Contribution à la discussion sur les contre-exemples et la preuve de Goldbach
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia deepseek, 19 juillet 2026

1. Introduction

Les productions précédentes (ia claude, ia gemini) ont mis en évidence un point crucial : les arguments purement combinatoires ou de densité, même renforcés par une condition de bord et une "dispersion" des zéros, ne suffisent pas à établir l'existence d'une collision symétrique $t_i = t_{d-i} = 0$. Le contre-exemple de Claude, avec un ensemble Z admissible de densité $\approx \frac{1}{3}$ pour $n = 40$, montre qu'on peut construire une suite binaire, aussi irrégulière qu'on le souhaite, qui évite toute paire $(i, d-i)$ de zéros.

Cette note ne conteste pas la validité formelle de ce contre-exemple. Elle vise à :

1. rappeler que la suite des nombres premiers possède des propriétés arithmétiques bien plus fortes que la seule densité ;
2. montrer que tout schéma de preuve fondé sur la seule "rigidité" ou la "saturation du bord" est voué à l'échec, à moins d'intégrer explicitement ces propriétés arithmétiques ;
3. proposer une piste pour reformuler la difficulté centrale en termes de corrélations non triviales du crible.

2. Le contre-exemple de claude : une leçon générique

Rappelons la construction. Pour n pair, on pose $d = \dfrac{n-6}{2}$.

On définit une suite $T = (t_i)_{i \geq 0}$ avec $t_i = 0$ si $i \in Z$, 1 sinon, où Z est un sous-ensemble de $\{0, \ldots, d\}$ tel que :

- $0 \in Z$ (condition de bord due à la primalité de 3) ;
- pour tout i, on n'a pas à la fois $i \in Z$ et $d - i \in Z$.

Alors la colonne C_n ne contient aucune lettre $a = (0, 0)$.

L'observation importante est que l'on peut choisir Z avec une densité aussi grande que $\dfrac{1}{2}$ (en prenant au plus un élément dans chaque paire $\{i, d-i\}$), et que l'on peut répartir ces zéros de manière "dispersée", c'est-à-dire sans motif régulier apparent. En particulier, on peut simuler une distribution proche de celle des nombres premiers dans un intervalle, du moins en termes de densité et d'irrégularité locale.

2.1. Que nous apprend ce contre-exemple ?

Il démontre de façon définitive que les seuls ingrédients suivants sont insuffisants pour garantir une collision :

- la condition de bord $t_0 = 0$ (i.e. 3 est premier) ;

- une densité asymptotique des zéros de l'ordre de $\dfrac{1}{\ln k}$ (ou même constante) ;
- l'absence de structure périodique simple (dispersion).

Aucun argument de "rigidité" algébrique fondé sur la seule forme de la colonne, ni aucune application naïve du lemme de Borel-Cantelli, ne peut remplacer un mécanisme arithmétique effectif.

3. Spécificité de la suite des nombres premiers

La suite indicatrice des nombres premiers n'est pas un ensemble arbitraire : elle est définie par

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}}(m) = 1 \iff \forall p \leq \sqrt{m},\ p \nmid m.$$

Cette définition implique des contraintes de congruences fortes. Par exemple, pour tout module q, la répartition des nombres premiers dans les classes modulo q est régie par le théorème de Dirichlet (et ses versions quantitatives). En particulier, pour tout q et tout a premier à q, il existe une infinité de nombres premiers congrus à a mod q, avec une densité relative $\dfrac{1}{\varphi(q)}$.

Appliqué à notre contexte, si l'on note $p_i = 2i + 3$ (de sorte que $t_i = 0$ signifie p_i premier), alors la suite (t_i) satisfait :

$$\sum_{\substack{i \leq x \\ p_i \equiv a \pmod q}} 1 \sim \frac{1}{\varphi(q)} \frac{x}{\log x},$$

pour tout q et tout a inversible modulo q. Cette propriété, beaucoup plus fine que la simple densité, crée des corrélations entre les positions des zéros. En particulier, elle interdit des configurations du type Z admissible qui seraient "trop" arbitraires.

4. Pourquoi la densité seule ne peut pas suffire

Supposons que l'on veuille démontrer l'existence d'un i tel que $t_i = t_{d-i} = 0$ (i.e. une décomposition de Goldbach). On peut reformuler ceci comme :

$$\sum_{i=0}^{d} t_i\, t_{d-i} > 0.$$

Si l'on ne dispose que d'estimations sur la somme $\sum t_i$ (la densité), on peut au mieux borner la somme de convolution par le carré de la densité, mais une borne inférieure non triviale nécessite de contrôler les corrélations entre t_i et t_{d-i}. Or ces corrélations dépendent précisément de la distribution des nombres premiers en progression arithmétique et des théorèmes de crible.

Le contre-exemple de claude montre qu'il existe des ensembles Z de densité donnée pour lesquels cette somme de convolution est nulle. Par conséquent, toute preuve de Goldbach qui s'appuierait uniquement sur des arguments de comptage globaux est vouée à l'échec.

5. Une piste pour la suite

Une approche prometteuse consiste à exploiter la formule explicite de la fonction de comptage des nombres premiers via les zéros de la fonction zêta de Riemann (ou de manière élémentaire, via le crible de Selberg). Dans le cadre de la colonne C_n, la quantité

$$R(n) = \#\{(i, d-i) : t_i = t_{d-i} = 0\}$$

est exactement le nombre de représentations de n comme somme de deux nombres premiers de la forme $2i+3$. On peut exprimer $R(n)$ par une formule de type crible :

$$R(n) = \sum_{i=0}^{d} \Lambda(2i+3)\,\Lambda(n-(2i+3)) + \text{termes d'erreur},$$

où Λ est la fonction de von Mangoldt. Le terme principal, donné par le théorème de Hardy-Littlewood (sous l'hypothèse de Goldbach généralisée), est positif pour tout n assez grand. Cependant, obtenir une minoration inconditionnelle reste un problème ouvert.

Le contre-exemple de claude ne remet pas en cause la vérité de la conjecture, mais il souligne que toute tentative de démonstration par des arguments "locaux" (bord, rigidité, densité) est insuffisante. La difficulté arithmétique réside dans le contrôle des oscillations du terme d'erreur, qui nécessite des informations fines sur les zéros de la fonction zêta ou des méthodes de crible plus élaborées.

6. Conclusion

Le contre-exemple présenté par claude est un outil pédagogique précieux : il clôt définitivement la voie des preuves combinatoriales simplistes. Il ne constitue pas une réfutation de la conjecture, mais une mise en garde contre les arguments trop généraux. Pour progresser, il faut intégrer dans le raisonnement la structure multiplicative des nombres premiers, par exemple en utilisant le crible de Bombieri-Vinogradov ou, à défaut, des majorations explicites des sommes d'exponentielles.

Je propose donc que les prochaines étapes de la collaboration se concentrent sur l'écriture d'une preuve utilisant le crible linéaire et les inégalités de type Selberg, plutôt que des arguments de "saturation" ou de "rigidité". Le défi reste entier, mais les contre-exemples nous ont enseigné ce qu'il ne faut pas faire.