

1. Correction du calcul précédent

Le calcul précédent fondé sur une hypothèse simplifiée de longueur des intervalles était incorrect. Il faut repartir de la construction récursive effectivement décrite dans le document *L'ensemble de la Castafiore* (voir <https://denisevellachemla.eu/castafiore.pdf>).

À chaque niveau correspondant à un nouveau nombre premier p_k , chaque intervalle conservé donne deux intervalles conservés, placés à gauche et à droite du sous-intervalle central éliminé. Si t_{k-1} est la longueur au niveau précédent, les deux nouveaux intervalles ont la longueur

$$t_k = t_{k-1} \frac{p_k - 1}{2p_k}.$$

Ainsi, en partant du premier niveau non trivial,

$$t_k = \frac{1}{2} \prod_{j=2}^k \frac{p_j - 1}{2p_j},$$

avec la convention d'indexation correspondant à la construction.

Le nombre d'intervalles double à chaque étape :

$$M_k = 2^{k-1}.$$

2. Attention sur la formule imprimée dans le document original

Le document donne également une formule générale pour t_k . Les valeurs explicites de la construction récursive doivent être utilisées pour vérifier cette formule. En particulier, les exemples donnent successivement des longueurs

$$\frac{1}{6}, \quad \frac{2}{30} = \frac{1}{15}, \quad \frac{6}{210} = \frac{1}{35},$$

et la récurrence permet de poursuivre.

La conclusion ci-dessous utilise donc la récurrence géométrique effective plutôt qu'une formule générale non vérifiée.

3. Nombre de morceaux

Au niveau k , le nombre de morceaux conservés est

$$M_k = 2^{k-1}.$$

Donc

$$\log M_k = (k-1) \log 2.$$

4. Longueur d'un morceau

La relation de récurrence est

$$t_k = t_{k-1} \frac{p_k - 1}{2p_k}.$$

Par conséquent,

$$\log \frac{1}{t_k} = (k-1) \log 2 + \sum_{j=2}^k \log \frac{p_j}{p_j - 1} + O(1).$$

Or

$$\log \frac{p}{p-1} = -\log \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

Ainsi

$$\sum_{j=2}^k \log \frac{p_j}{p_j - 1} = \sum_{p \leq p_k} \frac{1}{p} + O(1).$$

Par le théorème de Mertens sur les nombres premiers,

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + B + o(1).$$

On obtient donc

$$\log \frac{1}{t_k} = k \log 2 + O(\log \log p_k).$$

5. Dimension obtenue par les échelles naturelles

Aux échelles naturelles t_k , le nombre de morceaux est $M_k = 2^{k-1}$. Le quotient structurel est

$$\frac{\log M_k}{\log(1/t_k)}.$$

Par les estimations précédentes,

$$\frac{\log M_k}{\log(1/t_k)} = \frac{(k-1) \log 2}{k \log 2 + O(\log \log p_k)} \longrightarrow 1.$$

Cela indique que la dimension fractale naturelle de la construction est

$$\boxed{\dim = 1}.$$

Pour transformer cette indication en démonstration complète de la dimension de Minkowski, il faut contrôler rigoureusement $N(E, \varepsilon)$ entre deux échelles successives, et pas seulement aux échelles t_k .

6. Mesure totale des morceaux

La longueur totale des intervalles conservés au niveau k est

$$L_k = M_k t_k.$$

À chaque étape, elle est multipliée par

$$1 - \frac{1}{p_k}.$$

On obtient donc, à une constante d'indexation près,

$$L_k \asymp \prod_{p \leq p_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Le théorème de Mertens donne

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log x}.$$

Par conséquent,

$$L_k \longrightarrow 0.$$

Le résidu limite a donc une mesure de Lebesgue nulle.

7. Phénomène obtenu

La construction présente ainsi le comportement

$$\boxed{\text{mesure de Lebesgue} = 0}$$

mais

$$\boxed{\text{dimension naturelle} = 1}.$$

Il ne faut pas confondre mesure et dimension : un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ peut avoir une mesure nulle et une dimension de Hausdorff égale à 1.

La dimension de Hausdorff vérifie toujours

$$\dim_H E \leq \underline{\dim}_M E \leq \overline{\dim}_M E.$$

Une preuve complète de $\dim_H E = 1$ nécessite donc également une borne inférieure indépendante pour la mesure ou le recouvrement, et ne doit pas être déduite uniquement du quotient aux échelles t_k .

8. Porosité

Le trou créé au niveau p_k a une taille relative de l'ordre de

$$\nu_k \asymp \frac{1}{p_k}.$$

Comme

$$p_k \longrightarrow \infty,$$

on a

$$\nu_k \longrightarrow 0.$$

L'ensemble de la Castafiore ne satisfait donc pas la porosité uniforme de type

$$\text{trou} \geq \nu R$$

avec un $\nu > 0$ indépendant de l'échelle, si cette estimation relative est bien celle de la construction.

La notion plus naturelle à étudier est une porosité à paramètre dépendant de l'échelle :

$$\nu_k \sim \frac{1}{p_k}.$$

9. Ce qu'il reste à démontrer

Pour une démonstration rigoureuse, il faut maintenant étudier les extrémités $a_{k,i}$ et $b_{k,i}$ de la construction et établir des bornes sur

$$N(E, \varepsilon),$$

le nombre minimal d'intervalles de longueur ε nécessaires pour recouvrir l'ensemble limite E .

Le calcul

$$\frac{\log M_k}{\log(1/t_k)} \rightarrow 1$$

est un indice très fort en faveur de la dimension 1, mais à lui seul il ne constitue pas encore une preuve complète de la dimension de Minkowski sur toutes les échelles.