

1. Résumé

Prenant acte du fait que la conjecture de Goldbach est vérifiée empiriquement jusqu'à 4×10^{18} , l'approche par contre-exemple direct est vaine. Nous formalisons ici le treillis de Goldbach à rebours : en considérant l'espace global des configurations régies par les contraintes de la suite de primalité P et en étudiant l'impossibilité topologique d'une fibre vide sur les anti-diagonales, via la théorie des sous-shifts de type fini (SFT).

2. Introduction et positionnement méthodologique

Puisque l'exploration exhaustive ou la recherche d'un contre-exemple local est contredite par l'immense vérification numérique de la conjecture (jusqu'à 4×10^{18}), la démarche ne consiste pas à chercher une défaillance, mais à démontrer qu'un tel échec est structurellement interdit par la dynamique du système.

Nous nous plaçons donc dans le cadre des **sous-shifts de type fini (SFT)** formalisés par Lind et Marcus¹, en considérant le treillis non comme un simple tableau arithmétique, mais comme un espace de configurations bidimensionnel contraint.

3. Le treillis comme sous-shift de type fini (SFT) bidimensionnel

Soit $P : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ la suite binaire caractéristique, où $P(k) = 0$ si $2k + 3$ est premier, et 1 sinon. Le produit cartésien $X = P \times P$ s'inscrit dans l'espace des configurations $\{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$.

Définition 1 (Espace de configurations du treillis). *Le treillis de Goldbach $\mathcal{T}$ est le sous-ensemble de $\{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ obtenu par application de la règle de projection rectangulaire :*

$$R((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = (u_1, v_2)$$

soumis aux contraintes intrinsèques de la suite P (telles que l'interdiction de certains motifs locaux d'ordre supérieur en l'occurrence l'interdiction sauf au début du motif 000 dans la suite P , par analogie avec les restrictions de type Penrose comme “un 1 est toujours suivi d'un 0” ou les règles d'évitement de blocs de zéros).

Puisque ces contraintes locales de la suite P excluent un ensemble fini de motifs rectangulaires de taille $k \times k$, l'espace $\mathcal{T}$ forme rigoureusement un **sous-shift de type fini de dimension 2** (2D-SFT).

1. Voir *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Douglas Lind et Brian Marcus, Cambridge University Press, 1995.

4. L’anti-diagonale comme coupe finie et contrainte de non-vacuité

Pour un nombre pair n fixé, les décompositions de Goldbach correspondent exactement aux points de l’anti-diagonale (la fibre) :

$$\mathcal{F}_n = \left\{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = \frac{n-6}{2} \right\}$$

La condition de Goldbach s’écrit alors :

$$\forall n \geq 8, \quad \mathcal{F}_n \cap \left(P^{-1}(\{0\}) \times P^{-1}(\{0\}) \right) \neq \emptyset$$

C’est-à-dire qu’il existe au moins un couple $(i, j) \in \mathcal{F}_n$ tel que le symbole conjoint soit $(0, 0)$.

4.1. Pourquoi la fibre ne peut s’annuler

Dans un SFT, les configurations globales sont régies par des lois de transition qui lient les lignes, les colonnes et les diagonales.

Proposition 2 (rigidité de non-vacuité). *Si un 2D-SFT possède une entropie topologique positive et respecte la densité asymptotique globale dictée par le théorème des nombres premiers (via la répartition de P), alors l’ensemble des coupes diagonales $\mathcal{F}_n$ ne peut contenir de fibre strictement vide de couples $(0, 0)$ pour n supérieur à un seuil, sous peine de violer la compatibilité globale du shift.*

Autrement dit, la structure en bandes rectangulaires couplée au fait que $L = R = P$ agit comme un réseau rigide : les zéros ne peuvent pas “esquiver” toutes les anti-diagonales simultanément sans rompre les invariants topologiques du SFT.

5. Conclusion et perspectives

En abandonnant la recherche illusoire d’un contre-exemple (démenti par l’expérience numérique massive), la formalisation en SFT permet de poser le problème de Goldbach comme un théorème de structure topologique : *la compatibilité globale du sous-shift bidimensionnel interdit l’existence d’une anti-diagonale entièrement dépourvue de la configuration $(0, 0)$.*

C’est cette voie rigoureuse, ancrée dans la dynamique symbolique, qu’il conviendra de formaliser analytiquement par la suite.