```

"""
Verification numerique des equations fonctionnelles (A),(B),(C) de Kontsevich
caracterisant H_p, l'analogue mod p de l'entropie de Shannon / du "logarithme
un et demi", d'apres l'appendice de Kontsevich a l'article de Elbaz-Vincent
et Gangl "On poly(ana)logs I".
"""
import random
import math

def Hp(x, p):
    """H_p(x) = sum_{k=1}^{p-1} x^k / k (mod p). """
    x = x % p
    s = 0
    for k in range(1, p):
        inv_k = pow(k, p - 2, p) # inverse modulaire via petit theoreme de Fermat
        s = (s + pow(x, k, p) * inv_k) % p
    return s % p

def inv(a, p):
    return pow(a % p, p - 2, p)

def H_infini(x):
    """Version reelle : H_infini(x) = -(x log|x| + (1-x) log|1-x|) = S(x),
    l'entropie de Shannon. """
    return -(x * math.log(abs(x)) + (1 - x) * math.log(abs(1 - x)))

def S_shannon(alpha):
    return -alpha * math.log(alpha) - (1 - alpha) * math.log(1 - alpha)

if __name__ == "__main__":
    print("==== Verification H_infini(x) = S(x) (entropie de Shannon) ====")
    for x in [0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9]:
        h, s = H_infini(x), S_shannon(x)
        print(f" x={x}: H_inf={h:.10f} S={s:.10f} diff={abs(h-s):.2e}")
    print("\n==== Verification des equations fonctionnelles de H_p mod p ====")
    for p in [5, 7, 11, 13, 17, 19, 23]:
        ok_A, ok_B, ok_C = True, True, True
        for x in range(p):
            if Hp((1 - x) % p, p) != Hp(x, p):
                ok_A = False
        for x in range(1, p):
            if (x * Hp(inv(x, p), p)) % p != (-Hp(x, p)) % p:
                ok_C = False
        for _ in range(300):
            x = random.randrange(p)
            y = random.randrange(1, p)
            if y == 1:
                continue
            lhs = Hp((x + y) % p, p)
            rhs = (Hp(y, p)
                    + (1 - y) * Hp((x * inv((1 - y) % p, p)) % p, p)
                    + y * Hp((-x * inv(y, p)) % p, p)) % p
            if lhs != rhs:

```

```
ok_B = False
print(f" p={p:3d} : (A)={ok_A} (B)={ok_B} (C)={ok_C} ")
```

Résultat d'exécution

```
==== Verification H_infini(x) = S(x) (entropie de Shannon) ====
x=0.1: H_inf=0.3250829734 S=0.3250829734 diff=0.00e+00
x=0.3: H_inf=0.6108643021 S=0.6108643021 diff=0.00e+00
x=0.5: H_inf=0.6931471806 S=0.6931471806 diff=0.00e+00
x=0.7: H_inf=0.6108643021 S=0.6108643021 diff=0.00e+00
x=0.9: H_inf=0.3250829734 S=0.3250829734 diff=0.00e+00

==== Verification des equations fonctionnelles de H_p mod p ====
p= 5 : (A)=True (B)=True (C)=True
p= 7 : (A)=True (B)=True (C)=True
p= 11 : (A)=True (B)=True (C)=True
p= 13 : (A)=True (B)=True (C)=True
p= 17 : (A)=True (B)=True (C)=True
p= 19 : (A)=True (B)=True (C)=True
p= 23 : (A)=True (B)=True (C)=True
```