

1. Résumé

La notion classique de bande rectangulaire (*rectangular band*) appartient à la théorie des semi-groupes. Elle désigne une structure algébrique définie par des identités telles que $x^2 = x$ et $xyz = xz$.

La présente note distingue cette notion classique d'une nouvelle notion géométrique associée à un triangle-treillis arithmétique construit à partir des nombres premiers et des décompositions de Goldbach.

L'objectif est de proposer une définition formelle des *bandes rectangulaires arithmétiques* et de préparer l'étude de leurs propriétés combinatoires.

2. La notion classique de bande rectangulaire

Dans la littérature algébrique, une bande rectangulaire est un semi-groupe dans lequel chaque élément est idempotent et qui satisfait l'identité

$$xyz = xz.$$

Une telle structure est isomorphe à un produit cartésien

$$L \times R$$

muni de la loi

$$(\ell_1, r_1)(\ell_2, r_2) = (\ell_1, r_2).$$

Les travaux de Nambooripad, Pastijn, Meakin, Wismath et de nombreux autres auteurs ont développé une théorie complète des bandes rectangulaires : congruences, coextensions, catégories de Cauchy, hyperidentités, représentations finies et propriétés structurelles.

Ces travaux constituent une référence importante, mais l'objet étudié dans la présente note est différent.

3. Différence avec les bandes rectangulaires arithmétiques

Les bandes étudiées ici ne sont pas définies par une loi de composition algébrique.

Elles apparaissent comme des configurations géométriques dans un triangle-treillis associé aux nombres premiers et aux couples de Goldbach.

L'idée fondamentale est qu'une structure rectangulaire locale du treillis peut révéler une organisation cachée des relations arithmétiques.

4. Triangle-treillis arithmétique

Soit $\mathcal{T}$ un triangle-treillis discret dont les sommets ou les cases sont associés à des couples d'entiers naturels selon une règle arithmétique donnée.

On suppose qu'à chaque position du treillis est associée une information booléenne :

$$b(n) \in \{0, 1\}.$$

Cette suite booléenne peut représenter, par exemple, la présence ou l'absence d'une propriété arithmétique liée aux nombres premiers.

5. Définition proposée

Définition 1 (Bande rectangulaire arithmétique). *Soit $\mathcal{T}$ un triangle-treillis arithmétique.*

Une bande rectangulaire arithmétique est une sous-configuration finie ou infinie de $\mathcal{T}$ formée d'un ensemble de cases

$$B = \{(i, j) ; i_0 \leq i \leq i_1, \quad j_0 \leq j \leq j_1\}$$

tel que :

- 1. les cases de B forment un rectangle dans la géométrie discrète du treillis ;*
- 2. les valeurs booléennes associées aux cases de B satisfont une règle locale déterminée ;*
- 3. la structure interne de B est stable lorsque l'on considère les relations arithmétiques définissant le triangle-treillis.*

Une telle bande est dite bande de Goldbach si sa définition dépend directement des couples de nombres premiers dont la somme vérifie une relation de type Goldbach.

6. Propriété booléenne observée

Une observation expérimentale importante concerne la suite booléenne associée aux nombres premiers.

Après la phase initiale correspondant aux nombres premiers 3, 5, 7, on observe que la suite de trois zéros consécutifs :

$$000$$

n'apparaît plus dans la suite.

Cette propriété peut être reformulée comme une contrainte locale :

Conjecture : La suite booléenne arithmétique associée au triangle-treillis possède, après son préfixe initial, un langage admissible excluant le mot

$$000.$$

7. Perspective combinatoire

Cette contrainte rapproche l'étude des bandes rectangulaires arithmétiques de domaines tels que :

- la combinatoire des mots ;
- les systèmes dynamiques symboliques ;
- les sous-shifts de type fini ;
- les pavages discrets ;
- la théorie des graphes.

La question centrale devient alors :

Les contraintes locales imposées par le triangle-treillis et par l'absence de certains motifs booléens déterminent-elles une structure globale suffisamment rigide pour impliquer une propriété arithmétique forte ?

8. Conclusion

La bibliographie classique des bandes rectangulaires montre qu'une structure locale simple peut engendrer une théorie mathématique riche.

La présente approche propose une autre direction : étudier des bandes rectangulaires non plus comme objets algébriques, mais comme motifs géométriques et arithmétiques.

La prochaine étape consiste à donner une définition complète du triangle-treillis, de ses cases, de ses règles de voisinage et des invariants associés aux bandes rectangulaires arithmétiques.