

1. Une reformulation combinatoire du treillis de Goldbach

Le treillis étudié ici n'est pas le produit cartésien complet des nombres impairs avec eux-mêmes.

Pour chaque entier pair $n \geq 6$, on considère uniquement les décompositions

$$n = p + q$$

où p et q sont impairs, avec

$$3 \leq p \leq q.$$

La condition $p \leq q$ évite de compter deux fois une même décomposition, tandis que l'exclusion de 1 et de 2 est naturelle puisque seuls les impairs supérieurs ou égaux à 3 peuvent intervenir dans une décomposition de Goldbach.

On définit alors l'application somme

$$\Sigma(p, q) = p + q.$$

Pour chaque entier pair n , on appelle

$$F_n = \{(p, q) ; p + q = n, 3 \leq p \leq q\}$$

la fibre tronquée de Σ .

Géométriquement, F_n est exactement la n -ième colonne du treillis.

La conjecture de Goldbach s'énonce alors très simplement :

Pour tout entier pair $n \geq 6$, la fibre tronquée F_n contient au moins un couple (p, q) dont les deux composantes sont premières.

Cette formulation fait apparaître le treillis comme une famille de fibres d'une même application, plutôt que comme un simple tableau de décompositions.

Le passage à la suite booléenne

$$P(k) = \begin{cases} 0, & 2k + 3 \text{ premier,} \\ 1, & \text{sinon,} \end{cases}$$

n'intervient qu'ensuite : il permet de colorer les points de chaque fibre, sans modifier la géométrie sous-jacente.

Le problème devient alors le suivant : quelles propriétés combinatoires de la suite P suffisent à garantir que chacune des fibres tronquées F_n rencontre l'ensemble des couples de deux nombres premiers ?

La propriété élémentaire selon laquelle le motif 000 n'apparaît jamais dans la suite P est une première contrainte locale. Les expériences menées jusqu'à présent montrent toutefois qu'elle est insuffisante. Le programme de recherche consiste donc à identifier d'autres contraintes locales, indépendantes, puis à étudier leur influence sur les intersections entre les fibres tronquées F_n et l'ensemble des couples de nombres premiers.