

1. Résumé

Suite à l'analyse géométrique et algébrique du treillis de Goldbach modélisé comme un produit cartésien filtré par une loi de bande rectangulaire, cette note explore les voies alternatives aux cribles analytiques traditionnels. Nous formalisons ici les bases des Pistes 2 et 3 : la pression de la structure sur la répartition des valeurs (dynamique symbolique et sous-shifts) et l'étude des invariants de rigidité algébrique pour le carré d'un même ensemble $L = R = P$.

2. Introduction et positionnement du problème

Le treillis de Goldbach, formalisé par l'interaction entre la suite binaire de primalité P et la géométrie des anti-diagonales $i + j = d$, confère au problème de Goldbach un cadre topologique. Comme souligné par l'auteur, l'utilisation des méthodes de cribles classiques se heurte à des sentiers déjà largement arpentés par la théorie analytique des nombres.

Il convient donc d'explorer des voies strictement structurelles, en examinant si la nature même de l'opération algébrique (la bande rectangulaire) couplée à la nature de la suite P exerce une contrainte globale (une *pression* structurelle) ou si des invariants algébriques spécifiques au cas particulier $L = R$ peuvent contraindre l'existence de la solution $a = (0, 0)$.

3. Piste 2 : Pression de la structure, dynamique symbolique et sous-shifts

Plutôt que d'évaluer la densité par des probabilités analytiques, la piste dynamique consiste à étudier le treillis comme un espace de configurations régies par des règles de transition.

3.1. Le produit cartésien filtré comme sous-shift

Soit $P : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ la suite caractéristique des nombres premiers impairs (où $P(k) = 0$ si $2k + 3$ est premier, et 1 sinon). Le produit cartésien $P \times P$ muni de la loi de bande rectangulaire :

$$R((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = (u_1, v_2)$$

génère un ensemble de matrices binaires dont les anti-diagonales représentent les décompositions de Goldbach pour chaque entier pair n .

Proposition 1 (Contrainte de voisinage). *L'observation empirique de l'absence de certains motifs locaux (tels que le motif 000 dans certaines projections) se traduit topologiquement par le fait que le sous-espace généré par le treillis n'est pas le produit libre complet $\{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, mais un **sous-shift de type fini** (SFT).*

3.2. Formalisation de la “pression” structurelle

On peut modéliser l’effet de la loi R comme un opérateur de transfert ou un filtre projectif. Soit $\mathcal{F}_n$ la fibre correspondant à l’anti-diagonale $i + j = \frac{n-6}{2}$.

La question centrale de la Piste 2 est de démontrer que l’application de la structure de bande rectangulaire sur la suite P (qui possède des propriétés d’évitement de progressions arithmétiques locales) engendre un champ de contraintes tel que :

$$\forall n \geq 8, \quad \mathcal{F}_n \cap \{(0, 0)\} \neq \emptyset$$

En termes dynamiques, l’entropie topologique du sous-shift contraint par la géométrie du treillis interdit l’existence de fibres totalement vides de zéros, non par un argument de grand nombre, mais par rigidité combinatoire locale.

4. Piste 3 : Invariants de rigidité algébrique pour $L = R$

La théorie générale des bandes rectangulaires (étudiée par Galbiati, Veronesi, Gigon, ou Wismath à travers les hyperidentités) traite généralement de semi-groupes $L \times R$ où L et R sont des ensembles (alphabets) indépendants.

Dans notre structure de Goldbach, nous avons une contrainte beaucoup plus forte :

$$L = R = P$$

C’est-à-dire que le même ensemble et la même suite alimentent simultanément les deux axes du produit cartésien.

4.1. Congruences spécifiques au carré diagonal

Soit $\mathcal{B} = P \times P$ muni de la multiplication rectangulaire. Dans une bande rectangulaire générale, les congruences sont bien caractérisées par des partitions des ensembles facteurs. Lorsque $L = R$, les relations d’équivalence compatibles avec la structure doivent respecter l’isomorphisme diagonal.

Théorème 2 (Hypothèse de saturation structurelle). *Si $L = R = P$, l’ensemble des endomorphismes de la bande rectangulaire est restreint par l’autodualité du produit. Toute projection sur une anti-diagonale $\mathcal{F}_n$ hérite d’une structure de treillis modulaire ou distributive induite par les propriétés de congruence de P .*

4.2. Vers un invariant topologique

La piste algébrique consiste à chercher un invariant $I(\mathcal{B})$ calculable sur la structure algébrique de la bande rectangulaire contrainte par $L = R = P$, tel que :

$$I(\mathcal{B}) = 0 \implies \exists d, \mathcal{F}_d = \emptyset$$

Puisque l’on sait empiriquement que le treillis ne présente pas de colonne vide, la démonstration que cet invariant est structurellement incompatible avec une fibre vide (pour des raisons purement algébriques liées à l’autodualité de $P \times P$) constituerait une approche de type algébrique pur, s’affranchissant des cribles analytiques.

5. Conclusion et perspectives

Ces deux pistes (dynamique symbolique et algèbre des bandes rectangulaires contraintes par $L = R$) déplacent le problème de l'arithmétique pure vers la combinatoire structurelle. La Piste 2 privilégie l'étude de l'interdiction de motifs par l'entropie du treillis, tandis que la Piste 3 cherche une propriété de saturation algébrique inhérente au fait que la suite P se croise elle-même.