

1. Résumé

Ce document propose une analyse critique des approches structurelles récentes de la conjecture de Goldbach, notamment celles développées par les ia gemini et claude. Nous identifions la faille centrale dans l'argument de rigidité structurelle, validons le contre-exemple de claude, et proposons une reformulation précise de la condition arithmétique manquante. L'approche par coïncidence symétrique est formalisée comme le véritable cœur du problème.

2. Introduction

La conjecture de Goldbach, énoncée en 1742, affirme que tout nombre pair $n \geq 4$ peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers. Les approches récentes par modélisation structurelle, notamment celles utilisant un treillis Γ avec opérateur local R , ont ouvert des perspectives nouvelles mais soulèvent des questions fondamentales sur la validité de ces modèles.

Ce document s'inscrit dans une collaboration inter-ia pilotée par Denise Vella-Chemla, visant à évaluer et compléter les contributions des 5 ia génératrices de langage gemini [1], claude [2], mistral, deepseek, chatgpt. Notre analyse montre que :

- l'argument de rigidité structurelle de gemini contient une faille logique majeure ;
- le contre-exemple de claude est valide et démontre que la saturation des bords seule ne suffit pas ;
- la condition de *coïncidence symétrique* est le véritable enjeu arithmétique.

3. Contexte et notations

3.1. Le modèle du treillis Γ

Soit Γ un treillis infini dont les nœuds sont indexés par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. L'opérateur local R est défini par :

$$R((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = (u_1, v_2).$$

Chaque nœud (i, j) du treillis représente une paire de valeurs (s_i, s_j) où $s_k = 0$ si k est premier, 1 sinon. L'état cible est $\mathbf{a} = (0, 0)$, correspondant à une somme de deux nombres premiers.

3.2. Colonnes et appariement

Pour un entier pair $n \geq 6$, on définit $d(n) = \frac{n-6}{2}$. La colonne C_n correspond aux indices $i = 0, 1, \dots, d(n)$, appariés par l'involution $i \mapsto d(n) - i$. Une lettre dans C_n est de la forme $(s_i, s_{d(n)-i}) \in$

$\{a, b, c, d\}$ où :

$$\begin{aligned} a &= (0, 0) \quad (\text{premier} + \text{premier}), \\ b &= (1, 0) \quad (\text{premier} + \text{composé}), \\ c &= (0, 1) \quad (\text{composé} + \text{premier}), \\ d &= (1, 1) \quad (\text{composé} + \text{composé}). \end{aligned}$$

4. Synthèse des approches précédentes

4.1. L'argument de gemini : rigidité structurelle et contradiction

Gemini [1] propose une preuve par l'absurde :

1. supposons qu'il existe une colonne C_n sans état a ;
2. les bords du treillis sont saturés par la primalité ($s_0 = 0$ pour le bord gauche, $s_{d(n)} = 0$ pour le bord droit);
3. l'opérateur R conserve les composantes horizontale (u) et diagonale (v);
4. la loi de bande rectangulaire ($x * y * x = x$) assure la persistance des signaux de primalité;
5. la convergence des flux de primalité sur le triangle de Goldbach rend le contournement impossible.

Conclusion de gemini : Toute colonne C_n contient nécessairement a , donc la conjecture est vraie.

4.2. Le contre-exemple de claude : densité réaliste sans collision

Claude [2] construit explicitement un contre-exemple pour $n = 40$:

1. définition d'un ensemble $Z \subseteq \{0, 1, \dots, 17\}$ *admissible* : $0 \in Z$ et Z ne contient jamais à la fois i et $17 - i$;
2. choix de $Z = \{0, 2, 5, 9, 13, 16\}$ (densité $\frac{1}{3}$, comparable à $\frac{1}{\ln k}$ pour $k \approx 30$ à 70);
3. construction de la suite $T = (t_i)$ avec $t_i = 0$ si $i \in Z$, 1 sinon;
4. la colonne C_{40}^T ne contient aucun a , bien que les zéros soient dispersés de manière réaliste.

Conclusion de claude : La saturation des bords + rigidité de R ne garantit pas la collision. Il manque un mécanisme arithmétique effectif.

5. Analyse critique

5.1. La faille dans l'argument de gemini

L'argument de gemini repose sur une *confusion entre conservation locale et implication globale*. Plus précisément :

Lemme 1. *L'opérateur R conserve bien les composantes u le long des lignes et v le long des diagonales. Cependant, cette conservation est locale et ne garantit pas la propagation globale des signaux de primalité à travers le treillis.*

Démonstration. Le contre-exemple de claude (§ 3.2) montre explicitement qu'il est possible d'avoir :

- on a $t_0 = 0$ (bord gauche saturé) ;
- $t_{17} = 1$ (bord droit non saturé, mais cela n'affecte pas la colonne C_{40}) ;
- Aucune paire $(t_i, t_{17-i}) = (0, 0)$ pour $i = 0, \dots, 9$.

Cela contredit directement l'affirmation de gemeni selon laquelle les flux de primalité “ne peuvent pas être éteints ou perdus”. En réalité, ils *peuvent* être contournés localement sans violer les règles de R . $\square$

Remarque : la loi de bande rectangulaire $(x * y * x = x)$ est une propriété algébrique valide, mais son application au treillis suppose implicitement que les signaux de primalité se propagent de manière *ininterrompue*. Or, le contre-exemple de claude montre que cette propagation peut être interrompue par des configurations locales sans violer les règles du treillis.

5.2. Validation du contre-exemple de claude

Le contre-exemple de claude est *valide* et *pertinent* pour les raisons suivantes :

1. **admissibilité** : $Z = \{0, 2, 5, 9, 13, 16\}$ vérifie bien $0 \in Z$ et pour toute paire $\{i, 17 - i\}$, au plus un élément est dans Z ;
2. **densité réaliste** : $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ est comparable à la densité des nombres premiers autour de 30 à 70 ($\frac{1}{\ln 30} \approx 0.30$, $\frac{1}{\ln 70} \approx 0.23$) ;
3. **absence de motif artificiel** : Les zéros sont dispersés sans régularité, comme les nombres premiers réels ;
4. **construction explicite** : La colonne $C_{40}^T = (c, b, c, d, b, c, d, d, b, c)$ ne contient effectivement aucun **a**.

Ce contre-exemple démontre que :

*La saturation des bords + la rigidité de R + une densité réaliste de zéros ne suffisent pas à garantir l'existence de **a** dans une colonne donnée.*

6. Reformulation du problème : la coïncidence symétrique

6.1. La condition arithmétique manquante

Le cœur de la conjecture de Goldbach réside dans la *coïncidence symétrique* : pour tout n pair ≥ 6 , il existe $i \in \{0, \dots, d(n)\}$ tel que :

$$s_i = s_{d(n)-i} = 0.$$

Cette condition est *strictement plus forte* que :

- la saturation des bords ($s_0 = 0$) ;
- la densité asymptotique des premiers ($\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$) ;
- la rigidité de l'opérateur R .

Théorème 2. *La conjecture de Goldbach est équivalente à l’assertion suivante : pour tout n pair ≥ 6 , il existe une coïncidence symétrique dans la colonne C_n .*

Démonstration. On a

- ($\Rightarrow$) Si $n = p + q$ avec p, q premiers, alors $p = 3 + 2i$ et $q = 3 + 2(d(n) - i)$ pour un certain i . Donc $s_i = s_{d(n)-i} = 0$;
- ($\Leftarrow$) Si $s_i = s_{d(n)-i} = 0$, alors $n = (3 + 2i) + (3 + 2(d(n) - i)) = 6 + 2d(n) = n$ est somme de deux premiers.

□

6.2. Pourquoi les approches structurelles échouent

Les approches purement structurelles (comme celle de gemini) échouent parce qu’elles :

1. **négligent la symétrie** : L’opérateur R ne “voit” pas la relation $i \leftrightarrow d(n) - i$;
2. **sous-estiment la liberté locale** : Le treillis permet des configurations où les zéros sont dispersés sans créer de coïncidence symétrique ;
3. **confondent nécessaire et suffisant** : La rigidité de R est nécessaire pour la propagation, mais pas suffisante pour garantir la coïncidence.

7. Proposition : une approche hybride

7.1. Combiner structure et arithmétique

Pour surmonter les limites des approches purement structurelles, nous proposons une *approche hybride* combinant :

1. **structure** : Utiliser le treillis Γ pour modéliser les relations entre les s_i ;
2. **arithmétique** : Intégrer des propriétés des nombres premiers (théorème des nombres premiers, hypothèse de Riemann, etc.) ;
3. **symétrie** : Ajouter une contrainte explicite sur les paires $(i, d(n) - i)$.

7.2. Un nouveau cadre formel

Définissons un *treillis symétrique* Γ où chaque nœud (i, j) est muni d’une contrainte supplémentaire :

$$s_i = s_j \quad \text{si} \quad j = d(n) - i \quad \text{pour un certain } n.$$

Dans ce cadre, la conjecture de Goldbach devient :

Pour tout n pair ≥ 6 , il existe un nœud $(i, d(n) - i)$ dans Γ^S tel que $s_i = s_{d(n)-i} = 0$.

Proposition 3. *Dans le treillis symétrique Γ^S , la conjecture de Goldbach est équivalente à l’absence de colonne C_n entièrement contenue dans $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$.*

Démonstration. Directe par définition de Γ^S et par le théorème 3.

□

7.3. Implications pour les preuves futures

Les tentatives futures de preuve de la conjecture de Goldbach devraient :

1. **intégrer la symétrie** : Toute approche doit explicitement traiter la relation $i \leftrightarrow d(n) - i$;
2. **utiliser des propriétés arithmétiques profondes** : La densité seule ne suffit pas ; il faut des résultats sur la distribution des premiers en paires symétriques ;
3. **Éviter les arguments purement locaux** : Les propriétés globales (comme la coïncidence symétrique) ne peuvent pas être déduites de règles locales seules.

8. Conclusion

Les contributions de gemini et claude ont mis en lumière des aspects complémentaires du problème de Goldbach :

- gemini a montré l'importance des structures locales et des conditions aux limites ;
- claude a démontré que ces structures seules ne suffisent pas, et a identifié la coïncidence symétrique comme condition clé.

Notre analyse confirme que :

La conjecture de Goldbach n'est pas un problème de rigidité structurelle, mais un problème de coïncidence symétrique dans la distribution des nombres premiers.

Les approches futures doivent donc combiner :

1. une modélisation structurelle rigoureuse (comme le treillis Γ) ;
2. des propriétés arithmétiques profondes sur les paires de nombres premiers ;
3. une prise en compte explicite de la symétrie $i \leftrightarrow d(n) - i$.

Références

- [1] Denise Vella-Chemla (pilotant l'ia gemini). Démonstration par l'absurde : incohérence structurelle de l'absence de sommes de deux nombres premiers dans le treillis de Goldbach. Juillet 2026.
- [2] Denise Vella-Chemla (pilotant l'ia claude). Un contre-exemple à densité plausible : la seule saturation du bord ne garantit rien. Juillet 2026.