

1. La loi comme produit de deux projections

La formule

$$(u, v)(x, y) = (u, y)$$

peut être décrite comme la composition de deux projections indépendantes.

Soient

$$\pi_1(u, v) = u, \quad \pi_2(u, v) = v.$$

La loi de composition s'écrit alors

$$x * y = (\pi_1(x), \pi_2(y)).$$

Autrement dit, le produit ne combine pas les deux arguments. Il extrait simplement la première coordonnée du premier facteur et la seconde coordonnée du second.

Cette écriture met en évidence un fait important.

Toute la structure du semi-groupe est déjà contenue dans les deux applications de projection

$$\pi_1 : A \longrightarrow \{0, 1\}, \quad \pi_2 : A \longrightarrow \{0, 1\}.$$

La loi ne fait ensuite que reconstituer un élément de

$$A \simeq \{0, 1\} \times \{0, 1\}$$

à partir de ces deux informations.

Ainsi, la bande rectangulaire apparaît comme la structure universelle associée à deux projections indépendantes.

L'origine géométrique observée dans le treillis de Goldbach devient alors naturelle : les deux composantes conservées sont précisément celles qui restent visibles après le raccordement local, tandis que les deux composantes internes sont éliminées.

2. Une factorisation de la règle locale

La géométrie du treillis suggère une lecture encore plus synthétique de l'opérateur.

La première composante est obtenue par projection sur la direction des lignes du treillis, tandis que la seconde est obtenue par projection sur la direction diagonale induite par le raccordement des deux arêtes adjacentes.

Ces deux projections sont indépendantes : chacune extrait une information qui sera ensuite recombinaisonnée avec l'autre.

Ainsi, la loi

$$(u, v)(x, y) = (u, y)$$

se factorise sous la forme

$$A \times A \longrightarrow \{0, 1\} \times \{0, 1\} \longrightarrow A,$$

où la première application consiste à extraire la première coordonnée du premier facteur et la seconde coordonnée du second, tandis que la seconde application est simplement l'identification naturelle

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} \simeq A.$$

Cette factorisation montre que la bande rectangulaire n'est pas une structure ajoutée au treillis : elle est déjà contenue dans le mécanisme géométrique de sélection des deux directions privilégiées.