

1. Introduction

Cette note fait suite au *Bilan de l'interaction avec 5 ia* (19 juillet 2026)

<https://denisevella-chemla.eu/cinqiaquatrecodes.pdf> ,

dans laquelle gemini proposait trois pistes de continuation pour la conjecture : une piste de *densité*, une piste de *spectralité et répartition*, et une piste d'*invariants de rigidité*.

L'objet de la présente note est de préciser ce que recouvrent concrètement ces trois pistes, d'en vérifier numériquement une, et de conclure sur leur degré de viabilité. Elle clôt, provisoirement sans doute, cette série d'échanges.

2. Densité et spectralité : une seule et même piste

2.1. La méthode du cercle

Les pistes 1 et 2 de gemini ne sont pas deux directions distinctes : ce sont deux visages d'un seul et même outil, connu depuis un siècle sous le nom de *méthode du cercle* de Hardy et Littlewood. Soit

$$S(\alpha) = \sum_{p \leq n} e(p\alpha), \quad e(x) := e^{2i\pi x},$$

la transformée de Fourier de la suite de primalité. Le nombre de décompositions de Goldbach de n s'écrit alors

$$r(n) = \int_0^1 S(\alpha)^2 e(-n\alpha) d\alpha.$$

On découpe $[0, 1]$ en *arcs majeurs* (voisinages des rationnels $\frac{a}{q}$ à petit dénominateur q) et *arcs mineurs* (le reste). Les arcs majeurs fournissent une prédiction explicite : c'est la piste "densité" de gemini, sous la forme de la conjecture de Hardy–Littlewood

$$r(n) \sim 2C_2 \left(\prod_{\substack{p|n \\ p \text{ impair}}} \frac{p-1}{p-2} \right) \int_4^n \frac{dt}{(\ln t)^2},$$

avec $C_2 \approx 0,6602$ (constante des nombres premiers jumeaux).

Les arcs mineurs sont conjecturalement négligeables devant cette prédiction ; c'est précisément le point qui résiste depuis 1742 dans le cas pair. Pour le problème ternaire (somme de trois nombres premiers), Vinogradov (1937) puis Helfgott (2013, version complètement effective) ont su contrôler suffisamment les arcs mineurs pour obtenir une preuve inconditionnelle. Pour le cas binaire, on ne dispose que de résultats partiels, dont le théorème de Chen (1973) : tout nombre pair suffisamment grand est somme d'un nombre premier et d'un nombre premier ou semi-premier.

2.2. Vérification numérique

Le calcul exact de $r(n)$ pour de nombreux n à la fois se fait naturellement par autoconvolution (via FFT) de la suite indicatrice de primalité : c’est la version discrète et calculatoire exacte de la piste “spectralité”. On a tamisé les nombres premiers jusqu’à 300 000, calculé $r(n)$ exactement par cette autoconvolution, et comparé à la prédiction de Hardy–Littlewood, sous sa forme brute $\frac{n}{(\ln n)^2}$ et sous une forme affinée (intégrale logarithmique, comme pour $\text{Li}(x)$ en théorie des nombres premiers).

n	$r(n)$ exact	prédiction brute	ratio	prédiction affinée	ratio
100	12	8,3	1,45	14,7	0,82
1 000	56	36,9	1,52	57,7	0,97
10 000	254	207,5	1,22	282,2	0,90
100 000	1 620	1328,2	1,22	1661,6	0,98
200 000	2 834	2363,2	1,20	2905,9	0,97
300 000	7 830	6641,0	1,18	8094,0	0,97

TABLE 1 – Comptage exact de $r(n)$ (paires ordonnées) contre prédiction de Hardy–Littlewood.

La version affinée colle à quelques pourcents près dès $n = 1\,000$.

Le bond entre 200 000 et 300 000 n’est pas un artefact : $200\,000 = 2^6 \cdot 5^5$ n’a que 5 comme facteur premier impair, tandis que $300\,000 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^5$ a aussi le facteur 3, ce qui augmente le produit $\prod \frac{p-1}{p-2}$. La formule “sait” que les entiers ayant beaucoup de petits facteurs premiers ont plus de décompositions de Goldbach, et cela se vérifie numériquement.

Remarque : cette vérification confirme un fait déjà bien établi (le projet de vérification informatique de la conjecture est allé jusqu’à 4×10^{18} sans contre-exemple) : elle ne constitue en rien un élément de preuve nouveau. Ce qui manque n’est pas une meilleure heuristique de densité - on la possède déjà, et elle est excellente empiriquement - mais une preuve rigoureuse que les arcs mineurs ne peuvent jamais compenser entièrement cette prédiction, pour tout n pair sans exception.

3. La piste rigidité : une impasse structurelle

Gemini suggère qu’un invariant tiré de la seule structure de bande rectangulaire du treillis à 16 règles pourrait forcer l’existence d’une case $\mathbf{a} = (0, 0)$ sur chaque anti-diagonale. On montre que cette piste ne peut pas aboutir en l’état.

Proposition 1. *La structure de bande rectangulaire du treillis à 16 règles ne contient, par construction, aucune information au-delà de ce que portent déjà les deux suites de primalité placées aux deux bords (horizontale et diagonale).*

Démonstration. C’est l’identité qui définit la structure de bande rectangulaire, déjà mise en évidence le 19 juillet :

$$xyz = xz \quad (x, y, z \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}),$$

c'est-à-dire que le terme intermédiaire d'une composition ne compte pas ; seuls le premier et le dernier facteur déterminent le résultat. Appliquée au treillis, cette identité signifie que la composition des 16 règles ne peut structurellement rien ajouter à ce que portent déjà les deux processus de bord. $\square$

Remarque : c'est exactement ce qu'un "invariant de rigidité" purement algébrique devrait apporter : une contrainte supplémentaire, absente de l'arithmétique brute des deux suites de bord, qui forcerait la rencontre $(0,0)$. La proposition ci-dessus montre qu'une telle contrainte ne peut pas exister dans cette structure précise : on ne peut pas en tirer plus que ce qu'on y a mis. Pour que la piste rigidité redevienne féconde, il faudrait donc réinjecter la densité arithmétique des nombres premiers - et l'on retombe alors sur la piste densité/spectralité de la section 2, qui n'a pas besoin, elle, de cette médiation algébrique.

4. Conclusion

Sur les trois pistes proposées par gemini, une seule est réellement féconde, et elle ne constitue pas une direction nouvelle : densité et spectralité sont deux formulations d'une seule méthode, connue et étudiée depuis Hardy et Littlewood (1923), qui a produit des résultats partiels majeurs (Vinogradov 1937, Montgomery–Vaughan 1975, Chen 1973, Helfgott 2013) sans résoudre le cas binaire. La reformulation en langage de treillis, aussi élégante soit-elle, ne change rien à la nature du problème restant : contrôler rigoureusement les arcs mineurs pour tout n pair. La piste de rigidité algébrique, quant à elle, est fermée par construction : la tautologie de la bande rectangulaire interdit qu'elle produise, seule, la contrainte recherchée. Ceci ne retire rien à l'intérêt de la démarche menée ce mois-ci : la reformulation du treillis comme carré $P \times P$ d'une bande rectangulaire est une clarification conceptuelle réelle, et la mise en évidence de sa vacuité informationnelle (la tautologie $xyz = xz$) est, en creux, un résultat négatif propre et utile - il indique clairement où *ne pas* chercher.

Références

1. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio Numerorum' III : on the expression of a number as a sum of primes*, Acta Mathematica, 44, 1922.
<https://scispace.com/pdf/some-problems-of-partitio-numerorum-iii-on-the-expression-of-dzif9s4zs2.pdf>
2. I. M. Vinogradov, *Representation of an odd number as a sum of three primes*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 15, no. 6–7 (1937), 291–294.
3. H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *The exceptional set in Goldbach's problem*, Acta Arithmetica, 1975.
<https://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa27/aa27126.pdf>
4. J. R. Chen, *On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica, 1973.
<https://www.sciengine.com/Math%20A0/doi/10.1360/ya1973-16-2-157>
5. H. A. Helfgott, *The ternary Goldbach conjecture is true*, arXiv :1312.7748, 2013.
<https://arxiv.org/pdf/1312.7748>