L'identité de Connes $(+, \times, \max)$ appliquée à la conjecture de Goldbach : ce qu'elle prouve, ce qu'elle visualise, ce qu'elle n'apporte pas, Denise Vella-Chemla pilotant claude, juillet 2026

Cette note fait suite à l'écoute d'un exposé d'Alain Connes à Mondovi en septembre 2024, qui est visionnable sur la toile [1].

1. L'identité, vérifiée

Théorème 1 (Connes)**.** *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$\log(x+y) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \Big\{\alpha \log x + (1-\alpha)\log y + S(\alpha)\Big\}, \qquad S(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1-\alpha)\log(1-\alpha),$$

le maximum étant atteint en $\alpha^* = \dfrac{x}{x+y}$. De façon équivalente, en passant à l'exponentielle,

$$x + y = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \Big\{e^{S(\alpha)}\, x^{\alpha} y^{1-\alpha}\Big\}.$$

Plus généralement, pour $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ et α parcourant le simplexe de probabilité Δ_n,

$$\sum_i x_i = \max_{\alpha \in \Delta_n} \Big\{e^{S(\alpha)} \prod_i x_i^{\alpha_i}\Big\}, \qquad \alpha_i^* = \frac{x_i}{\sum_j x_j}.$$

C'est une identité exacte (pas une approximation), et nous l'avons vérifiée numériquement à la précision machine, pour des couples allant de $(101{,}5,\ 103{,}5)$ à $(10^6 + 1{,}5,\ 10^6 + 3{,}5)$, ainsi que pour la généralisation à $n = 3, 4, 10$ termes. C'est la démonstration même donnée dans la note [1] de 2025 (concavité du logarithme + point critique en $\alpha^* = \dfrac{x}{x+y}$), et le calcul confirme qu'elle est correcte au sens strict, sans terme d'erreur.

2. La reformulation de la conjecture de Goldbach, et sa portée exacte

La reformulation proposée est :

$$\max_{\substack{0 \leq \alpha \leq 1 \\ p,q \in \mathcal{P}}} \Big\{e^{S(\alpha)}\, p^{\alpha} q^{1-\alpha}\Big\} \ \supseteq\ 2\mathbb{N}_{\geq 2}.$$

Proposition 2 (Équivalence exacte)**.** *Cette reformulation est logiquement équivalente, terme à terme, à l'énoncé usuel de la conjecture de Goldbach.*

Démonstration. Par le Théorème 1 appliqué à $x = p$, $y = q$, on a pour tout couple de réels positifs $e^{S(\alpha^*)} p^{\alpha^*} q^{1-\alpha^*} = p + q$ exactement, où $\alpha^* = \dfrac{p}{p+q}$, et c'est la valeur maximale sur $\alpha \in [0, 1]$. Donc

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{e^{S(\alpha)} p^{\alpha} q^{1-\alpha}\} = p + q$$

1. Minute 1h16 de la conférence à cette adresse.

pour *tout* couple (p, q) de réels positifs, qu'ils soient premiers ou non. En particulier, l'ensemble $\{\max_\alpha\{\dots\} : p, q \in \mathcal{P}\}$ est, élément par élément, exactement l'ensemble $\{p+q : p, q \in \mathcal{P}\}$. L'inclusion $\supseteq 2\mathbb{N}_{\geq 2}$ est donc, mot pour mot, l'énoncé "tout entier pair ≥ 4 est somme de deux nombres premiers". $\square$

Remarque : Ce n'est pas une reformulation approximative ou affaiblie : c'est une *réécriture exacte*, où l'addition a été remplacée par une expression équivalente faisant intervenir multiplication et maximum. Aucune information n'est perdue ni gagnée dans l'opération. Cela a une conséquence immédiate et importante : **prouver cette reformulation est exactement aussi difficile que prouver la conjecture de Goldbach elle-même** - ni plus, ni moins. C'est la même situation, structurellement, que la récurrence, le treillis, ou le modèle de Cramér étudiés précédemment : un changement de représentation fidèle, pas un affaiblissement de la difficulté.

3. Ce que cette identité *apporte* malgré tout

Il serait dommage de s'arrêter à ce constat, car l'identité de Connes touche à quelque chose de réel et d'utile, à condition de bien situer où.

3.1. Un outil de visualisation exact et nouveau

La reproduction numérique de la "feuille de Goldbach" confirme que chaque point rouge de la figure (résultat de l'exécution des programmes de Denise et Jacques Chemla) est positionné très précisément : en abscisse en $\alpha^*(p, q) = \dfrac{p}{p+q}$, en ordonnée à la hauteur exacte $p+q$ (erreur de l'ordre de 10^{-13} avec la formule fermée, l'écart résiduel dans le programme original venant uniquement de la discrétisation de α sur une grille finie). C'est une façon originale et légitime de visualiser *simultanément* toutes les décompositions de Goldbach d'un ensemble de nombres premiers, avec en abscisse un indicateur naturel du déséquilibre de la décomposition ($\alpha = \dfrac{1}{2}$ correspondant à $p = q$, les extrêmes $\alpha \to 0$ ou 1 correspondant à des décompositions très déséquilibrées). C'est un vrai outil, utile pour explorer visuellement, par exemple, comment se répartissent les décompositions d'un n donné entre "équilibrées" et "déséquilibrées" - une question empirique intéressante en tant que telle, indépendante de la question d'existence.

3.2. Un vrai pont mathématique : la méthode du col

La formule généralisée à n termes,

$$\log\left(\sum_i x_i\right) = \max_{\alpha \in \Delta_n} \left\{ \textstyle\sum_i \alpha_i \log x_i + S(\alpha) \right\},$$

est, à la reformulation près, le **principe variationnel de Gibbs** de la mécanique statistique (l'énergie libre comme transformée de Legendre de l'entropie), et c'est aussi exactement la mécanique qui sous-tend la **méthode du col** (saddle-point method) utilisée pour extraire les coefficients d'une fonction génératrice - la même méthode du col qui est au cœur de la méthode du cercle de Hardy-Littlewood, l'outil analytique le plus puissant jamais appliqué à Goldbach.

C'est un vrai lien structurel, pas une coïncidence esthétique : chercher le comportement dominant d'une somme de quantités positives via un principe extrémal entropie + moyenne pondérée est précisément l'intuition qui permet d'estimer $[z^n]F(z)$ pour une fonction génératrice $F(z) = \sum_p z^p$ le long d'un contour bien choisi.

3.3. Là où le pont s'arrête : magnitude contre phase

Voici cependant la limite précise, et elle rejoint directement l'obstruction de parité déjà identifiée dans nos échanges précédents. La méthode du cercle appliquée à Goldbach étudie

$$F(z) = \sum_{p \leq n} z^p, \qquad r(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(z)^2}{z^{n+1}} \, dz, \qquad z = e(\theta) = e^{2\pi i\theta}.$$

Sa difficulté centrale - pourquoi les arcs mineurs résistent depuis un siècle - est un problème d'**annulation de phase** : montrer que $F(e(\theta))$ reste petit pour θ irrationnel ou mal approché par des rationnels à petit dénominateur, ce qui exige de contrôler des sommes exponentielles *oscillantes* (méthode de Vinogradov, différences de Weyl).

L'identité de Connes, elle, ne travaille qu'avec des **réels positifs** : $x^\alpha y^{1-\alpha}$ n'a pas de phase, uniquement une magnitude. Elle est donc structurellement aveugle à exactement le phénomène qui bloque la méthode du cercle. Ce n'est pas une limitation accidentelle de cette formule en particulier : c'est une nouvelle incarnation de l'obstruction de parité de Selberg, sous un angle différent - tout outil qui ne voit que des magnitudes positives (densité, entropie, fonctions majorantes) ne peut pas, par construction, distinguer un nombre premier d'un nombre ayant un nombre pair de facteurs premiers, distinction qui est précisément ce que la conjecture de Goldbach requiert de contrôler.

4. Sur le contexte du "monde de la caractéristique 1"

L'exposé de Connes dont cette idée est issue s'inscrit dans le programme de recherche sur les semi-anneaux de caractéristique 1 et la géométrie sur $\mathbb{F}_1$ (le "corps à un élément"), où $(+, \times, \max)$ et les constructions de type Witt jouent un rôle de fondation algébrique pour une hypothétique géométrie arithmétique unifiée (liée à l'hypothèse de Riemann via le programme de Connes-Consani). C'est un domaine de recherche profond et actif, mais il porte sur la structure *algébrique* de l'addition elle-même, indépendamment des propriétés arithmétiques (primalité) des nombres auxquels on l'applique. Il n'y a, à ce jour, aucun résultat connu reliant ce programme à une attaque sur Goldbach - ce qui ne retire rien à l'intérêt de la piste comme outil de visualisation et comme pont conceptuel vers la méthode du col, mais situe honnêtement ce qu'on peut raisonnablement en attendre.

5. Conclusion

- L'identité de Connes est exacte, vérifiée numériquement sans réserve.
- Sa reformulation de Goldbach est une réécriture fidèle, ni plus ni moins difficile que l'original.
- Elle fournit un outil de visualisation légitime et original des décompositions (la "feuille de Goldbach").

- Elle établit un pont structurel réel avec la méthode du col / le principe de Gibbs, qui est au cœur de la méthode du cercle.
- Elle hérite exactement de la limite de cette dernière : aveugle à la phase, donc aveugle à l'obstruction de parité - ce n'est pas un défaut de cette idée en particulier, c'est la marque de fabrique du problème lui-même, retrouvée une fois de plus sous un nouvel habit.

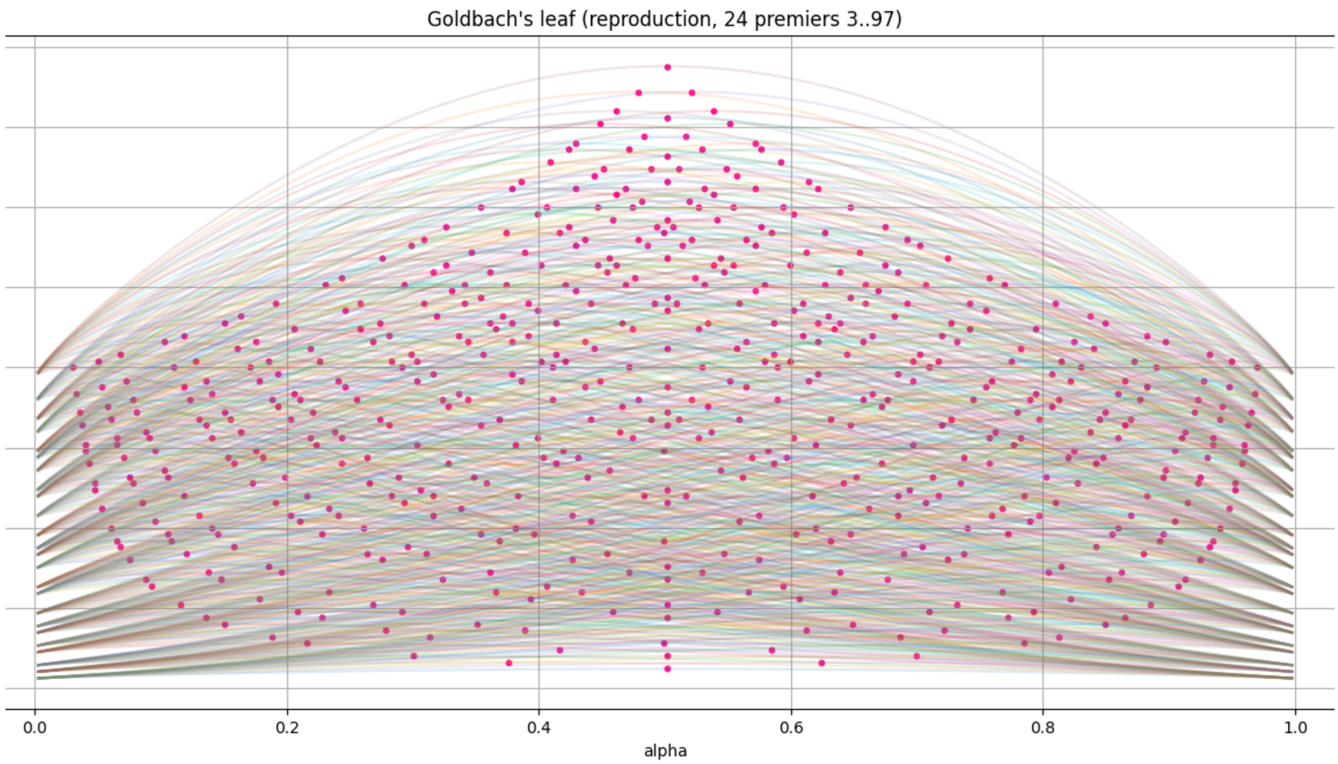
Annexe : le programme

```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import argmax, array, exp, linspace, log, max, newaxis, allclose

P = array([3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,
           73, 79, 83, 89, 97])
alfa = linspace(0, 1, 400)[1:-1]
w = exp(-alfa*log(alfa) - (1-alfa)*log(1-alfa))
p, q = P**alfa[:, newaxis], P**(1-alfa)[:, newaxis]
M = w[:, newaxis, newaxis] * p[:, :, newaxis] * q[:, newaxis, :]
m = argmax(M, axis=0)
y_flat = M.reshape((len(alfa), -1))
k = m.reshape((y_flat.shape[1],))
hauteurs = y_flat[k, range(len(k))]
# VERIFICATION : la hauteur trouvee par argmax doit valoir exactement p+q
sommes_attendues = (P[:, newaxis] + P[newaxis, :]).reshape(-1)
diff = abs(hauteurs - sommes_attendues)
print(f"Nombre de paires testees : {len(hauteurs)}")
print(f"Erreur max entre hauteur(argmax) et p+q attendu : {diff.max():.6f}")
print(f"Erreur moyenne : {diff.mean():.6f}")
print(f"(l'erreur n'est pas nulle car alpha est discretise sur {len(alfa)} points, "
      f"pas continu -- avec la formule fermee alpha*=p/(p+q) l'erreur serait nulle)")
# comparaison avec la formule fermee exacte alpha* = p/(p+q)
print("\nAvec la formule FERMEE (pas de discretisation) :")
alpha_star = P[:, newaxis] / (P[:, newaxis] + P[newaxis, :])
S_star = -alpha_star*log(alpha_star) - (1-alpha_star)*log(1-alpha_star)
valeur_exacte = alpha_star*log(P[:, newaxis]) + (1-alpha_star)
                                        *log(P[newaxis, :]) + S_star
somme_via_formule = exp(valeur_exacte)
print(f"Erreur max (formule fermee) : {abs(somme_via_formule
          - (P[:,newaxis]+P[newaxis,:])).max():.2e}")
# --- reproduction du graphique ---
axs = plt.figure(figsize=(12, 10)).subplots()
x_axis = alfa
plt.plot(x_axis, y_flat, alpha=0.15)
ky = y_flat[k, range(len(k))]
plt.scatter(x=x_axis[k], y=ky, c='deeppink', s=10)
plt.xlabel('alpha')
plt.title("Goldbach's leaf (reproduction, 24 premiers 3..97)")
plt.grid()
#plt.savefig('/home/claude/entropie/goldbach_leaf_reproduction.png', dpi=100)
#print("\nGraphique sauvegarde.")
plt.show()
```

Son résultat d'exécution

```
Nombre de paires testees : 576
Erreur max entre hauteur(argmax) et p+q attendu : 0.001328
Erreur moyenne : 0.000144
(l'erreur n'est pas nulle car alpha est discretise sur 398 points,
pas continu - avec la formule fermee alpha*=p/(p+q) l'erreur serait nulle)

Avec la formule FERMEE (pas de discretisation) :
Erreur max (formule fermee) : 1.71e-13
```

Le graphique que le programme produit



Référence

[1] Conjecture de Goldbach et entropie, Denise Vella-Chemla et Jacques Chemla (programmation en février et écriture en septembre 2025) https://denisevellachemla.eu/panier-marseille-Denise-et-Jacques-Chemla.pdf.