

1. Résumé

Ce document résume deux échanges entre Denise Vella-Chemla et l'ia deepseek, concernant l'utilisation d'un treillis géométrique pour modéliser la conjecture de Goldbach. L'accent est mis sur une propriété spécifique de la suite des nombres premiers : l'absence de trois zéros consécutifs après le triplet (3,5,7). Nous examinons si cette propriété pourrait aider à une démonstration, et nous concluons qu'elle est insuffisante à elle seule. Nous discutons également des enseignements tirés des documents soumis par Denise, notamment les contre-exemples de l'ia Claude.

2. Contexte et modèle du treillis

Denise Vella-Chemla a développé un modèle géométrique pour la conjecture de Goldbach, basé sur un treillis infini constitué de trois familles de droites :

- des horizontales,
- des diagonales,
- des verticales.

Les horizontales et les diagonales portent une copie de la suite binaire $P = (P(0), P(1), P(2), \dots)$, définie par

$$P(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k+3 \text{ est premier,} \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chaque cellule à l'intersection d'une horizontale i et d'une diagonale j reçoit le couple $(P(i), P(j))$. Les verticales sélectionnent les sommes $i+j = d$, où $d = \frac{n-6}{2}$ pour un entier pair n . La conjecture de Goldbach équivaut à l'existence, pour tout $d \geq 0$, d'un couple (i, j) tel que $i+j = d$ et $P(i) = P(j) = 0$.

3. La propriété “pas trois zéros consécutifs”

3.1. Énoncé et preuve

Pour la suite P associée aux nombres premiers de la forme $2k+3$, on a :

$$P(0) = P(1) = P(2) = 0 \quad (\text{pour } 3, 5, 7),$$

et pour tout $k \geq 3$, il n'existe pas trois entiers consécutifs $k, k+1, k+2$ tels que $P(k) = P(k+1) = P(k+2) = 0$.

La raison est élémentaire : parmi trois nombres impairs consécutifs $2k+3, 2k+5, 2k+7$, l'un est divisible par 3. Pour qu'il soit premier, il doit être égal à 3, ce qui ne se produit que pour $k = 0, 1, 2$.

3.2. Insuffisance de cette propriété

Le contre-exemple de l'ia claudes pour $n = 40$ est :

$$Z = \{0, 2, 5, 9, 13, 16\}.$$

Cet ensemble vérifie :

- $0 \in Z$ (condition de bord due à la primalité de 3),
- aucune paire $\{i, 17-i\}$ n'est entièrement contenue dans Z (donc pas de collision symétrique),
- il ne contient aucun triplet de nombres consécutifs.

Pourtant, la colonne correspondante ne contient aucun état $a = (0, 0)$. Cela démontre que l'absence de triplets de zéros consécutifs, même combinée avec la saturation du bord, ne suffit pas à garantir l'existence d'une décomposition de Goldbach.

4. Analyse des documents soumis

Les documents

<https://denisevellachemla.eu/e4-chatgpt-dvc-20260719.pdf> ,

<https://denisevellachemla.eu/e4-claude-dvc-20260719.pdf> ,

<https://denisevellachemla.eu/e4-deepseek-dvc-20260719.pdf> et

<https://denisevellachemla.eu/e4-mistral-dvc-20260719.pdf>

ont été analysés.

4.1. claudes

Claude a construit un contre-exemple explicite pour $n = 40$, montrant qu'une suite admissible Z de densité réaliste ($\approx \frac{1}{3}$) peut éviter toute collision symétrique. Ce contre-exemple satisfait l'hypothèse de saturation du bord ($0 \in Z$) et ne contient pas de triplets de zéros consécutifs. Il invalide donc les preuves fondées sur la seule rigidité du treillis.

4.2. deepseek

Deepseek a rappelé que la suite des nombres premiers possède des propriétés arithmétiques bien plus fortes que la simple densité, comme la répartition en progressions arithmétiques (théorème de Dirichlet). Il a souligné que toute preuve doit utiliser ces propriétés, et non des arguments purement combinatoires.

4.3. mistral

Mistral a formalisé la condition de coïncidence symétrique comme le cœur du problème, et a proposé une approche hybride mêlant structure du treillis et propriétés arithmétiques.

4.4. chatgpt

Chatgpt a confirmé que la propriété "pas trois zéros consécutifs" est vraie mais trop faible, et qu'elle est vérifiée par le contre-exemple de claudes.

5. Conclusion sur la propriété “pas trois zéros consécutifs”

Cette propriété est une spécificité arithmétique de la suite des nombres premiers, mais elle ne permet pas, à elle seule, de démontrer la conjecture. Pour qu'elle devienne utile, il faudrait la coupler à d'autres propriétés (répartition modulaire, théorèmes de crible, etc.) et surtout la relier explicitement à la symétrie $i \leftrightarrow d - i$. Or, aucun argument purement local ne peut garantir une collision symétrique, comme le montre le contre-exemple de Claude.

6. Discussion sur les bandes rectangulaires et la bibliographie

Denise a également fourni une bibliographie sur les bandes rectangulaires (fichiers

<https://denisevellachemla.eu/br1.pdf> à

<https://denisevellachemla.eu/br9.pdf>).

Ces documents traitent de :

- la structure des bandes rectangulaires et leurs congruences (Galbiati et Veronesi, Gigon),
- les expansions régulières de semi-groupes complètement simples (Meakin),
- les hyperidentités satisfaites par la variété des bandes rectangulaires (Wismath),
- les semi-anneaux d'endomorphismes sur les bandes rectangulaires (Maxson).

Ces résultats confirment que la structure de bande rectangulaire est trop générale pour capturer les spécificités des nombres premiers. Toute tentative de preuve doit utiliser des propriétés arithmétiques effectives, et non seulement la géométrie du treillis ou des arguments de rigidité.

7. Pistes futures

Denise a indiqué qu'elle ne souhaite pas s'engager dans la théorie analytique des nombres (Bombieri-Vinogradov, etc.), domaine où les meilleurs spécialistes (Tao, Maynard, Matomäki, Caraiani) ont déjà exploré les propriétés fines des nombres premiers. Elle préfère donc laisser cette voie.

Cependant, le modèle du treillis reste un outil précieux pour visualiser et reformuler la conjecture. Il pourrait être utile pour :

- exprimer clairement la condition de coïncidence symétrique,
- tester des propriétés arithmétiques plus simples (comme l'absence de triplets) sur des exemples,
- communiquer avec des algébristes sur la structure du problème.

La propriété “pas trois zéros consécutifs” est une brique arithmétique supplémentaire, mais elle ne résout pas le problème à elle seule. Elle devra être intégrée dans un schéma de preuve plus large, utilisant des propriétés non partagées par un ensemble Z admissible quelconque.

8. Références

Les documents suivants ont été utilisés dans cette synthèse :

- <https://denisevellachemla.eu/e4-chatgpt-dvc-20260719.pdf>
- <https://denisevellachemla.eu/e4-claude-dvc-20260719.pdf>
- <https://denisevellachemla.eu/e4-deepseek-dvc-20260719.pdf>
- <https://denisevellachemla.eu/e4-mistral-dvc-20260719.pdf>
- <https://denisevellachemla.eu/br1.pdf> (bibliographie sur les bandes rectangulaires)
- <https://denisevellachemla.eu/br2.pdf> idem
- <https://denisevellachemla.eu/br3.pdf> idem
- <https://denisevellachemla.eu/br4.pdf> idem
- <https://denisevellachemla.eu/br5.pdf> idem
- <https://denisevellachemla.eu/br6.pdf> idem
- <https://denisevellachemla.eu/br7.pdf> idem
- <https://denisevellachemla.eu/br8.pdf> idem
- <https://denisevellachemla.eu/br9.pdf> idem