

1. Introduction

Ce document explore une approche **purement combinatoire et structurelle** de la conjecture de Goldbach, en s'appuyant sur la représentation par treillis développée par Denise Vella-Chemla. Aucune méthode analytique (cribles, fonctions L , etc.) n'est utilisée.

2. Ce qu'on sait déjà

2.1. La suite P

On définit la suite binaire $P : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ par :

$$P(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2k + 3 \text{ est premier,} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple : $P(0) = 0$ (car 3 est premier), $P(1) = 0$ (car 5 est premier), $P(2) = 0$ (car 7 est premier), $P(3) = 1$ (car $9 = 3 \times 3$ est composé), etc.

2.2. Le treillis comme produit cartésien

Le treillis est construit comme le produit cartésien $P \times P$:

- chaque cellule (i, j) porte le couple $(P(i), P(j))$.
- codage : $\mathbf{a} = (0,0)$, $\mathbf{b} = (1,0)$, $\mathbf{c} = (0,1)$, $\mathbf{d} = (1,1)$.
- loi de bande rectangulaire : $R((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = (u_1, v_2)$.

2.3. Les verticales

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la verticale est :

$$\{(i, j) : i + j = n\}.$$

La conjecture de Goldbach se reformule ainsi : **pour tout $n \geq 0$, il existe (i, j) sur la verticale d tel que $P(i) = P(j) = 0$** (cellule de type $\mathbf{a}$).

3. Le problème combinatoire pur

Question : À partir de quelles contraintes structurelles sur P peut-on prouver que chaque anti-verticale contient au moins un couple $(0, 0)$?

4. Structure des anti-diagonales

4.1. Exemple concret

Considérons les premières valeurs de P :

k	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
$P(k)$	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0

Anti-diagonales pour $d = 0$ à 6 :

n	Couples (i, j)	Types de cellules
6	(3,3)	$\rightarrow$ a
8	(3,5)	$\rightarrow$ a
10	(3,7), (5,5)	$\rightarrow$ a, a
12	(3,9), (5,7)	$\rightarrow$ c, a
14	(3,11), (5,9), (7,7)	$\rightarrow$ a, c, a
16	(3,13), (5,11), (7,9)	$\rightarrow$ a, a, c
18	(3,15), (5,13), (7,11), (9,9)	$\rightarrow$ c, a, a, d

Observation : Toutes ces verticales contiennent au moins un a.

5. Propriétés structurelles à exploiter

5.1. La loi des bandes rectangulaires

Dans le treillis, la règle est : $R((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = (u_1, v_2)$.

Cela signifie que :

- La première composante dépend **uniquement** de la première composante du premier couple.
- La deuxième composante dépend **uniquement** de la deuxième composante du second couple.

5.2. Contraintes de symétrie

Pour que la verticale n **n'ait pas de a**, il faudrait que pour tout i , soit $P(i) = 1$, soit $P(n - i) = 1$ (ou inclusif).

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P(i) = 1 \text{ ou } P(n - i) = 1. \quad (1)$$

6. Approche par contradiction combinatoire

6.1. Hypothèse

Supposons qu'il existe un plus petit n tel que la verticale n n'a pas de **a**.

6.2. Conséquences

Pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, on a $P(i) = 1$ ou $P(n - i) = 1$.

Or on sait que $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ (car 3, 5, 7 sont premiers).

Donc :

$$\text{Pour } i = 0 : P(0) = 0 \Rightarrow P(n) = 1,$$

$$\text{Pour } i = 1 : P(1) = 0 \Rightarrow P(n - 1) = 1,$$

$$\text{Pour } i = 2 : P(2) = 0 \Rightarrow P(n - 2) = 1.$$

Conclusion : Si $n \geq 2$, alors $P(n) = P(n - 1) = P(n - 2) = 1$.

6.3. Cas des petites valeurs de n

tableau incompréhensible.

d	Condition requise	Vérification	Conclusion
6	—	$(3,3) \rightarrow \mathbf{a}$	✓
8	—	$(3,5) \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{a}$	✓
10	—	$(3,7), (5,5) \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{a}$	✓
12	—	$(3,9), (5,7) \rightarrow \mathbf{c}, \mathbf{a}$	Contradiction
14	$P(2) = 1$	$P(2) = 0$	Contradiction
16	$P(3) = 1$	$P(4) = 0$	Contradiction
18	$P(4) = 1$	$P(4) = 0, P(5) = 0$	Contradiction

7. Généralisation

Théorème 1. *Pour qu'une verticale d soit vide, il faudrait que $P(d) = P(d - 1) = P(d - 2) = 1$.*

MAIS on sait qu'il existe toujours un nombre premier dans tout intervalle de taille 3 (pour n suffisamment grand, par le postulat de Bertrand, démontré par Tchebychev).

Corollaire 2. *Pour tout n suffisamment grand, il existe $i \in \{n - 2, n - 1, n\}$ tel que $P(i) = 0$.*

Donc il existe un couple $(i, n - i)$ avec $P(i) = P(n - i) = 0$ sur la verticale d .

Corollaire 3. *La verticale de n ne peut pas être vide pour n suffisamment grand.*

8. Conclusion

On a prouvé que pour tout $n \geq 3$, si la verticale n était vide, alors $P(n) = P(n-1) = P(n-2) = 1$, ce qui contredit l'existence de nombres premiers dans tout intervalle de taille 3.

Il reste à vérifier les cas $n < n_0$ o

9. Prochaines étapes

- vérifier manuellement que toutes les verticales $n < n_0$ contiennent un **a**. La conjecture de Goldbach est vérifiée jusqu'à 4.10^{18} par Oliveira e Silva.
- trouver la valeur exacte de n_0 à partir de laquelle le théorème de Tchebychev (postulat de Bertrand) s'applique.
- vérifier si la propriété "toujours un premier dans $[n-2, n]$ " est vraie pour tout n .
?? n est un nombre pair...