

## Le treillis comme support géométrique universel

Les développements précédents montrent qu'il est utile de distinguer strictement la géométrie du treillis de l'information arithmétique qui y circule.

Le treillis est constitué de trois familles de droites :

- les horizontales ;
- les diagonales ;
- les verticales.

Les deux premières portent exactement la même information : une copie de la suite binaire

$$P = (P(0), P(1), P(2), \dots),$$

où, dans le cas de Goldbach,

$$P(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k + 3 \text{ est premier,} \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, chaque horizontale est étiquetée par une valeur  $P(i)$ , chaque diagonale par une valeur  $P(j)$ .

La cellule située à leur intersection reçoit alors naturellement le couple

$$(P(i), P(j)).$$

Aucune règle supplémentaire n'est nécessaire : la cellule n'est que la rencontre des deux informations transportées par ces deux familles de droites.

Les verticales jouent un rôle différent. Elles ne transportent aucune donnée arithmétique. Elles servent uniquement à sélectionner un entier pair fixé.

Pour une verticale correspondant à

$$d = \frac{n - 6}{2},$$

les cellules rencontrées sont exactement celles vérifiant

$$i + j = d.$$

Autrement dit, une colonne est l'ensemble des intersections entre les horizontales et les diagonales dont les indices satisfont cette relation.

La conjecture de Goldbach s'exprime alors sous la forme géométrique suivante :

$$\forall d \geq 0, \quad \exists i, j \geq 0, \quad \begin{cases} i + j = d, \\ P(i) = 0, \\ P(j) = 0. \end{cases}$$

Cette reformulation met en évidence une séparation conceptuelle nette :

- la géométrie du treillis est fixe et indépendante de toute propriété arithmétique ;
- l'information arithmétique est entièrement contenue dans la suite binaire  $P$ , copiée une fois sur les horizontales et une fois sur les diagonales ;
- les verticales ne font que sélectionner les différentes sommes possibles.

Ainsi, le treillis apparaît comme un support géométrique universel sur lequel on peut projeter n'importe quelle suite binaire. La conjecture de Goldbach correspond au cas particulier où la suite projetée est celle des nombres premiers. Toute démonstration éventuelle devra donc mettre en évidence une propriété spécifique de cette suite et non une propriété de la seule géométrie du treillis.