

LA GÉOMÉTRIE NON-COMMUTATIVE

ALAIN CONNES

Je voudrais fournir un survol général de la géométrie non-commutative. J'expliquerai la motivation et le programme général. Pour cela, je m'appuierai sur deux choses. Premièrement, le plus vieil exemple en géométrie non-commutative, qui remonte à la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg. Je continuerai alors avec des mathématiques pures, et je terminerai en revenant à la physique (en fait, en revenant à ce qui peut être extrait de la phénoménologie réelle des particules élémentaires à propos de la structure fine de l'espace-temps).

Donc laissez-moi commencer par expliquer ce qui est la motivation générale de la géométrie non-commutative. Il y a une dualité bien connue qui existe, par exemple, entre l'algèbre et la géométrie, entre un espace et une algèbre commutative. Étant donné un espace, nous souhaitons l'étudier en regardant l'algèbre des coordonnées sur cet espace, qui doit satisfaire une certaine régularité. Bien sûr, si nous faisons de la géométrie algébrique, nous nous restreignons aux fonctions polynomiales ou algébriques ; mais quand nous travaillons dans les domaines de la topologie ou de la géométrie différentielle, la régularité est moins restrictive, et, par exemple, nous utilisons des fonctions continues ou des fonctions lisses.

L'élément essentiel de la géométrie non-commutative est qu'il y a plusieurs cas importants dans lesquels on est forcé de remplacer une algèbre commutative de coordonnées par une algèbre non-commutative.

La première instance de cela remonte à Heisenberg, et le second exemple est la nécessité de considérer des espaces ou des variétés qui ne sont pas simplement connexes et dont le groupe fondamental ne parvient pas à être abélien (il peut arriver que des groupes discrets arbitrairement finis apparaissent de cette manière). Pour ces espaces, l'utilisation habituelle du dual de Pontrjagin du groupe est, bien sûr, inopérant. Le troisième exemple vient des feuilletages : si l'espace des solutions d'une équation différentielle est traité comme un espace classique, alors la plupart des outils standards perdent complètement leur pertinence ; en fait, cet espace est précisément un exemple d'*espace quantique*, au sens où il est décrit par une algèbre de coordonnées qui ne peut être abélienne. Finalement, le quatrième exemple, qui est maintenant assez à la mode, est l'exemple des *groupes quantiques*. Permettez-moi d'expliquer en un mot ce que sont les groupes quantiques dans un tel contexte : les groupes quantiques sont l'analogie des groupes de Lie en géométrie non-commutative.

Un survol bref du programme général peut être le suivant : nous voulons être capable de transplanter dans le paradigme de la géométrie non-commutative les outils auxquels nous sommes habitués dans le paradigme commutatif classique.

Quand on regarde un espace de manière classique, il y a un certain nombre de points de vue qui sont comme "de plus en plus précis", et qui nous permettent d'appréhender l'espace. Le plus grossier de ces points de vue est la théorie de la mesure. Si nous connaissons l'espace du point de vue de la théorie de la mesure, alors nous n'en connaissons quasiment rien, parce que la plupart des espaces sont isomorphes en théorie de la mesure : ils sont isomorphes à l'intervalle unité selon la mesure de Lebesgue. On a leur topologie et leur géométrie différentielle (par géométrie différentielle, je

Traduction d'un texte paru dans *Mathematical Research Today and Tomorrow : Viewpoints of Seven Fields Medalists*. Conférences données à l'Institut D'Études Catalanes, Barcelone, Espagne, Juin 1991, p. 41-58.

veux dire géométrie différentielle des formes différentielles, courants, classe caractéristique, i.e. en excluant la géométrie différentielle qui provient d'une métrique riemannienne). Le quatrième et le plus important des points de vue est ainsi la géométrie riemannienne. Je soulignerai à la fin quelle est la pertinence de l'analogie non-commutative de la géométrie riemannienne pour la physique des particules.

Premier exemple : la mécanique quantique

Je commencerai maintenant par expliquer l'origine du sujet, qui est la découverte par Heisenberg de la mécanique quantique. Je voudrais montrer comment cette découverte a pris appui sur des expériences et a éliminé le paradigme habituel de la mécanique classique, forcé par des résultats expérimentaux. Revenons à Heisenberg, au moment où il a découvert la mécanique quantique (qui n'était pas alors appelée "mécanique quantique" mais *mécanique matricielle* pour une raison qui devient claire quand on regarde la manière dont elle a été trouvée).

À ce moment, par une grosse quantité de travail, les personnes avaient déjà réalisé que l'atome était formé d'un noyau interne, autour duquel il y avait des électrons dont dépendaient les propriétés chimiques de l'atome. De plus, une assez bonne manière d'observer les atomes consistait à les faire interagir avec une radiation électromagnétique. Par exemple, si on prend un prisme et qu'on fait passer la lumière du soleil à travers ce prisme, alors la lumière sera décomposée en plusieurs rayons, et, bien sûr, ces rayons formeront les couleurs de l'arc-en-ciel. Pourtant, si l'on prend un corps pur comme l'hélium ou l'hydrogène et qu'on regarde leur spectre d'émission, alors le spectre d'émission ne contiendra pas tous les rayons de la lumière du soleil. Il ne contiendra que certains rayons, qui forment en quelque sorte la "signature" des éléments en question. Ainsi, il est extrêmement important d'être capable de comprendre la régularité de ces rayons. Maintenant, si on essaye d'appliquer la mécanique classique pour comprendre cela, alors on prend pour l'atome un modèle très simple. En utilisant le langage mathématique, ce modèle sera décrit par ce qu'on appelle l'*espace des phases*, qui est connu comme étant une variété symplectique, et les fonctions sur cet espace seront les *quantités observables* du système. J'ai pensé au système comme étant constitué d'un atome avec des électrons et le noyau, et toutes les quantités observables évoluant avec le temps selon l'*évolution hamiltonienne*, qui est donnée par l'équation suivante :

$$\dot{f} = \{H, f\}, \quad (1)$$

où \dot{f} est la dérivée temporelle de f , et $\{H, f\}$ est le crochet de Poisson entre f et une certaine quantité observable qu'on appelle l'*énergie*, qui est l'hamiltonien du système.

Maintenant, pour les systèmes simples, comme l'atome d'hydrogène, cette équation sera totalement intégrable, ce qui signifie qu'il y a un des tores invariants décrivant le mouvement du système. Et dans ces tores, le mouvement est presque périodique. Cela nous dit que chaque quantité observable peut être calculée et développée comme une fonction du temps

$$q(t) = \sum q_{n_1, \dots, n_k} \exp(2\pi i \langle n, \nu \rangle t), \quad (2)$$

où les coefficients q_{n_1, \dots, n_k} sont des nombres complexes, et $\langle n, \nu \rangle = \sum n_j \nu_j$ est une combinaison des fréquences de base avec les mêmes entiers n_j qui apparaissent dans q_{n_1, \dots, n_k} .

Si l'on prend ce système mécanique qui décrit l'atome et qu'on essaie de décrire en termes classiques son interaction avec la radiation, alors la réponse est donnée par la théorie de Maxwell. La théorie

de Maxwell nous dit que, quand l'atome est en interaction avec une radiation, il émet des ondes planes et ces ondes planes peuvent être complètement décrites comme suit. Prenez la quantité observable, qu'on appelle le *moment dipolaire*. (Ce que nous avons, ce sont des électrons qui sont en train de tourner autour du noyau ; les électrons ont une certaine charge, et donc, ils forment un dipôle autour du noyau). Cela définit une certaine quantité observable $\vec{Q}(t)$ qui a trois composants et qui peut être développée en une série presque périodique

$$\vec{Q}(t) = \sum \vec{q}_n \exp(2\pi i \langle n, \nu \rangle t). \quad (3)$$

La théorie de Maxwell nous enseigne que n'importe lequel des composants a une onde plane W_n , qui a une fréquence $\langle n, \nu \rangle$. Ainsi, en particulier, les fréquences observables devraient former un sous-groupe de la ligne réelle, engendré par les fréquences de base ν_j .

Il s'est avéré, cependant, que l'observation fournissait déjà à ce moment-là un résultat qui était en contradiction avec ce fait. Si l'on observe, par exemple, les rayons spectraux de l'atome d'hydrogène, alors on trouve que les longueurs d'ondes de ces rayons sont certains nombres précis, qui sont, comme je l'ai dit précédemment, une sorte de signature de l'hydrogène. La régularité de ces rayons avait déjà été trouvée par Balmer longtemps avant. Il avait observé que les longueurs d'onde de ces rayons étaient toutes des multiples simples rationnels d'une certaine longueur L . Ils étaient de la forme

$$H_\alpha = \frac{9}{5}L, \quad H_\beta = \frac{16}{12}L, \quad H_\gamma = \frac{25}{21}L, \quad H_\delta = \frac{36}{32}L, \quad \dots \quad (4)$$

de sorte que ce que nous gérons est vraiment de la forme

$$\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 4}L. \quad (5)$$

La première chose que les gens ont réalisé était qu'il était plus naturel de parler non pas des longueurs d'onde (ce sont les longueurs d'onde que l'on observe lorsqu'on regarde les rayons spectraux), mais de parler des fréquences, qui sont calculées comme rapports de la vitesse de la lumière sur les longueurs d'onde. Quand on regarde les fréquences, on obtient une formule plus simple

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R}{m^2} - \frac{R}{n^2}, \quad (6)$$

où R est une constante appelée la *constante de Rydberg*, et m et n sont des entiers. Maintenant, à partir de résultats expérimentaux, on trouve que les fréquences observées ne forment pas un groupe ; c'est-à-dire, elles ne forment pas un sous-groupe de la ligne des réels. Ce qui se produit, c'est que si nous les regardons (voir la figure 1), nous voyons qu'elles se combinent ensemble. Par exemple, nous pouvons prendre le premier rayon dans la *série de Lyman* (1-2) et le combiner avec le premier rayon dans la série de Balmer (2-3), et obtenir le second rayon de Lyman (1-3). Si nous le combinons à la place avec le second rayon de Balmer, alors nous obtenons le troisième rayon de Lyman, et etc. Ainsi ce qui se produit, c'est qu'ils ne forment pas un groupe, mais qu'ils se combinent selon ce que l'on appelle le *principe de Ritz-Rydberg*, qui est le principe suivant : on peut étiqueter les fréquences par deux indices, disons ν_{ij} (ces deux indices n'ont rien à voir avec des entiers ; ils peuvent être ce qu'on veut : des lettres grecques, des couleurs, ..., et ils se combinent selon la règle

$$\nu_{ij} + \nu_{jk} = \nu_{ik}. \quad (7)$$

C'est ce qui a été trouvé expérimentalement. Heisenberg utilisa le raisonnement extrêmement pragmatique du type suivant : si l'on fait un peu de mathématiques, on trouve que, dans le cas classique,

il y a une façon alternative de décrire l'algèbre des quantités observables. On prend des fonctions presque périodiques, qui ont les fréquences données, et on les multiplie ensemble pour former le produit de convolution

$$(qq')_{n''} = \sum_{n''=n+n'} q_n q_{n'} \quad (8)$$

Ce que l'on obtient, ce n'est rien d'autre que l'algèbre de convolution du groupe Γ , qui est supposé être le groupe des fréquences observables. Pourtant, comme le montre l'expérimentation, celles-ci ne forment pas un groupe, et donc Γ doit être remplacé par l'ensemble

$$\Delta = \{\nu_{ij} = \nu_i - \nu_j\} \subset \mathbb{R} \quad (9)$$

des nombres réels se combinant selon le principe de combinaison de Ritz-Rydberg. Heisenberg décida de suivre les résultats expérimentaux et de remplacer l'algèbre de convolution du groupe Γ par l'algèbre de convolution de l'ensemble Δ , et ensuite de travailler sur l'algèbre de convolution de cet ensemble avec sa composition partiellement définie. Il trouva que le produit de deux quantités observables a et b était donné par

$$(a \cdot b)_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk} \quad (10)$$

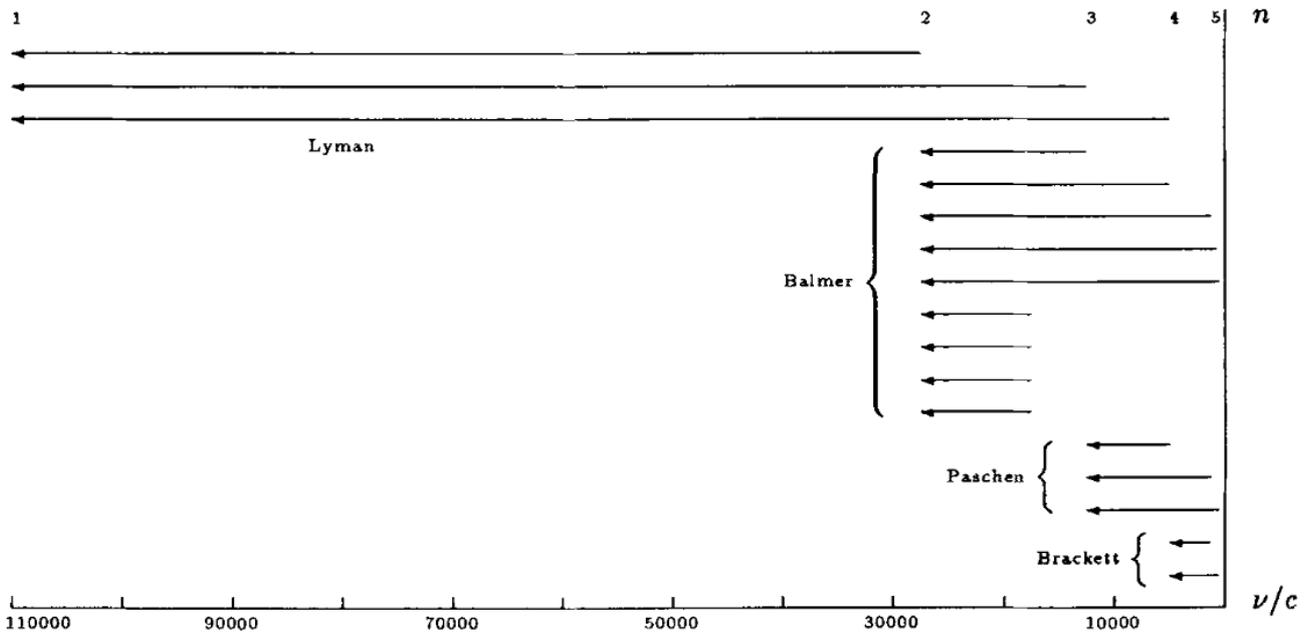


Figure 1

Il est remarquable qu'Heisenberg ait inventé cette règle à partir de résultats expérimentaux, bien qu'il ne connaisse pas les matrices. Plus tard, il parla à Bohr et Jordan et ils trouvèrent que ces choses existaient en mathématiques et étaient nommées "matrices." C'est pour cette raison qu'on appela la théorie *mécanique matricielle*.

Alors la loi d'évolution est assez simple ; notamment, elle est donnée par

$$q_{ij}(t) = q_{ij} \exp(2\pi i \nu_{ij} t), \quad (11)$$

et quelque chose se produit qui est même plus simple que dans le cas commutatif. Rappelez-vous que l'évolution était décrite par le crochet de Poisson (le crochet de Poisson était une structure

additionnelle qui venait de la structure symplectique de l'espace des phases). Maintenant, dans le cas non-commutatif des matrices, cela n'est pas nécessaire. C'est remplacé par le commutateur

$$\frac{d}{dt}q(t) = \frac{i}{\pi}[H, q], \quad (12)$$

où H est une matrice qui a ses coefficients nuls en dehors de la diagonale et dont les éléments diagonaux sont les valeurs ν_i telles que $\nu_i - \nu_j = \nu_{ij}$. (Cette valeur ν_i n'est pas unique ; elle est unique seulement à addition commune d'une constante près).

Comme conséquence de cela, des résultats expérimentaux, on ne peut pas coller à l'espace classique des phases ; c'est-à-dire qu'on ne peut pas se ramener à la mécanique classique. À la place, on est obligé de remplacer l'algèbre commutative des fonctions des quantités observables de l'espace des phases ordinaire par une algèbre non-commutative.

Il s'avère que, dans le cas de Heisenberg, si nous regardons un système qui a un nombre fini de niveaux (ou même un nombre dénombrable de niveaux) alors l'algèbre que nous obtenons n'est pas très compliquée à analyser. Mais, par exemple, dès que nous gérons des situations comme la mécanique statistique quantique - dans lesquelles on considère un assemblage d'atomes - alors l'algèbre non-commutative que nous avons à gérer est beaucoup plus difficile à analyser. Mais cela devrait seulement appartenir à la partie "théorie de la mesure" de la discussion.

La conjecture de Novikov

Après cet exemple motivant d'Heisenberg, je voudrais entrer dans le domaine des mathématiques pures, et traiter un exemple dans lequel la géométrie non-commutative peut être vue à l'œuvre. L'exemple est le suivant. Nous rencontrons des objets non-commutatifs dès que nous essayons de traiter de variétés qui ne sont pas simplement connexes. En fait, quand on prend une variété M , à cette variété correspond un groupe $\Gamma = \pi_1(M)$, son groupe fondamental, qui mesure la connexité-non-simple de la variété. Beaucoup des résultats qui sont vrais pour des variétés simplement connexes nécessitent davantage de travail lorsqu'on essaye de les adapter au monde de la connexité-non-simple. Pour le dire grossièrement, l'idée est que lorsqu'on veut les adapter à la situation non-simplement connexe, on ne va plus gérer, par exemple, des espaces vectoriels sur les nombres complexes, mais des modules sur l'anneau de groupe d'un groupe. Basiquement, on prend toujours en compte l'équivariance par rapport à l'action du groupe fondamental, et, au lieu de faire les choses en bas dans la variété, on doit essentiellement travailler dans l'espace couvrant. Donc j'essaierai de montrer comment la géométrie non-commutative fonctionne sur des exemples, en géant le problème de la signature d'une variété.

Je décrirai d'abord le théorème de la signature de Hirzebruch. Si on prend une variété de dimension $4k$ qui est compacte et orientable, alors il y a une forme d'intersection sur la cohomologie de la dimension médiane et, par construction, la signature de cette forme quadratique s'avère être invariante par homotopie, parce qu'elle est définie de manière homotopiquement invariante. Il n'est pas clair du tout qu'il soit possible de relier cette quantité à d'autres quantités qui sont calculées, par exemple, par les classes caractéristiques du fibré tangent de la variété.

Le résultat suivant est dû à Hirzebruch

$$\text{Sign}(M) = \langle L(M), [M] \rangle ; \quad (13)$$

c'est-à-dire, la signature peut être calculée en associant la classe fondamentale $[M]$ de la variété M avec un polynôme universel $L(M) = P(p_1, \dots, p_k)$ sur les classes de Pontrjagin du fibré tangent de la variété, qui dépend de la dimension de M .

Il y a une grande différence entre les deux côtés de l'équation (13), puisque le côté gauche est invariant par homotopie par construction, et que le côté droit est essentiellement calculable par des calculs locaux (par intégration sur la variété). Cela donne la bonne réponse pour le cas simplement connexe, et Novikov a prouvé que cette combinaison spécifique des classes caractéristiques est la seule qui soit invariante par homotopie.

Les choses deviennent plus intéressantes quand la variété n'est pas simplement connexe. Dans le cas non simplement connexe, il y a des quantités qui sont candidates pour être invariantes par homotopie, mais pour lesquelles il n'est pas évident du tout, au premier regard, qu'elles le soient. Ces quantités sont les *signatures les plus hautes de Novikov*, qui sont définies par

$$\text{Sign}_c(M) = \langle L(M) \cdot \varphi^*(c), [M] \rangle. \quad (14)$$

C'est-à-dire, nous gardons le même L -genre, mais nous devons faire attention au fait que l'un des L -genres n'est pas homogène, mais qu'il a plusieurs composants. Il a un composant qui est le composant de dimension la plus élevée, et il a aussi des composants dont la dimension diffère de la dimension de M par des multiples de 4. On le multiplie par un cocycle de groupe c du groupe fondamental, après l'avoir transféré à une classe de cohomologie sur la variété. (Puisque la variété a comme groupe fondamental Γ , le groupe de cohomologie de Γ s'envoie très naturellement sur la cohomologie de la variété). Alors nous calculons le produit $L(M) \cdot \varphi^*(c)$ et nous l'évaluons sur la classe fondamentale de la variété M .

C'est une expression algébrique équilibrée. Pour une définition plus géométrique, imaginez que l'espace classifiant comme on l'appelle du groupe Γ a été construit. C'est un certain espace $B\Gamma$ qui peut être explicitement donné dans de nombreux cas. Essentiellement, on prend un cocycle dans $B\Gamma$, orienté transversalement, en considérant une fonction classifiante $\varphi : M \rightarrow B\Gamma$ transverse au cocycle, et en prenant l'image inverse $\varphi^*(c)$ du cocycle.

La question est de savoir si cette signature est invariante par homotopie. C'est une question purement géométrique, connue sous l'appellation de *conjecture de Novikov*. Novikov a conjecturé que dans plusieurs cas, ces quantités, qu'on appelle les *signatures les plus hautes*, sont invariantes par homotopie.

Je voudrais montrer comment la géométrie non-commutative fonctionne dans ce cas. Laissez-moi commencer par le cas commutatif. Je discuterai d'abord spécifiquement de la situation dans laquelle le groupe fondamental de la variété est commutatif, et nous verrons comment utiliser cette commutativité. C'est la preuve donnée par Lusztig dans ce cas. Nous verrons combien d'outils supplémentaires nous avons à disposition lorsque ce groupe est commutatif par rapport au cas non-commutatif.

Si le groupe fondamental Γ est commutatif, alors il a un dual de Pontrjagin $X = \hat{\Gamma}$, qui est un espace compact : l'espace de tous les caractères linéaires du groupe ; c'est-à-dire, tous les homomorphismes du groupe vers les nombres complexes de module 1.

Maintenant nous pouvons considérer un espace produit $M \times X$ de la variété et de l'espace dual de Pontrjagin de son groupe fondamental. Sur cet espace, nous avons un fibré en droite très canonique

qui est donné par le fait qu'à chaque fois qu'on a un caractère, ce caractère nous donne une fonction du groupe fondamental de M vers les nombres complexes de module 1, et par conséquent, un fibré plat complètement naturel sur la variété M avec une holonomie donnée par le caractère. Par conséquent, nous obtenons une famille de fibrés plats sur M paramétrée par le dual de Pontrjagin X ; ceci est le fibré en droites naturel sur le produit $M \times X$. Il n'est pas difficile de considérer maintenant la signature de cette famille (ou la famille des opérateurs de signature : pour chacun de ces fibrés plats, on a une signature avec des coefficients dans le fibré plat, de telle façon qu'on peut considérer cette famille d'opérateurs). D'un côté, la famille de signature n'est pas seulement la différence entre la dimension des vecteurs propres positifs et la dimension des vecteurs propres négatifs; c'est le sous-espace des vecteurs propres positifs moins le sous-espace des vecteurs propres négatifs. Ce que nous avons vraiment, ce sont deux fibrés vectoriels sur la base X , et ce que nous obtenons de cette manière, ce n'est pas juste un nombre, mais un élément de ce qu'on appelle la K -théorie de X , qui est dénoté par $K(X)$. Une fois qu'on a cet élément dans la K -théorie de l'espace X , il n'est pas difficile de montrer, premièrement, que cet élément est invariant par homotopie (ce n'est pas plus difficile que de prouver que la signature ordinaire est invariante par homotopie), et, deuxièmement, que si l'on prend le caractère de Chern de cette famille - en appliquant juste le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer pour les familles - on obtient exactement la signature la plus haute de Novikov.

Maintenant, le problème que j'aimerais vraiment gérer est de savoir ce qui remplace le dual de Pontrjagin X , la K -théorie de X , le caractère de Chern, le théorème de l'indice, et etc. quand le groupe Γ (le groupe fondamental de la variété) n'est plus commutatif.

Jusque-là, nous avons utilisé la commutativité de façon essentielle. Elle a été utilisée pour définir le dual de Pontrjagin, et pour gérer ce dual de Pontrjagin de la façon habituelle utilisée pour les espaces commutatifs.

Le groupe K_0

Qu'est-ce que la K -théorie? La K -théorie consiste essentiellement à faire de l'algèbre linéaire avec des paramètres qui varient continuellement dans un espace de base X . Si l'on voit les choses algébriquement, la K -théorie consiste juste à faire de l'algèbre linéaire quand l'anneau de base a été remplacé des nombres complexes \mathbb{C} à l'anneau $\mathcal{C}(X)$ des fonctions continues sur X . Il y a une définition purement algébrique de la K -théorie en termes de classification des modules projectifs finis. Le fait que les modules soient finis correspond au fait que les fibres sont de dimension finie, et projectif est la traduction du fait que les fibrés sont clairement triviaux. Donc, en fait, la signification du fait de faire de la K -théorie sur une algèbre peut être formulée de façon purement algébrique. De plus, on trouve très rapidement que la commutativité de l'algèbre - l'anneau de base sur lequel on travaille - n'a rien à voir avec le problème. Par conséquent, nous sommes libérés de l'hypothèse de la commutativité de $\mathcal{C}(X)$. Dès que l'on traite des modules projectifs finis, on a besoin de les représenter dans des matrices sur l'algèbre, comme des idempotents. Mais les matrices couvrant une algèbre ne commutent pas, donc la commutativité n'a rien à voir avec le problème.

Le second point est que si nous prenons un groupe discret Γ , alors la construction du dual de Pontrjagin donne une C^* -algèbre non-commutative plutôt qu'une qui est commutative. Laissez-moi expliquer comment on construit cela. On prend la représentation régulière du groupe dans l'espace $\ell^2(\Gamma)$, l'espace de Hilbert avec sa base orthonormée formée des éléments du groupe. Dans cet espace de Hilbert, le groupe agit par représentation régulière à gauche et ainsi, l'anneau de groupe - la

linéarisation $C\Gamma$ - agit également. On prend simplement la fermeture de la norme de cet anneau de groupe. Si le groupe était abélien, ce que l'on obtiendrait serait précisément les fonctions continues sur le dual de Pontrjagin de l'espace (ceci n'est pas difficile ; c'est juste de l'analyse de Fourier). Ainsi, en général, nous avons un bon remplacement pour cela, excepté que c'est une algèbre non-commutative.

Il y a une façon naturelle de définir la signature de l'espace couvrant d'une variété. Si l'on regarde le recouvrement universel de la variété, alors sur ce recouvrement universel, on a le groupe fondamental qui agit, et on peut simuler la construction habituelle de la signature du recouvrement universel. Nous pouvons toujours considérer les formes différentielles avec une certaine croissance à l'infini, et le cup produit, qui nous donne un appariement, et par conséquent une forme quadratique. Il s'avère que cette forme quadratique peut être définie comme un élément de ce qu'on appelle le *groupe de Witt*. Le groupe de Witt est un groupe de formes quadratiques abstraites sur l'anneau de groupes $C\Gamma$. Mais le problème avec le groupe de Witt, c'est qu'il est défini abstraitement par une présentation des formes quadratiques (nous voulons qu'elles soient égales si elles diffèrent par un changement de variables, ou si elles sont stablement égales, etc). Donc c'est difficile à analyser.

Maintenant la raison pour laquelle nous prenons des C^* -algèbres devrait être claire. Précisément parce que les C^* -algèbres sont les seules algèbres pour lesquelles le spectre des éléments auto-adjoints est réel. Pourquoi ne pas prendre par exemple l'algèbre $\ell^1(\Gamma)$ des fonctions sommables sur Γ ? C'est une algèbre de Banach. Mais si nous prenons un élément self-adjoint sur lui, en général son spectre remplira toute la couronne. Ceci n'est pas vrai pour une algèbre involutive en général que le spectre d'un élément auto-adjoint est réel ; c'est précisément la caractérisation des C^* -algèbres. Par conséquent, nous prenons les C^* -algèbres précisément dans le but d'être capable de dire qu'un élément du groupe de Witt - une forme quadratique auto-adjointe telle que $H = H^*$ qui appartient à l'anneau des matrices $q \times q$ sur une algèbre \mathcal{A} détermine un espace propre positif et un espace propre négatif. Comment avons-nous obtenu ces espaces propres positif et négatif ? Quand le spectre est réel, on calcule une intégrale de Cauchy sur une courbe fermée C qui enferme le spectre positif de H

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C R_\lambda d\lambda, \quad (15)$$

où R_λ est le résolvant de la forme quadratique. En faisant cela, par des résultats généraux, nous savons que nous obtenons une projection idempotente. Donc cela nous permet de dire que le groupe de Witt dans cette situation envoie vers la K -théorie (et, en fait, le groupe de Witt est égal à la K -théorie). Ainsi pour les C^* -algèbres, la principale simplification est que la K -théorie est la même que le groupe de Witt, et la K -théorie est beaucoup plus simple et de loin puisque c'est juste de l'algèbre linéaire.

En mettant toutes ces choses ensemble et en utilisant des résultats de Wall-Mishchenko, nous obtenons que la signature du recouvrement universel \bar{M} , prise de façon équivariante relativement au groupe fondamental, est en fait un élément de la K -théorie de la C^* -algèbre du groupe

$$\text{Sign}_c(\bar{M}) \in K(C^*(\Gamma)). \quad (16)$$

Le problème est le suivant. Si nous étions dans le cas abélien, alors cette C^* -algèbre serait celle des fonctions continues sur le dual de Pontrjagin de Γ , et l'étape suivante serait triviale ; elle consisterait simplement à prendre le caractère de Chern de cette signature. (Bien sûr, ça ne serait pas évident de calculer ce caractère de Chern ; c'est ici que le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer pour les

familles pourrait être utilisé. Néanmoins, il ne serait pas nécessaire de définir une nouvelle théorie des signatures ; nous prendrions juste le caractère de Chern, et nous le calculerions).

Si le groupe est non-abélien, nous n'avons pas l'espace. Nous aimerions dire que cette C^* -algèbre de Γ est comme les fonctions continues d'un certain espace, mais nous n'avons pas le dual de Pontrjagin parce que l'algèbre peut drastiquement échouer à être abélienne. Il s'avère que ce qui est nécessaire pour remplacer le caractère de Chern, c'est, d'abord, de penser à la théorie des classes caractéristiques, et d'être capable de comprendre la théorie de telle manière qu'elle continuera de tenir dans le cas non-abélien. Cela donne la *cohomologie cyclique*, que je vais traiter maintenant. Cette théorie est motivée très fortement par l'exemple, dans le sens où il y a une possibilité de remplacer les calculs de courbure, les classes caractéristiques, et etc., dans cette situation non-abélienne, dans laquelle nous ne pouvons utiliser le paradigme habituel.

Cohomologie cyclique

Permettez-moi d'essayer de présenter la cohomologie cyclique aussi simplement que possible. C'est juste une généralisation de la notion de trace. Si l'on a une algèbre non-commutative \mathcal{A} , alors il y a une simple égalité sur une fonctionnelle - sur une forme linéaire de cette algèbre - qui nous permet d'effacer la non-commutativité, i.e. qui nous permet de faire de nombreuses choses comme si l'algèbre était commutative. C'est la notion d'une *trace*

$$\tau : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}. \quad (17)$$

La trace satisfait la condition de cocycle suivante :

$$\tau(a^0 a^1) - \tau(a^1 a^0) = 0. \quad (18)$$

Un cocycle cyclique, en général, est juste une trace plus haute. Par trace plus haute, je veux dire que c'est à nouveau une fonctionnelle, mais sur plusieurs variables dans l'algèbre, et satisfaisant les deux conditions suivantes

$$\tau(a^0 a^1, a^2, \dots, a^{n+1}) - \tau(a^0, a^1 a^2, \dots, a^{n+1}) + \dots \quad (19)$$

$$\dots + (-1)^n \tau(a^0, a^1, \dots, a^n a^{n+1}) + (-1)^{n+1} \tau(a^{n+1} a^0, a^1, \dots, a^n) = 0,$$

$$\tau(a^1, a^2, \dots, a^n, a^0) = (-1)^n \tau(a^0, a^1, \dots, a^n). \quad (20)$$

Un exemple simple de cocycle cyclique apparaît dans la situation où l'algèbre est l'algèbre des fonctions sur une variété. Supposons donné un courant de de Rham (rappelons qu'un *courant de de Rham de dimension k* est une forme linéaire sur des formes différentielles de degré k). Quand je dis qu'il est *fermé*, je veux dire que quand il est apparié à une forme fermée, il donne 0.

Si nous commençons avec un courant fermé c , alors nous pouvons par exemple définir une fonctionnelle multilinéaire sur l'algèbre par la formule suivante :

$$\tau_c(a^0, \dots, a^k) = \langle c, a^0 da^1 \wedge \dots \wedge da^k \rangle, \quad (21)$$

et il n'est pas difficile de montrer qu'elle satisfait les conditions (19) et (20) ci-dessus. La condition (19) correspond juste au fait que la différentielle d'un produit est donnée par la règle de Leibniz,

et la condition (20) nous dit que le courant est fermé, de telle façon que nous pouvons intégrer par parties dans le courant et cela nous permet de permuter les variables de façon cyclique.

Dans le but d'étendre les fonctionnelles précédentes aux matrices par multilinéarité, on doit simplement l'étendre aux produits tensoriels de fonctions par les matrices. Il y a seulement une formule naturelle qui peut être appliquée

$$\tau'_c(a^0 \otimes \mu^0, a^1 \otimes \mu^1, \dots, a^k \otimes \mu^k) = \tau_c(a^0, \dots, a^k) \text{Tr}(\mu^0 \dots \mu^k), \quad (22)$$

où les a^0, \dots, a^k sont des fonctions, les μ^0, \dots, μ^k sont des matrices $q \times q$, et Tr dénote la trace ordinaire. Observez que cette nouvelle expression n'est pas invariante par permutation, parce que la trace d'un produit est seulement invariante par permutations cycliques. C'est précisément ce petit fait qui nous force à ne considérer que les permutations cycliques.

Pourquoi les traces sont-elles importantes? La trace sur une algèbre est importante parce que la trace donne automatiquement une *dimension* à n'importe quel module projectif fini. Si on a un module projectif fini sur une algèbre, ce module peut être vu comme un idempotent dans les matrices. La trace s'étend aux matrices, et quand nous évaluons la trace sur l'idempotent correspondant, elle ne dépend d'aucun choix.

Une trace plus élevée (i.e. un cycle cocyclique) nous donne un invariant, exactement comme le caractère de Chern, pour les modules projectifs finis. Nous verrons par de très simples exemples que cela se réduit au caractère de Chern dans l'exemple d'un courant donné ci-dessus.

Il s'avère que l'évaluation d'un cycle cocyclique r de dimension paire sur un élément diagonal $r(e, e, \dots, e)$, pour $e \in \text{Proj}(M_q(\mathcal{A}))$, est invariante par homotopie. En d'autres termes, si nous bougeons l'idempotent par déformation parmi les idempotents, alors cette quantité ne change pas. Comment prouve-t-on cela? On procède comme suit : si vous bougez un idempotent parmi des idempotents, alors, bien sûr, c'est une belle déformation spectrale, parce que le spectre d'un idempotent est seulement constitué de 0 et de 1, et donc il faut satisfaire une équation spectrale. Cette équation est

$$\dot{e}_t = [x_t, e_t] \quad (23)$$

pour un élément x_t . Cette équation est facilement obtenue en différentiant l'équation $e_t^2 = e_t$. Maintenant, quand nous différencions $r(e, e, \dots, e)$, nous obtenons un \dot{e} apparaissant seulement une fois, et alors, par une petite manipulation algébrique en utilisant l'identité de cocycle, nous pouvons prouver que nous obtenons 0. Ainsi ceci est un invariant selon les déformations et, de plus, il n'est pas difficile de prouver qu'il dépend seulement de la classe d'isomorphisme du module projectif fini défini par e . De plus, il est additif, de telle façon que si nous prenons la somme directe de deux modules projectifs finis - même si nous avons un monôme qui n'est pas linéaire - ce que nous obtenons, c'est la somme des traces correspondantes.

Cela signifie que ce qu'on appelle la *cohomologie cyclique*, dans laquelle les éléments sont des cycles cycliques modulo une relation triviale, s'apparie avec la K -théorie, de telle façon que chaque classe de cocycles définit une application du K_0 de l'algèbre, $K_0(\mathcal{A})$, vers les scalaires.

Laissez-moi montrer avec cet exemple des courants, d'abord, comment ce calcul se réduit au calcul de Chern-Weil par des connexions et courbure pour les fibrés vectoriels. J'ai montré que si nous avons un courant de de Rham fermé sur M , alors nous avons un cocycle cyclique. Bien sûr, si nous

voulons connaître l'appariement des caractères de Chern, il suffit de connaître comment le caractère de Chern s'apparie avec n'importe quel courant de de Rham, parce que les courants fermés de de Rham engendrent l'homologie de la variété. Donc ce qu'on a à faire c'est de montrer que l'égalité

$$\langle \tau_c, [E] \rangle = \tau_c(e, \dots, e) = \langle \text{ch}(E), c \rangle, \quad (24)$$

où $[E]$ est le module projectif fini du fibré vectoriel E , et c dénote aussi la classe d'homologie du courant. Comment prouve-t-on cela? Le module projectif fini d'un fibré vectoriel est donné par un idempotent. Une façon plus géométrique de formuler cela est de dire que le fibré vectoriel est le pull-back du fibré vectoriel canonique sur la Grassmannienne par application de la variété à la Grassmannienne, parce que quand nous prenons un idempotent dans les matrices $n \times n$ sur l'algèbre, juste par une sorte de translation, c'est exactement l'application de l'espace vers l'ensemble des idempotents des matrices $n \times n$, qui est la Grassmannienne. Sur la Grassmannienne, nous avons une connection canonique, qui vient de la projection orthogonale à partir d'une fibre (i.e. à partir d'un espace vectoriel) vers l'espace vectoriel très proche. Maintenant nous pouvons retourner (*pull back*) cette connection canonique.

Si nous calculons la courbure de cette connexion, nous trouverons qu'elle est donnée comme une matrice de formes différentielles $edede$, où de est la différentielle de cette application e . Et ainsi, quand nous apparions la courbure à une certaine puissance au courant, nous voyons immédiatement que nous obtenons $r_c(e, e, \dots, e)$.

Ce que nous avons fait a consisté à traduire algébriquement l'appariement de telle façon que, premièrement, on est complètement libéré de l'hypothèse de la commutativité; et deuxièmement, que cela se relie en fait à la cohomologie qui est bien définie, parce que, si on regarde la définition d'un cocycle cyclique, on comprend aisément que la condition (19) est la condition d'être fermé. Observons que la somme apparaissant dans cette condition n'est rien d'autre que la cofrontière de Hochschild de la cochaîne que nous sommes en train de traiter. Et la condition (20) est une restriction aux cochaînes cycliques, qui s'avère être stable selon la cofrontière, de telle façon que ce que nous obtenons est un complexe, et en dehors de ce complexe, bien sûr, une théorie de la cohomologie qui est la cohomologie cyclique.

L'indice équivariant

Voyons d'autres exemples. Prenons l'anneau de groupe d'un groupe discret, $\mathbb{C}[\Gamma]$, et supposons donné un cocycle de groupe $c(g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{C}, g_i \in \Gamma$.

Rappelons-nous du fait que lorsque nous considérons le dual de Pontrjagin, nous voulions calculer le caractère de Chern. Le problème était, bien sûr, seulement d'être capable d'apparier ce caractère de Chern avec les cocycles de groupes. Maintenant nous avons toujours le groupe, mais il n'est pas abélien, donc nous ne pouvons parler du dual de Pontrjagin. Pourtant, nous avons l'anneau de groupe, et l'assertion qui stipule que l'extrêmement simple formule suivante

$$r_c(g^0, \dots, g^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } g^0 g^{1n} \neq e \\ c(g^1, \dots, g^n) & \text{sinon} \end{cases} \quad (25)$$

assigne à tout cocycle de groupe un cocycle cyclique sur l'anneau de groupes.

Maintenant le principal ennui est que nous n'avons pas le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer. Rappelez-vous que lorsque nous faisons le calcul dans le cas du dual de Pontrjagin d'un groupe abélien, nous utilisons l'indice d'Atiyah-Singer. Donc nous avons besoin d'un remplaçant pour cela. Ce remplacement, c'est un théorème qui non seulement gèrera l'opérateur de signature, mais en fait gèrera un opérateur arbitraire elliptique Γ -invariant sur l'espace couvrant \bar{M} .

Si on nous donne un opérateur différentiel D qui est elliptique sur une variété M , nous pouvons toujours le faire remonter (parce qu'il est local) à l'espace couvrant en un opérateur \bar{D} qui est Γ -invariant et toujours elliptique. Il s'avère que, alors que l'opérateur à l'étage bas a une paramétrisation (un inverse modulo les opérateurs lisses), l'opérateur sur l'espace recouvrant a également une paramétrisation, mais celle-ci n'est pas un inverse modulo les opérateurs lisses : c'est un inverse modulo $R\Gamma$, l'anneau de groupes de Γ étendu par les opérateurs lissant. (R dénote l'anneau des opérateurs lissant sur la base, qui ne dépend pas de la variété).

En fait, l'index pour l'opérateur est un élément de la K -théorie de l'anneau de groupes de Γ étendu par les opérateurs lissant, $\text{Ind}_\gamma \bar{D} \in K_0(R\Gamma)$, qui est appelé l'*index* Γ -équivalent. Maintenant, le théorème suivant est vérifié, qui est exactement un analogue plus élevé du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, de la même manière que la signature plus élevée de Novikov est l'analogue de la signature ordinaire.

THÉORÈME (CONNES-MOSCOVICI). *Si c est un $2q$ -cocycle de groupes sur le groupe Γ , alors*

$$\langle r_c, \text{Ind}_\Gamma \bar{D} \rangle = \frac{1}{(2\pi i)^q} \frac{q!}{(2q)!} \langle \text{ch} \sigma_D \cdot \text{Td}(M) \cdot [c], [M] \rangle. \quad (26)$$

Ici Td dénote un *Tgenre impair* du fibré tangent complexifié. Cette formule contient deux nouveaux termes par rapport à la formule d'Atiyah-Singer ; notamment, la constante numérique $q!/(2q)!$, qui prend en compte la dimension du cocycle, et le facteur $[c]$, qui est la classe du cocycle de groupe c vue sur la variété M .

Maintenant, nous appliquons cela à l'opérateur de signature sur le recouvrement et nous obtenons le corollaire suivant :

COROLLAIRE. *Si D est l'opérateur de signature, alors*

$$\langle r_c, \text{Ind}_\Gamma \bar{D} \rangle = \text{signature plus élevée de Novikov} = \langle L[M] \cdot \varphi^*(c), [M] \rangle. \quad (27)$$

Nous pourrions dire que la conjecture de Novikov est résolue en général ; mais il reste toujours un problème technique. (Néanmoins, la conjecture est résolue pour une famille générique de groupes, notamment les *groupes de Gromov hyperboliques*. Je ne donnerai pas la définition technique de ces groupes, mais je mentionnerai la raison technique qui restreint encore la démonstration à ces groupes).

Quand on traite le cas abélien, on a des fonctions lisses, et les fonctions lisses ont les deux propriétés suivantes plutôt importantes. La première propriété est que la K -théorie de l'algèbre des fonctions lisses est la même que la K -théorie des fonctions continues

$$K(\mathcal{C}^\infty(M)) \xrightarrow{\infty} K(\mathcal{C}(M)). \quad (28)$$

La seconde est que les cocycles cycliques que nous obtenons automatiquement s'étendent du groupe agissant CT , qui est comme les polynômes de Laurent, aux fonctions lisses. Il s'avère que, quand on prend des groupes non-abéliens, alors ce problème - qui est assez trivial dans le cas abélien - présente des difficultés analytiques. Pourtant, cette technicité peut être résolue pour les groupes hyperboliques de Gromov.

J'expliquerai maintenant dans quel sens ces groupes sont génériques. Par un résultat de Gromov, si nous regardons les groupes (finiment présentés) donnés par les générateurs et les relations, en prenant un nombre fini de générateurs, en limitant la longueur des relations, et en comptant parmi les groupes obtenus ceux qui sont hyperboliques, alors le pourcentage de ceux-ci tend vers 100% lorsque la longueur tend vers l'infini.

Nous aimerions que la conjecture de Novikov soit vraie en général. Il pourrait être possible que le problème technique ci-dessus soit en effet essentiel, et que la conjecture ne soit vraie que pour les groupes pour lesquels on a une sorte de contrôle analytique. Il est très important de traiter de telles questions, parce qu'elles ne sont pas seulement pertinentes pour la conjecture de Novikov. Ce que l'on traite vraiment dans cette situation, c'est l'analyse du dual d'un groupe discret. C'est un espace quantique (il n'est pas abélien) et cette analyse est beaucoup plus compliquée et riche que dans le cas abélien. Principalement, le cas abélien est une sorte de cas en dimension finie, alors que dans le cas non-abélien, à cause de la croissance des groupes, nous avons des phénomènes, qui sont de dimension infinie par nature.

Géométrie riemannienne

Au début, j'ai expliqué la motivation initiale d'Heisenberg. Puis j'ai montré au moyen de quelques exemples comment les idées de la géométrie non-commutative peuvent être utilisées pour des exemples spécifiques. Jusque-là, je n'ai parlé que de topologie, de théorie des formes différentielles et de classes caractéristiques. Je voudrais maintenant discuter de la partie très essentielle de la géométrie qui traite de la mesure des longueurs, i.e. la géométrie riemannienne. Cela n'est absolument pas terminé. Bien que seule une petite partie de la théorie soit complète, je pense qu'elle aura des applications en physique, et je voudrais donc revenir à la physique dans la dernière partie de mon exposé.

En faisant de la géométrie non-commutative, on arrive après de nombreux exemples à la notion qui devrait remplacer la notion de variété riemannienne. Cette notion, d'un côté, couvrira le cas de la dimension finie ; mais en géométrie riemannienne, elle fera quelque chose de plus, elle mélangera le discret et le continu. (La géométrie riemannienne, comme cela est bien connu, ne traite que du continu et ne gère pas le discret). Le paradigme rendra possible la gestion de dimensions non-entières, comme les dimensions de Hausdorff. Par exemple, si nous avons un cercle qui s'enroule dans un espace de dimension de Hausdorff plus grande dans le plan, le paradigme gèrera cela comme le gèrerait la géométrie riemannienne, mais les fonctions ne seront pas différentiables.

Laissez-moi revenir aux notions fondamentales de la géométrie riemannienne. La géométrie riemannienne gère un certain espace métrique dans lequel la distance est calculée comme le minimum des longueurs d'arcs, $d(p, q) = \text{Inf} \{ \int_p^q ds \}$, où la longueur d'un arc infinitésimal est donnée par la racine carrée de la forme quadratique

$$ds = \sqrt{\sum g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (29)$$

Étonnamment, cette géométrie est pertinente pour deux raisons. L'une d'elles est qu'elle offre une large variété d'exemples, et la seconde est qu'elle offre de nombreux outils. En particulier, tous les outils de la géométrie différentielle et du calcul intégral sont utilisables et rendent les calculs possibles.

Au début, la géométrie riemannienne était destinée à généraliser les géométries euclidiennes et non euclidiennes, et il y avait donc la tentation de la restreindre à des espaces extrêmement spéciaux, comme ceux dans lesquels un mouvement rigide est possible. La relativité générale a montré que cela serait une erreur, parce qu'en relativité générale, on est obligé de considérer tous les espaces possibles d'une certaine sorte, et on est obligé d'évoluer parmi eux.

Revenons maintenant des considérations ci-dessus à un point de vue plus algébrique. Nous prenons l'algèbre \mathcal{A} des fonctions sur la variété M - aucune régularité n'est supposée - et l'algèbre est supposée agir sur un espace de Hilbert. Cet espace de Hilbert est l'espace des spineurs L^2 , $\mathcal{H} = L^2(M, S)$. De plus, je prends comme donné l'opérateur de Dirac D ; c'est-à-dire que nous est donnée une algèbre de fonctions ainsi qu'une représentation. Mais si nous n'étions qu'en train de gérer des représentations, nous n'aurions rien sur quoi travailler. Nous voulons ajouter une condition de finitude. Cette condition de finitude est donnée par l'opérateur de Dirac D , qui est fini au sens où son inverse est compact, ou au sens où ses valeurs propres vont à l'infini. Et il est compatible avec l'algèbre des fonctions, au sens où si nous permutons l'opérateur de Dirac avec les fonctions, ils ne commutent pas, mais ce que nous obtenons est borné. (L'opérateur de Dirac est non borné).

Je montrerai maintenant comment retrouver la variété M , la distance géodésique $d(p, q)$ sur M , le volume riemannien, l'intégration des fonctions, le potentiel de jauge, et l'action de Yang-Mills, en dehors des données provenant purement de la théorie des opérateurs $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$. Et cela sera fait de manière que nous ne serons pas limités aux variétés riemanniennes, mais après un moment, nous pourrons également traiter des espaces discrets.

Laissez-moi venir brièvement à la manière dont on retrouve la variété M . Nous avons l'algèbre, mais nous n'avons pas encore la régularité. Nous retrouvons la régularité en demandant au commutateur d'être borné. Alors par fermeture, nous obtenons l'algèbre des fonctions continues. Par la bien connue dualité entre l'algèbre des fonctions continues et les points, nous retrouvons les points comme un espace topologique compact

$$\begin{aligned} M &= \text{Spectre de la C}^*\text{-algèbre } \overline{\mathfrak{A}} ; \\ \mathfrak{A} &= \left\{ a \in \mathcal{A} \mid [D, a] \text{ est borné} \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

Voyons la distance, qui est beaucoup plus intéressante. La formule habituelle pour la distance est l'infimum sur tous les arcs. Je remplacerai cette formule par une formule qui donnera la même réponse (i.e. la distance géodésique), mais qui sera duale; au lieu de considérer que les arcs parcourent la variété, je considérerai les coordonnées. Je veux mesurer la distance entre deux points comme suit

$$d(p, q) = \text{Sup} \left\{ |a(p) - a(q)| \mid \| [D, a] \| \leq 1 \right\}. \quad (31)$$

Vérifions que cela est vrai. Quand nous calculons le commutateur $[D, a]$, nous trouvons que c'est la multiplication de Clifford par le gradient ∇a de la fonction a . Dire que cet opérateur a une norme inférieure ou égale à 1 consiste précisément à dire que, en chaque point, ce gradient a une longueur inférieure ou égale à 1. Par un argument simple, cela consiste précisément à dire que la fonction est

lipschitzienne pour la distance géodésique, avec une constante de Lipschitz égale à 1 :

$$\frac{\text{Sup}|a(p) - a(q)|}{d(p, q)} \leq 1. \quad (32)$$

Ainsi, nous voyons immédiatement qu'une inégalité est en effet donnée. Pour obtenir l'autre inégalité, nous prenons juste la fonction qui est la distance géodésique à un point donné p . Cette fonction est lipschitzienne, et donc nous pouvons la mettre du côté droit et nous avons alors terminé.

Ce que nous obtenons ici, c'est la même distance géodésique que d'habitude. Pourtant le calcul de la mesure est différent, et, en fait, quand nous effectuons des mesures - pas de grandes longueurs, mais de très petites longueurs - nous sommes parfaitement incapables d'utiliser un chemin. On pourrait dire, par exemple, qu'un photon a une trajectoire qui est un chemin allant d'un point à un autre point. Mais à nouveau, cela n'est pas vrai : le photon en mécanique quantique est une onde plane qui a un moment défini, et il n'y a donc pas de trajectoire du photon, et, en fait, nous ne mesurons pas la distance par la formule de l'infimum des arcs de longueurs, mais précisément par la formule (31).

Avoir cette formule ne compte pas beaucoup, parce que nous devons être capables d'intégrer des fonctions. Il y a une analyse du résidu - c'est-à-dire, ce qui est appelé la *trace de Dixmier* des opérateurs sur l'espace de Hilbert - qui nous permet d'écrire la formule du volume dans le cas riemannien en théorie pure des opérateurs à partir de l'opérateur de Dirac :

$$\int_M f dv = \text{Tr}_\omega(f D^{-p}), \quad (33)$$

où p est la dimension, i.e. l'ordre d'accroissement des valeurs propres de D : $\lambda_n \sim n^{1/p}$. Cela est relié au théorème taubérien, dans le sens où si nous prenons la fonctionnelle Tr_ω , - la trace de Dixmier, qui n'est pas la trace ordinaire - alors elle est reliée au résidu de la fonction zeta de l'opérateur au point 1.

C'est la trace qui a été découverte par Dixmier en 1966. Globalement, son papier n'a jamais été lu : il est resté complètement caché dans la littérature pendant un très long temps ; mais à partir du travail de Manin, Wodzicki et Guillemin, j'ai remarqué que le résidu des opérateurs différentiels était cette même trace, si ce n'est que la trace de Dixmier existe en général. Elle n'est pas particulière au cas des opérateurs différentiels, ou à la configuration d'une variété. Elle pourrait donc être utilisée en général pour procéder à l'intégration dans cette situation générale de théorie riemannienne. Et maintenant, il y a le fait assez surprenant que la mesure de Hausdorff (par exemple, sur la frontière des groupes quasi-Fuchsien) est aussi donnée précisément par la trace de Dixmier, bien que nous soyons maintenant dans une situation où la dimension est non entière.

Ainsi, on construit d'abord l'intégration des fonctions, la distance, et alors on procède à la construction de la théorie de jauge. Pour construire la théorie de jauge, on utilise l'opérateur de Dirac, on définit les connexions, les fibrés vectoriels, la courbure, et etc.

Voyons le point clé. Cette théorie de jauge a exactement les mêmes caractéristiques que la théorie de jauge ordinaire. En particulier, c'est uniquement en dimension 4 qu'on a un théorème général qui relie la seconde classe de Chern avec l'action de Yang-Mills. Cela découle d'un théorème complètement général utilisant la trace de Dixmier, qui, en fait, justifie la trace de Dixmier et fournit une inégalité montrant que la théorie de jauge n'est pas évidente quand la seconde classe de Chern

n'est pas évidente.

THÉORÈME. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ un triplet avec $D^{-1} \in \mathcal{L}^{2n+1}$. Alors :

1. L'égalité $\varphi(a^0, \dots, a^{2n}) = \text{Tr}_\omega(\gamma a^0 [D, a^1] \dots [D, a^{2n}] D^{-2n})$ définit un cocycle de Hochschild sur \mathcal{A} .
2. La classe de φ est la même que la classe du caractère de Chern de la classe de K -homologie de $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$.

Maintenant, je voudrais montrer ce qui se passe à cause du fait que la théorie n'est pas limitée au continu. Nous pouvons considérer un espace qui est l'espace produit d'un continuum (le continuum ordinaire à quatre dimensions) par un espace discret, et l'espace discret le plus simple que nous puissions prendre est un espace à deux points. On transcrit algébriquement le sens qui consiste à prendre un tel produit par

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \\ D &= D_1 \otimes 1 + \gamma_1 \otimes D_2. \end{aligned} \tag{34}$$

Faisons de la théorie de jauge pour cet espace à deux points. L'espace à deux points est décrit par l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, puisque les fonctions sur l'espace à deux points sont juste données par deux nombres complexes $(f(a), f(b))$. À quoi correspond l'opérateur de Dirac ici ? Par une théorie générale qui est appelée la K -homologie, on peut montrer qu'il se réduit à la forme suivante : l'espace de Hilbert est de la forme $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N + \mathbb{C}^N$; l'algèbre agira par les matrices

$$\begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ 0 & f(b) \end{pmatrix} \tag{35}$$

et l'opérateur de Dirac D sera diagonal et bien sûr, self-adjoint :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

pour une certaine matrice $N \times N$ notée M . Telle est la structure que nous souhaitons considérer sur l'espace.

Maintenant, la première chose que nous devons faire est de calculer la distance. Si nous prenons pour distance la formule donnée par l'infimum sur les longueurs d'arcs, alors, puisque nous avons un espace à deux points, nous n'obtiendrons rien, parce qu'il n'y a pas d'arc dans l'espace à deux points. Mais nous avons l'autre formule, et nous pouvons calculer la distance entre nos deux points. En utilisant la formule (31), nous obtenons

$$d(a, b) = \text{Sup} \left\{ |f(a) - f(b)| \mid \| [D, f] \| \leq 1 \right\} = \frac{1}{\lambda}, \tag{37}$$

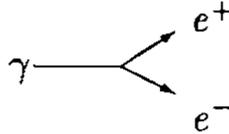
où λ est la norme de la matrice M , c'est-à-dire, la racine carrée de la plus grande valeur propre de M^*M . Alors nous calculons le potentiel de jauge, l'action de Yang-Mills, et nous trouvons un terme qui est précisément le terme qu'on appelle le terme de brisure de symétrie, que les physiciens ont été contraints d'introduire pour assigner des masses aux particules élémentaires.

Alors nous allons plus avant et nous nous demandons quels sont les fibrés vectoriels sur un espace à deux points. Bien sûr, cela est très évident : un fibré vectoriel est donné par deux fibres, \mathbb{C}^k et $\mathbb{C}^{k'}$, et un fibré non trivial est un fibré dans lequel $k \neq k'$. Nous prenons le fibré non trivial le plus simple, qui a des fibres de dimension 2 en un point et de dimension 2 en l'autre point.

Une fois qu'on a vu en détail quel est le cas riemannien en dimension 4 et le cas des points discrets, on peut regarder le produit. Quand nous prenons le produit de ces deux espaces et que nous calculons quelle est la théorie de jauge, nous trouvons exactement ce que les physiciens se sont vus donné, également, par la physique des particules élémentaires et le *modèle de Glashow-Weinberg-Salam*. On trouve un Lagrangien qui contient bien plus de termes que le Lagrangien habituel. Ordinairement, de la théorie de Maxwell et de la théorie de Dirac, nous savons que la théorie de l'électrodynamique quantique est décrite par un Lagrangien

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{fB}. \quad (38)$$

qui a une partie purement potentiel de jauge \mathcal{L}_B et une partie fermionique \mathcal{L}_f , et une interaction entre les fermions et les bosons donnée par le diagramme



qui nous dit comment un photon peut donner un positron et un électron, par exemple. Ce Lagrangien est celui de l'électrodynamique quantique.

Dans ce siècle¹, on a compris que l'électrodynamique quantique n'était pas suffisante pour décrire ce qu'on appelle l'*interaction électro-faible*. En fait, on a découvert qu'il y a un décalage nucléaire beta, qu'il y a la radioactivité (qui a été découverte à la fin du siècle précédent), et, graduellement, avec de nombreuses expériences, les physiciens ont été amenés au Lagrangien expérimental suivant :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_f + V(H) + \mathcal{L}(B, H) + \mathcal{L}(f, H). \quad (39)$$

dans lequel $V(H)$ est le *potentiel de Higgs*, $\mathcal{L}(B, H)$ est le *couplage minimal*, et $\mathcal{L}(f, H)$ est le *couplage de Yukawa*.

En faisant un petit calcul en géométrie riemannienne non-commutative, j'ai montré que si l'on altère l'espace un petit peu en le croisant avec un ensemble discret de deux points, alors l'espace-temps devient comme un produit de l'espace-temps ordinaire par deux points, et ces deux points sont extrêmement proches : si on calcule leur distance, on trouve quelque chose de l'ordre de 10^{-16} cm.

L'idée ne consiste pas seulement à introduire de nouvelles dimensions, mais à utiliser une fibre discrète. Maintenant, quand on calcule le Lagrangien comme expliqué ci-dessus, pour ce nouvel espace riemannien, on trouve exactement le modèle standard avec l'ensemble de ses cinq termes (39).

Pour le moment, dans le but d'incorporer les quarks, on doit faire un peu plus. Il y a deux copies de l'espace, i.e. il y a deux côtés : l'un est *orienté à gauche* et l'autre est orienté inversement. Pour

1. le XX^{ème}.

incorporer les quarks, au lieu de considérer seulement les fonctions à valeurs scalaires sur la copie orientée dans un sens, on doit considérer les fonctions à valeurs dans les quaternions. L'algèbre des quaternions est légèrement non-commutative (par "légèrement non-commutative", je veux dire que les quaternions satisfont des identités polynomiales ; ce ne sont pas des choses de grande dimension en ce qui concerne les matrices).

L'idée générale est que pour comprendre l'espace-temps, il peut être important de ne pas se limiter aux variétés connexes riemanniennes ordinaires et d'autoriser une notion plus générale de l'espace-temps - une notion plus générale que la géométrie riemannienne - basée sur des données théoriques et qui offre la possibilité de parler d'espace-temps "effectif". Je ne suis en aucun cas en train de dire qu'on aura là la réponse finale aux interrogations sur l'espace-temps. Ce que je dis, c'est que si nous prenons l'espace-temps et que nous calculons l'analogie de l'électrodynamique quantique sur lui, alors nous sommes précisément en train de calculer le Lagrangien compliqué ci-dessus (39). Ainsi, cela nous donne une meilleure compréhension géométrique du modèle existant effectif le plus précis de la physique des particules élémentaires.

Alain Connes
Institut des Hautes Études Scientifiques
35 Route de Chartres
F-91440 Bures-sur-Yvette
France

Transcrit d'un enregistrement de la conférence par Pere Ara et Carles Broto ; révisé par l'auteur.

5. $\mathbb{S}[\pm 1][3]$ et l'anneau des entiers

Dans notre travail récent [1] sur le théorème de Riemann-Roch arithmétique pour $\overline{Spec \mathbb{Z}}$, le nombre 3 joue le rôle d'un générateur naturel, permettant d'étiqueter les entiers $m \in \mathbb{Z}$ comme des polynômes de puissances de 3 avec coefficients dans $\mathbb{S}[\pm 1]$

$$(5.1) \quad P(X) = \sum_{j=0}^k a_j X^j, \quad a_j \in \{-1, 0, 1\}, \quad \forall j.$$

La subtilité de la description de la structure d'anneau des entiers \mathbb{Z} dans cette paramétrisation découle de l'addition des polynômes à coefficients dans le monoïde multiplicatif $\{-1, 0, 1\}$. Ici $\{-1, 0, 1\}$ est muni de la règle évidente de la multiplication, donc on sait comment multiplier les monômes *i.e.* $a X^n \times b X^m = (ab) X^{n+m}$, alors que le produit de polynômes est obtenu de manière unique, en utilisant la loi de distributivité, en supposant qu'on sait comment les additionner. La somme de deux monômes $a X^n, b X^m$ de degrés différents est simplement le polynôme $a X^n + b X^m$ et quand les degrés sont identiques la loi de distributivité $a X^n + b X^n = (a + b) X^n$ se réduit à reconstruire la somme des polynômes de degré 0.

Nous allons nous assurer que l'addition est définie sur les polynômes de degré 0 de telle façon que la règle suivante soit vérifiée :

La somme de 3 polynômes de degré 0 est un polynôme de degré ≤ 1 .

En utilisant cette hypothèse, on obtient, par induction sur le degré n , que la somme de deux polynômes de degré $\leq n$ est un polynôme de degré $\leq n + 1$. Le besoin de nécessiter que la somme de trois polynômes de degré 0 soit de degré ≤ 1 (plutôt que seulement la somme de deux polynômes), est dû au rôle de la retenue lorsqu'on ajoute des polynômes arbitraires.

Considérons maintenant l'addition de deux éléments de $\{-1, 0, 1\}$. Si l'un d'eux est 0 ou s'ils sont de signes opposés, alors la somme est la somme évidente. Ainsi, en utilisant la symétrie $x \mapsto -x$, on peut supposer qu'il sont tous les deux égaux à 1. La seule nouvelle règle que l'on ajoute est la règle suivante

$$(5.2) \quad 1 + 1 = X - 1.$$

En appliquant (5.2), on ajoute deux polynômes de degré 0 en utilisant la table suivante

+	-1	0	1
-1	$1 - X$	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	$X - 1$

Pour spécifier la somme de trois polynômes de degré 0, il suffit de savoir comment ajouter au polynôme $X - 1$ les éléments de $\{-1, 0, 1\}$. En utilisant l'associativité de la somme et (5.2), on a

$$(X - 1) + 1 = X, \quad (X - 1) - 1 = X - (1 + 1) = X - (X - 1) = 1.$$

Il s'ensuit alors que, comme requis, la somme de 3 polynômes de degré 0 est un polynôme de degré ≤ 1 . Le résultat suivant détermine la somme de n'importe quelle somme de polynômes selon (5.2).

PROPOSITION 5.1. *Soit $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes tels que dans (5.1), de degrés au plus n . Alors il existe un unique polynôme de degré au plus $n + 1$ qui coïncide, en utilisant la règle (5.2), avec la somme $P(X) + Q(X)$.*

PREUVE : Supposons (par induction) que l'assertion est vérifiée pour n'importe quels polynômes de degrés $< n$ et considérons une paire $P(X), Q(X)$ tous les deux de degré n . On décompose $P(X) = P_1(X) + \alpha_n X^n$, $Q(X) = Q_1(X) + \beta_n X^n$, avec $\alpha_n, \beta_n \in \{-1, 0, 1\}$. Alors

$$P(X) + Q(X) = P_1(X) + Q_1(X) + (\alpha_n + \beta_n)X^n,$$

où $P_1(X) + Q_1(X)$ est, par induction, la somme d'un polynôme de degré $n - 1$ avec un terme γX^n , $\gamma \in \{-1, 0, 1\}$. Alors, de la spécification de la somme de trois polynômes de degré zéro, on a $\alpha_n + \beta_n + \gamma = \delta + \epsilon X$, avec $\delta, \epsilon \in \{-1, 0, 1\}$. Ainsi la somme $P(X) + Q(X)$ peut s'écrire comme un polynôme de degré au plus $n + 1$, où les termes de degré $\geq n$ sont $\delta X^n + \epsilon X^{n+1}$. \square

On obtient la conclusion intrigante suivante

PROPOSITION 5.2. *L'ensemble des polynômes tels que dans (5.1), avec la règle d'addition fournie dans la Proposition 5.1, et l'unique produit associé, forme un anneau isomorphe à \mathbb{Z} .*

PREUVE : L'application

$$\theta : \sum \alpha_j X^j \mapsto \sum \alpha_j 3^j$$

est une bijection de l'ensemble des polynômes tels que dans (5.1) vers les entiers. Cette application est compatible avec l'addition et la multiplication vues dans la Proposition 5.1. \square

Il y a une fonction qui permet de calculer effectivement des sommes de polynômes comme ci-dessus. C'est une fonction de trois variables α, β, γ dans $\{-1, 0, 1\}$ qui spécifie leur somme comme étant un polynôme de degré au plus 1 dans X . Pour déterminer $\alpha + \beta + \gamma$ on peut y penser comme à une somme de 3 nombres réels et écrire l'ensemble $\{-1, 0, 1\} + \gamma$ auquel cette somme appartient, pour obtenir le coefficient de X . Au niveau algébrique, $\alpha + \beta + \gamma$ peut être écrit explicitement en utilisant le corps fini $\mathbb{F}_3 = \{-1, 0, 1\}$ comme suit

$$\alpha + \beta + \gamma = \overline{\alpha + \beta + \gamma + \sigma(\alpha, \beta, \gamma)} X$$

où \overline{m} est le reste de m modulo 3 et

$$\sigma(\alpha, \beta, \gamma) := \alpha\beta\gamma - \alpha^2\beta - \alpha^2\gamma - \alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2 - \beta^2\gamma - \beta\gamma^2.$$

Cela détermine l'expression algébrique pour la somme de trois polynômes de degré 0 comme dans la preuve de la Proposition [5.1]. Alors, par induction sur n , on obtient une expression algébrique pour les coefficients de X^n dans la somme $\sum_j \alpha_j X^j + \sum_j \beta_j X^j$ de deux polynômes. En effet, on définit par induction les polynômes $s_n(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \dots, \beta_{n-1})$ à coefficients dans \mathbb{F}_3 comme suit

$$s_0 := 0, \quad s_n = \sigma(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, s_{n-1}).$$

Alors le coefficient de X^n dans la somme $\sum_j \alpha_j X^j + \sum_j \beta_j X^j = \sum_j \gamma_j X^j$ est donné par

$$(5.3) \quad \gamma_n = \alpha_n + \beta_n + s_n.$$

Cette construction fournit une séquence de polynômes $\gamma_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$ et finalement, on a le

LEMME 5.3. *Le polynôme $\gamma_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$ s'évanouit à condition que les composants α_n, α_{n-1} et β_n, β_{n-1} s'évanouissent tous.*

PREUVE : Il suffit de montrer que $s_n = 0$ si $\alpha_{n-1} = 0$ et $\beta_{n-1} = 0$. Cela découle de la définition inductive de $s_n = \sigma(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, s_{n-1})$. \square

Puisqu'on travaille sur \mathbb{F}_3 , $x^n = x$ si n est un nombre impair, alors que $x^n = x^2$ si n est un nombre pair non nul. Ainsi on peut réduire les exposants des variables dans les polynômes γ_n de façon à ce qu'ils soient au plus égaux à 2.

On a $s_1(\alpha_0, \beta_0) = -\alpha_0\beta_0^2 - \alpha_0^2\beta_0$, alors que s_2 en forme réduite est égal à

$$\begin{aligned} s_2(\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1) &= \alpha_1\alpha_0^2\beta_0^2 + \alpha_0^2\beta_0\beta_1^2 + \alpha_1^2\alpha_0^2\beta_0 + \alpha_0^2\beta_0^2\beta_1 - \alpha_1\alpha_0^2\beta_0\beta_1 \\ &\quad + \alpha_1^2\alpha_0\beta_0^2 + \alpha_0\beta_0^2\beta_1^2 + \alpha_1\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\alpha_0\beta_0^2\beta_1 + \alpha_0\beta_0\beta_1 - \alpha_1\beta_1^2 - \alpha_1^2\beta_1 \end{aligned}$$

Écrire complètement $s_3(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2)$ nécessiterait plusieurs lignes.

Conceptuellement, on voit que la construction ci-dessus est décrite par la règle d'addition de deux vecteurs de Witt sur \mathbb{F}_3 . Le nombre 3 est le seul nombre premier pour lequel les vecteurs de Witt avec seulement un nombre fini de composants non nuls forment un sous-groupe additif de l'anneau de Witt. Plus précisément, on peut énoncer la proposition suivante

PROPOSITION 5.4. *Les vecteurs de Witt avec seulement un nombre fini de composants non nuls forment un sous-anneau de l'anneau $\mathbf{W}(\mathbb{F}_3)$. Ce sous-anneau est isomorphe à $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_3$.*

PREUVE : Pour tout nombre premier p , on sait que l'application

$$\mathbf{W}(\mathbb{F}_p) \ni \xi = (\xi_j) \mapsto \tilde{\tau}(\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \tau(\xi_j)p^j,$$

où τ est le relèvement de Teichmüller est un isomorphisme d'anneaux entre l'anneau de Witt $\mathbf{W}(\mathbb{F}_p)$ et l'anneau \mathbb{Z}_p des entiers p -adiques. Pour $p = 3$, $\tau(\mathbb{F}_3) = \{-1, 0, 1\} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_3$, ainsi $\tilde{\tau}$ envoie les vecteurs de Witt avec seulement un nombre fini de composants non nuls dans le sous-anneau $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_3$. Cette application est un homomorphisme injectif d'anneaux et elle envoie surjectivement sur \mathbb{Z} puisque par la Proposition 5.2, tout entier peut être écrit comme une somme finie de puissances de 3 avec coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. \square

Références

- [1] A. Connes, C. Consani, *Riemann Roch for $\overline{\text{Spec } \mathbb{Z}}$* , Preprint (2022). Available at <https://arxiv.org/abs/2205.01391>.

L'HAMILTONIEN DE MISE À L'ÉCHELLE

Alain Connes et Caterina Consani

Dédié à Dan Voiculescu avec admiration

Résumé : Nous expliquons d'abord le lien entre l'Hamiltonien de Berry-Keating et la réalisation spectrale des zéros de la fonction zeta de Riemann ζ de [10], et pourquoi il n'y a pas de conflit au niveau semi-classique entre le schéma d'"absorption" de [10] et les calculs d'"émission" de [1, 2], alors que le signe moins se manifeste dans les phases de Maslov. Nous utilisons alors le calcul quantifié pour analyser la tentative récente de X.-J. Li de prouver la positivité de Weil, et comprendre sa limite. Nous proposons alors un paradigme semi-local dans la théorie des opérateurs directement relié à l'hypothèse de Riemann.

0. Introduction

Ce volume hors-série du *Journal of Operator Theory* est une merveilleuse occasion pour reconnaître les contributions scientifiques de Dan Voiculescu à la fois en tant que résolveur de problèmes et en tant que bâtisseur de théorie.

Le sujet du présent article peut être décrit comme une pensée lancinante sur la puissance de la théorie des opérateurs en relation avec un problème majeur non résolu des mathématiques : l'Hypothèse de Riemann (RH). Après les tentatives initiales du premier auteur, qui sont venues d'une rencontre pleine de coïncidence de RH à partir de la mécanique statistique quantique, les deux auteurs (du présent article) ont abandonné l'espoir de pouvoir attaquer le problème d'une manière purement analytique et ils ont déplacé leur attention, à la recherche d'un autre outil puissant : la Géométrie algébrique. Nous faisons référence à [13, 15] pour un survol de l'espace géométrique que notre approche a révélé (le site de mise à l'échelle) et à [16] pour le développement d'une "géométrie algébrique absolue", motivée par la découverte de ce nouveau site, et par le besoin de développer une formule de Riemann-Roch sur son carré.

La pensée lancinante qui est le sujet du présent article et que, après tout, on aurait peut-être abandonné trop facilement l'analyse et la puissance des opérateurs de l'espace de Hilbert, pour obtenir des assertions concernant la positivité. En effet, dans [10], alors que la construction d'une réalisation spectrale globale dans l'espace de Hilbert reste artificielle par l'utilisation des espaces de Sobolev, la construction des opérateurs de l'espace de Hilbert semi-local est complètement canonique et elle fournit les parties finies subtiles dans les formules explicites de Riemann-Weil. Nous expliquons d'abord dans la section 1 la relation entre ce qu'on appelle l'Hamiltonien de Berry-Keating¹ et la réalisation spectrale originale de [10]. Les points-clés sont d'abord la raison pour laquelle le passage d'un spectre d'absorption (comme dans [10]) à un spectre d'émission (comme suggéré dans [1, 2]) n'introduit *pas* de décalage dans les approximations semi-classiques, et de plus, cela explique pourquoi le cutoff suggéré dans [1, 2] est équivalent, au niveau semi-classique, au retrait de la contribution de la "lumière blanche" du système quantique. Nous indiquons également qu'il n'y a pas de problème à propos du fait de quantifier l'Hamiltonien $H = PQ$, et c'est ce qui était déjà fait dans [10], et le signe moins n'est pas complètement éliminé dans le cutoff suggéré dans [1, 2]

référence de l'article *The Scaling Site* posté sur arxiv : <https://arxiv.org/abs/1507.05818>

Traduction : Denise Vella-Chemla, Juin 2021

1. Leur travail était motivé par les explications extensives d'A. Connes à l'IHES, comme M. Berry et J. Keating le reconnaissent dans [1].

et il apparaît dans les phases de Maslov.

Dans la Section 2, nous rappelons la formule de trace semi-locale démontrée dans [10] comme elle a été formulée dans [12]. Le résultat technique principal, rappelé dans le Lemme 2.4, calcule la trace de l'action de mise à l'échelle sur l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$ associé canoniquement à un ensemble fini $S \ni \infty$ de places de \mathbb{Q} . L'espace X_S est une approximation de l'espace des classes d'adèles des rationnels, obtenu en traitant l'anneau complet des adèles $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ pour le produit fini des anneaux locaux \mathbb{Q}_v attachés aux places $v \in S$, et en effectuant le quotient par le groupe

$$(0.1) \quad \mathbb{Q}_S^* = \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_S) = \{\pm p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} : p_j \in S \setminus \{\infty\}, n_j \in \mathbb{Z}\}.$$

Dans la Section 3, nous décrivons l'idée de X.-J. Li qui sous-tend sa tentative de prouver la positivité de Weil. Nous utilisons le calcul quantifié pour analyser le cutoff qu'il propose, motivé par les espaces de Sonine. Nous démontrons un lemme-clé 3.4 en montrant que son approche, si elle marchait, ferait qu'une fonction $\phi(z)$ appartiendrait à l'espace de Hardy \mathbb{H}^∞ du demi-plan $\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 1/2\}$. La fonction $\phi(z)$ serait méromorphe dans \mathbb{C} et de module 1 sur la droite critique de telle façon qu'au premier regard, elle ressemblerait à une "fonction intérieure", mais malheureusement, elle ne peut l'être et en particulier, elle n'est pas bornée. Il aurait dû être clair dès le début pourtant, qu'une telle approche semi-locale ne pouvait pas marcher sans utiliser une formule de Poisson globale qui dicte la normalisation des valeurs principales.

En ignorant tous les nombres premiers au-dessus d'une certaine valeur (une stratégie naturelle), on a normalisé la valeur principale pour qu'elle soit nulle pour eux, ainsi la normalisation locale des valeurs principales pour les nombres premiers dans S devrait jouer un rôle essentiel, et on ne devrait pas pouvoir la négliger complètement (dans [10], le terme $2 \log \Lambda$ prend en compte de tels changements locaux).

Dans la Section 4, nous formulons une conjecture sur la possibilité d'utiliser le modèle semi-local comme un outil pour prouver la positivité de Weil. Nous expliquons pourquoi la formule de Poisson globale a du sens dans les cas semi-locaux et fournit une explication conceptuelle pour les fonctions intervenant dans la formule de trace semi-locale. Nous discutons finalement des mérites d'une stratégie géométrique, comparés à ceux de l'approche analytique présentée ici.

1. L'Hamiltonien de mise à l'échelle

Dans la proposition de [10] (voir aussi le chapitre 2 de [12]), la réalisation spectrale est un spectre d'absorption, *i.e.* elle apparaît comme des lignes foncées sur un fond de lumière blanche.

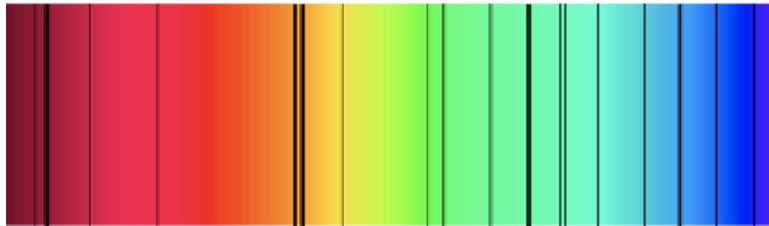


FIGURE 1 : Absorption Spectrum

Quand on ignore les places finies pour obtenir l'instance la plus simple d'une représentation semi-locale, on obtient l'action du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* par mise à l'échelle sur l'espace de Hilbert

$L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable sur la droite réelle. Cette procédure correspond à une manière évidente de “quantifier” l’Hamiltonien $H = PQ$. Il n’y a pas de mystère en quoi que ce soit dans cette quantification puisque dans la représentation unique irréductible des relations de commutation de Heisenberg, les opérateurs P et Q correspondent respectivement (à normalisation près) à $i\partial_x$ et à la multiplication par x , de telle façon que l’opérateur auto-adjoint $\frac{1}{2}(PQ + QP)$ correspond au générateur du flot de mise à l’échelle qui est $x\partial_x$ (auquel on doit ajouter la constante $\frac{1}{2}$ pour obtenir le générateur du groupe unitaire). Pourtant, puisque l’Hamiltonien ci-dessous n’est pas borné, le système quantique associé donné par l’action de mise à l’échelle sur $L^2(\mathbb{R})$ n’a pas un spectre discret. Pour l’analyser, on effectue un cutoff à la fois en q et sur les espaces p , à la même taille Λ . À cause de la normalisation de la transformation de Fourier utilisée dans les contextes de théorie des nombres (*i.e.* avec un facteur de phase $e^{-2\pi ipq}$), l’Hamiltonien est $H = 2\pi pq$ (voir le Chapitre II, § 3.2 de [12]). La portion de l’espace des phases dans lequel la taille de $H = 2\pi pq$ est inférieure à une énergie donnée E est montrée sur la Figure 1.

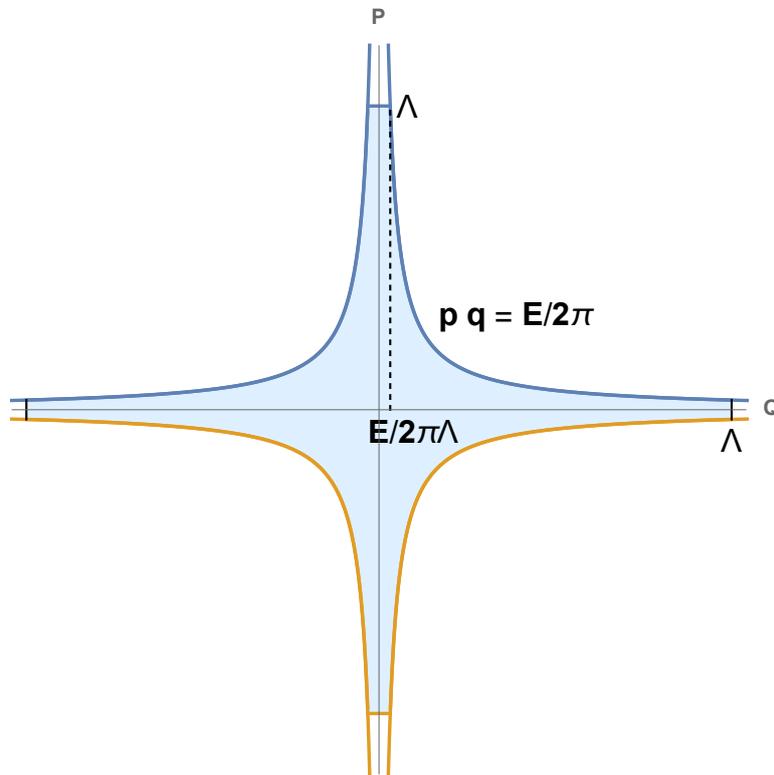


FIGURE 1 : Spectre d’absorption

Comme cela est expliqué en détails dans le Chapitre II, § 3.2 de [12], on se restreint aux fonctions paires pour traiter la fonction zeta de Riemann, et au premier quadrant pour évaluer le comptage semi-classique des zéros de ζ avec partie imaginaire positive inférieure à E . Cette procédure est décrite sur la Figure 2. Pour comparer ce dessin semi-classique avec la lumière blanche, on considère le modèle de la lumière blanche donné par la représentation régulière du groupe additif \mathbb{R} . Nous ajustons le cutoff de telle façon qu’il corresponde, en utilisant l’isomorphisme $u \mapsto \exp(u)$ de \mathbb{R} avec le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* , à la partie de l’hyperbole $pq = \frac{E}{2\pi}$ restreinte à l’intervalle $[1/\Lambda, \Lambda]$ comme montré dans la Figure 3.

L’exponentielle $u \mapsto \exp(u)$ est de façon évidente un isomorphisme $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et la fonction suivante est un isomorphisme symplectique

$$\Phi(u, v) := (\exp(u), v \exp(-u)),$$

puisque son Jacobien est donné par

$$d \exp(u) \wedge d(v \exp(-u)) = \exp(u) du \wedge (\exp(-u) dv - v \exp(-u) du) = du \wedge dv.$$

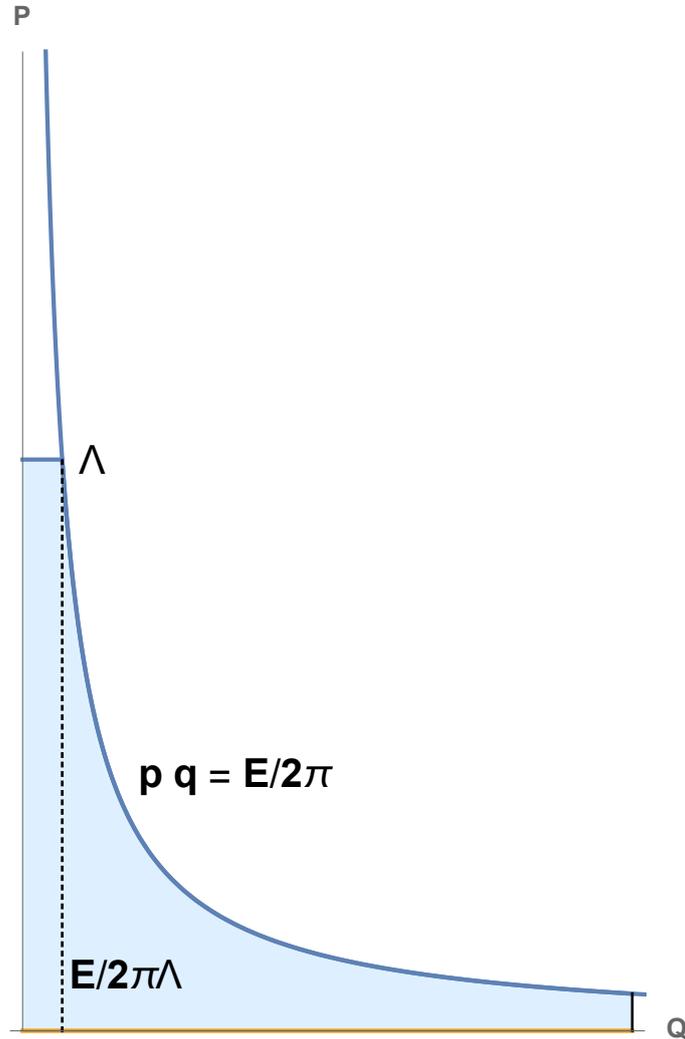


FIGURE 2

L'isomorphisme symplectique Φ transforme l'espace des phases de la représentation régulière du cutoff \mathbb{R} en l'intervalle $[-\log \Lambda, \log \Lambda]$ et en un domaine d'énergie (la variable duale de $\log(q)$) en l'intervalle $[0, E/2\pi]$, dans la portion de l'espace des phases (q, p) montré dans la Figure 3. Nous renvoyons à [10] et au chapitre II, § 3.2 de [12] pour la compréhension des normalisations précises.

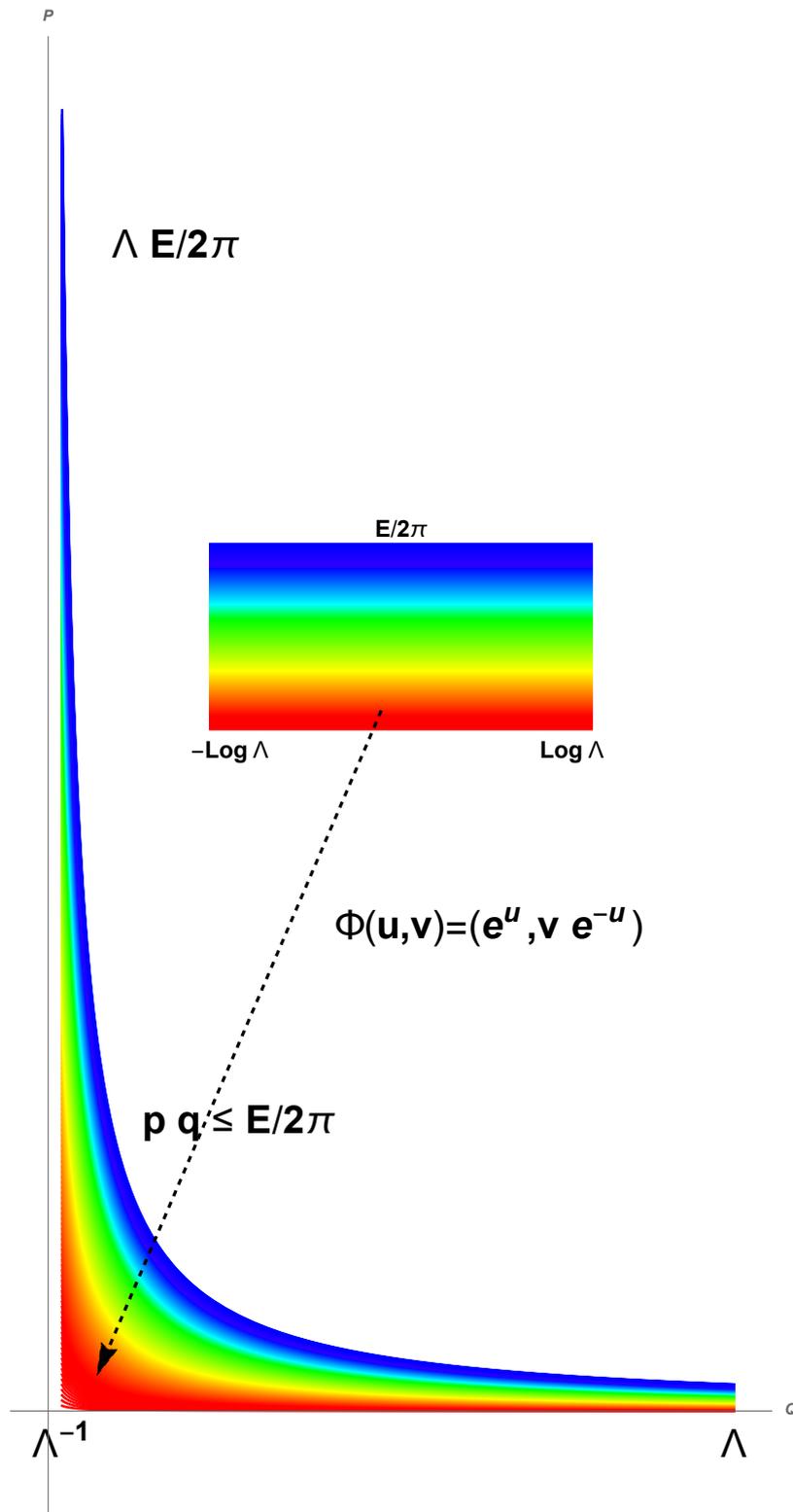


FIGURE 3

Il y a deux différences principales entre le cutoff de l'espace des phases de la Figure 2 et la lumière blanche de la Figure 3. D'abord, il y a un morceau de la Figure 3 qui n'est pas couvert par la Figure 2, il s'étend de $p = \Lambda$ à $p = \Lambda E/2\pi$ et est représenté en bleu foncé sur la Figure 4 :

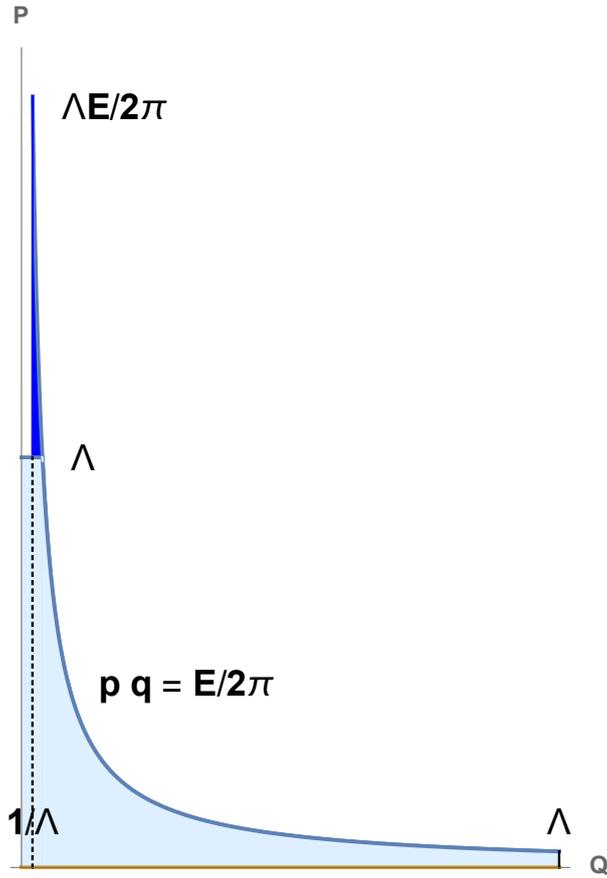


FIGURE 4

Il y a également le rectangle, de sommets en $(0, 0)$, $(1/\Lambda, 0)$, $(1/\Lambda, \Lambda)$, $(0, \Lambda)$, sur la Figure 2, qui ne s'adapte pas dans la Figure 3. Il est d'aire égale à 1 et ainsi il correspond à un état quantique simple².

Pour comparer ce paradigme à celui de Berry-Keating, on effectue la transformation symplectique du plan (q, p) donnée par

$$(q, p) \mapsto \left(\Lambda q, \frac{p}{\Lambda}\right) = \sigma(q, p).$$

Cette transformation préserve l'aire et l'hyperbole $pq = \frac{E}{2\pi}$. Elle transforme la Figure 4 en la Figure 5 suivante :

2. Cela rappelle le pôle de la fonction zeta de Riemann, ou de façon équivalente à la moitié des conditions aux limites $f(0) = 0, \hat{f}(0) = 0$ que l'on doit imposer pour utiliser la formule de Poisson pour la fonction E , comme dans [10].

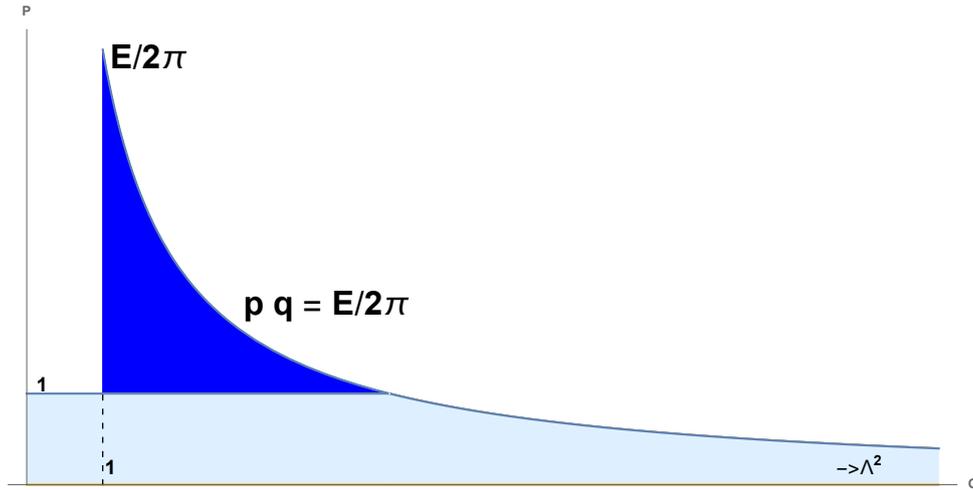


FIGURE 5

On obtient facilement que la partie manquante (absorbée) de la lumière blanche est donnée par la partie semi-classique de l'Hamiltonien "de Berry-Keating" comme dans la Figure 6.

Cette discussion montre que tous les calculs semi-classiques pour les zéros de la fonction zeta de Riemann vus comme un spectre d'absorption (comme dans [10, 12]), sont identiques à ceux calculés avec l'Hamiltonien "de Berry-Keating" vus comme un spectre d'émission ([1, 2]). La présence des signes opposés intervenant dans les spectres d'absorption et d'émission ne crée pas de conflit à ce point de la réflexion. Pourtant, on ne devrait pas en conclure que les deux modèles sont équivalents.

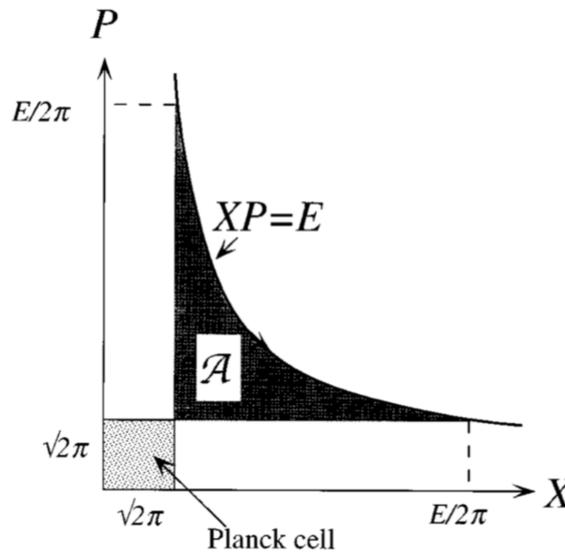


Fig. 7 Phase space for $H_{cl} = XP$, with cutoffs for semiclassical regularization.

FIGURE 6 : Figure prise dans [2], il y a une normalisation de la transformation de Fourier différente qui prend en compte la divergence dans les facteurs 2π .

En fait, le signe moins venant du spectre d'absorption riposte quand on étudie les fluctuations quantiques. Dans [1], Berry et Keating sont obligés de contraindre toutes les phases de Maslov à être égales à π pour prendre en compte le signe moins. Ils écrivent explicitement :

f. The Maslov phases associated with the orbits are also peculiar: they are all π . This follows⁵ from the negative signs of the terms in the von Mangoldt formula. The result appears paradoxical in view of the relation between these phases and the winding numbers of the stable and unstable manifolds associated with periodic orbits²³, but finds an explanation in the scheme of Connes³.

2. Formule de trace semi-locale

Après les premiers travaux [10] sur la formule de trace semi-locale, une meilleure preuve a été obtenue basée sur une idée de [6] dans le cas d'une seule place archimédienne. Ce développement a été expliqué dans un cours du premier auteur au Collège de France en 1999 [11]. Nous renvoyons au chapitre 2 de [12] pour un exposé détaillé. Un outil-clé ici est le calcul quantifié du chapitre IV de [9].

2.1. Calcul quantifié

La principale idée du calcul quantifié est de donner une version en théorie des opérateurs des règles de calcul, basée sur la différentielle en théorie des opérateurs

$$(2.1) \quad \bar{d}f := [F, f],$$

où f est un élément dans une algèbre involutive \mathcal{A} représentée comme des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Le côté droit de (2.1) est le commutateur avec un opérateur auto-adjoint F sur \mathcal{H} avec $F^2 = 1$. On définit l'analogie des formes différentielles de degré n comme les combinaisons linéaires de monômes de la forme

$$\omega = f_0 \bar{d}f_1 \bar{d}f_2 \dots \bar{d}f_n \in \Omega^n.$$

La différentielle d'un élément de Ω^n est définie comme le variant gradué de (2.1)

$$(2.2) \quad \bar{d}\omega := F\omega - (-1)^n \omega F.$$

On vérifie, en utilisant $F^2 = 1$, que le carré de la différentielle est 0, $\bar{d}^2\omega = 0$.

Ensuite, nous rappelons brièvement le paradigme du calcul quantifié en une variable, comme dans le chapitre IV de [9]. Nous laissons les fonctions f d'une seule variable agir comme des opérateurs de multiplication dans $L^2(\mathbb{R}, ds)$, par

$$(2.3) \quad (f\xi)(s) := f(s)\xi(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \xi \in L^2(\mathbb{R}, ds).$$

Appelons $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ la transformation de Fourier par rapport au caractère $e_{\mathbb{R}}(x) := e^{-2\pi ix}$

$$(2.4) \quad \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(\xi)(y) := \int_{\mathbb{R}} \xi(x) e^{-2\pi ixy} dy.$$

Appelons $\mathbf{1}_{[a,b]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et soit

$$(2.5) \quad \Pi_{[a,b]} := \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} \mathbf{1}_{[a,b]} \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}^{-1}$$

le conjugué par transformation de Fourier $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ de l'opérateur de multiplication par $\mathbf{1}_{[a,b]}$.

Soit H la transformation de Hilbert $H = 2 \Pi_{[0,\infty]} - 1$ donnée, en portant attention à la valeur principale, par

$$(2.6) \quad (H\xi)(s) := \frac{1}{i\pi} \int \frac{\xi(t)}{s-t} dt.$$

Définition 2.1. Nous définissons la *différentielle quantifiée* de f comme étant l'opérateur

$$(2.7) \quad \mathcal{d}f := [H, f] = Hf - fH.$$

Ainsi, la différentielle quantifiée de f est donnée par le noyau

$$(2.8) \quad k(s, t) = \frac{i}{\pi} \frac{f(s) - f(t)}{s - t}.$$

La définition 2.1 s'étend aux groupes modulés arbitraires C , *i.e.* aux groupes abéliens localement compacts dotés d'un homomorphisme propre $\text{Mod} : C \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. Notons $\text{Mod}(u) = |u|$ pour $u \in C$.

Soit \widehat{C} le dual de Pontrjagin de C doté de sa mesure de Haar. Les éléments de $L^\infty(\widehat{C})$ agissent comme des opérateurs multiplicatifs sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2(\widehat{C})$. L'opérateur H sur \mathcal{H} est donné par

$$(2.9) \quad H := 2\mathbb{F}_C \mathbf{1}_P \mathbb{F}_C^{-1} - 1,$$

où $\mathbb{F}_C : L^2(C) \rightarrow \mathcal{H}$ est la transformation de Fourier et $\mathbf{1}_P$ est la multiplication par la fonction caractéristique de l'ensemble $P = \{u \in C \mid |u| \geq 1\}$. Un tel H joue le rôle de la transformation de Hilbert.

De façon analogue à (2.7), nous définissons la différentielle "quantifiée" de f comme l'opérateur

$$(2.10) \quad \mathcal{d}f := [H, f] = Hf - fH.$$

Nous utilisons également la notation suivante dont la normalisation s'adapte à (2.5) :

$$(2.11) \quad \Pi_{[a,b]} := \mathbb{F}_C \mathbf{1}_Y \mathbb{F}_C^{-1}, \quad \text{for } Y = \{u \in C \mid e^{2\pi a} \leq |u| \leq e^{2\pi b}\}.$$

2.2. L'espace de Hilbert $L^2(X_S)$ pour un ensemble fini de places

Dans la suite, nous considérons le corps global \mathbb{Q} des nombres rationnels. Dans l'anneau des adèles de \mathbb{Q} , la mesure de Haar et la mesure de Haar du groupe multiplicatif des idèles sont mutuellement singuliers. Ce problème n'a pas lieu lorsqu'on restreint son attention à un ensemble fini S de places de \mathbb{Q} . Nous supposons que $\infty \in S$. Considérons l'anneau localement compact

$$(2.12) \quad \mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v.$$

Il contient \mathbb{Q} comme sous-anneau, en utilisant le plongement diagonal. Dénotons par \mathbb{Q}_S le sous-anneau de \mathbb{Q} donné par tous les nombres rationnels dont le dénominateur ne contient que des puissances des nombres premiers $p \in S$. En d'autres termes,

$$(2.13) \quad \mathbb{Q}_S = \{q \in \mathbb{Q} \mid |q|_v \leq 1, \forall v \notin S\}.$$

Le groupe \mathbb{Q}_S^* des éléments inversibles de l'anneau \mathbb{Q}_S est de la forme

$$(2.14) \quad \mathbb{Q}_S^* = \text{GL}_1(\mathbb{Q}_S) = \{\pm p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} : p_j \in S \setminus \{\infty\}, n_j \in \mathbb{Z}\}.$$

Nous approximons l'espace des classes d'adèles par l'espace semi-local des classes d'adèles X_S qui est le quotient

$$(2.15) \quad X_S := \mathbb{A}_S / \mathbb{Q}_S^*.$$

Le groupe

$$(2.16) \quad C_{\mathbb{Q},S} = \mathbb{A}_S^* / \mathbb{Q}_S^*, \quad \mathbb{A}_S^* = \text{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p \in S} \text{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$$

agit naturellement par multiplication sur le quotient X_S .

Nous rappelons de [10, 12] que la transformation de Fourier \mathbb{F} sur l'espace de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{A}_S)$ induit un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$. Pour chaque place $v \in S$, nous choisissons un caractère de base α_v de \mathbb{Q}_v . Cela permet d'identifier le groupe abélien localement compact \mathbb{Q}_v avec son dual de Pontrjagin par l'appariement

$$(2.17) \quad \langle a, b \rangle := \alpha_v(ab), \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}_v.$$

Nous normalisons la mesure de Haar de telle façon qu'elle soit auto-duale. Alors $\alpha = \prod_v \alpha_v$ est un caractère de base du groupe additif \mathbb{A}_S , et nous dénotons par \mathbb{F}_α la transformation de Fourier correspondante, agissant sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{A}_S)$. Nous renvoyons à [10, 12] pour la démonstration du résultat suivant

Lemme 2.2. *Considérons le caractère $\alpha = \prod_v \alpha_v$ et la transformation de Fourier correspondante \mathbb{F}_α comme ci-dessus. L'application $f \mapsto \mathbb{F}_\alpha(f)$, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_S)$, s'étend de manière unique en un opérateur unitaire $\underline{\mathbb{F}}_\alpha$ sur l'espace de Hilbert $L^2(X_S)$.*

L'opérateur de mise à l'échelle $\vartheta_a(\lambda)$, for $\lambda \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_S)$, est défini comme

$$(2.18) \quad (\vartheta_a(\lambda)\xi)(a) = \xi(\lambda^{-1}a), \quad \forall a \in \mathbb{A}_S, \forall \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{A}_S).$$

Il n'est pas unitaire mais son module est donné par le module du groupe modulé $C_{\mathbb{Q},S}$

$$(2.19) \quad \vartheta_a(\lambda)^* \vartheta_a(\lambda) = \vartheta_a(\lambda) \vartheta_a(\lambda)^* = |\lambda|_S.$$

Appelons w l'identification unitaire de $L^2(X_S)$ avec $L^2(C_{\mathbb{Q},S})$ (voir [12] Proposition 2.30). Elle entremêle la représentation ϑ_a avec la représentation régulière suivante ϑ_m de $C_{\mathbb{Q},S}$

$$(2.20) \quad (\vartheta_m(\lambda)\xi)(v) := \xi(\lambda^{-1}v), \quad \forall \xi \in L^2(C_{\mathbb{Q},S}),$$

par l'égalité

$$(2.21) \quad w \vartheta_a(\lambda) w^{-1} = |\lambda|^{1/2} \vartheta_m(\lambda), \quad \forall \lambda \in C_{\mathbb{Q},S}.$$

Pour chaque place v , le groupe multiplicatif \mathbb{Q}_v^* est un groupe modulé, et par [17], il existe une fonction unitaire $u_v \in L^\infty(\widehat{\mathbb{Q}}_v^*)$ qui nous permet d'exprimer la transformation de Fourier \mathbb{F}_{α_v} relative au caractère α_v , comme une composition de l'inversion $I(f)(s) := f(s^{-1})$ avec l'opérateur de convolution multiplicative associé à u_v . La fonction u_v est donnée par le rapport des facteurs locaux des L -fonctions (voir [17]).

Cette formule classique s'étend à notre contexte comme suit. Dénotons par u la fonction

$$(2.22) \quad u := \prod_S u_v \circ \pi_v.$$

où $\pi_v : \widehat{C_{\mathbb{Q},S}} \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}}_v^*$ est la projection duale dans le plongement $\mathbb{Q}_v^* \hookrightarrow C_{\mathbb{Q},S}$, $x \mapsto (1, 1, \dots, x, \dots, 1)$ qui met x à la place v . Nous avons maintenant le

Lemme 2.3. (voir [12]) : *Sur $L^2(X_S)$, on a*

$$(2.23) \quad \underline{\mathbb{F}}_\alpha = w^{-1} \circ I \circ \mathbb{F}_C^{-1} \circ u \circ \mathbb{F}_C \circ w,$$

où \mathbb{F}_C est la transformation de Fourier de $C_{\mathbb{Q},S}$ et $I(f)(s) := f(s^{-1})$ est l'inversion.

2.3. La formule de trace semi-locale

Comme dans le cas de la place unique ∞ , nous introduisons les cutoffs infrarouge et ultraviolet. Pour l'infrarouge, nous utilisons la projection orthogonale P_Λ sur le sous-espace

$$(2.24) \quad \{\xi \in L^2(X_S) \mid \xi(x) = 0, \forall x \text{ with } |x| > \Lambda\}.$$

Par conséquent, P_Λ est l'opérateur agissant par multiplication par la fonction ρ_Λ , avec $\rho_\Lambda(x) = 1$ pour $|x| \leq \Lambda$ et $\rho_\Lambda(x) = 0$ pour $|x| > \Lambda$.

Nous définissons le cutoff ultraviolet comme $\widehat{P}_\Lambda = \mathbb{F}_\alpha P_\Lambda \mathbb{F}_\alpha^{-1}$, où \mathbb{F}_α est la transformation de Fourier du lemme 2.2, qui dépend du choix du caractère de base $\alpha = \prod_v \alpha_v$. Alors, nous posons

$$(2.25) \quad R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda.$$

Nous rappelons du chapitre 2 de [12] le résultat suivant :

Lemme 2.4 *Notons $S \ni \infty$ comme ci-dessus. Pour tout $\Lambda > 0$, il y a un opérateur unitaire*

$$(2.26) \quad W = W_\Lambda : L^2(X_S) \rightarrow L^2(\widehat{C_{\mathbb{Q},S}})$$

tel que, pour tout $h_j \in \mathcal{S}(C_{\mathbb{Q},S})$, $j = 1, 2$, on a

$$(2.27) \quad W \vartheta_a(\tilde{h}_1) \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda \vartheta_a(\tilde{h}_2) W^* = \widehat{h}_1 \left(\frac{1}{2} u^{-1} \dot{d}u \Pi_{[-\infty, \frac{2 \log \Lambda}{2\pi}]} + \Pi_{[0, \frac{2 \log \Lambda}{2\pi}]} \right) \widehat{h}_2.$$

Ici $\tilde{h}_j(\lambda) = |\lambda|^{-1/2} h_j(\lambda)$, l'opérateur $\dot{d}u$ est la différentielle quantifiée de la fonction $u := \prod_S u_v \circ \pi_v$ de (2.22) et \widehat{h}_j est l'opérateur de multiplication par la transformation de Fourier $\mathbb{F}_C(h_j)$.

Ce résultat combiné avec la formule

$$(u_1 u_2)^{-1} \dot{d}(u_1 u_2) = u_2^{-1} (u_1^{-1} \dot{d}u_1) u_2 + u_2^{-1} \dot{d}u_2$$

nous permet de calculer $\text{Tr}(\widehat{h}_1 u^{-1} \dot{d}u \widehat{h}_2)$ in (2.27) comme une somme, et l'on obtient

$$(2.28) \quad \text{Tr}(\widehat{h}_1 \left(\frac{1}{2} u^{-1} \dot{d}u \right) \widehat{h}_2) = \sum_{v \in S} \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*w,$$

où $h = h_1 \star h_2$ est tel que $\vartheta_m(h) = \vartheta_m(h_1) \vartheta_m(h_2)$.

On dérive alors la formule de trace semi-locale suivante (voir [10, 12]) :

Théorème 2.5. *Notons \mathbb{A}_S comme ci-dessus, $\alpha = \prod_{v \in S} \alpha_v$ un choix de caractère de base. Soit $f \in \mathcal{S}(C_{\mathbb{Q},S})$ une fonction à support compact. Alors, dans la limite $\Lambda \rightarrow \infty$, on a*

$$(2.29) \quad \text{Tr}(\vartheta_a(f) R_\Lambda) = 2f(1) \log \Lambda + \sum_{v \in S} \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{f(w^{-1})}{|1-w|} d^*w + o(1).$$

Notons que $\vartheta_a(f) = \int f(\lambda) \vartheta_a(\lambda) d^*\lambda$ correspond par (2.21) à $\vartheta_m(h) = \int h(\lambda) \vartheta_m(\lambda) d^*\lambda$, où on a $h(\lambda) = |\lambda|^{1/2} f(\lambda)$. Par rapport à la fonction test h , les termes dans la partie droite de (2.29) prennent la forme plus symétrique

$$(2.30) \quad \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{f(w^{-1})}{|1-w|} d^*w = \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w^{-1}) d^*w = \int_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*w.$$

3. Espace de Sonine et tentative de X.-J. Li

Dans l'article [7], J. F. Burnol a trouvé une réalisation spectrale des zéros de zeta, très proche de la réalisation spectrale de [10], mais qui utilise les espaces de Sonine implémentés par Louis de

Branges dans son approche de RH.

Motivé par le rôle des espaces de Sonine, ainsi que par son propre travail sur la formule de trace semi-locale [18], X.-J. Li a fait, au début de l'année 2019, une tentative courageuse de démontrer la positivité de Weil qui est équivalente à RH (voir [5]). Plutôt que d'introduire un cutoff pour les valeurs élevées de q et p comme dans [10], il prescrit un cutoff près de zéro, *i.e.* pour les petites valeurs de q et p . En fait, il fait cela d'une manière équilibrée *i.e.* en requérant $q > \Lambda$ et $p > \Lambda^{-1}$. La coïncidence entre cette prescription et la relation ci-dessus entre les graphiques d'"absorption" et d'"émission" est très surprenante puisque le cutoff proposé proche de zéro correspond exactement aux Figures 4, 5, 6.

Cette tentative a pourtant échoué. Cela vaut cependant la peine de réétudier cette approche en détails et également de comprendre ce qui manque encore, tout en conservant ce qui est intéressant. Il y a deux faits de base sur lesquels la tentative de Li s'appuie :

Fait 3.1. Soient A, B des opérateurs positifs bornés dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} et supposons que AB est de classe trace, alors $\text{Tr}(AB) \geq 0$.

Preuve : Soit $A^{1/2}$ la racine carrée de A . Alors, puisqu'en général le spectre d'un produit ST est le même que le spectre de TS excepté potentiellement pour 0, on obtient, en notant Spec^* la partie non-nulle du spectre

$$\text{Spec}^*(AB) = \text{Spec}^*(A^{1/2}BA^{1/2}) \geq 0.$$

Cela montre que toutes les valeurs propres de l'opérateur de classe trace AB sont positives, et on conclut en utilisant le théorème de Lidskii. \square

Fait 3.2. La formule explicite de Riemann-Weil appliquée à une fonction test $h \in \mathcal{S}(C_{\mathbb{Q}})$ avec support compact ne fait intervenir qu'un nombre fini de places.

L'idée naturelle, alors, est d'utiliser le paradigme semi-local de [10] rappelé dans la section 2 et plus précisément la formule (2.28) pour montrer une inégalité de la forme

$$(3.1) \quad \sum_{v \in S} \int_{\mathbb{Q}_v^*}' \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*u \leq 0, \quad h = h_1 \star h_2, \quad h_2(w) := \overline{h_1(w^{-1})}.$$

Notons que par construction, les opérateurs \widehat{h}_j donnés comme les opérateurs de multiplication par la transformation de Fourier $\mathbb{F}_C(h_j)$ remplissent, quand $h_2 = h_1^*$ comme dans (3.1), la condition suivante :

Fait 3.3. Quand $h_2 = h_1^*$, l'opérateur $\widehat{h}_1 \widehat{h}_2$ est positif.

Maintenant, en utilisant la propriété cyclique de la trace et la commutativité de l'algèbre de la multiplication par des fonctions, on obtient de (2.28) l'égalité suivante :

$$(3.2) \quad \sum_{v \in S} \int_{\mathbb{Q}_v^*}' \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*w = \text{Tr} \left(\widehat{h}_1 \widehat{h}_2 \left(\frac{1}{2} u^{-1} d^*u \right) \right).$$

L'idée de X.-J. Li est de remplacer l'opérateur $R_{\Lambda} = \widehat{P}_{\Lambda} P_{\Lambda}$ par l'opérateur positif $T = P \widehat{P} P$, où P est la projection correspondant au cutoff à proximité de zéro, *i.e.* en se restreignant aux $|w| \geq 1$. On obtient, en utilisant les notations de (2.28), que

$$T = P u^* (1 - P) u P.$$

On voit que le Fait 3.1 devrait entraîner (3.1), si l'on pouvait prouver que

$$Pu^*(1 - P)uP = -\frac{1}{2}u^{-1}\dot{d}u.$$

Comme nous le verrons, ceci est équivalent au fait de contrôler le signe de l'opérateur $u^{-1}\dot{d}u$. Le calcul quantifié donne en fait le critère général suivant pour contrôler le signe de la "dérivée logarithmique" $u^{-1}\dot{d}u$ d'un unitaire u .

Lemme 3.4. *Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, u un opérateur unitaire et $F = 2P - 1$, quand P est une projection orthogonale. Alors, avec $\dot{d}u := [F, u]$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- i. $Pu^*(1 - P)uP = -\frac{1}{2}u^{-1}\dot{d}u$
- ii. $u^{-1}\dot{d}u \leq 0$
- iii. $Pu = PuP$

Quand on travaille avec le calcul quantifié en une variable, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.5. *Soit \mathcal{H} et F définis comme en 2.1., et u une fonction unitaire. Alors les conditions équivalentes du Lemme 3.4 sont vérifiées si et seulement si u^* est une fonction intérieure au sens de Beurling [3].*

Preuve : La fonction u^* est intérieure si et seulement si elle préserve le sous-espace qui est le domaine de la projection P , avec $F = 2P - 1$. Alors le lemme 3.4 fournit l'équivalence requise. \square

Disposant maintenant du Lemme 3.4 et du Corollaire 3.5, nous pouvons alors comprendre pourquoi l'approche directe proposée par X.-J. Li échoue à démontrer la positivité de Weil. En effet, dans notre cas et en prenant une seule place pour simplifier la discussion, le problème se pose de savoir si les fonctions u_v^* , où u_v est donné par le ratio des facteurs locaux sur la droite critique, sont des fonctions intérieures. En fait, on peut se demander si u_v appartient à l'un des espaces de Hardy $\mathbb{H}^\infty(\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}^\pm)$ du demi-plan

$$\mathbb{C}_{\frac{1}{2}}^\pm := \{z \in \mathbb{C} \mid \pm \Re(z) > 1/2\}.$$

En un nombre premier fini p , la fonction u_p est donnée par le ratio de facteurs locaux

$$(3.3) \quad u_p(s) := \frac{1 - p^{-(1-z)}}{1 - p^{-z}}, \quad z = \frac{1}{2} + is.$$

C'est une fonction de module 1 pour $s \in \mathbb{R}$. Les zéros au dénominateur $1 - p^{-z}$ donnent des pôles,

$$1 - p^{-z} = 0 \iff z \in \frac{2\pi i}{\log p} \mathbb{Z}$$

ce qui montre que dans le demi-plan gauche, la fonction n'est pas holomorphe. D'un autre côté, dans le demi-plan droit, le dénominateur ne s'évanouit pas et la fonction est holomorphe. Pourtant elle n'est pas bornée puisque pour des valeurs réelles de z , elle se comporte de la façon suivante :

$$\frac{1 - p^{-(1-z)}}{1 - p^{-z}} \sim -p^{z-1}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Regardons maintenant la place archimédienne. Là, le ratio des facteurs locaux est

$$(3.4) \quad u_\infty(s) := \phi\left(\frac{1}{2} + is\right), \quad \phi(z) = \frac{\pi^{\frac{1-z}{2} - \frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)}.$$

La fonction $\phi(z)$ est de module 1 pour $z = \frac{1}{2} + is$, et elle a des pôles dans le demi-plan gauche. Elle est holomorphe dans le demi-plan droit $\Re(z) \geq \frac{1}{2}$, pourtant, là, elle n'est pas bornée. En fait, on a, en utilisant la formule du complément

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \Rightarrow \frac{\pi}{\Gamma(1-x)} = \Gamma(x)\sin(\pi x)$$

avec $x = \frac{1}{2}(1+z)$, que

$$\phi(z) = \pi^{-\frac{1}{2}-z}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\sin\left(\pi\frac{1+z}{2}\right).$$

Ainsi, même sur l'axe réel, la fonction $\phi(z)$ qui s'évanouit sur les entiers impairs prend de très grandes valeurs sur les entiers pairs comme

$$\phi(20) = \frac{1856156927625}{8\pi^{20}} \sim 26.4562.$$

Ainsi nous concluons qu'aucune des fonctions $u_v(s)^*$ ne remplit la condition requise dans le corollaire 3.5.

Nous remarquons finalement que, a priori, l'inégalité (3.1) pourrait être encore vérifiée, même si la tentative décrite ci-dessus de le prouver échouait. En fait, on a le fait suivant :

Fait 3.6. L'inégalité (3.1) n'est pas vérifiée en général.

Preuve : Considérons le cas le plus simple quand S est réduit à la seule place archimédienne. L'inégalité (3.1) devrait alors impliquer, en utilisant l'expression du côté gauche en fonction de la dérivée logarithmique de $u_\infty(s)$, que la dérivée logarithmique (multipliée par i) a un signe constant. Mais $u_\infty(s) = e^{2i\theta(s)}$ où $\theta(s)$ est la fonction angulaire de Riemann-Siegel (voir [12] Chapitre II, §5.1, Lemme 2.20). Par conséquent, l'inégalité (3.1) devrait impliquer que la fonction angulaire de Riemann-Siegel $\theta(s)$ est une fonction monotone, mais en regardant son graphe (Figure 7), on voit que ça n'est pas le cas.

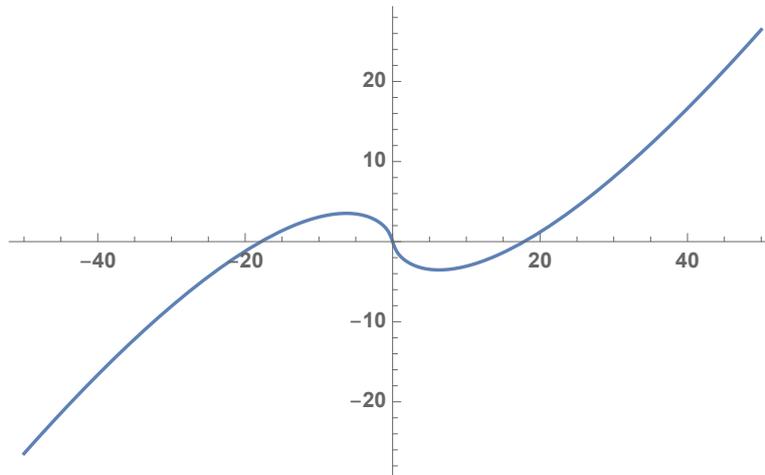


FIGURE 7 : Riemann-Siegel function.

4. Un problème de théorie des opérateurs

Par un résultat d'A. Weil (voir [5]), RH est équivalente à la négativité du côté droit des formules explicites pour toutes les fonctions de test f de la forme

$$f(x) = \int_0^\infty g(xy)\overline{g(y)}dy, \quad \int_0^\infty g(x)dx = 0, \quad \int_0^\infty g(x)d^*x = 0.$$

On peut en outre restreindre notre attention aux fonctions de test g à support compact (voir [4]). Avec ces notations, le côté droit des formules explicites correspond, dans le cas plus général des L -fonctions, aux termes dans (2.29). Pour passer à la forme plus symétrique (2.30), on pose $h_1(x) = x^{1/2}g(x)$, en obtenant de la sorte

$$f(x) = \int_0^\infty g(xy)\overline{g(y)}dy = x^{-1/2} \int_0^\infty h_1(xy)\overline{h_1(y)}d^*y.$$

Ainsi, avec $h_2 = h_1^*$, de telle façon que $h_2(x) := \overline{h_1(x^{-1})}$ on obtient

$$h(x) = x^{1/2}f(x) = \int_0^\infty h_1(xy)\overline{h_1(y)}d^*y = \int_0^\infty h_1(xy^{-1})\overline{h_1(y^{-1})}d^*y = (h_1 \star h_2)(x).$$

Par conséquent, la positivité de Weil correspond bien à (3.1) mais on a besoin d'imposer les deux conditions

$$(4.1) \quad \int_0^\infty h_1(x)x^{\pm 1/2}d^*x = 0.$$

La discussion ci-dessus suggère la conjecture suivante :

Conjecture 4.1. *Le paradigme de la théorie des opérateurs semi-locaux avec $S := \{\infty\} \cup \{p \mid p < q\}$ suffit à prouver l'inégalité de Weil pour toutes les fonctions test à support dans l'intervalle $(q^{-1/2}, q^{1/2})$.*

4.1. Formule de Poisson et caractères de base

La formule de Poisson fournit la raison conceptuelle pour laquelle le ratio des facteurs locaux apparaît sur la droite critique quand on écrit la transformation de Fourier comme la composition de l'inversion avec la convolution multiplicative. Pour comprendre ce point, commençons avec une seule place, *i.e.* prenons $S = \{\infty\}$, et procédons au niveau formel en ne nous préoccupant pas trop des points techniques. On introduit l'opérateur suivant agissant sur les fonctions paires $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ satisfaisant $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$,

$$(4.2) \quad \mathfrak{E}(f)(x) := |x|^{1/2} \sum_{n>0} f(nx).$$

La formule de sommation de Poisson énonce alors que, en supposant que l'on prenne la transformation de Fourier $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ associée au caractère de base $e_{\mathbb{R}}$ pour lequel le réseau $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est auto-dual (*i.e.* le caractère de base $e_{\mathbb{R}}(x) = e^{-2\pi ix}$ utilisé dans (2.4)), on a

$$(4.3) \quad \mathfrak{E}(\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(f))(x) = \mathfrak{E}(f)(x^{-1}), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Nous définissons la dualité $\langle \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R} \rangle$ par le bicharactère

$$(4.4) \quad \mu(v, s) = v^{-is}, \quad \forall v \in \mathbb{R}_+^*, s \in \mathbb{R},$$

de telle façon que la transformation de Fourier $\mathbb{F}_\mu : L^2(\mathbb{R}_+^*) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est donnée par

$$(4.5) \quad \mathbb{F}_\mu(f)(s) := \int_0^\infty f(v)v^{-is}d^*v.$$

Quand on lit (4.2) dans le dual du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* , la multiplication de la variable $x \mapsto nx$ qui est une translation dans \mathbb{R}_+^* devient la multiplication de la fonction par n^{is} . Avec $f_n(x) := x^{1/2}f(nx)$ on a alors

$$\mathbb{F}_\mu(f_n)(s) = \int_0^\infty f(nv)v^{1/2-is}d^*v = n^{-(1/2-is)}\mathbb{F}_\mu(f)(s),$$

de telle façon que, à ce niveau formel, on obtient

$$\mathbb{F}_\mu(\mathfrak{E}(f))(s) = \zeta(1/2 - is)\mathbb{F}_\mu(f)(s).$$

Ainsi nous pouvons penser à \mathfrak{E} , quand on la lit en termes de Fourier, comme à une multiplication par $\zeta(1/2 - is)$. Le fait que \mathfrak{E} puisse être vue, en Fourier, comme un opérateur multiplicatif, n'est pas surprenant puisque, par construction, \mathfrak{E} commute avec la mise à l'échelle. Une autre application qui commute avec la mise à l'échelle est la composée $I \circ \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ de l'inversion I avec la transformation de Fourier additive $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$. Ainsi cette composition est fournie, quand on la lit en termes de Fourier, comme la multiplication par une fonction u qui est de module 1 du fait de l'unitarité. Le point alors est que la formule de Poisson (??) énonce que l'application \mathfrak{E} conjugue $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ avec l'inversion I et on obtient, toujours à ce niveau formel, que

$$u(s) = \zeta(1/2 - is)/\zeta(1/2 + is).$$

Par l'équation fonctionnelle, ce quotient est le ratio 3.4 des facteurs locaux archimédiens.

Cette discussion s'adapte au cas semi-local à la condition que l'on remplace la sommation sur \mathbb{Z} dans la formule de Poisson par la sommation sur le sous-groupe discret (??).

Puisque \mathbb{Q}_S est un anneau, cette sommation est invariante sous la multiplication par le groupe des unités \mathbb{Q}_S^* . De plus, tout élément $q \in \mathbb{Q}_S$ est un produit de façon unique $q = um$, où $u \in \mathbb{Q}_S^*$ est une unité et $m \in M_S$ est un élément du monoïde multiplicatif des entiers positifs premiers à tous les $p \in S$. Le rôle de l'application \mathfrak{E} de (4.2) est maintenant joué par

$$(4.6) \quad \mathfrak{E}(f)(x) := |x|^{1/2} \sum_{m \in M_S} f(mx).$$

Quand on calcule en termes de Fourier comme ci-dessus mais maintenant en faisant intervenir les caractères du groupe $C_{\mathbb{Q},S}$, (4.6) produit des sommes pour les L -fonctions qui se réduisent, pour le caractère trivial, à

$$\sum_{M_S} m^{-1/2+is} = \zeta(1/2 - is) \prod_{p \in S} (1 - p^{-1/2+is}).$$

Ainsi nous voyons, heuristiquement comme ci-dessus, que la formule de Poisson donne l'explication conceptuelle pour le Lemme 2.3.

Il y a en général un choix à effectuer pour les caractères additifs de base α_S de \mathbb{A}_S tels que \mathbb{Q}_S est un réseau auto-dual, mais cette ambiguïté disparaît quand on travaille dans le quotient $X_S = \mathbb{A}_S/\mathbb{Q}_S^*$. En particulier, la transformation de Fourier \mathbb{F}_α est indépendante de tels choix. En effet, les transformations de Fourier de la même fonction pour des choix de caractères différents pour lesquels \mathbb{Q}_S est un réseau auto-dual sont reliées par l'action (par mise à l'échelle) du groupe \mathbb{Q}_S^* et ainsi, leur différence s'évanouit dans l'espace $L^2(X_S)$. L'inégalité de Weil nécessite la normalisation ci-dessus des caractères additifs et cela indique que la formule de Poisson devrait jouer un rôle-clé dans la solution de la Conjecture 4.1.

En fait, il y a une autre raison frappante pour laquelle la formule de Poisson est intimement reliée à la Conjecture 4.1. Il s’agit de la construction, due à J.P. Kahane (voir [8]), des éléments non-triviaux de l’espace de Sonine, *i.e.* des fonctions qui s’évanouissent à proximité de l’origine comme le fait leur transformée de Fourier. Dénotons par $\Pi := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ la distribution de Poisson, qui est la somme des distributions de Dirac sur les entiers. Alors la distribution tempérée $\mathcal{D}(\Pi)$ vérifie la propriété d’évanouissement ci-dessus, quand \mathcal{D} est un opérateur différentiel dont le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ est l’espace des fonctions qui remplissent les deux conditions

$$(4.7) \quad f(0) = \widehat{f}(0) = 0.$$

Le choix le plus simple pour \mathcal{D} est $\mathcal{D}(f)(x) := xf''(x)$, puisqu’on vérifie par intégration par parties que l’intégrale de $\mathcal{D}(f)$ s’évanouit. Pour n’importe quel tel choix de \mathcal{D} , la distribution $\mathcal{D}(\Pi)$ vérifie la propriété requise de support de Sonine. On obtient alors une solution dans l’espace de Schwartz en appliquant à $\mathcal{D}(\Pi)$ le lissage par convolution avec une fonction lisse ϕ avec petit support près de zéro, et la multiplication par la transformée de Fourier de ϕ . En fait, le choix ci-dessus de l’opérateur différentiel \mathcal{D} , quoique simple, n’est pas symétrique par rapport à la transformée de Fourier. On vérifie que la fonction simple $\mathcal{D} := D_u^2 + D_u$ de notre Hamiltonien de mise à l’échelle $D_u(f)x := xf'(x)$ marche effectivement, commute avec la transformée de Fourier, et on obtient

$$(4.8) \quad \mathcal{D}(f)(x) = x^2 f''(x) + 2xf'(x).$$

On vérifie directement que le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{S}(\mathbb{R}))$ est l’ensemble des fonctions qui remplissent les deux conditions (4.7). Toute cette construction s’étend textu au cas semi-local.

Remarque 4.2. D’une façon surprenante, l’expression de l’adjoint $\Delta_2 := D_u^2 - D_u$ fournit la structure tropicale du Site de mise à l’échelle comme expliqué dans [14], équation (1).

4.2. Temps versus Énergie

Dans l’approche de RH défendue par M. Berry et J. Keating [1, 2], on cherche une interprétation des zéros de la fonction zeta de Riemann comme niveaux d’énergie d’un système quantique. Dans notre approche pourtant, les zéros apparaissent naturellement comme des “temps” *i.e.* d’une manière duale (voir [10]). Bien que ce fait puisse rendre perplexé au premier abord, nous allons brièvement expliquer ci-dessous pourquoi ce point de vue dual est en fait plus naturel en vue de la généralisation de la fonction zeta de Riemann au domaine des corps globaux. En effet, dans ce domaine, on rencontre des avatars bien plus simples de la fonction zeta de Riemann. Ils sont associés à une courbe C sur un corps fini \mathbb{F}_q . Il s’avère que ces analogues de la fonction zeta de Riemann $\zeta(s)$ sont en fait les fonctions de la forme $L(q^{-s})$, où q est la cardinalité du corps fini sur lequel la courbe est définie. De plus, $L(z)$ est une fraction rationnelle et ses zéros sont déterminés par les zéros z_j du numérateur polynomial $P(z)$ dont le degré est égal à deux fois le genre g de la courbe. Par un théorème célèbre de A. Weil³, tous les z_j sont sur le cercle de rayon $q^{-1/2}$. Ainsi les zéros s de $L(q^{-s})$ sont tous de partie réelle $\Re(s) = \frac{1}{2}$ et leur partie imaginaire $\Im(s)$ est de la forme

$$\Im(s) = \frac{1}{\log q} (\alpha_j + 2\pi k), \quad j \in \{1, \dots, 2g\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

où les $-\alpha_j$ sont les arguments des z_j et sont déterminés seulement modulo 2π . Ce genre de distribution des nombres, étant périodique, est très naturelle, comme une distribution en “temps”, et non pas en “énergie”.

3. référence de ce théorème ?

4.3. Analyse et Géométrie

La discussion ci-dessus n'élimine pas la pensée lancinante par laquelle nous avons commencé. En fait, il y a une possibilité réelle que l'on puisse trouver une manière de résoudre la Conjecture 4.1, en se concentrant d'abord sur le cas le plus simple d'une place unique et en trouvant un moyen d'utiliser la condition du support sur la fonction test. Un aspect effrayant de cette stratégie est que la positivité de Weil est très dépendante des choix judicieux des valeurs principales et il est difficile d'éviter des erreurs de calcul. Cette approche analytique est, à cet égard, par sa vulnérabilité, assez différente de l'approche géométrique que nous avons graduellement développée dans [13, 15]. Tandis que l'espace des classes d'adèles est clairement implicite dans l'approche analytique semi-locale décrite ci-dessus, sa structure géométrique est seulement révélée au niveau global et elle révèle son sens conceptuel en les points du Site de mise à l'échelle, où l'action du groupe de mise à l'échelle se révèle être l'action du Frobenius.

Références

- [1] M. Berry, J. Keating, *$H = qp$ and the Riemann zeros*, “Supersymmetry and Trace Formulae : Chaos and Disorder”, edited by J.P. Keating, D.E. Khmelnitskii and I.V. Lerner, Plenum Press. [Link to download the paper](#)
- [2] M. Berry, J. Keating, *The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics*. SIAM Rev. 41 (1999), n° 2, 236–266.
- [3] A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*. Acta Mathematica 81, (1948) 239–255.
- [4] E. Bombieri, J. Lagarias, *Complements to Li's criterion for the Riemann hypothesis*. J. Number Theory 77 (1999), n° 2, 274–287.
- [5] E. Bombieri, *The Riemann hypothesis*. The millennium prize problems, 107–124, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006.
- [6] J. F. Burnol, *Sur les formules explicites. I. Analyse invariante* [On explicit formulae. I. Invariant analysis] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 331 (2000), n° 6, 423–428.
- [7] J. F. Burnol, *Sur certains espaces de Hilbert de fonctions entières, liés à la transformation de Fourier et aux fonctions L de Dirichlet et de Riemann*. (French) [Some Hilbert spaces of entire functions associated with the Fourier transform and Dirichlet and Riemann L-functions] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 333 (2001), n° 3, 201–206.
- [8] J. F. Burnol, *Sur les espaces de Sonine associés par de Branges à la transformation de Fourier*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 689–692.
- [9] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).
- [10] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*. Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), n° 1, 29–106.
- [11] A. Connes, *Formules explicites, formules de trace et réalisation spectrale des zéros de la fonction zéta*, Cours au Collège de France, 1999.
- [12] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Société mathématique américaine, 2008.
- [13] A. Connes, *An essay on the Riemann Hypothesis*. Dans “Open problems in mathematics”, Springer (2016), volume édité par Michael Rassias et John Nash.

- [14] A. Connes, C. Consani, *Geometry of the Scaling Site*. Selecta Math. (N.S.) 23 (2017), n° 3, 1803–1850.
- [15] A. Connes, C. Consani, *The Riemann-Roch strategy, complex lift of the Scaling Site*, À paraître dans “Advances in Noncommutative Geometry, On the Occasion of Alain Connes’ 70th Birthday”, Chamseddine, A., Consani, C., Higson, N., Khalkhali, M., Moscovici, H., Yu, G. (Eds.), Springer (2019). Disponible à l’adresse <http://arxiv.org/abs/1805.10501>. ISBN 978-3-030-29596-7.
- [16] A. Connes, C. Consani, *On Absolute Algebraic Geometry* prépublication (2019). Disponible à l’adresse <https://arxiv.org/abs/1909.09796>
- [17] J. Tate, *Fourier analysis in number fields and Hecke’s zeta-function*, Thèse, Princeton, 1950. Réimprimé dans J.W.S. Cassels et A. Frölich (Eds.) “Algebraic Number Theory”, Academic Press, 1967.
- [18] Li, Xian-Jin, *A generalization of A. Connes’ trace formula*. J. Number Theory 130 (2010), n° 2, 386–430.

Traduction de la partie 4 de l'article de Connes-Consani paru sur arxiv en juillet 2022 (Denise Vella-Chemla, juillet 2022)

4. Le laplacien $\Delta = H(1 + H)$

Cette section décrit l'interprétation spectrale des carrés des zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann en fonction d'un laplacien adéquat. Elle montre aussi la relation entre le laplacien et l'opérateur d'onde prolate.

4.1. Conditions d'évanescence

On commence avec la séquence exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})_1 \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}(1) \rightarrow 0$$

associée au noyau de la fonctionnelle linéaire \mathbb{Q}^\times -invariante $\epsilon(f) = \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} f(x) dx \in \mathbb{C}(1)$. En implémentant dans la séquence ci-dessus l'évaluation $\delta_0(f) := f(0)$, on obtient la séquence exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})_0 \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{(\delta_0, \epsilon)} \mathbb{C}(0) \oplus \mathbb{C}(1) \rightarrow 0.$$

Le prochain lemme montre qu'à la fois $\mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})_0$ et $\mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})_1$ ont une description en fonction des domaines des deux opérateurs différentiels. Pour la simplicité de l'exposé, on restreint notre discussion aux parties $\hat{\mathbb{Z}}^\times$ -invariantes des espaces de fonctions.

LEMME 4.1. *Soit $H : \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, $H := x\partial_x$ le générateur de l'action de mise à l'échelle de $1 \times \mathbb{R}_+^* \subset \mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. Alors on a*

- (i) H commute avec l'action de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ et se restreint à $\mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})^{\hat{\mathbb{Z}}^\times}$.
- (ii) $(1 + H)$ induit un isomorphisme $\mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})_1^{\mathrm{ev}}$.
- (iii) $H(1 + H)$ induit un isomorphisme $\mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})_0^{\mathrm{ev}}$.

PREUVE. (i) découle du fait que $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ est abélien, ainsi H commute avec l'action de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. (ii) La fonctionnelle $f \mapsto \epsilon(f) = \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} f(x) dx$ s'évanouit dans le domaine de $1 + H$ puisque

$$\epsilon((1 + H)f) = \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} \partial(xf) dx = 0,$$

ainsi le domaine de $(1 + H)$ est contenu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})_1^{\mathrm{ev}}$. L'équation $Hf + f = 0$ implique que $xf(x)$ est constante, puisque $f = 0$, car $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donc $(1 + H) : \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})_1^{\mathrm{ev}}$ est injective. Soit maintenant $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})_1^{\mathrm{ev}}$ et soit \hat{f} sa transformée de Fourier. Alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}}$ et $\hat{f}(0) = 0$. La fonction $g(x) := \hat{f}(x)/x$, $g(0) := 0$ est continue, et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{odd}}$, alors que la fonction

$$h(x) := \int_{-\infty}^x g(y) dy$$

vérifie $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}}$ et $\partial_x h = g$. On a $Hh = \hat{f}$, donc $(-1 - H)\hat{h} = f$. Cela montre que $(1 + H) : \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathrm{ev}} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})_1^{\mathrm{ev}}$ est également surjective.

(iii) Puisque l'évaluation $f \mapsto f(0)$ est invariante par mise à l'échelle, elle s'évanouit dans le domaine de H . De façon similaire, on voit que la fonctionnelle $f \mapsto \int_{\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}} f(x)dx$ s'évanouit dans le domaine de $1 + H$. Ainsi le domaine de $H(1 + H)$ est contenu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})_0$. L'équation $Hf = 0$ implique que la fonction f est constante et par conséquent que $f = 0$, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. De façon similaire, $Hf + f = 0$ implique que $xf(x)$ est constante et par conséquent $f = 0$ pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donc $H(1 + H) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})_0$ est injective. Soit maintenant $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ avec $f(0) = 0$. Alors la fonction $g(x) := f(x)/x$, $g(0) := 0$, est continue, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\text{odd}}$ et il existe une unique $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ telle que $\partial_x h = g$. On a $Hh = f$ de telle façon que $(-1 - H)\hat{h} = \hat{f}$. Donc si $\hat{f}(0) = 0$ on a $\hat{h}(0) = 0$ et il existe $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ avec $Hk = \hat{h}$. Alors $-(1 + H)\hat{k} = h$ et $H(1 + H)\hat{k} = -f$. Cela montre que $H(1 + H) : \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\text{ev}} \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})_0^{\text{ev}}$ est surjective et est un isomorphisme. \square

4.2. Le laplacien $\Delta = H(1 + H)$ et son spectre

Cette section est basée sur le dictionnaire heuristique suivant suggérant un parallèle entre quelques notions classiques en théorie de Hodge du côté gauche, et leur contrepartie en géométrie non-commutative, pour l'espace des classes d'adèles des rationnels. Les notations sont celles de la Section 3.

Algèbre de fonctions	Produit croisé par \mathbb{Q}^\times
Formes différentielles	Homologie de Hochschild
Opérateur étoile \star	$\iota \times \mathbb{F}$
Différentielle d	Opérateur H
$\delta := \star d \star$	Opérateur $1 + H$
Laplacien	$\Delta := H(1 + H)$

La proposition suivante est une variante de la réalisation spectrale dans [1, 2].

PROPOSITION 4.2. *Les faits suivants sont attestés*

- (i) *l'application trace Tr commute avec $\Delta = H(1 + H)$ et le domaine de $\text{Tr} \circ \Delta$ est contenu dans l'espace de Schwartz fort $\mathbf{S}(\mathbb{R}_+^*) := \bigcap_{\beta \in \mathbb{R}} \mu^\beta \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$, avec μ dénotant le module.*
- (ii) *le spectre de Δ sur le quotient de $\mathbf{S}(\mathbb{R}_+^*)$ par la fermeture du domaine de $\text{Tr} \circ \Delta$ est l'ensemble (compté avec de possibles multiplicités)*

$$\left\{ \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \mid z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \zeta(z) = 0 \right\}.$$

PREUVE. (i) L'application trace de (3.5)¹ commute avec Δ . Par le lemme 4.1 (iii) le domaine de Δ is $\mathcal{S}(\mathbb{R})_0^{\text{ev}}$ donc le domaine de $\mathcal{E} \circ (H(1 + H))$ est contenu dans $\mathbf{S}(\mathbb{R}_+^*)$ (voir [2], Lemme 2.51).

¹L'équation (3.5) de <https://arxiv.org/pdf/2207.10419.pdf> est :

$$\text{Tr}(\tilde{f})(u) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\times} \tilde{f}(q\rho(x), 1) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^\times} (1_{\hat{\mathbb{Z}}} \otimes f)(q, qu) = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^\times} f(nu) \quad \forall u \in \mathbb{R}_+^*$$

(ii) Par construction, $\mathbf{S}(\mathbb{R}_+^*)$ est l'intersection, indexée par les intervalles compacts $J \subset \mathbb{R}$, des espaces $\cap_{\beta \in J} \mu^\beta \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$. La transformée de Fourier

$$\mathbb{F}(f)(z) := \int_{\mathbb{R}_+^*} f(u) u^z d^*u$$

définit un isomorphisme entre ces espaces de fonctions et les espaces de Schwartz $\mathcal{S}(I)$, étiquetés par des bandes verticales $I := \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \in J\}$, de fonctions holomorphes f dans I avec $p_{k,m}(f) < \infty$ pour tous $k, m \in \mathbb{N}$ où

$$p_{k,m}(f) = \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} \sup_I (1 + |z|)^k \cdot |\partial^n f(z)|.$$

Ces normes définissent une topologie de Fréchet sur $\mathcal{S}(I)$.

Il découle alors du lemme 4.125 de [2] que, pour I suffisamment grand, le quotient de $\mathcal{S}(I)$ par la fermeture du domaine de $\text{Tr} \circ \Delta$ se décompose en une somme directe d'espaces de dimension finie associés aux projections $\Pi(N)$, $N \in \mathbb{Z}$ qui vérifient les propriétés suivantes :

1. Chaque $\Pi(N)$ est un idempotent.
2. La séquence des $\Pi(N)$ est à croissance tempérée.
3. Le rang de $\Pi(N)$ est $O(\log |N|)$ pour $|N| \rightarrow \infty$.
4. Pour tout $f \in \mathcal{S}(I)$ la séquence $f \Pi(N)$ est à décroissance rapide et

$$\sum_{N \in \mathbb{Z}} f \Pi(N) = f \quad \forall f \in \mathcal{S}(I).$$

La décomposition en somme directe commute avec Δ puisqu'à la fois $\Pi(N)$ et le conjugué de Δ par la transformation de Fourier \mathbb{F} sont donnés par des opérateurs de multiplication. Le conjugué de H par \mathbb{F} est la multiplication par $-z$, de telle façon que le conjugué de Δ est la multiplication par $-z(1-z)$.

Le spectre de Δ est l'union des spectres des opérateurs de dimension finie $\Delta_N := \Pi(N)\Delta = \Delta\Pi(N)$. Par [2], corollaire 4.118, et la preuve du théorème 4.116, le domaine de dimension finie de $\Pi(N)$ est décrit par l'évaluation de $f \in \mathcal{S}(I)$ sur les zéros $\rho \in Z(N)$ de la fonction ζ de Riemann qui sont à l'intérieur du contour γ_N , *i.e.* par l'application

$$\mathcal{S}(I) \ni f \mapsto f|_{Z(N)} = (f^{(n_\rho)}(\rho))_{\rho \in Z(N)} \in \mathbb{C}^{(n_\rho)}$$

où $\mathbb{C}^{(n_\rho)}$ dénote l'espace de dimension n_ρ de jets d'ordre égal à l'ordre n_ρ du zéro ρ de la fonction ζ . De plus, l'action de Δ_N est donnée par la matrice associée à la multiplication de $f \in \mathcal{S}(I)$ par $-z(1-z)$: cela donne une matrice triangulaire dont la diagonale contient n_ρ termes tous égaux à $-\rho(1-\rho)$. Donc le spectre de Δ sur le quotient de $\mathbf{S}(\mathbb{R}_+^*)$ par la fermeture du domaine de $\text{Tr} \circ \Delta$ est l'ensemble (compté avec des multiplicités)

$$\left\{ \left(\rho - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \mid \rho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \zeta(\rho) = 0 \right\}.$$

□

COROLLAIRE 4.3. Le spectre de Δ sur le quotient de l'espace de Schwartz fort $\mathbf{S}(\mathbb{R}_+^*)$ par la fermeture du domaine de $\text{Tr} \circ \Delta$ est négatif si et seulement si l'hypothèse de Riemann est vérifiée.

PREUVE. Cela découle de la proposition 4.2 et du fait que pour $\rho \in \mathbb{C}$

$$\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 0 \iff \rho \in [0, 1] \cup \frac{1}{2} + i\mathbb{R}.$$

□

REMARQUE 4.4. L'intérêt principal de la reformulation ci-dessus de la réalisation spectrale de [1, 2] en fonction du laplacien Δ est que cette dernière formulation est intimement liée à l'opérateur d'onde prolate W_λ dont on a montré dans [3] qu'il est auto-adjoint, et qu'il a, pour $\lambda = \sqrt{2}$, le même spectre UV que la fonction ζ de Riemann. La relation entre Δ et W_λ est que ce dernier est une perturbation de Δ par un multiple de l'oscillateur harmonique.

Références

- [1] A. Connes, C. Consani, M. Marcolli, *Weil's proof and the geometry of the adèles class space*. Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, 339–405, Progr. Math., 269, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2009.
- [2] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Colloquium Publications, Vol.55, American Mathematical Society, 2008.
- [3] A. Connes, H. Moscovici, *The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta*. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 119, e2123174119 (2022).

OPÉRATEUR DE DIRAC ET GRAVITATION

DANIEL KASTLER

Résumé : Nous donnons une démonstration directe du fait, annoncé par Alain Connes, que le résidu de Wodzicki du carré de l'inverse de l'opérateur de Dirac est proportionnel à l'action d'Einstein-Hilbert de la relativité générale. Nous montrons que ceci est toujours vérifié par les opérateurs de Dirac twistés (e.g. par l'électrodynamique), et plus généralement, pour les opérateurs de Dirac appartenant aux connexions de Clifford des fibrés généraux de Clifford.

Récemment la géométrie non-commutative de Connes s'est montrée - à travers sa réinterprétation fascinante du modèle standard des particules élémentaires complet - être également pertinente pour l'étude de la gravitation. En effet, d'un côté, Alain Connes a fait l'observation qui est un réel défi¹ que le résidu de Wodzicki² de l'inverse du carré de l'opérateur de (Atiyah-Singer-Lichnérowicz) Dirac amène l'action de Einstein-Hilbert de la relativité générale.

Et de plus, il a travaillé sur une forme quantale de l'action de Polyakov des cordes [2] qui le reproduit dans le cas habituel d'une surface de Riemann, mais également a du sens pour les 4-variétés conformes, amenant alors une action conformellement invariante dont on espère qu'elle est reliée à la gravitation³.

Dans cet article, nous nous intéressons au résidu de Wodzicki de D^{-2} . Nous calculons d'abord cet objet pour l'opérateur de Dirac pur (fabriqué avec la connexion de spin d'une variété riemannienne, cf. (1) ci-dessous) : nous obtenons alors, comme annoncé par Connes, un multiple de la courbure scalaire (Théorème [1] ci-dessous). Notre preuve est un calcul de force brute effectué dans des cas à coordonnées arbitraires.

Maintenant, puisque l'action d'Einstein-Hilbert et l'action du modèle standard sont toutes deux obtenues par des algorithmes basés sur la trace de Dixmier, on souhaite naturellement obtenir ces deux actions avec une seule procédure. Selon cette méthode, le premier objet naturel sur lequel travailler est le résidu de Wodzicki de \mathbb{D}^{-2} , \mathbb{D} l'opérateur composé de Dirac construit avec le produit tensoriel de la connexion de spin σ_μ , et la $U(1)$ -connexion de l'électrodynamique a_μ . Mais le calcul de cet objet (Proposition [2] ci-dessous) amène le même résultat que celui obtenu dans le Théorème [1] : la connexion a_μ sort du calcul. En fait, puisque notre calcul est basé sur la formule de Lichnérowicz pour le carré ou l'opérateur de Dirac qui est valable dans le cas des opérateurs de Dirac généraux qui tiennent à partir des connexions de Clifford sur les fibrés de Clifford, notre

Daniel Kastler :

1. Centre de Physique Théorique, CNRS-Luminy, Case 907, P-13288 Marseille Cedex 9, France.

2. Département de Physique, Faculté des Sciences de Luminy, Marseille Cedex, France.

Reçu le 1er Décembre 1993 / forme révisée le 29 Mars 1994.

Origine de l'article : Communication in mathematical physics, vol. 166, p.633-643, 1995.

Traduction d'un texte téléchargeable ici

<https://projecteuclid.org/journals/communications-in-mathematical-physics/volume-166/issue-3/The-Dirac-operator-and-gravitation/cmp/1104271706.full>

Trad. Denise Vella-Chemla, mars 2021.

1. non publiée, mais mentionnée verbalement dans différents exposés.
2. Le résidu de Wodzicki est en fait l'unique (et par conséquent canonique) trace sur les opérateurs pseudo-différentiels (concentrés sur les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre la dimension de la variété).
3. Le travail du groupe de Zürich sur la gravitation en géométrie non-commutative est basé sur une approche différente reliée à l'algorithme de Yang-Mills [6].

résultat se généralise naturellement à ce contexte (Proposition [3] ci-dessous).

Nous concluons donc que les présents algorithmes de la géométrie non-commutative gérant les lagrangiens respectifs du monde de l'infiniment petit et du cosmos semblent (superficiellement) tendre à se repousser l'un l'autre : alors que a_μ sort du résidu de Wodzicki du carré de l'inverse de l'opérateur de Dirac composé, σ_μ sort de l'algorithme de Yang-Mills non-commutatif⁴.

0. Contexte et notations

Dans la suite de ce document, \mathbf{M} est une variété riemannienne 4-dimensionnelle orientée de spins de métrique riemannienne g (avec la norme $\| \cdot \|$ et l'élément de volume dv). Nous rappelons que l'opérateur de Dirac D est localement donné comme suit en fonction d'une section orthonormale e_i (avec section duale θ^k) du fibré de \mathbf{M} : on a

$$\begin{cases} D = i\gamma^i \widetilde{\nabla}_i = i\gamma^i(e_i + \sigma_i) \\ \text{avec } \sigma_i(x) = \frac{1}{4}\gamma_{ij,k}(x)\gamma^j\gamma^k = \frac{1}{8}\gamma_{ij,k}(x)[\gamma^j\gamma^k - \gamma^k\gamma^j], \end{cases} \quad (1)$$

où les $\gamma_{ij,k}$ représentent la connexion de Levi-Civita ∇ avec connexion de spins $\widetilde{\nabla}$, spécifiquement

$$\begin{cases} \gamma_{ij,k} = -\gamma_{ik,j} = \frac{1}{2}[c_{ij,k} + c_{ki,j} + c_{kj,i}], & i, j, k = 1, \dots, 4. \\ \text{avec } c_{ij}^k = \theta^k([e_i, e_j]) \end{cases} \quad (2)$$

Ici les γ^i sont des matrices auto-adjointes de Dirac telles que $\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \delta^{ij}$. En fonction des coordonnées locales x^μ induisant l'alternative à 4 termes $\partial_\mu = S_\mu^i(x)e_i$ (de dual à quatre termes dx^μ), nous avons $\gamma^i e_i = \gamma^\mu \partial_\mu$, les γ^μ étant maintenant des matrices de Dirac x -dépendantes telles que $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = g^{\mu\nu}$ (on utilise des indices ou exposants latins pour les e_i de base et des indices ou exposants grecs pour les ∂_μ de base, le type des indices et exposants spécifiant le type des matrices de Dirac). La spécification de l'opérateur de Dirac dans la base grecque est la suivante : on a

$$\begin{cases} D = i\gamma^\mu \widetilde{\nabla}_\mu = i\gamma^\mu(\partial_\mu + \sigma_\mu) \\ \text{avec } \sigma_\mu(x) = S_\mu^i(x)\sigma_i(x). \end{cases} \quad (1a)$$

Dans ce qui suit, la notation D^{-1} fait référence à l'inverse modulo les opérateurs lisses.

Nous établissons d'abord ([1], voir aussi [3, p. 322]) :

1. Théorème. *La valeur du résidu de Wodzicki [4,4a] sur le carré de l'inverse de l'opérateur de Dirac, notamment :*

$$I = 4 \operatorname{Tr}_\omega\{\sigma_{-4}(x, \xi)\} = 4(2\pi)^{-4} \int_{\xi \in S^3} \operatorname{tr}\{\sigma_{-4}(x, \xi)\} d^3\xi dv, \quad (3)$$

(tr la trace de Clifford normalisée) où :

$$\sigma_{-4}(x, \xi) = \text{partie d'ordre } -4 \text{ du symbole total } \sigma(x, \xi) \text{ de } D^{-2}, \quad (4)$$

coïncide à une constante près avec l'action de Hilbert-Einstein action $\int \mathcal{L}_g dv$ de la relativité générale où

4. En effet σ_μ sort des commutateurs $[D, a]$, $a \in C^\infty(\mathbf{M})$.

$$\mathcal{L}_g = R_{\mu\nu} \wedge * (dx^\mu \wedge dx^\nu) \quad (5)$$

- *spécifiquement*

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{2} R_{ikmn} (dx^m \wedge dx^n, dx^i \wedge dx^k) = (g^{im} g^{nk} - g^{in} g^{mk}) R_{ikmn} = s, \quad (5a)$$

s la courbure scalaire). On a $I = -\frac{1}{24\pi^2} \int \mathcal{L}_g dv$.

Nous rappelons la formule de Lichnérowicz pour le carré de l'opérateur de Dirac :

$$\begin{aligned} D^2 &= -g^{\mu\nu} (\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha) + \frac{1}{4} s \\ &= -g^{\mu\nu} [\partial_\mu^x \partial_\nu^x + 2\sigma_\mu \cdot \partial_\nu^x - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha^x + \partial_\mu^x \sigma_\nu + \sigma_\mu \sigma_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \sigma_\alpha] + \frac{1}{4} s. \end{aligned} \quad (6)$$

Nos calculs sont basés sur l'algorithme fournissant le symbole principal d'un produit d'opérateurs pseudo-différentiels en fonction des symboles principaux des facteurs, notamment, avec le raccourci $\partial_\xi^\alpha = \partial^\alpha / \partial \xi_\alpha$, $\partial_\alpha^x = \partial_\alpha / \partial x^\alpha$:

$$\sigma^{PQ}(x, \xi) = \sum_\alpha \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma^P(x, \xi) \cdot \partial_\alpha^x \sigma^Q(x, \xi). \quad (7)$$

Nous avons besoin de calculer le symbole total $\sigma(x, \xi)$ de D^{-2} à l'ordre -4 , avec D^2 la somme suivante de termes $(D^2)_k$ d'ordre k :

$$D^2 = (D^2)_2 + (D^2)_1 + (D^2)_0,$$

$$\begin{cases} (D^2)_2 = -g^{\mu\nu} \partial_\mu^x \partial_\nu^x \\ (D^2)_1 = -g^{\mu\nu} (2\sigma_\mu \cdot \partial_\nu^x - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha^x) \\ (D^2)_0 = -g^{\mu\nu} (\partial_\mu^x \sigma_\nu + \sigma_\mu \sigma_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \sigma_\alpha) + \frac{1}{4} s \end{cases} \quad (6a)$$

avec les symboles respectifs :

$$\begin{cases} \sigma_2(x, \xi) = g^{\mu\nu}(x) \xi_\mu \xi_\nu \\ \sigma_1(x, \xi) = i g^{\mu\nu}(x) [\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x) \xi_\alpha - 2\sigma_\mu(x) \xi_\mu] \\ \sigma_0(x, \xi) = -g^{\mu\nu}(x) (\partial_\mu^x \sigma_\nu + \sigma_\mu \sigma_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \sigma_\alpha)(x) + \frac{1}{4} s(x) \end{cases} \quad (8)$$

abrégés comme suit, en utilisant le raccourci $\Gamma^\mu = g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu$:

$$\begin{cases} \sigma_2(x, \xi) = \|\xi\|^2 \\ \sigma_1(x, \xi) = i(\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu)(x) \xi_\mu \\ \sigma_0(x, \xi) = -(\partial^{x\mu} \sigma_\mu + \sigma^\mu \sigma_\mu - \Gamma^\mu \sigma_\mu)(x) + \frac{1}{4} s(x) \end{cases} \quad (8a)$$

Nous voulons calculer une paramétrique D^{-2} de D^2 jusqu'à l'ordre -4 en utilisant la recette suivante : cela revient à calculer les parties σ_k , $k = 2, 3, 4$, dans le développement du symbole complet σ de D^{-2} en termes d'ordre décroissant :

$$\sigma^{D^{-2}} = \sigma = \sigma_{-2} + \sigma_{-3} + \sigma_{-4} + \text{termes d'ordre} \leq -5. \quad (9)$$

L'application de (7) avec $P = D^2$ et $Q = D^{-2}$ amène aux ordre respectifs 0, -1, -2 les relations de récurrence :

$$\sigma_2 \sigma_{-2} = 1 \quad (10)$$

$$\sigma_2 \sigma_{-3} + \sigma_1 \sigma_{-2} - i \partial_\xi^\mu \sigma_2 \cdot \partial_\mu^x \sigma_{-2} = 0 \quad (11)$$

$$\sigma_2 \sigma_{-4} + \sigma_1 \sigma_{-3} + \sigma_0 \sigma_{-2} - i \partial_\xi^\mu \sigma_2 \cdot \partial_\mu^x \sigma_{-3} - i \partial_\xi^\mu \sigma_1 \cdot \partial_\mu^x \sigma_{-2} - \frac{1}{2} \partial_\xi^{\mu\nu} \sigma_2 \cdot \partial_{\mu\nu}^x \sigma_{-2} = 0 \quad (12)$$

ici les termes pertinents sont lus dans les tableaux de produits ci-dessous $\partial_\xi^\alpha \sigma_p(x, \xi) \cdot \partial_\alpha^x \sigma_q(x, \xi)$:

$ \alpha = 0$	$ \alpha = 1$	$ \alpha = 2$
$\sigma_2 \quad \sigma_1 \quad \sigma_0$	$\sigma_2 \quad \sigma_1 \quad \sigma_0$	$\sigma_2 \quad \sigma_1 \quad \sigma_0$
$\sigma_{-2} \quad 0 \quad -1 \quad -2$	$\sigma_{-2} \quad -1 \quad -2 \quad -3$	$\sigma_{-2} \quad -2 \quad -3 \quad -4$
$\sigma_{-3} \quad -1 \quad -2 \quad -3$	$\sigma_{-3} \quad -2 \quad -3 \quad -4$	$\sigma_{-3} \quad -3 \quad -4 \quad -5$
$\sigma_{-4} \quad -2 \quad -3 \quad -4$	$\sigma_{-4} \quad -3 \quad -4 \quad -5$	$\sigma_{-4} \quad -4 \quad -5 \quad -6$

Avec les σ_k comme en (8a), on obtient :

$$\sigma_{-2} = \|\xi\|^{-2}, \quad (10a)$$

$$\|\xi\|^2 \sigma_{-3} + i \|\xi\|^2 (\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu) \xi_\mu - i \partial_\xi^\mu \|\xi\|^2 \cdot \partial_\mu^x \|\xi\|^2 = 0, \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 \sigma_{-4} + i (\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu) \xi_\mu \sigma_{-3} - \|\xi\|^2 [(\partial^{x\mu} \sigma_\mu + \sigma^\mu \sigma_\mu - \Gamma^\mu \sigma_\mu) \\ + \frac{1}{4} \|\xi\|^2 s(x) - i \partial_\xi^\mu \|\xi\|^2 \cdot \partial_\mu^x \sigma_{-3} + (\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu) \delta_\nu^\mu \cdot \partial_\mu^x \|\xi\|^{-2} \\ - \frac{1}{2} \partial_\xi^{\mu\nu} \|\xi\|^2 \cdot \partial_{\mu\nu}^x \|\xi\|^{-2}] = 0. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \partial_\xi^\mu \|\xi\|^2 &= 2\xi^\mu, \quad \partial_\xi^\mu \|\xi\|^{-2} = -2\|\xi\|^{-4} \xi^\mu, \quad \partial_\xi^\mu \|\xi\|^{-4} = -4\|\xi\|^{-6} \xi^\mu, \quad \partial_\xi^\mu \|\xi\|^{-6} = -6\|\xi\|^{-8} \xi^\mu, \\ \partial_\mu^x \|\xi\|^2 &= \xi^\alpha \xi^\beta \partial_\mu^x g^{\alpha\beta}, \quad \partial_\mu^x \|\xi\|^{-2} = -\|\xi\|^{-4} \xi_\alpha \xi_\beta \partial_\mu^x g^{\alpha\beta}, \quad \partial_\mu^x \|\xi\|^{-6} = -3\|\xi\|^{-8} \xi_\alpha \xi_\beta \partial_\mu^x g^{\alpha\beta}, \\ \partial_\xi^{\mu\nu} \|\xi\|^2 &= 2g^{\mu\nu}, \\ \partial_{\mu\nu}^x \|\xi\|^{-2} &= -\|\xi\|^{-4} \xi_\alpha \xi_\beta \partial_{\mu\nu}^x g^{\alpha\beta} + 2\|\xi\|^{-6} \xi_\alpha \xi_\beta \partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \xi_\gamma \xi_\delta \partial_\nu^x g^{\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (13)$$

on obtient

$$i \sigma_{-3} = \|\xi\|^{-4} \xi_\mu (\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu) + 2\|\xi\|^{-6} \xi^\mu \xi_\alpha \xi_\beta \partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \quad (11b)$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_{-4} &= -i \|\xi\|^{-2} (\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu) \xi_\mu \sigma_{-3} + \|\xi\|^{-4} (\partial^{x\mu} \sigma_\mu + \sigma^\mu \sigma_\mu - \Gamma^\mu \sigma_\mu) \\ &\quad - \frac{1}{4} \|\xi\|^{-4} s(x) + 2i \|\xi\|^{-2} \xi^\mu \cdot \partial_\mu^x \sigma_{-3} + \|\xi\|^{-6} \xi_\alpha \xi_\beta (\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu) \partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\xi\|^{-2} \partial_\xi^{\mu\nu} \|\xi\|^2 \cdot \partial_{\mu\nu}^x \|\xi\|^{-2} \\ &= -\|\xi\|^{-6} \xi_\mu \xi_\nu (\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu) (\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu) \\ &\quad - 2\|\xi\|^{-8} \xi^\mu \xi_\nu \xi_\alpha \xi_\beta (\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu) \partial_\mu^x g^{\alpha\beta} + \|\xi\|^{-4} (\partial^{x\mu} \sigma_\mu + \sigma^\mu \sigma_\mu - \Gamma^\mu \sigma_\mu) \\ &\quad - \frac{1}{4} \|\xi\|^{-4} s(x) - 2i \|\xi\|^{-2} \xi^\mu \cdot \partial_\mu^x \sigma_{-3} + \|\xi\|^{-6} \xi_\alpha \xi_\beta (\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu) \partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \\ &\quad - \|\xi\|^{-6} \xi_\alpha \xi_\beta g^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^x g^{\alpha\beta} + 2\|\xi\|^{-8} \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \xi_\delta g^{\mu\nu} \partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \partial_\nu^x g^{\gamma\delta}. \end{aligned} \quad (12b)$$

En regroupant les termes et en insérant

$$\begin{aligned}
i\partial_\mu^x \sigma_{-3} &= -2\|\xi\|^{-6} \xi_\nu \xi_\alpha \xi_\beta (\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu) \partial_\mu^x g^{\alpha\beta} + \|\xi\|^{-4} \xi_\nu \partial_\mu^x (\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu) \\
&\quad - 6\|\xi\|^{-8} \xi^\nu \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \xi_\delta \partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \partial_\nu^x g^{\gamma\delta} + 2\|\xi\|^{-6} \xi_\alpha \xi_\gamma \xi_\delta \partial_\mu^x g^{\nu\alpha} \partial_\nu^x g^{\gamma\delta} \\
&\quad + 2\|\xi\|^{-6} \xi^\nu \xi_\gamma \xi_\delta \partial_{\mu\nu}^x g^{\gamma\delta},
\end{aligned} \tag{14}$$

nous obtenons pour σ_{-4} la somme de termes :

$$\begin{aligned}
A &= -\|\xi\|^{-6} \xi_\mu \xi_\nu \Gamma^\mu \Gamma^\nu + \|\xi\|^{-4} [g_{\mu\nu} - 4\|\xi\|^{-2} \xi_\mu \xi_\nu] [\sigma^\mu \sigma^\nu - \Gamma^\nu \sigma^\nu], \\
B &= \|\xi\|^{-4} \partial^{x\mu} \sigma_\mu - \frac{1}{4} \|\xi\|^{-4} s, \\
C &= -6\|\xi\|^{-8} \xi^\mu \xi_\nu \xi_\alpha \xi_\beta (\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu) \partial_\mu^x g^{\alpha\beta}, \\
D &= 2\|\xi\|^{-6} \xi^\mu \xi_\nu \partial_\mu^x (\Gamma^\nu - 2\sigma^\nu), \\
E &= -12\|\xi\|^{-10} \xi^\mu \xi^\nu \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \xi_\delta \partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \partial_\nu^x g^{\gamma\delta}, \\
F &= 4\|\xi\|^{-8} \xi^\mu \xi_\alpha \xi_\gamma \xi_\delta \partial_\mu^x g^{\nu\alpha} \partial_\nu^x g^{\gamma\delta}, \\
G &= \|\xi\|^{-6} \xi_\alpha \xi_\beta (\Gamma^\mu - 2\sigma^\mu) \partial_\mu^x g^{\alpha\beta}, \\
H &= 4\|\xi\|^{-8} \xi^\mu \xi^\nu \xi_\gamma \xi_\delta \partial_{\mu\nu}^x g^{\gamma\delta}, \\
K &= -\|\xi\|^{-6} \xi_\alpha \xi_\beta g^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^x g^{\alpha\beta}, \\
L &= 2\|\xi\|^{-8} \xi_\alpha \xi_\beta \xi_\gamma \xi_\delta g^{\mu\nu} \partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \partial_\nu^x g^{\gamma\delta}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Nous devons prendre la trace de Clifford et intégrer sur la sphère S^3 (procédures de commutation). Grâce à (1a), tous les termes linéaires en σ_μ s'évanouissent sous la trace de Clifford. Nous procédons à l'intégration sur S^3 , en utilisant les faits suivants : nous avons, en utilisant le raccourci $\int = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\xi \in S^3} d^3 v$:

$$\left\{ \begin{aligned}
\int \xi^\mu \xi^\nu &= \frac{1}{4} [\mu\nu] \\
\int \xi^\mu \xi^\nu \xi^\alpha \xi^\beta &= \frac{1}{3 \cdot 2^3} [\mu\nu\alpha\beta] \\
\int \xi^\mu \xi^\nu \xi^\alpha \xi^\beta \xi^\gamma \xi^\delta &= \frac{1}{3 \cdot 2^6} [\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta]
\end{aligned} \right. \tag{16}$$

où $[\mu\nu\dots\gamma\delta]$ représente la somme des produits des $g^{\alpha\beta}$ déterminés par tous les "appariements" de $\mu\nu\dots\gamma\delta$. En faisant la moyenne sur S^3 , les termes qui subsistent dans (15) amènent à (nous écrivons maintenant ∂_μ à la place de ∂_μ^x sans risque de confusion, et nous utilisons le fait qu'on a, \cong indiquant l'équivalence quand on multiplie par l'expression symétrique en $\alpha\beta$, et γ, δ) :

$$[\mu\nu \alpha\beta\gamma\delta] \cong g^{\mu\nu} [\alpha\beta\gamma\delta] + 2\delta_\alpha^\mu [\nu \beta\gamma\delta] + 2\delta_\gamma^\mu [\nu \alpha\beta\delta], \tag{17}$$

nous obtenons les termes⁵ :

$$\begin{aligned}
A &\rightarrow -\frac{1}{4}[\mu\nu]\Gamma^\mu\Gamma^\nu = -\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\Gamma^\mu\Gamma^\nu, \\
B &\rightarrow -\frac{1}{4}s, \\
C &\rightarrow -6\frac{1}{3\cdot 2^3}[\mu\nu\alpha\beta]\Gamma^\nu\partial_\mu g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\Gamma^\mu g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\Gamma^\nu g_{\nu\beta}\partial_\mu g^{\mu\beta}, \\
D &\rightarrow 2\frac{1}{4}[\mu\nu]\partial_\mu\Gamma^\nu = \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu\partial_\mu\Gamma^\nu = \frac{1}{2}\partial_\mu\Gamma^\mu, \\
E &\rightarrow -12\frac{1}{3\cdot 2^6}[\mu\nu\alpha\beta\gamma\delta]\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\gamma\delta} \\
&= -\frac{1}{16}g^{\mu\nu}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\gamma\delta} - \frac{1}{8}g^{\mu\nu}g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}\partial_\nu g^{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\gamma\delta} \\
&\quad -\frac{1}{8}g_{\gamma\delta}\partial_\mu g^{\mu\nu}\partial_\nu g^{\gamma\delta} - \frac{1}{4}g_{\beta\delta}\partial_\mu g^{\mu\beta}\partial_\nu g^{\nu\delta} \\
&\quad -\frac{1}{4}g_{\beta\delta}\partial_\mu g^{\nu\beta}\partial_\nu g^{\mu\delta} - \frac{1}{8}g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\mu\nu}, \\
F &\rightarrow 4\frac{1}{3\cdot 2^3}[\mu\nu\alpha\gamma\delta]\partial_\mu g^{\nu\alpha}\partial_\nu g^{\gamma\delta} \\
&= \frac{1}{6}g_{\gamma\delta}\partial_\mu g^{\mu\nu}\partial_\nu g^{\gamma\delta} + \frac{1}{3}g_{\alpha\delta}\partial_\mu g^{\nu\alpha}\partial_\nu g^{\mu\delta}, \\
G &\rightarrow \frac{1}{4}[\alpha\beta]\Gamma^\mu\partial_\mu g^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\Gamma^\mu g_{\alpha\beta}\partial_\mu g^{\alpha\beta}, \\
H &\rightarrow 4\frac{1}{3\cdot 2^3}[\mu\nu\gamma\delta]\partial_{\mu\nu}g^{\gamma\delta} = \frac{1}{6}[g^{\mu\nu}g_{\gamma\delta} + 2\delta_\gamma^\mu\delta_\delta^\nu]\partial_{\mu\nu}g^{\gamma\delta}, \\
K &\rightarrow -\frac{1}{4}[\alpha\beta]g^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}, \\
L &\rightarrow 2\frac{1}{3\cdot 2^3}g^{\mu\nu}[\alpha\beta\gamma\delta]\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\gamma\delta} \\
&= \frac{1}{12}g^{\mu\nu}[g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta} + 2g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}]\partial_\mu g^{\alpha\beta}\partial_\nu g^{\gamma\delta}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Nous convertissons maintenant en les expressions suivantes dans lesquelles les dérivées partielles

5. Un compte-rendu ligne par ligne de ces calculs est disponible dans le rapport de recherche marseillais CPT-93/P.2970.

agissent sur les $g^{\alpha\beta}$ avec exposants⁶⁾ :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \partial_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} \\ X = g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \partial_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} \\ hhG = g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} g^{\sigma\tau} \partial_{\alpha} g_{\beta\sigma} \partial_{\gamma} g_{\delta\tau} \\ ghH = g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} g^{\sigma\tau} \partial_{\alpha} g_{\beta\sigma} \partial_{\tau} g_{\gamma\delta} \\ gg\Delta = g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} g^{\sigma\tau} \partial_{\sigma} g_{\alpha\beta} \partial_{\tau} g_{\gamma\delta} \\ GHH = g^{\mu\sigma} g^{\alpha\eta} g^{\xi\beta} \partial_{\mu} g_{\eta\xi} \partial_{\alpha} g_{\beta\sigma} \\ \Delta GG = g^{\mu\sigma} g^{\alpha\eta} g^{\xi\beta} \partial_{\mu} g_{\eta\xi} \partial_{\sigma} g_{\alpha\beta} \end{array} \right. , \quad (19)$$

où g, G, h, H, Δ , dénotent les contractions entre les paires d'indices suivantes : indices des lettres g (identiques ou différentes), indices des lettres g et ∂ (proche ou éloigné), indices des lettres ∂ et ∂ .

En utilisant les faits :

$$\Gamma^{\mu} = g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} \Gamma_{\alpha\beta,\sigma} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\sigma} [\partial_{\alpha} g_{\beta\sigma} - \frac{1}{2} \partial_{\sigma} g_{\alpha\beta}], \quad (20)$$

et

$$\partial_{\mu} g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\sigma} g^{\beta\tau} \partial_{\mu} g_{\sigma\tau} \quad , \quad g_{\alpha\gamma} \partial_{\mu} g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \partial_{\mu} g_{\alpha\gamma} \quad , \quad (21)$$

nous obtenons :

$$A \rightarrow -\frac{1}{4} hhG + \frac{1}{4} ghH - \frac{1}{16} gg\Delta, \quad (22)$$

$$C \rightarrow \frac{1}{2} hhG - \frac{1}{8} gg\Delta, \quad (23)$$

$$D \rightarrow \frac{1}{2} X - \frac{1}{4} U - \frac{1}{2} hhG + \frac{1}{4} ghH - \frac{1}{2} GHH + \frac{1}{4} \Delta GG, \quad (24)$$

$$E \rightarrow -\frac{1}{4} ghH - \frac{1}{4} hhG - \frac{1}{16} gg\Delta - \frac{1}{8} \Delta GG - \frac{1}{4} GHH, \quad (25)$$

$$F \rightarrow \frac{1}{6} ghH + \frac{1}{3} GHH, \quad (26)$$

$$G \rightarrow -\frac{1}{4} ghH + \frac{1}{8} gg\Delta, \quad (27)$$

$$H \rightarrow -\frac{1}{6} U - \frac{1}{3} X - \frac{1}{3} \Delta GG + \frac{1}{3} GHH + \frac{1}{3} hhG, \quad (28)$$

$$K \rightarrow \frac{1}{4} U - \frac{1}{2} \Delta GG, \quad (29)$$

$$L \rightarrow \frac{1}{12} gg\Delta + \frac{1}{6} \Delta GG. \quad (30)$$

La somme de ces termes est égale à :

$$-\frac{1}{6} \left[U - X + hhG - ghH + \frac{1}{4} gg\Delta + \frac{1}{2} GHH + \frac{3}{4} \right] = \frac{1}{6} s, \quad (31)$$

6. indices en haut

qui, ajouté à la contribution $-\frac{1}{4}s$ du terme B , amène au Théorème [1].

Nous étudions maintenant le cas des opérateurs de Dirac [5]. Soit \mathbf{M} une variété riemannienne compacte, en dénotant par $\mathcal{C}l_M$ l'ensemble des sections lisses du fibré vectoriel avec la fibre sur $x \in \mathbf{M}$ l'algèbre de Clifford sur l'espace cotangent de x (une algèbre complexe $\mathbb{Z}/2$ -échelonnée et $C^\infty(\mathbf{M})$ -module), nous considérons maintenant un fibré vectoriel lisse additionnel \mathcal{V} sur \mathbf{M} (avec $C^\infty(\mathbf{M})$ -module de sections lisses W), équipé d'une connexion $\nabla^\mathcal{V}$, avec tenseur de courbure correspondant $R^\mathcal{V}$. Nous considérons le fibré vectoriel produit tensoriel $S \otimes \mathcal{V}$ [avec $C^\infty(\mathbf{M})$ -module de sections lisses $\mathbb{S}_M \otimes w$] qui devient un *fibré de Clifford* à travers la définition :

et que nous équipons avec la *connexion composée* :

$$\bar{\nabla}_\xi = \widetilde{\nabla}_\xi \otimes \text{id}_w + \text{id}_{\mathbb{S}_M} \otimes \nabla_\xi^\mathcal{V}, \quad \xi, \eta \in \chi(\mathbf{M}), \quad (33)$$

la dernière devenant une *connexion de Clifford* au sens où :

où ∇ est la connexion de $\mathcal{C}l_M$ induite par la connexion de Levi-Civita de \mathbf{M} . L'*opérateur de Dirac twisté* correspondant \mathbb{D} , et le *laplacien de connexion twisté* $\underline{\Delta}$ sont alors respectivement localement spécifiés comme suit

$$\mathbb{D} = ic(dx^\mu) \bar{\nabla}_\mu, \quad (35)$$

et

$$\underline{\Delta} = -g^{\mu\nu} (\bar{\nabla}_\mu \bar{\nabla}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \bar{\nabla}_\alpha). \quad (36)$$

Nous avons les formules suivantes de Lichnérowicz pour le carré de l'opérateur de Dirac twisté :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^2 &= \underline{\Delta} - \frac{1}{2} \mathbf{R}^\mathcal{V} (\partial_\mu, \partial_\nu) c(dx^\mu) c(dx^\nu) + \frac{1}{4} s \\ &= \underline{\Delta} - \frac{1}{2} \gamma(dx^\mu) \gamma(dx^\nu) \otimes \mathbb{R}^\mathcal{V} (\partial_\mu, \partial_\nu) + \frac{1}{4} s \otimes \text{id}_w. \end{aligned} \quad (31)$$

2. Proposition. *Le résidu de Wodzicki de \mathbb{D}^{-2} coïncide avec celui de D^{-2} , et amène ainsi à un multiple de l'action d'Einstein-Hilbert.*

Preuve. Dénotons par $a_\mu dx^\mu$ la connexion une-forme de la connexion $\nabla^\mathcal{V}$: la connexion une-forme de la connexion composée (33) se lit alors :

$$\bar{\sigma}_\mu = \sigma_\mu \otimes \text{id}_w + \text{id}_{\mathbb{S}_M} \otimes a_\mu = " \sigma_\mu + a_\mu ", \quad (33a)$$

le calcul du résidu de Wodzicki residue de \mathbb{D}^{-2} est alors obtenu de celui de D^{-2} à travers les changements suivants :

$$\begin{cases} \sigma_\mu & \rightarrow \bar{\sigma}_\mu = \sigma_\mu + a_\mu \\ s & \rightarrow \mathbb{S} = s - 2R_{\mu\nu}^\mathcal{V} \gamma^\mu \gamma^\nu, \end{cases} \quad (38)$$

avec les remplacements correspondant $A \rightarrow \mathbb{A}$ à $L \rightarrow \mathbb{L}$ que nous calculons maintenant. Le terme \mathbb{A} , obtenu de A à travers le changement $\sigma_\mu \rightarrow \bar{\sigma}_\mu$, s'évanouit comme le dernier dans l'intégration sur

S^3 . Comme pour les autres termes, nous avons les changements suivants, qui amènent aux résultats indiqués après avoir pris la trace de Clifford et avoir intégré sur S^3 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{B} - B &= \|\xi\|^{-4} \partial^{x\mu} a_\mu + \frac{1}{2} \|\xi\|^{-4} R_{\mu\nu}^\gamma \gamma^\mu \gamma^\nu \rightarrow \partial^\mu a_\mu, \\
\mathbb{C} - C &= 12 \|\xi\|^{-8} \xi^\mu \xi_\nu \xi_\alpha \xi_\beta a^\nu \partial_\mu^x g^{\alpha\beta} \rightarrow 12 \frac{1}{3 \cdot 2^3} [\mu \nu \alpha \beta] a^\nu \partial_\mu g^{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2} a^\mu g_{\alpha\beta} \partial_\mu g^{\alpha\beta} + a^\nu g_{\nu\beta} \partial_\alpha g^{\alpha\beta}, \\
\mathbb{D} - D &= -4 \|\xi\|^{-6} \xi^\mu \xi_\nu \partial_\mu^x a^\nu \rightarrow -\delta_\nu^\mu \partial_\mu a^\nu = -\partial_\mu a^\mu = -\partial_\mu (g^{\mu\nu} a_\nu) \\
&= -g^{\mu\nu} \partial_\mu a_\nu - a_\nu \partial_\mu g^{\mu\nu} = -\partial^\mu a_\mu - a_\nu \partial_\mu g^{\mu\nu}, \\
\mathbb{E} - E &= 0 \\
\mathbb{F} - F &= 0 \\
\mathbb{G} - G &= -2 \|\xi\|^{-6} \xi_\alpha \xi_\beta a^\mu \partial_\mu g^{\alpha\beta} \rightarrow -\frac{1}{2} a^\mu g_{\alpha\beta} \partial_\mu g^{\alpha\beta}, \\
\mathbb{H} - H &= 0 \\
\mathbb{K} - K &= 0 \\
\mathbb{L} - L &= 0
\end{aligned} \tag{39}$$

qui s'additionnent en donnant zero.

En fait, le résultat ci-dessus peut être généralisé plus avant aux opérateurs de Dirac (twistés généralisés) appartenant aux connexions de Clifford des fibrés généraux de Clifford [5]. Dénotons par \mathcal{E} un fibré vectoriel $\mathbb{Z}/2$ -échelonné sur \mathbf{M} , de $C^\infty(\mathbf{M})$ -module de sections lisses \mathbf{E} : \mathcal{E} est appelé un *fibré de Clifford* à chaque fois qu'il y a un homomorphisme d'algèbres complexes $\mathbb{Z}/2$ -échelonnées $c : \mathbb{C}l_{\mathbf{M}} \rightarrow \text{End}_{C^\infty(\mathbf{M})} \mathbf{E}$. De plus, une connexion $\bar{\nabla}$ de \mathcal{E} est appelée une *connexion de Clifford* à chaque fois que tous les $\bar{\nabla}_\xi, \xi \in \chi(\mathbf{M})$, sont pairs, et on a

$$[\bar{\nabla}_\xi, c(a)] = c(\nabla_\xi, c(a)) = c(\nabla_\xi a), \quad a \in \mathbb{C}l_{\mathbf{M}}, \xi \in \chi(\mathbf{M}) \tag{34a}$$

(généralisant (34)). Ces éléments spécifient alors de la façon suivante un opérateur de Dirac généralisé $\mathbb{D}_{\bar{\nabla}}$:

$$\mathbb{D}_{\bar{\nabla}}^2 = ic(dx^\mu) \bar{\nabla}_\mu \tag{35a}$$

(généralisant (35)) donnant naissance à la formule généralisée de Lichnérowicz

$$\mathbb{D}_{\bar{\nabla}}^2 = \underline{\Delta} - \frac{1}{2} F^{\mathcal{E}/S} (\partial_\mu, \partial_\nu) c(dx^\mu) c(dx^\nu) + \frac{1}{4} s, \tag{37a}$$

où $F^{\mathcal{E}/S}$ est ce qu'on appelle la *courbure twistée* du fibré \mathcal{E} [5, Proposition 3.43].

Le remplacement $R^\gamma \rightarrow F^{E/S}$ laisse alors le calcul ci-dessus inchangé, ce qui fait qu'on a :

3. Proposition. *Le résidu de Wodzicki de $\mathbb{D}_{\bar{\nabla}}^{-2}$ amène encore un multiple de l'action d'Einstein-Hilbert.*

Appendice. L'action d'Einstein-Hilbert. La courbure scalaire

Soit \mathbf{M} une variété riemannienne 4-dimensionnelle de métrique g (induisant l'élément de volume dv et le produit scalaire (\cdot, \cdot) sur les tenseurs), la connexion de Levi-Civita ∇ est définie comme suit par rapport aux coordonnées locales :

$$\nabla \partial_i = \Gamma_{ij}^k \partial_k dx^j \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Gamma_{ij}^k = g^{km} \Gamma_{ij,m} \\ \Gamma_{ij,m} = \frac{1}{2} [\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}] \end{cases} \tag{A.1}$$

La courbure correspondante ∇^2 est la deux-forme avec les endomorphismes de valeurs du fibré tangent de \mathbf{M} donnée localement par la matrice :

$$R_k^j = d\omega_k^j + \omega_s^j \wedge \omega_k^s = \frac{1}{2} R_{kmn}^j dx^m \wedge dx^n, \quad (\text{A.2})$$

explicitement donnée par :

$$R_{kmn}^i = \partial_m \Gamma_{nk}^i - \partial_n \Gamma_{mk}^i \Gamma_{ms}^i \Gamma_{nk}^s - \Gamma_{ns}^i \Gamma_{mk}^s, \quad (\text{A.3})$$

et alternativement par :

$$\begin{aligned} R_{jkmn} &= g_{ij} R_{kmn}^j = \frac{1}{2} \partial_m (\partial_k g_{nj} - \partial_j g_{nk}) - \frac{1}{2} \partial_n (\partial_k g_{mj} - \partial_j g_{mk}) \\ &\quad + g_{st} \Gamma_{nj}^s \Gamma_{mk} - g_{st} \Gamma_{mj}^s \Gamma_{nk}^t \\ &= \frac{1}{2} \partial_m (\partial_k g_{nj} - \partial_j g_{nk}) - g_{st} \Gamma_{mj}^s \Gamma_{nk}^t - (m \leftrightarrow n). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

La courbure scalaire correspondante est

$$s = R_{mn}^{mn} = g^{mj} g^{nk} R_{jkmn} = -(g^{mi} g^{nk} - g^{ni} g^{mk}) [\partial_{mi} g_{nk} + g_{st} \Gamma_{mi}^s \Gamma_{nk}^t]. \quad (\text{A.5})$$

En utilisant les raccourcis de (21), on a :

$$s = X - U - hhG + ghH - \frac{1}{4} gg\Delta - \frac{1}{2} GHH + \frac{3}{4} \Delta GG. \quad (\text{A.6})$$

La *densité de l'action d'Einstein-Hilbert* est par définition :

$$L_g = R_{ik} \wedge *(dx^i \wedge dx^k) = \frac{1}{2} R_{ikmn} (dx^m \wedge dx^n) * (dx^i \wedge dx^k), \quad (\text{A.7})$$

alternativement :

$$L_g = \mathcal{L}_g dv, \quad (\text{A.8})$$

avec la densité lagrangienne

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} R_{ikmn} g(dx^m \wedge dx^n, dx^i \wedge dx^k) = \frac{1}{2} (g^{im} g^{nk} - g^{in} g^{mk}) R_{ikmn} \\ &= g^{im} g^{nk} R_{ikmn} = R_{mn}^{mn} = s. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Note. Après avoir terminé ce travail, nous avons la visite à Marseille de Markus Walze et Wolfgang Kalau de Mayence (R.F.A.), qui nous ont rapporté un calcul analogue (en utilisant les coordonnées normales) amenant aux mêmes résultats.

Références

- [1] Connes, A. : communication privée.
- [2] Connes, A. : Non-commutative geometry and physics. Proceedings of the Les Houches School, 1992.
- [3] Gilkey, P.B. : Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem. Mathematics Lecture Series 11. Publish or Perish 1984.
- [4] Wodzicki, M. : Non-commutative residue, K-Theory, arithmetic and geometry. Yu. Manin (ed). Springer Lecture Notes in Mathematics 1289. Berlin, Heidelberg, New York : Springer 1987.
- [4a] Kassel, C. : Le résidu non-commutatif (d'après M. Wodzicki. Séminaire Bourbaki, 41^o année, 1988-89, n^o 708.
- [5] Berline, N., Getzler, E., Vergne, M. : Heat kernels and Dirac operators. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 298. Berlin, Heidelberg, New York : Springer 1991.
- [6] Chamseddine, A.H., Felder, G., Fröhlich, J. : Gravity in non-commutative geometry., Commun. Math. Phys. 158, 205 (1993)

Communiqué par Alain Connes.

ERRATUM

Page 2

L.3 lire

$$I = 4\text{Tr}_w\{s_{-4}(x, \xi)\} = (2p)^{-4} \int_{\xi \in \Sigma^3} \text{tr}\{s_{-4}(x, \xi)\} d^3\xi \, dv, \quad (3)$$

L.9 lire

$$\mathcal{L}_g = R_{ikmn}(\mathbf{d}x^m \wedge \mathbf{d}x^n, \mathbf{d}x^i \wedge \mathbf{d}x^k) = 2(g^{im}g^{nk} - g^{in}g^{mk})R_{ikmn} = 2\kappa, \quad (5a)$$

L.10 lire

$$I = \frac{1}{3 \cdot 2^5 p^2} \kappa = \frac{1}{3 \cdot 2^6 p^2} L_g$$

Page 3

L.-3

$$\text{à la place de } -\frac{1}{4}\|x\|^{-2}\kappa(x) \text{ lire } -\frac{1}{4}\|x\|^{-4}\kappa(x).$$

Page 11

L.-2

$$\text{à la place de } \frac{1}{4}\kappa \text{ lire } -\frac{1}{4}\kappa$$

Page 12

L.9 lire

$$= \Delta - \frac{1}{2}\underline{\gamma}(\mathbf{d}x^m)\underline{\gamma}(\mathbf{d}x^n) \otimes R^\nu(\partial_m, \partial_n) + \frac{1}{4}\kappa \otimes id_w.$$

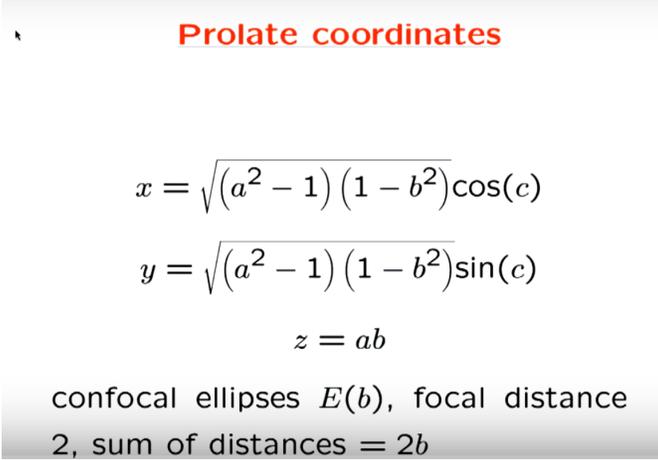
L'erratum est téléchargeable ici <https://cds.cern.ch/record/257106/files/P00019854.pdf>.

Opérateur d'onde prolate infrarouge et ultraviolet pour zeta

Alain Connes

Merci beaucoup pour votre invitation et pour cette occasion de participer à cette grande conférence, qui est un hommage à Krzysztof Gawedzki qui était un merveilleux mathématicien et physicien.

Et ce que je souhaite expliquer, c'est un lien surprenant entre la physique, quand je parle de physique, je veux dire que je vais parler du sphéroïde prolate qui est un ellipsoïde mais vous pouvez le considérer comme un volume en dimension trois, je veux dire qu'il est plein, entre ce volume donc, et la fonction zeta de Riemann. Et quand vous regardez les zéros de la fonction zeta de Riemann, quand vous en dessinez le graphe, ce que vous trouvez bien sûr, c'est une très forte similarité avec ce que serait, si vous voulez, le spectre d'un opérateur de Dirac. Et quand vous pensez aux zéros de façon spectrale, vous trouvez qu'il y a deux régimes qui doivent être compris, si vous voulez : il y a le régime ultraviolet, dans lequel la fonction de comptage des zéros de la fonction zeta de Riemann est une fonction très étrange : elle est donnée par une formule que l'on doit à Riemann et qui est cette formule dans laquelle vous avez, si vous voulez, un terme de la forme E sur 2π fois \log de E sur 2π moins E sur 2π et alors, il y a un écart logarithmique qui advient. Donc, ça, c'est pour la partie ultraviolette. Et pour la partie infrarouge, ce que vous obtenez est vraiment surprenant parce que le premier zéro est aux alentours de 14 et quelques, et alors, ok, les zéros se comportent d'une manière très précise que l'on doit comprendre. Et ce qu'on va voir, c'est qu'à la fois dans l'ultraviolet et dans l'infrarouge, le sphéroïde prolate va jouer un rôle crucial.



Prolate coordinates

$$x = \sqrt{(a^2 - 1)(1 - b^2)}\cos(c)$$
$$y = \sqrt{(a^2 - 1)(1 - b^2)}\sin(c)$$
$$z = ab$$

confocal ellipses $E(b)$, focal distance
2, sum of distances = $2b$

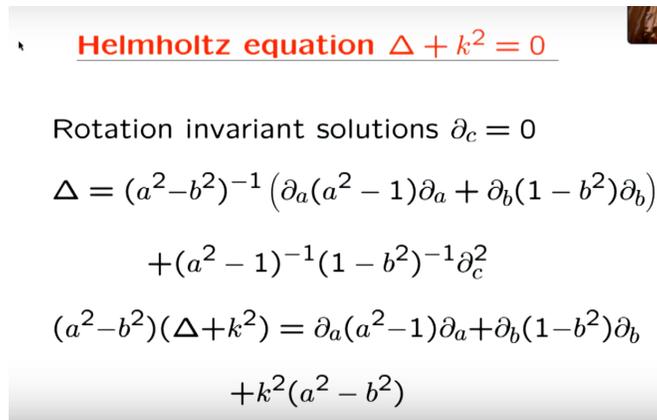
FIGURE 1

Donc je vais parler de deux papiers, écrits en collaboration, très récents, l'un qui a été publié dans les Proceedings de l'Académie des sciences, avec Henri Moscovici, sur le spectre prolate ultraviolet, et le second, en collaboration avec Katia Consani, et qui considère cette fois le comportement infrarouge.

Ok, donc on verra des résultats assez précis, mais d'une manière ou d'une autre, commençons par la physique. Commençons à partir du sphéroïde prolate. Donc si vous voulez, le sphéroïde prolate

Transcription de la vidéo derrière ce lien <https://www.youtube-nocookie.com/embed/Yfu9fM-jzQ>, Denise Vella-Chemla, janvier 2025.

est compris au moyen d'un système spécifique de coordonnées qu'on appelle les coordonnées prolate et quand vous les regardez, ces coordonnées ont l'air un peu étranges. Je veux dire que ce sont ces coordonnées a, b, c (voir Fig. 1). c est une coordonnée évidente à cause de, si vous voulez, l'invariance de rotation du sphéroïde. Mais les autres, je veux dire le terme que l'on voit devant le cosinus et le sinus pour x et y semble très étrange. Si vous y pensez un peu, ce que vous trouverez c'est qu'en fait, il décrit une famille d'ellipses confocales donc ça ressemble à ça ; vraiment ce que vous avez est là : vous avez deux points focaux ; vous en avez un qui est le point $(0,0,1)$ et l'autre qui est le point $(0,0,-1)$; ils sont donc tous les deux sur l'axe des z si vous voulez, et le paramètre b qui apparaît dans les coordonnées est en fait là pour vérifier que $2b$ est la somme de la distance entre les points focaux. Vous savez qu'une ellipse est définie par le fait que la somme des distances aux deux points focaux est constante et que cette constante est $2b$. Donc c'est le rôle du paramètre b et le paramètre a est juste un paramètre angulaire. Donc ce qui se passe alors, c'est la chose suivante : ce qui se passe, c'est que quand vous calculez le Laplacien en ces coordonnées, le Laplacien ordinaire ok, vous trouvez une expression qui alors vous permettra de gérer l'équation de Helmholtz pour le sphéroïde en dimension 3, le sphéroïde prolate (on l'appelle prolate parce qu'il est allongé dans la direction de l'axe de symétrie).



Helmholtz equation $\Delta + k^2 = 0$

Rotation invariant solutions $\partial_c = 0$

$$\Delta = (a^2 - b^2)^{-1} (\partial_a(a^2 - 1)\partial_a + \partial_b(1 - b^2)\partial_b)$$

$$+ (a^2 - 1)^{-1}(1 - b^2)^{-1}\partial_c^2$$

$$(a^2 - b^2)(\Delta + k^2) = \partial_a(a^2 - 1)\partial_a + \partial_b(1 - b^2)\partial_b$$

$$+ k^2(a^2 - b^2)$$

FIGURE 2

Ok, donc je veux dire que quand vous regardez le Laplacien, il a cette forme, ok, et si vous regardez les solutions invariantes par rotation, les choses se simplifient un peu parce que vous avez la différentielle par rapport à la variable c , la variable angulaire c , qui est nulle, et alors, ce que vous obtenez quand vous écrivez l'équation de Helmholtz, vous trouvez qu'il y a ce qu'on appelle une séparation de variables ; notamment, l'équation se sépare si vous voulez en une somme de deux termes, un dans lequel n'intervient que la variable a , et l'autre dans lequel n'intervient que la variable b . Et quand vous regardez cela d'un petit peu plus près, ce que vous trouvez c'est qu'en fait, pour résoudre l'équation de Helmholtz, qu'est-ce que vous devez faire ? Vous devez résoudre à la fois l'équation angulaire et l'équation radiale. Donc comme équations, comme équations différentielles, elles sont identiques, mais les variables que vous utilisez sont les variables a et b et la variable a est comprise entre -1 et 1. C'est si vous voulez la partie angulaire. Et la variable b est plus grande que 1, elle va jusqu'à l'infini, et c'est la partie radiale. Maintenant, à quoi ressemblent les solutions, elles sont produit de deux fonctions, une fonction qui ne dépend que de a et une fonction qui ne dépend que de b , par exemple $\phi(a)$ et $\psi(b)$, mais elles doivent être, si vous voulez, vecteurs propres pour la même valeur propre pour l'équation différentielle. Et c'est parce qu'elles le sont pour la

même valeur propre, si vous voulez, que les termes vont s'annuler et qu'elles vous donneront une solution de l'équation de Helmholtz.

Separation of variables

Angular equation = Radial equation,
but the variables have domain $[-1, 1]$
for the angular part and $[1, \infty)$ for the
radial part. Solution $\phi(a)\psi(b)$ with same
eigenvalue and $\psi = 0$ on boundary.

FIGURE 3

De plus, bien sûr, puisque vous voulez avoir une condition de Dirichlet au bord, vous devez avoir que $\psi(b) = 0$.

Donc ce qui se passe, en fait, peut être énoncé comme ça, si vous voulez : c'est qu'il y a un opérateur, un opérateur différentiel du second ordre, qui provient de ce Laplacien et qui a la forme suivante modulo une mise à l'échelle facile qui est un changement de variables ; cet opérateur, on l'appellera W_λ car il dépend du paramètre λ ; λ est relié à k par une équation très simple : $k = 2\pi\lambda^2$, et l'opérateur W_λ ressemble à ça : c'est une différentiation fois lambda au carré moins x au carré fois une différentiation plus un terme additionnel qui est $(2\pi\lambda x)^2$, ok.

Prolate spheroidal operator

The second order operator W_λ appears
from separation of variables in the La-
placian Δ for the prolate spheroid :

$$W_\lambda := -\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x) + (2\pi\lambda x)^2$$

$$(k = 2\pi\lambda^2)$$

FIGURE 4

Maintenant, cet opérateur a été utilisé d'une manière assez remarquable par Slepian et ses collaborateurs, qui travaillaient aux laboratoires Bell et je reviendrai ultérieurement à leur motivation, quand je traiterai le problème de l'infrarouge. Mais en quelque sorte, leur découverte principale, qui est décrite dans plusieurs articles, est la suivante : c'est qu'en fait, cet opérateur différentiel commute avec ce qu'on appelle la transformation de Fourier tronquée. Et pour comprendre cela, je veux dire c'est un peu surprenant parce que ce que vous devez comprendre en quelque sorte,

c'est que ces opérateurs différentiels, le premier que j'ai montré précédemment, le W_λ , en fait, commute avec un opérateur de projection. Donc cela semble très étrange parce que vous connaissez l'opérateur de projection sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$, c'est une fonction qui est discontinue, je veux dire qu'elle prend la valeur 1 entre $-\lambda$ et λ et elle prend la valeur 0 partout ailleurs, donc je veux dire qu'au premier abord, il semble très étrange que l'opérateur différentiel puisse commuter avec une telle fonction, mais si vous y pensez un peu plus avant, vous trouverez qu'en fait, ça n'est pas si surprenant parce que le cas le plus simple à considérer serait seulement celui de l'opérateur $x\partial_x$ et il suffit de comprendre qu'il commute avec la projection sur des fonctions qui ont leur support sur les entiers positifs.

Commutation with projection operator

- ▶ $x\partial_x$ commutes with $1_{[0, \infty]}$
- ▶ $(\lambda^2 - x^2)\partial_x$ commutes with $1_{[-\lambda, \lambda]}$
- ▶ $\partial_x(\lambda^2 - x^2)\partial_x$ commutes with $1_{[-\lambda, \lambda]}$

FIGURE 5

Maintenant, pourquoi est-ce que cela est évident ?

C'est évident, si vous voulez, parce que l'opérateur $x\partial_x$ engendre le semi-groupe du groupe des opérateurs de mise à l'échelle, le groupe qui remplace une fonction f de x par $f(\lambda x)$ et donc, je veux dire, de façon évidente vous savez, pour λ positif, bien sûr. Donc évidemment qu'il préserve les fonctions qui ont leur support dans $[0, \infty)$ et il commute avec cette projection.

Donc en fait, ce qui se passe, c'est que le premier morceau de l'opérateur qui est $\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x)$ commute avec $(2\pi\lambda x)^2$ (il commute bien sûr avec la multiplication par une fonction). Donc ce qui se passe, c'est que non seulement cet opérateur commute avec P_λ mais en fait, un calcul direct vous montre qu'il commute avec la transformation de Fourier, ça n'est pas difficile à voir je veux dire, il y a une partie de l'opérateur qui est l'oscillateur harmonique, qui commute avec la transformation de Fourier. Donc il commute avec la transformation de Fourier, et parce qu'il commute avec la transformation de Fourier *et* avec la projection P_λ , il commute également avec la transformée de Fourier de P_λ . Notamment, si vous voulez, il commute avec l'opérateur \widehat{P}_λ , qui est obtenu en conjuguant P_λ par la transformation de Fourier. Donc, c'est ce que Slepian et ses collaborateurs ont découvert, et je veux dire que dans les années 90, quand j'ai commencé à m'intéresser aux zéros de zeta, ce que j'ai trouvé, j'avais utilisé cette projection P_λ et \widehat{P}_λ pour faire un cutoff. Et en fait, dans mon cours en 98, j'avais traité le problème de la façon d'utiliser cet opérateur W_λ , qui est normalement seulement traité dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$, dans lequel il est auto-adjoint, comme on peut le voir facilement, la manière d'utiliser cet opérateur, donc, sur la droite des réels complète.

Commutation with P_λ and \widehat{P}_λ

- The operator

$$W_\lambda := -\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x) + (2\pi\lambda x)^2$$

is invariant under Fourier transform $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$.

- W_λ commutes with P_λ and $\widehat{P}_\lambda =$ conjugate by $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$.

FIGURE 6

Et quand on l'utilise sur la totalité de la droite réelle, donc ce que j'avais trouvé à cette époque, je veux dire en 98, c'était que si vous prenez pour domaine minimal de cet opérateur l'espace de Schwartz des fonctions de Schwartz qui ont une décroissance rapide, elles et leurs dérivées, alors vous trouvez que l'opérateur est symétrique, bien sûr, mais il n'est pas auto-adjoint, et en fait, il a des indices de déficiences au sens de von Neumann, qui sont tous les deux égaux à 4. Et il a en fait une unique extension auto-adjointe W_λ qui doit respecter la contrainte de commuter avec la projection P_λ et avec \widehat{P}_λ . C'est là que je me suis arrêté en 98, et c'est de là que nous sommes repartis, il y a 2 ans avec Henri Moscovici, et que nous avons commencé notre collaboration. Et nous avons fait quelque chose que je n'avais pas osé faire en 98, principalement nous avons vraiment regardé précisément l'opérateur W_λ spectralement.

Et ce que je vous expliquerai maintenant c'est que si vous voulez, quand vous regardez cet opérateur W_λ spectralement, qu'est-ce que vous trouvez ? Bon, bien sûr, vous trouvez qu'il commute avec Fourier mais il est en quelque sorte presque construit ainsi de manière ad hoc, mais à notre grande surprise avec Henri, ce qu'on a trouvé, c'est que l'opérateur auto-adjoint W_λ , sur la droite réelle complète maintenant, pas seulement dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$, a un spectre discret.

Self-adjoint extension

- The minimal domain is the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R})$
- The deficiency indices are (4,4).
- Unique self-adjoint extension W_λ commuting with P_λ and \widehat{P}_λ .

FIGURE 7

Et ce que j'expliquerai ultérieurement, c'est que ce spectre discret s'adaptera parfaitement au comportement ultraviolet des zéros de zeta. Et ce qui se passe, c'est qu'apparemment, personne n'a

regardé ce spectre parce que ce spectre s'avère avoir à la fois une partie positive et une partie négative. Et la raison pour laquelle les gens ne se sont intéressés qu'à la partie positive du spectre, c'est qu'ils voulaient s'adapter à la séparation des variables et qu'ils voulaient correspondre au spectre qui correspond à l'intervalle et qui est positif par construction. Donc personne ne regardait la partie négative du spectre, et comme nous le verrons, je veux dire, très grossièrement, la partie positive du spectre correspondra aux zéros triviaux et la partie négative correspondra maintenant aux zéros non triviaux et au comportement ultraviolet des zéros, il ne donne pas les positions exactes des zéros mais il donne le comportement ultraviolet.

- ▶ W_λ commutes with Fourier
- ▶ The selfadjoint operator W_λ has discrete spectrum.
- ▶ ϕ eigenfunction of $W_\lambda \Rightarrow$

$$\phi(x) \sim c \frac{\sin(2\pi\lambda x)}{x}, \quad x \rightarrow \infty$$
if ϕ is even and $\frac{\cos(2\pi\lambda x)}{x}$ if ϕ is odd.

FIGURE 8

Donc, je veux dire, pour trouver l'extension auto-adjointe, on doit donner une condition aux bornes à l'infini, et la condition aux bornes à l'infini est en fait la contrainte, si vous voulez, que quand vous regardez la partie paire du spectre, donc la fonction paire, qui est celle à laquelle nous nous restreindrons, alors la fonction doit se comporter comme un sinus, elle doit avoir ce comportement oscillant d'avoir beaucoup de zéros bien sûr, lorsqu'on va vers l'infini et être équivalente à $\frac{\sin(2\pi\lambda x)}{x}$ lorsque x tend vers l'infini. Dans le cas impair, vous devez remplacer le sinus par un cosinus.

Semiclassical approximation

$$H_\lambda(p, q) = (p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)$$

$$W_\lambda = -4\pi^2 H_\lambda + 4\pi^2 \lambda^4$$

$$\Omega_\lambda(E) := \{(q, p) \mid q \geq \lambda, p \geq \lambda, H_\lambda(p, q) \leq a\}$$

$$a = \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2$$

FIGURE 9

Ok. Donc si vous voulez comprendre le spectre de cet opérateur comme un physicien par exemple, il est très naturel de regarder l'approximation semi-classique, et d'exprimer l'opérateur W_λ en fonction d'un hamiltonien que vous écrivez classiquement parce que, ok, à ce stade, vous ne vous préoccupez pas de la non-commutativité de p et q ; donc ce que vous écrivez, c'est que W_λ est en fait exprimé par $-4\pi^2 H_\lambda$ où H_λ est écrit ci-dessus, c'est $(p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2) + \text{Cte}$, le plus constante n'étant pas important. Et alors, quand vous voulez regarder le comportement du spectre, vous devez calculer l'aire d'une surface et en calculant cette aire, si vous voulez, l'aire qui est bornée par la valeur de H_λ , en calculant cette aire, en fait, vous pourrez estimer le nombre de valeurs propres de l'opérateur. Et quand vous faites ça, ok, vous trouvez cette image :

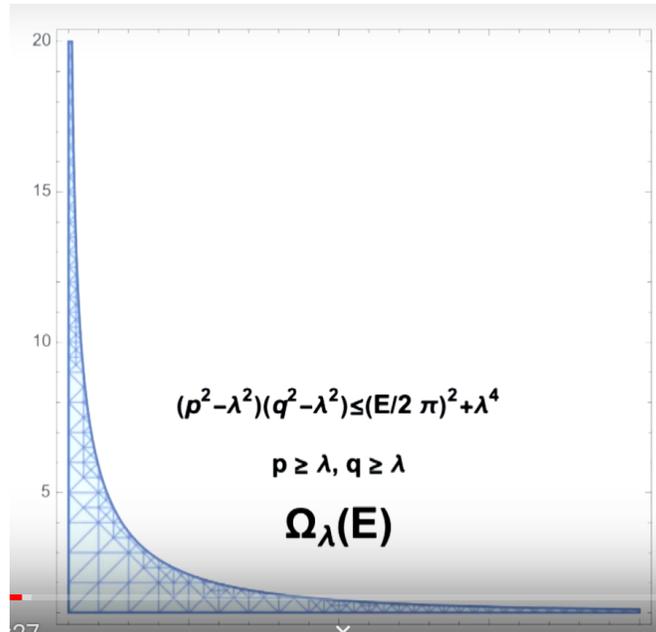


FIGURE 10

Donc vous trouvez une image dans laquelle, si vous voulez, la chose qui ressemble à une hyperbole est définie par la manière dont $(p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)$ égale $(E/(2\pi)^2 + \lambda^4)$, ok, et également, on a ces deux conditions que $p > \lambda$ et $q > \lambda$; c'est à cause de la positivité de l'opérateur. Ok, c'est donc ce que vous avez, et vous faites le calcul de l'aire, ok.

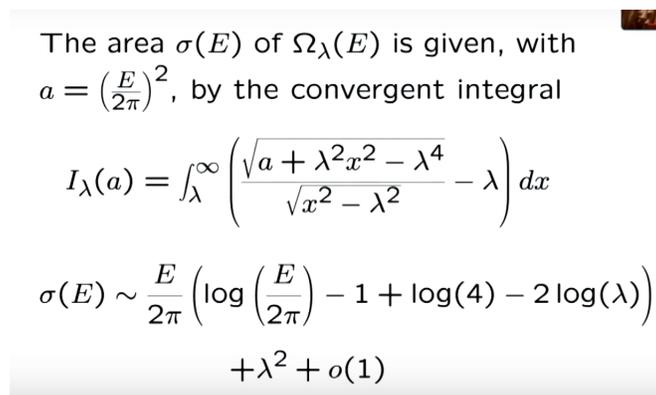


FIGURE 11

J'ai effectué ce calcul difficile donc on obtient une intégrale de λ à l'infini d'une certaine racine carrée et etc, et ce que vous trouvez, c'est que cette intégrale a son résultat qui est donné par des intégrales elliptiques, non pas par des fonctions elliptiques, mais par des intégrales elliptiques, au sens de Legendre. Et alors, quand vous les développez avec l'idée correcte que l'opérateur en question ne sera pas l'opérateur de Dirac mais qu'il sera plutôt comme le laplacien, donc vous travaillez avec le carré de l'opérateur de Dirac, et alors, vous trouvez de façon surprenante que la formule que vous obtenez pour le nombre des valeurs propres commence à sacrément ressembler à la formule de Riemann. C'est $\frac{E}{2\pi} (\log \frac{E}{2\pi})$ moins un terme d'ordre 1, donc vous devez adapter le λ , de façon à ce que ça fasse -1 , et ensuite, plus λ^2 plus un petit $o(1)$.

Ok. D'un autre côté, on sait que lorsqu'on effectue une approximation semi-classique, on doit faire très attention au fait que cela nous permet de nous faire une première idée, mais qu'il nous faut travailler beaucoup plus pour vraiment obtenir une estimation, et on peut voir que, vous savez, cela ne pourrait pas être complètement correct de cette manière parce qu'on n'obtient pas le terme en $O(\log E)$.

Donc en fait, on doit pousser l'analyse beaucoup plus loin,

In fact one has

$$I_\lambda(a) = \lambda^2 I_1(a \lambda^{-4})$$

and in terms of elliptic integrals

$$\begin{aligned} I_1(a) &= aK(1-a) - E(1-a) + 1 \\ &\sim \frac{1}{2} \sqrt{a} (\log(a) - 2 + 2 \log(4)) + 1 + o(1) \end{aligned}$$

FIGURE 12

et ok, donc ça, c'est facile

Liouville transform

$$V(f)(y) := \Lambda^{1/2} f(\Lambda \cosh(y)) \sinh(y)^{1/2}$$

The operator V is a unitary isomorphism $V : L^2([\Lambda, \infty)) \rightarrow L^2([0, \infty))$ which conjugates the operator W with the operator

$$S(\phi)(y) := \partial_y^2 \phi(y) - Q(y) \phi(y)$$

$$Q(y) = -(2\pi\Lambda^2)^2 \cosh(y)^2 - \frac{1}{4} (\coth^2(y) - 2)$$

FIGURE 13

Donc ce qu'on doit faire, avant tout, on doit effectuer une transformation de Liouville pour transformer l'opérateur, cet opérateur prolate, en un opérateur de Sturm-Liouville usuel, si vous voulez, et ce faisant, on obtient un potentiel qui est très difficile à comprendre, parce qu'il n'est ni positif ni négatif. Vous obtenez cet étrange potentiel $Q(y)$ et alors

Hamiltonian $H = p^2 + Q(q)$

(i) The Hamiltonian $H = -S$ is in the limit circle case at ∞ .
(ii) The Hamiltonian H is in the limit circle case at 0.
Case $\Lambda = \sqrt{2}$ we get for the function $h = -Q$

$$h(y) = 16\pi^2 \cosh^2(y) + \frac{1}{4}(\coth^2(y) - 2)$$

M. Nursultanov, G. Rozenblum, *Eigenvalue asymptotics for the Sturm-Liouville operator with potential having a strong local negative singularity*. *Opuscula Mathematica* 37(1) :109

FIGURE 14

vous devez appliquer cet hamiltonien maintenant, qui est vous savez de force p^2 parce que vous le mettez sous cette forme, ok, et il a ce potentiel, et alors, on doit appliquer des estimées assez difficiles sur les valeurs propres asymptotiques à partir de l'opérateur de Sturm-Liouville. Bon, pour le potentiel qui avait, si vous voulez, une singularité.

Donc je veux dire, ces estimées existent, vous faites les calculs, et quand vous faites les calculs, ce que vous obtenez

Eigenvalue asymptotics for the Sturm-Liouville operator... 113

$h(p(\mu)) = \mu$, are

$$N(H, (0, \lambda)) = \pi^{-1} \int_0^\infty [(\lambda + h(x))^{\frac{1}{2}} - h(x)^{\frac{1}{2}}] dx + O(1), \lambda > 0, \quad (1.4)$$

$$N(H, (-\mu, 0)) = \pi^{-1} \int_0^{p(\mu)} h(x)^{\frac{1}{2}} dx + \pi^{-1} \int_{p(\mu)}^\infty [h(x)^{\frac{1}{2}} - (h(x) - \mu)^{\frac{1}{2}}] dx + O(1). \quad (1.5)$$

FIGURE 15

donc il y a des formules, si vous voulez, pour chaque variable, qui existent pour calculer ce nombre de valeurs propres, et quand vous effectuez ces calculs

Formula for $N(a)$

$$N(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ((a + h(y))^{1/2} - h(y)^{1/2}) dy$$

At the level of the Dirac operator one has $a = (E/2)^2$

$$N_D(E) = \frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi} - \frac{E}{2\pi} + O(\log(E))$$

The logarithmic term is $-\frac{1}{2\pi} \log E$. The numerical value of the coefficient is 0.159155 which is of the same order as the constant involved in the estimate of Trudgian for Zeta

$$|N_\zeta(E) - \left(\frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi} - \frac{E}{2\pi}\right)| \leq 0.112 \log(E) + O(\log \log E)$$

FIGURE 16

ce que vous trouvez maintenant, ce sont des intégrales beaucoup plus compliquées. Pourtant, le fait surprenant est que vous trouvez la formule correcte $\frac{E}{2\pi} \left(\log \frac{E}{2\pi}\right) - \frac{E}{2\pi}$ mais vous trouvez qu'il y a un terme additionnel en $O(\log E)$ comme vous vous y attendez. Et quand vous le calculez, vous trouvez que le terme relatif est en fait $\frac{-1}{2\pi} \log E$. Et quand vous regardez la valeur numérique de ce coefficient, vous trouvez qu'il est du même ordre que la constante qui est le 1 de la formule de Riemann pour la fonction zeta pour la différence entre la formule de Riemann et quelque chose en $o(1)$ □

Donc, il y a ce fait très alléchant et alors, bien sûr, vous savez, ce n'était pas parce que je prenais le laplacien

Dirac operator

- ▶ We found Dirac operator, with square two copies of W_λ , using the Darboux method.
- ▶ We explore associated geometry.

FIGURE 17

donc on devait trouver l'opérateur de Dirac, on devait trouver la sorte de racine carrée, si vous voulez, la sorte de racine carrée de l'opérateur de Dirac de cet opérateur sphéroïdal prolata. Et alors, on voulait explorer la géométrie associée.

Alors, comment avons-nous trouvé l'opérateur de Dirac de la racine carrée, si vous voulez, de cet opérateur sphéroïdal prolata. Bien, on l'a fait en utilisant la méthode de Darboux.

¹à revoir ?

Darboux method

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 - \lambda^2, \quad V(x) = 4\pi^2 \lambda^2 x^2, \quad W_\lambda = \partial(p(x)\partial) + V(x), \\ U &: L^2([\lambda, \infty), dx) \rightarrow L^2([\lambda, \infty), p(x)^{-1/2} dx) \\ U(\xi)(x) &:= p(x)^{1/4} \xi(x), \quad (\delta f)(x) := p(x)^{1/2} \partial f(x) \\ \delta w(x) + w(x)^2 &= -V(x) + \left(\frac{p''(x)}{4} - \frac{p'(x)^2}{16p(x)} \right), \quad \forall x \in [\lambda, \infty) \end{aligned}$$

$$W_\lambda = U^* (\delta + w)(\delta - w) U$$

FIGURE 18

La méthode de Darboux est une méthode très générale qui est assez ancienne et qui permet lorsque vous avez un opérateur du second ordre de l'écrire non pas comme un carré, mais comme un produit de quelque chose de la forme de l'opérateur d'ordre un plus W et l'opérateur d'ordre un, le même opérateur d'ordre un moins W . Donc on peut faire ça, mais pour faire ça, il fallait qu'on résolve une équation de Riccati. Donc on devait trouver une solution d'une équation non-linéaire qui est $\delta W + W^2$ égale une certaine fonction du potentiel, qui vous est donné depuis le début. Et on peut le faire dans notre cas, parce que ce qu'on doit faire, c'est trouver la solution de l'opérateur prolate qui ne s'évanouit pas.

Solution of Riccati equation

For $z \in \mathbb{C}$ and $u = u_1 + zu_2$ the solution u has no zero in (λ, ∞) if $z \notin \mathbb{R}$ and an infinity of zeros otherwise.

Solutions of the Riccati equation

$$w_z(x) = \frac{(x^2 - \lambda^2)^{1/4} \partial \left((x^2 - \lambda^2)^{1/4} u(x) \right)}{u(x)}$$

where $u = u_1 + zu_2$ and $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

FIGURE 19

Maintenant, bien sûr, comme je vous l'ai montré, je veux dire, les solutions ordinaires s'évanouissent, mais quand vous combinez deux solutions indépendantes avec des coefficients complexes, alors vous trouvez qu'elles ne s'évanouissent nulle part.

Donc quand la combinaison ne s'évanouit nulle part, ce que vous pouvez faire consiste à résoudre l'équation de Riccati par une sorte de dérivée logarithmique que j'ai notée comme ça $w_z(x)$ et pour chaque nombre complexe qui n'est pas dans les réels, vous trouvez une solution de l'équation de Riccati et vous trouvez l'opérateur de Dirac correspondant.

Dirac operator

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \delta + w(x) \\ \delta - w(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Then the square of D is diagonal with each diagonal term spectrally equivalent to W_λ ,

$$U^* D^2 U = \begin{pmatrix} W_\lambda & 0 \\ 0 & W_\lambda + 2\delta w(x) \end{pmatrix}$$

FIGURE 20

Et tous ces opérateurs de Dirac sont isospectraux, ce qui signifie que vous vous moquez duquel choisir pour considérer son spectre. Donc je veux dire, voici ce qu'on a trouvé, on a trouvé l'opérateur de Dirac, et quand on l'élève au carré, c'est bien sûr une matrice 2×2 parce qu'il agit un peu comme des spineurs, ok, donc c'est une matrice 2×2 et quand vous l'élevez au carré, vous trouvez deux copies de l'opérateur prolate, notamment en premier l'opérateur prolate lui-même et ensuite, quelque chose qui est isospectral à l'opérateur prolate, ok (dont il diffère par une paire d'opérateurs prolate).

Donc, c'est ce que nous avons trouvé, et alors, si vous voulez, par les précédents calculs, à cause, bien sûr, de cet opérateur de Dirac ayant son carré qui est deux copies de l'opérateur prolate, vous pouvez calculer son spectre, vous pouvez calculer le nombre de valeurs propres, et alors vous trouvez, pour celui-là, vous trouvez exactement l'estimation correcte pour le nombre de valeurs propres.

Et je vous montrerai très rapidement comment vous faites les calculs concrets et comment vous les comparez aux zéros de zeta.

Ultraviolet \sim Zeta

The operator $2D$ has discrete simple spectrum contained in $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. Its imaginary eigenvalues are symmetric under complex conjugation and the counting function $N(E)$ counting those of positive imaginary part less than E fulfills

$$N(E) \sim \frac{E}{2\pi} \left(\log \left(\frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + O(\log E)$$

FIGURE 21

Mais comment on fait ça, ok ? On fait ça, si vous voulez, en calculant les valeurs négatives de l'opérateur prolate, et en calculant ces valeurs propres : ce que vous faites si vous voulez, vous développez la solution qui satisfait une condition aux bornes égale à λ , et vous développez la solution pour la valeur propre qui vaut -65 et vous développez la solution qui satisfait la condition aux bornes à l'infini. Et vous essayez de les faire coïncider, bien sûr ici, elles ne coïncident pas, mais vous faites varier la valeur -65 , et vous continuez, ok, vous pouvez voir par exemple que sur -38 , ça coïncide, excepté qu'il y a un changement de signe mais bien sûr, on ne le voit pas puisqu'on peut toujours multiplier l'une des deux par -1 , donc on a une valeur propre à -38 pour W_λ et le fait qu'elles soient de signes opposés vous dit que la fonction sera son opposée quand vous effectuerez la transformation de Fourier.

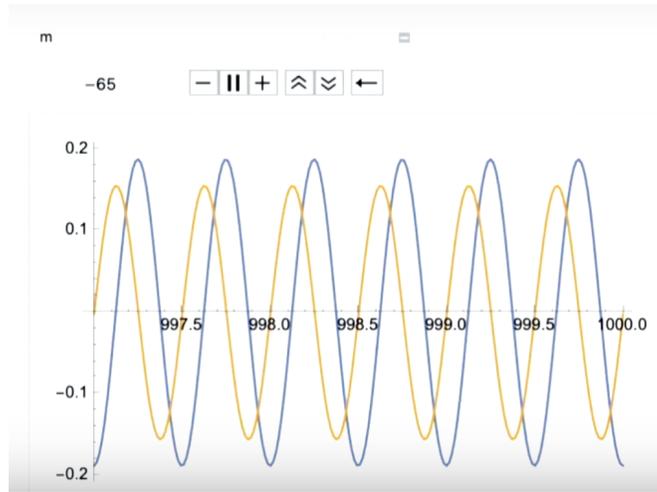


FIGURE 22

Maintenant, pour la valeur -93 , vous pouvez voir qu'il y a une coïncidence exacte et cette fois, la fonction sera sa propre transformée de Fourier. Donc vous continuez comme ça, vous continuez, -150 , c'est la suivante, les deux sinusoides, si vous voulez, les deux parties oscillantes, elles bougent l'une par rapport à l'autre, donc au bout d'un moment, elles coïncident ou bien elles sont en opposition de phase.

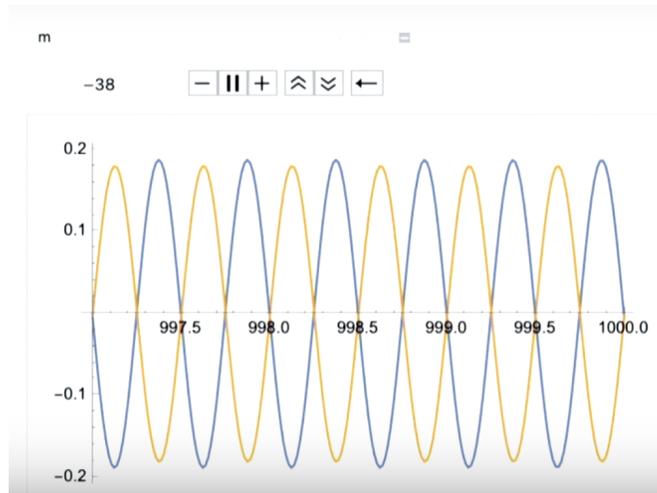


FIGURE 23

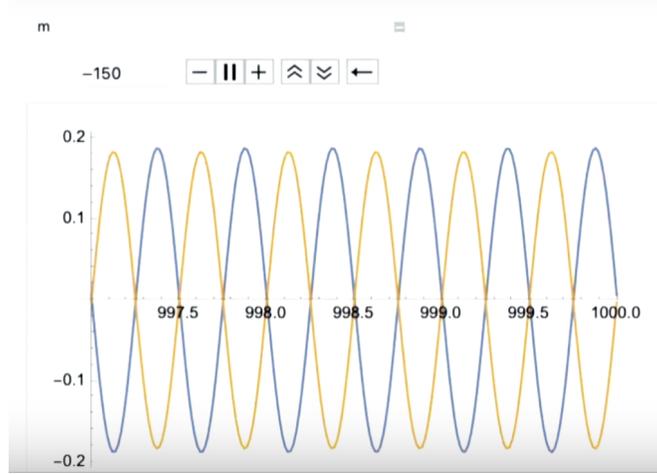


FIGURE 24

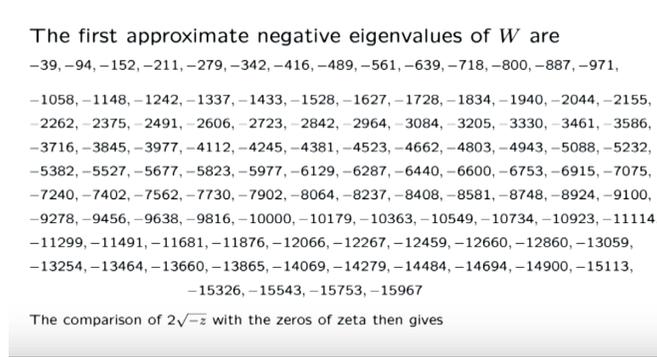


FIGURE 25

Donc vous calculez comme ça les premières valeurs propres négatives de W , vous en dessinez le graphe, ok, c'est beaucoup de travail, et maintenant, ok, vous passez à l'opérateur de Dirac correspondant et vous le comparez avec les zéros de zeta. Donc vous voyez, le premier zéro est 12.49 au lieu de 14, yeah, et vous continuez comme ça, vous les comparez, et à chaque fois, le $n^{\text{ième}}$ zéro de votre fonction est très proche du $n^{\text{ième}}$ zéro de zeta, vous ne changez pas d'indice, non, le $n^{\text{ième}}$ d'un côté correspond au $n^{\text{ième}}$ de l'autre. Donc vous continuez et quand vous dessinez les deux graphes, les points rouges représentent les zéros de zeta et les points bleus représentent ce que nous avons obtenu spectralement et quand vous voyez une seule couleur, c'est que l'un cache l'autre, i.e. ils sont vraiment très très proches l'un de l'autre.

102.098	101.318
104.365	103.726
106.621	105.447
108.885	107.169
111.068	111.03
113.225	111.875
115.412	114.32
117.661	116.227
119.766	118.791
121.918	121.37
124.016	122.947
126.127	124.257
128.25	127.517
130.307	129.579
132.378	131.088
134.507	133.498
136.558	134.757
138.607	138.116
140.613	139.736
142.66	141.124
144.665	143.112
146.724	146.001
148.688	147.423
150.692	150.054
152.617	150.925
154.622	153.025
156.576	156.113
158.581	157.598
160.499	158.85
162.481	161.189

FIGURE 26

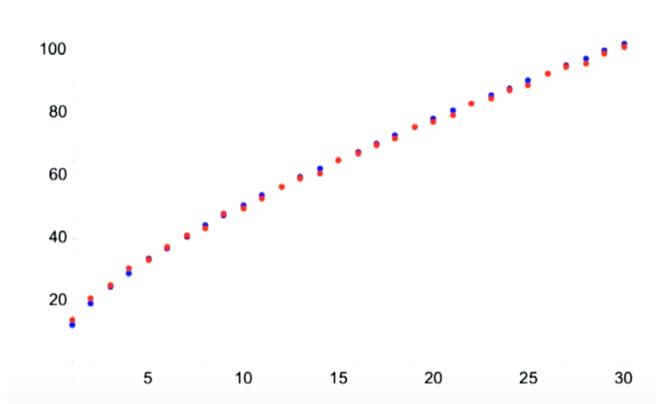


FIGURE 27

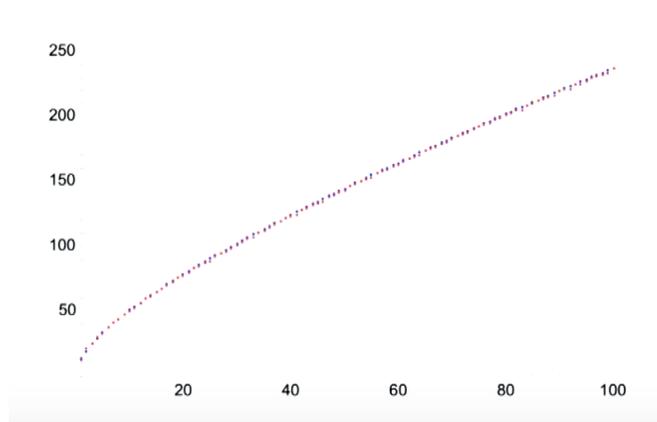


FIGURE 28

Geometry = spectral triple

The metric associated to the spectral triple is

$$ds^2 = -\frac{1}{4}dx^2/(x^2 - \lambda^2) = \frac{1}{\alpha(x)}dx^2$$

Geometry is compactification of 2D-Black Hole space with periodic t

$$ds^2 = -\alpha(x)dt^2 + \frac{1}{\alpha(x)}dx^2$$

FIGURE 29

Donc on a continué jusqu'aux 60 premières valeurs propres, jusqu'aux 100 premières valeurs propres, et etc. Et bien sûr, donc cela dit vraiment que l'opérateur auto-adjoint, W_λ , parce que je veux dire, rappelez-vous, ok, je veux dire que c'est un indice extrêmement alléchant du fait qu'il devrait exister un opérateur qui les fournit exactement. L'étape suivante, bien sûr, serait de gérer la seconde partie, je veux dire avec des valeurs précises, et la partie infrarouge du spectre. Mais avant que je fasse cela, ce qui est vraiment assez important c'est qu'en géométrie non-commutative, la géométrie est donnée de façon spectrale. Quand vous parlez d'une géométrie, vous pouvez la définir au moyen de l'opérateur de Dirac, ou de ce qui remplace l'opérateur de Dirac, et ce qui remplace les fonctions, bien sûr, et etc., donc là, il n'est pas difficile de trouver ce que sont les fonctions et, je veux dire, sur cette moitié de droite, et de regarder la métrique : la métrique s'obtient à partir du symbole de l'opérateur de Dirac et ici, la métrique que vous trouvez est donnée par un dx^2 , il y a une force sur $x^2 - \lambda^2$. Mais ce qui est assez surprenant, c'est que quand vous regardez le spectre comme je l'ai dit précédemment, il y a donc des valeurs négatives pour le laplacien mais il y a aussi des valeurs positives. Donc cela signifie que lorsque vous passez à l'opérateur de Dirac, il aura des valeurs propres purement imaginaires, comme pour les zéros de zeta, mais il aura aussi des valeurs propres réelles. Et ce que nous avons vérifié, avec Henri, c'est que vous savez que ces valeurs réelles ont exactement le même comportement que les zéros triviaux de zeta. Mais le fait que vous ayez à la fois les deux choses, notamment les valeurs propres négatives et les valeurs propres positives, cela vous dit que vous n'êtes pas en train de traiter un problème de Riemann, mais plutôt que vous

êtes en train de traiter un problème de Lorentz, je veux dire avec une métrique de type Minkowski.

Et donc, je veux dire que nous avons utilisé pour avoir une première idée de la géométrie qui est derrière cela, on a utilisé pour la voir, simplement, comme une compactification d'une géométrie lorentzienne bi-dimensionnelle. Et ok, il s'avère, vous savez, qu'il y a un moyen de faire cela, quand vous rendez la variable t -periodique, et cela correspond à un trou noir en deux dimensions.

which after changing coordinates to
 $v = t - t(x)$ with

$$t(x) = \frac{1}{8\lambda} \log((\lambda + x)/(x - \lambda))$$

becomes smooth (black hole trick)

$$ds^2 = 4(x^2 - \lambda^2) dv^2 - 2dvdx$$

FIGURE 30

Ok et je veux dire, vous pouvez appliquer la ruse habituelle, qui consiste à voir que la métrique du trou noir est en fait lisse.

Donc vous pouvez vraiment réécrire la métrique par un changement adéquat des variables pour la rendre lisse. Et je veux dire qu'il y a, si vous voulez, une manière de plonger cela dans l'espace de Minkowski à trois dimensions, et quand vous faites cela, ce plongement, ce qui est assez intéressant, c'est que pour construire le plongement, vous devez à nouveau utiliser des intégrales elliptiques. Et cela vous donnera ce dessin :

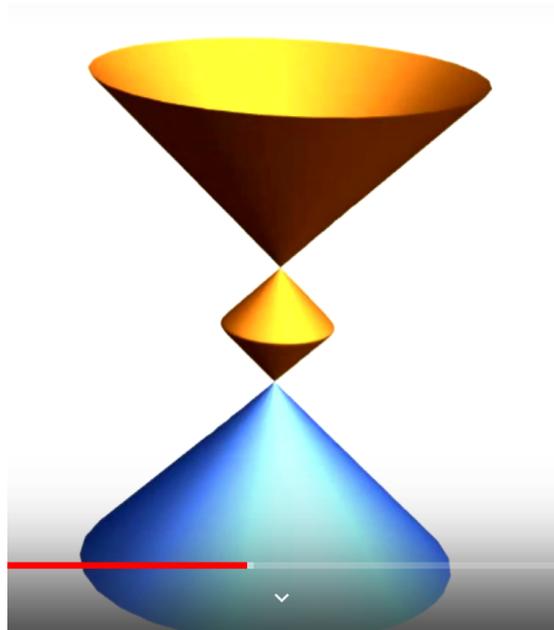


FIGURE 31

Donc si vous voulez, la partie qui est au-dessus et qui ressemble à un cône correspond à la partie intéressante de l'opérateur prolate. La partie qui est entre les deux correspond à ce qui se passe sur l'intervalle, et la partie qui est en-dessous correspond, bien sûr, à la partie symétrique de la partie supérieure. Et quand vous regardez les géodésiques, elles ont la bonne forme supposée.



RYTHMES MOTIVIQUES

ALAIN CONNES

Résumé : Dans cet article sur les mathématiques et la musique, nous expliquons comment on peut “écouter les motifs” comme des interprètes rythmiques. Dans l'exemple le plus simple que l'on étudiera, le motif est simplement le H^1 de la réduction modulo un nombre premier p d'une courbe hyperelliptique (définie sur \mathbb{Q}). Les instants d'apparition correspondant sont donnés par les arguments des valeurs propres complexes du Frobenius. Nous trouvons une relation surprenante entre les propriétés mathématiques des motifs et les idées sur les rythmes développées par le compositeur Olivier Messiaen.

Le mot “motif”, inventé par Alexander Grothendieck, a une signification précise en mathématiques. Nous expliquons ci-après comment les motifs mathématiques donnent naissance à des interprètes rythmiques et illustrons leur variété par des exemples concrets simples. Un espace géométrique ordinaire, tel qu'un espace compact riemannien, a une gamme associée, au sens musical, comme cela a été illustré dans la conférence célèbre “peut-on entendre la forme d'un tambour ?” de Marc Kac [7]. Le passage des motifs à la musique expliqué ci-dessous est assez différent. Notre thèse est qu'un motif se manifeste non par une gamme musicale (qui serait un ensemble de fréquences) mais plutôt par un ensemble (périodique) d’“instants d'apparition”. Dans l'exemple le plus simple, qui est celui que nous considérerons, comme une source riche d'exemples concrets, le motif est simplement la cohomologie H^1 de la réduction modulo un nombre premier p d'une courbe hyperelliptique (définie sur \mathbb{Q}). Les “instants d'apparition” correspondant sont donnés par les arguments des valeurs propres complexes du Frobenius. Notre but qui est de “nature illustrative” est de donner à voir les motifs les plus simples comme des interprètes rythmiques. À une courbe hyperelliptique de genre g correspond pour chaque nombre premier p ne divisant pas le discriminant une collection de $2g$ instants d'apparition ayant un profond sens mathématique qui se répètent de manière périodique selon une fréquence $\log p$. Nous avons trouvé en mettant en œuvre ce projet une relation surprenante entre des propriétés mathématiques et les idées développées par le compositeur Olivier Messiaen, comme on l'explique dans la Section 1.

1. Motivation mathématique

Un des plus grands problèmes non résolus des mathématiques est l’“hypothèse de Riemann” qui concerne une formule trouvée par le mathématicien Bernhard Riemann reliant le nombre de nombres premiers aux zéros d'une mystérieuse fonction analytique appelée la fonction zeta. Ma propre rencontre de ce problème a eu lieu quand, alors que je travaillais dans le domaine de la mécanique quantique statistique avec J. B. Bost, nous avons trouvé un système mécanique quantique simple dont la fonction de partition est la fonction zeta de Riemann. Du fait de ce travail, j'ai été invité en 1996 à une conférence à Seattle pour célébrer les grandes contributions du mathématicien norvégien Atle Selberg à l'étude de la fonction zeta de Riemann. Par sérendipité, j'ai trouvé, à mon retour de Seattle, qu'une réalisation spectrale des zéros de zeta émergeait naturellement du travail en physique quantique que j'avais fait avec J. B. Bost, qu'on appelle le “système-BC”. Dans la façon habituelle

Référence <https://arxiv.org/pdf/1812.09946.pdf>

Traduction : Denise Vella-Chemla, novembre 2021.

de chercher une interprétation des zéros de la fonction zeta de Riemann, on les recherche comme les niveaux d'énergie d'un système quantique (voir par exemple [2]) et ce qui était étrange c'est que dans ma propre approche, les zéros apparaissent naturellement comme des "instants d'apparition" *i.e.* de façon duale (voir [4]). Alors que cela peut rendre perplexe au premier abord, j'expliquerai brièvement pourquoi ce point de vue dual est en fait plus naturel dans le but de généraliser la fonction zeta de Riemann au domaine des corps globaux. En effet, quand les mathématiciens sont confrontés à un problème très difficile, ils étendent leur champ d'étude de façon à incorporer la question initiale dans un contexte plus général dont la plus grande étendue permet de considérer des instances plus simples du problème qui, étant plus aisées à traiter, peuvent fournir des indices de la solution. C'est ainsi qu'on rencontre des avatars plus simples de la fonction zeta de Riemann. Ils sont associés à une courbe C sur un corps fini \mathbb{F}_q . Il s'avère que ces analogues de la fonction zeta de Riemann $\zeta(s)$ sont en fait des fonctions de la forme $L(q^{-s})$ où q est la cardinalité du corps fini sur lequel la courbe est définie. De plus, $L(z)$ est une fraction rationnelle et les zéros sont déterminés par le numérateur polynomial $P(z)$ dont le degré est le double du genre g de la courbe. Par un théorème célèbre d'André Weil, tous les zéros z_j de $P(z)$ sont sur le cercle de rayon $q^{-1/2}$. Ainsi les zéros de $L(q^{-s})$ sont tous de partie réelle $\Re(s_k) = \frac{1}{2}$ et leur partie imaginaire est de la forme

$$\Im(s) = \frac{1}{\log q} (\alpha_j + 2\pi k), \quad j \in \{1, \dots, 2g\}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

où les $-\alpha_j$ sont les arguments des z_j et sont déterminés seulement modulo 2π . Cette sorte de distribution périodique des nombres est très naturelle comme une distribution dans le "temps". En fait, si on spécifie le choix des arguments par le domaine fondamental $-\pi \leq \alpha_j \leq \pi$ et qu'on les interprète comme fournissant des "instants d'apparition" lorsque les notes sont jouées, plusieurs faits frappants sont mis en évidence :

1. L'équation fonctionnelle de la fonction L signifie que le rythme obtenu est palindromique, *i.e.* avec $-\pi \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_g \leq 0 \leq \alpha_{g+1} \leq \dots \leq \alpha_{2g} \leq \pi$, on a

$$\alpha_{2g+1-j} = -\alpha_j$$

2. Les valeurs obtenues sont en général des nombres irrationnels.
3. La période du rythme est donnée par le $\frac{2\pi}{\log q}$ et le "tempo" accélère lorsque q croît.

Le compositeur Olivier Messiaen a introduit dans son travail (voir [8] et le traité complet [9]) à la fois la caractéristique palindromique (qu'il a appelée "rythmes non-rétrogradables") et l'irrationalité de l'attaque (les "instants d'apparition"). Cela vaut le coup de dessiner le type de rythme palindromique qui caractérise les zéros de la fonction L d'une courbe sur un corps fini, et nous allons entreprendre de faire cela ci-dessous.

2. Exemples explicites de rythmes motiviques

Dans cette section, nous montrons dans une forme visuelle les rythmes motiviques de genre $g = 5$ de façon à illustrer la construction générale. Le choix du nombre $g = 5$ pourrait être remplacé par n'importe quel autre nombre, le nombre d'instants d'apparition est $2g = 10$. Les motifs sont déterminés en choisissant une courbe C de genre $g = 5$ définie sur un corps de nombres rationnels et ensuite en réduisant la courbe modulo chacun des nombres premiers $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ excepté pour cet ensemble de nombres premiers de cardinalité dénombrable "de mauvaise réduction" pour

lesquels la réduction se comporte mal. Les courbes les plus adaptées au calcul sont les courbes “hyperelliptiques”. On les appelle ainsi parce que les plus simples d’entre elles (celles avec $g = 1$) sont les courbes elliptiques bien connues qui sont un joyau de la géométrie algébrique. Une courbe hyperelliptique sur \mathbb{Q} est donnée par une équation de la forme $y^2 = P(x)$ lorsque $P(x)$ est un polynôme à coefficients entiers et dont le degré détermine le genre de telle façon que nous devons utiliser un degré égal à 11 pour obtenir une courbe de genre 5. Les nombres premiers de mauvaise réduction sont ceux qui divisent le discriminant de $P(x)$ et par conséquent, nous prendrons les plus simples dont le discriminant ne fait intervenir aucun nombre premier compris entre 7 et 67 de telle façon que nous pourrions explorer les motifs associés à la séquence de nombres premiers en question. En commençant avec une telle courbe hyperelliptique, on obtient pour chaque nombre premier ne divisant pas le discriminant de P une courbe sur le corps fini \mathbb{F}_p et on peut calculer les zéros de sa fonction L . Donc le choix du polynôme est dicté par l’absence d’un diviseur premier du discriminant compris entre 7 et 67. On commence avec

$$C_1 : y^2 = x^{11} - 4x^{10} + 15x^8 - 40x^6 + 20x^5 + 25x^3 - 25$$

On donne ci-dessous la liste des polynômes de degré 10, associés aux nombres premiers 7, 11, \dots , 67 et dont les zéros donnent les valeurs propres du Frobenius agissant sur $H^1(C_1/p)$ où C_1/p est la réduction de la courbe hyperelliptique C_1 modulo le nombre premier p . Le degré de ces polynômes est le double du genre, *i.e.* $5 \times 2 = 10$ et le terme de degré 10 est toujours de la forme $p^5 x^{10}$. Les zéros complexes sont tous de module $p^{-1/2}$ et les arguments des zéros nous donnent les rythmes palindromiques qui fixent l’interprétation associée à C_1/p .

$$\begin{aligned}
& 1 - x + 3x^2 - 11x^3 + 28x^4 - 74x^5 + 196x^6 - 539x^7 + 1029x^8 - 2401x^9 + 16807x^{10} \\
& 1 + 8x^2 + 20x^3 - 49x^4 + 124x^5 - 539x^6 + 2420x^7 + 10648x^8 + 161051x^{10} \\
& 1 + 6x + 28x^2 + 94x^3 + 271x^4 + 656x^5 + 3523x^6 + 15886x^7 + 61516x^8 + 171366x^9 + 371293x^{10} \\
& 1 + 4x + 20x^2 + 39x^3 - 8x^4 - 304x^5 - 136x^6 + 11271x^7 + 98260x^8 + 334084x^9 + 1419857x^{10} \\
& 1 + 3x - 8x^2 - 106x^3 + x^4 + 870x^5 + 19x^6 - 38266x^7 - 54872x^8 + 390963x^9 + 2476099x^{10} \\
& 1 - 9x + 22x^2 + 52x^3 - 20x^4 - 1946x^5 - 460x^6 + 27508x^7 + 267674x^8 - 2518569x^9 + 6436343x^{10} \\
& 1 + 6x + 37x^2 + 121x^3 + 312x^4 + 3070x^5 + 9048x^6 + 101761x^7 + 902393x^8 + 4243686x^9 + 20511149x^{10} \\
& 1 - 5x + 11x^2 + 49x^3 + 428x^4 - 6606x^5 + 13268x^6 + 47089x^7 + 327701x^8 - 4617605x^9 + 28629151x^{10} \\
& 1 + 2x - 6x^2 - 16x^3 + 882x^4 + 4052x^5 + 32634x^6 - 21904x^7 - 303918x^8 + 3748322x^9 + 69343957x^{10} \\
& 1 - 3x + 16x^2 - 8x^3 - 746x^4 + 12868x^5 - 30586x^6 - 13448x^7 + 1102736x^8 - 8477283x^9 + 115856201x^{10} \\
& 1 - 3x + 21x^2 - 54x^3 - 272x^4 + 14706x^5 - 11696x^6 - 99846x^7 + 1669647x^8 - 10256403x^9 + 147008443x^{10} \\
& 1 + 4x + 64x^2 + 406x^3 + 4450x^4 + 16386x^5 + 209150x^6 + 896854x^7 + 6644672x^8 + 19518724x^9 + 229345007x^{10} \\
& 1 + 218x^3 + 772x^4 - 6358x^5 + 40916x^6 + 612362x^7 + 418195493x^{10} \\
& 1 - x + 20x^2 + 18x^3 + 918x^4 - 26614x^5 + 54162x^6 + 62658x^7 + 4107580x^8 - 12117361x^9 + 714924299x^{10} \\
& 1 + 10x + 90x^3 + 4604x^4 + 42354x^5 + 280844x^6 + 334890x^7 + 138458410x^9 + 844596301x^{10} \\
& 1 - 4x - 7x^2 + 264x^3 + 2588x^4 - 12188x^5 + 173396x^6 + 1185096x^7 - 2105341x^8 - 80604484x^9 + 1350125107x^{10}
\end{aligned}$$

FIGURE 1 : Polynômes associés à $H^1(C_1/p)$ pour $7 \leq p \leq 67$.

Nous ne dessinons pas le nombre premier p , $7 \leq p \leq 67$, correspondant à chacun de ces polynômes mais on voit que les coefficients de x^{10} augmentent quand on descend dans la liste comme ils doivent le faire puisqu’ils sont donnés par la cinquième puissance p^5 . La propriété “palindromique” de ces polynômes est, avec $P(z)$ associé au nombre premier p l’égalité

$$p^5 z^{10} P(1/(pz)) = P(z)$$

qui correspond à l'équation fonctionnelle de la fonction zeta *i.e.* le remplacement $s \mapsto 1 - s$ dont l'effet sur $z = p^{-s}$ est

$$z = p^{-s} \mapsto p^{-(1-s)} = 1/(pz).$$

Comme les rythmes se répètent périodiquement, nous n'en montrons qu'une période et pour des raisons de simplicité, nous ne montrons pas l'accélération du tempo. Nous les dessinons d'abord linéairement puis de façon circulaire, ce qui convient mieux à leur propriété périodique et est plus proche de leur sens mathématique.

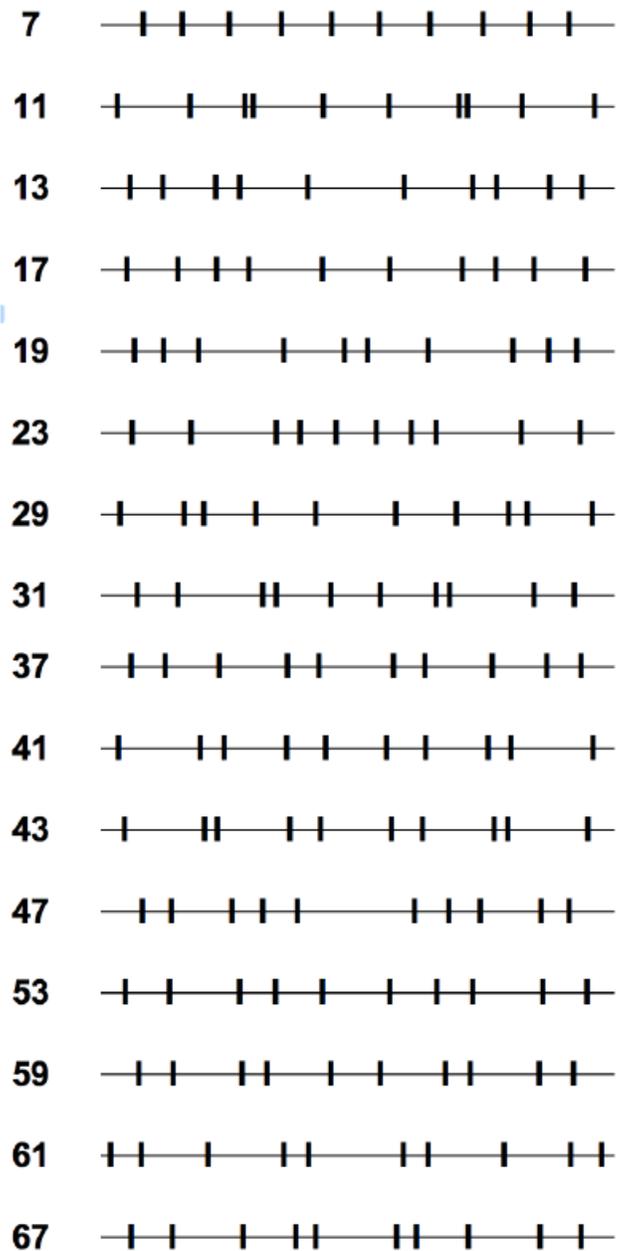


FIGURE 2 : Rythmes motiviques pour $H^1(C_1/p)$, jusqu'à $p = 67$.

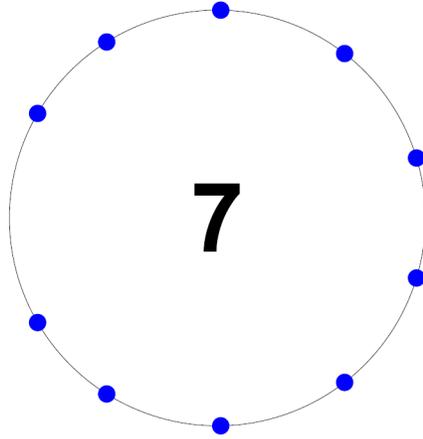


FIGURE 3 : Rythme motivique pour $H^1(C_1/p)$, $p = 7$.

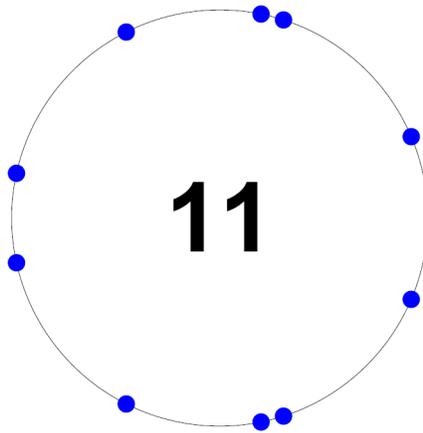


FIGURE 4 : Rythme motivique pour $H^1(C_1/p)$, $p = 11$.

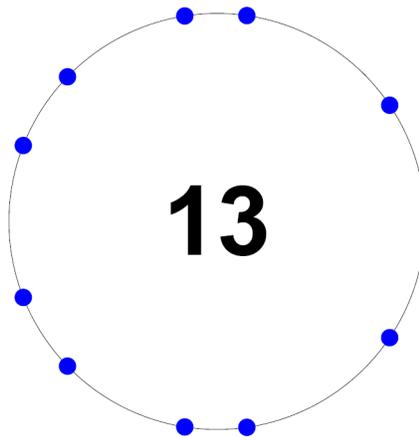


FIGURE 5 : Rythme motivique pour $H^1(C_1/p)$, $p = 13$.

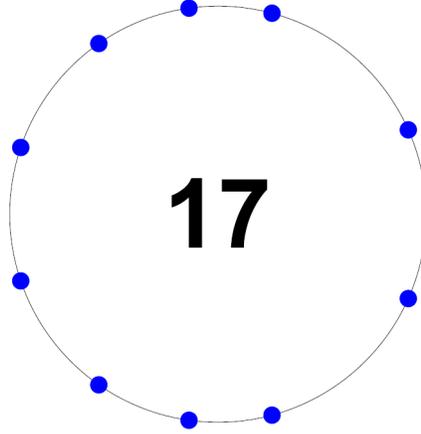


FIGURE 6 : Rythme motivique pour $H^1(C_1/p)$, $p = 17$.

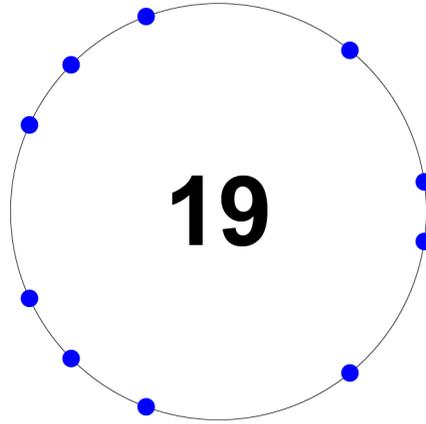


FIGURE 7 : Rythme motivique pour $H^1(C_1/p)$, $p = 19$.

Nous donnons l'exemple suivant d'une courbe hyperelliptique de genre 5 avec une bonne réduction pour tous les nombres premiers compris entre 7 et 67.

Elle est donnée par l'équation :

$$C_2 : y^2 = x^{11} - 60x^7 - 64x^6 - 320x^4 - 380x^3 - 512x - 640$$

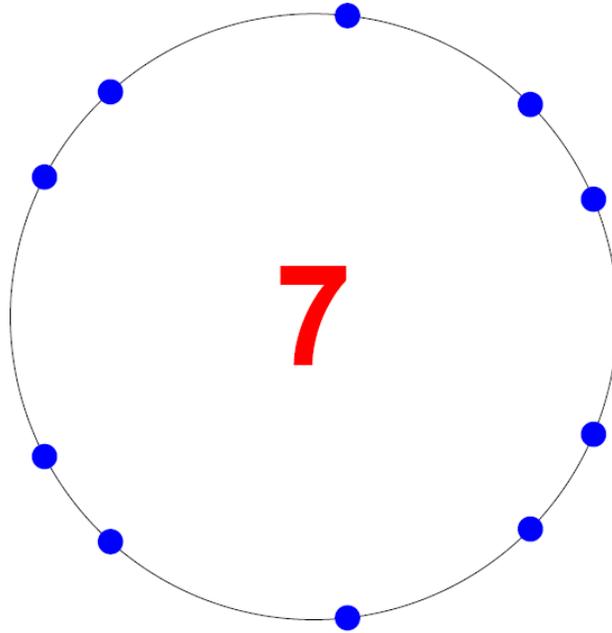


FIGURE 10 : Rythme motivique pour $H^1(C_2/p)$, $p = 7$

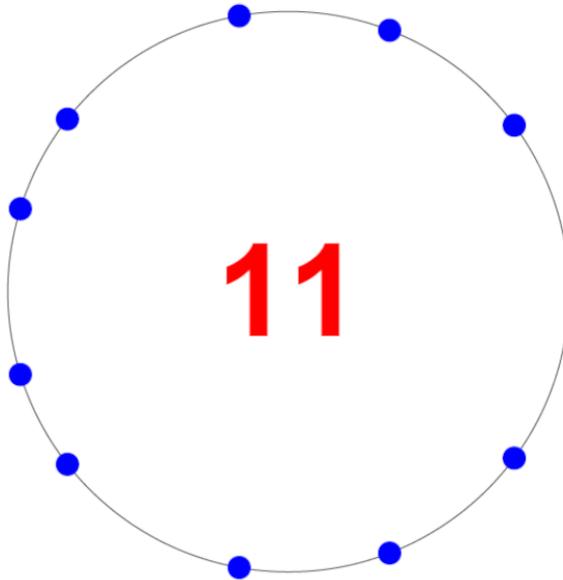


FIGURE 11 : Rythme motivique pour $H^1(C_2/p)$, $p = 11$

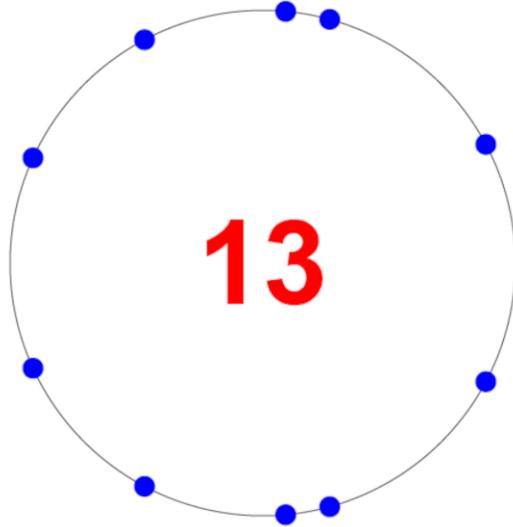


FIGURE 12 : Rythme motivique pour $H^1(C_2/p)$, $p = 13$

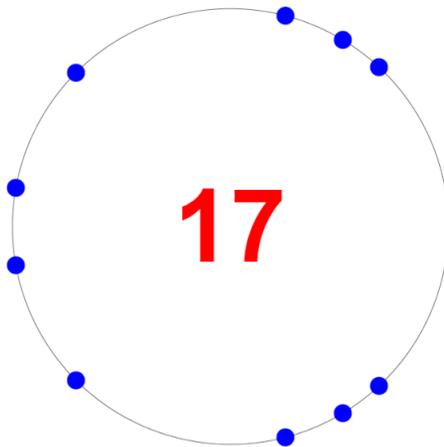


FIGURE 13 : Rythme motivique pour $H^1(C_2/p)$, $p = 17$

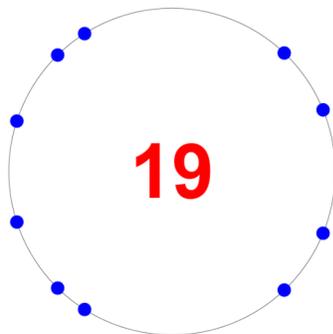


FIGURE 14 : Rythme motivique pour $H^1(C_2/p)$, $p = 19$.

Dans le prochain paragraphe nous expliquons comment nous avons conçu une formule mathématique pour une partition de base pour les nombres premiers compris entre 7 et 67.

Il y a des inter-relations remarquables, à la fois cognitives et théoriques, entre les motifs et les rythmes qui sont bien documentés dans la littérature (voir [10], [11]). Nous avons choisi de laisser la partie rythmique complètement indépendante du choix d'un ensemble de motifs associés aux nombres premiers dont il est question dans le prochain paragraphe. La première justification du maintien de cette indépendance est que les motifs rythmiques s'appliquent au jeu de n'importe quelle partition ayant le bon nombre de notes et la propriété de palindromie. La seconde raison est qu'on souhaite rester en accord avec l'origine mathématique des instants d'apparition, accord qui serait perdu si ces instants étaient réinterprétés en fonction des fréquences.

3. Partition de base

Les rythmes motiviques provenant d'une courbe C dépendent d'un nombre premier et puisqu'on est libre de choisir les mélodies de la chanson palindromique qui seront rythmiquement interprétés par le motif, on trouve que l'on devrait associer un chant *i.e.* ici un ensemble ordonné de 5 notes (ce qui donnera un total de 10 notes par symétrie) à chaque nombre premier (ici ceux compris entre 7 et 67). Ce qui importe, c'est que les notes associées aux nombres premiers permettent de reconnaître de quel nombre premier il s'agit. On peut essayer d'abord des méthodes simples comme le nom d'un nombre premier traduit en un certain langage mais cela est loin d'être "canonique". Pour obtenir un processus canonique, on a besoin d'utiliser l'information provenant des mathématiques bien connues qui interviennent dans les fréquences de la gamme musicale qui nous est familière et qui sont données par les puissances entières du nombre $q := 2^{\frac{1}{12}}$ (qui est numériquement proche de $3^{\frac{1}{19}}$).

Dans ce paragraphe nous décrivons comment obtenir à partir d'une formule mathématique une partition palindromique de dix notes pour chaque nombre premier compris entre 7 et 67. L'idée est que la partition associée au nombre premier p devrait être reliée au nombre \sqrt{p} parce que le motif est de poids $\frac{1}{2}$. Ce poids d'un motif correspond au coefficient de rétrécissement du cercle sur lequel sont montrés les zéros dans les Figures 10 à 14. L'inverse du rayon de ce cercle est égal à \sqrt{p} . De plus, puisque la gamme musicale est l'ensemble des $\{q^n\}$, les puissances entières du nombre $q := 2^{\frac{1}{12}}$, il est naturel de commencer par la puissance entière $q^{n_1(p)}$ qui est la plus proche de \sqrt{p} . Cela correspond à un motif naturellement associé à p . Donc pour commencer, posons :

$$n_1(p) := \text{Partie entière}(6 \log p / \log 2)$$

Puisque pour construire les notes suivantes de la partition, nous avons besoin d'obtenir des nombres entiers et d'être sûr qu'ils suffisent à caractériser p , nous avons choisi d'utiliser les termes suivants $n_j(p)$ dans l'expansion de la fraction continue

$$6 \log p / \log 2 = n_1 + 1/(n_2 + 1/(n_3 + 1/(n_4 + 1/(n_5 + \dots))))$$

Pour satisfaire les rôles respectifs des $n_j(p)$, il est naturel de les convertir en la liste suivante

$$(n_1(p), n_1(p) - n_2(p), n_1(p) - n_2(p) + n_3(p), n_1(p) - n_2(p) + n_3(p) - n_4(p), \\ n_1(p) - n_2(p) + n_3(p) - n_4(p) + n_5(p))$$

Cela nous fournit une partition que nous complétons par symétrie, pour la rendre palindromique, de manière à être capable de "retourner" les rythmes palindromiques, pour tout nombre premier compris entre 7 et 67.

Figure 15 shows six systems of musical notation, each consisting of two measures. The notation is for a piano accompaniment of a melodic line. The first system is marked with a '1' above the first measure. The melodic line is in the right hand, and the bass line is in the left hand. The key signature has one sharp (F#) and one flat (Bb). The time signature is 3/4. The first system shows a melodic line starting with a quarter rest, followed by a quarter note (F#), a quarter note (G), and a quarter note (A). The bass line starts with a quarter note (F), a quarter note (G), and a quarter note (A). The second system shows a melodic line starting with a quarter note (Bb), a quarter note (C), and a quarter note (D). The bass line starts with a quarter note (F), a quarter note (G), and a quarter note (A). The third system shows a melodic line starting with a quarter note (Bb), a quarter note (C), and a quarter note (D). The bass line is a whole rest. The fourth system shows a melodic line starting with a quarter note (Bb), a quarter note (C), and a quarter note (D). The bass line is a whole rest. The fifth system shows a melodic line starting with a quarter note (Bb), a quarter note (C), and a quarter note (D). The bass line is a whole rest. The sixth system shows a melodic line starting with a quarter note (Bb), a quarter note (C), and a quarter note (D). The bass line is a whole rest.

FIGURE 15 : Partitions des lignes mélodiques associées à $7 \leq p \leq 47$.

Figure 16 shows two systems of musical notation, each consisting of two measures. The notation is for a piano accompaniment of a melodic line. The melodic line is in the right hand, and the bass line is in the left hand. The key signature has one sharp (F#) and one flat (Bb). The time signature is 3/4. The first system shows a melodic line starting with a quarter note (Bb), a quarter note (C), and a quarter note (D). The bass line is a whole rest. The second system shows a melodic line starting with a quarter note (Bb), a quarter note (C), and a quarter note (D). The bass line is a whole rest.

FIGURE 16 : Partition des lignes mélodiques associées à $53 \leq p \leq 67$.

Il reste à cette étape la tâche musicale d’harmoniser la partition simple ci-dessus et on a toute liberté pour faire cela. Une contrainte est que les accords doivent être joués en même temps que les notes de la mélodie initiale de façon à les laisser subir le changement de rythme dicté par l’“interprétation motivique”. Nous en avons composé un simple, utilisé pour créer la vidéo, mais nous mettons au défi les musiciens d’en trouver un vraiment bon !

Sans cette contrainte, on peut produire une harmonisation qui est plus dynamique et qui permet de devenir familier avec les notes de la mélodie initiale (les mélodies associées aux deux premiers nombres premiers utilisés 7 et 11 sont répétées deux fois) ; l’enregistrement peut être téléchargé à l’adresse [lien de téléchargement du fichier mp3](#). Nous l’utiliserons également ci-dessous pour l’illustration visuelle.

4. Illustration visuelle : La danse des nombres premiers

Pour illustrer visuellement la succession des nombres premiers et ensuite le jeu de chaque rythme motivique, nous avons créé une petite chorégraphie.

4.1. La première minute : le crible d’Ératosthène

Dans la première partie, la musique est jouée avec des intervalles égaux entre les notes et l’illustration visuelle est une chorégraphie du crible d’Ératosthène qui est conçu comme suit. Il y a deux rectangles comme dans la Figure 17. Chacun de ces rectangles contient $60 \times 60 = 3600$ positions possibles, chacune d’entre elles correspondant à un nombre entre 1 et 3600. La première ligne par exemple correspond aux nombres compris entre 1 (en haut à gauche) et 60 (en haut à droite), la seconde ligne aux nombres compris entre 61 et 120 et etc. Au début, tous les multiples de 2 (*i.e.* tous les nombres pairs) sauf 2 lui-même, ont été amenés en bas dans le rectangle inférieur. La même opération a été réalisée pour tous les multiples de 3 et tous les multiples de 5. Être un multiple de l’un de ces trois premiers nombres premiers est sans effet si on ajoute un multiple de 60 et donc la figure géométrique obtenue est formée d’une union de lignes verticales comme on peut le voir sur la Figure 17. La seule ligne verticale dans le graphique initial qui ne correspond pas à un nombre premier $p < 60$, est la ligne verticale associée à $49 = 7^2$. Tous les autres nombres composés ont été éliminés comme multiples de 2, 3 ou 5. La chorégraphie commence quand la musique associée à 7 est jouée, les danseurs dans le rectangle ci-dessus qui sont à une position qui est un multiple de sept (excepté en sept lui-même) descendent tous dans le rectangle du bas comme cela apparaît sur les Figures 18, 19, 20 et se positionnent à leur place dans le rectangle inférieur. Ensuite, quand la musique de 11 est jouée, tous les danseurs à des positions qui sont des multiples de onze descendent excepté onze lui-même. Cela continue pour tous les nombres premiers jusqu’à 67. À la fin de la chorégraphie, les nombres qui restent dans le rectangle du haut sont tous les nombres premiers entre 2 et 3600 (le nombre 1 est ignoré). Le nombre de danseurs est environ 460 parce qu’au début, il y a seulement 963 danseurs dans le rectangle supérieur alors qu’à la fin, seuls les nombres premiers inférieurs à 3600 restent et il y a 503 tels nombres premiers. La vidéo est visionnable en cliquant sur le lien suivant : [Vidéo](#). Pour l’harmonisation “dynamique” de la danse des premiers jouée de façon égale, on peut cliquer sur le lien suivant : [Danse des nombres premiers](#). Noter que le chant de chaque nombre premier est ici répété deux fois avec les danseurs attendant pendant la répétition.

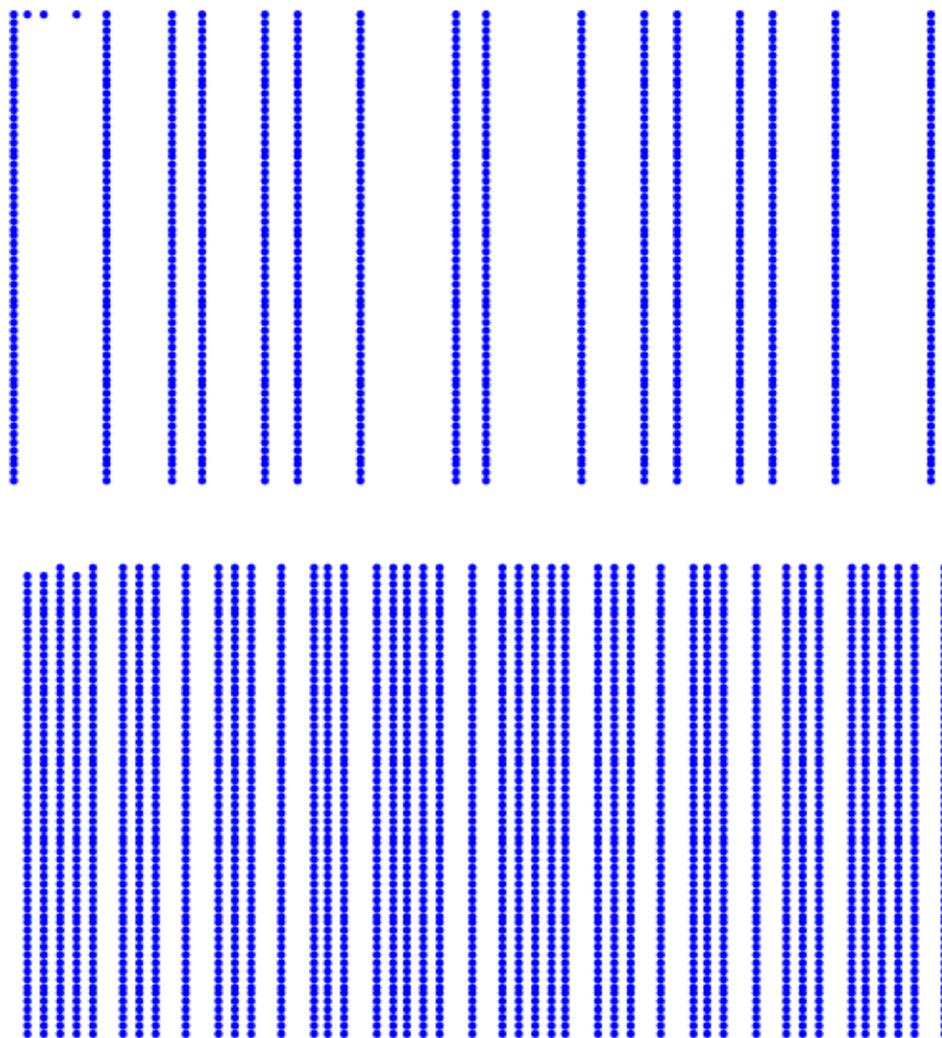


FIGURE 17 : Configuration de départ : tous les multiples de 2 sauf 2 lui-même, ainsi que ceux de 3 et 5 ont été amenés dans le rectangle du bas.

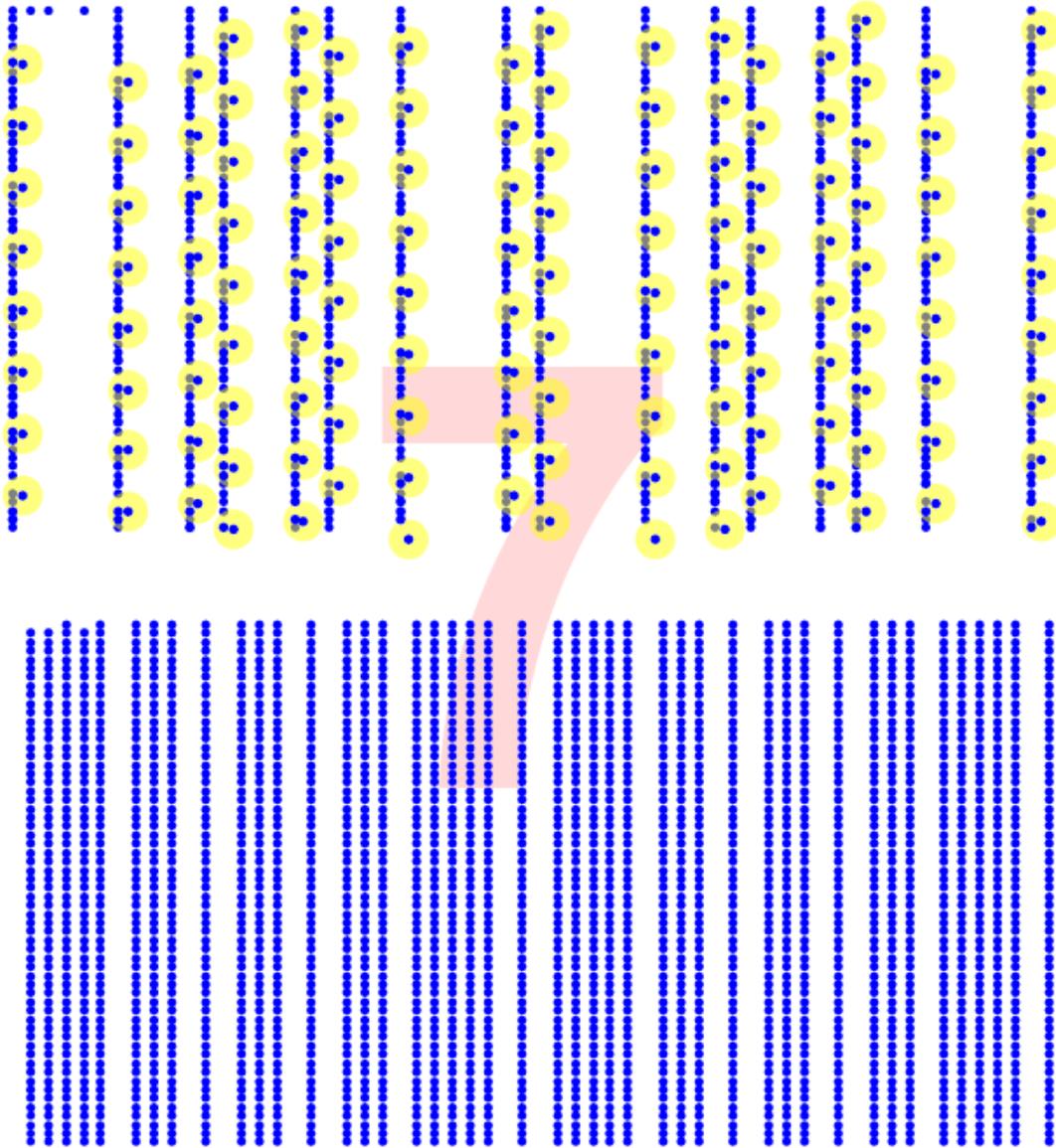


FIGURE 18 : Tous les multiples de 7 sauf 7 lui-même sont en train de descendre dans le rectangle du bas. Cela montre la première étape quand les danseurs correspondant aux multiples de 7 font un pas de côté vers la droite.

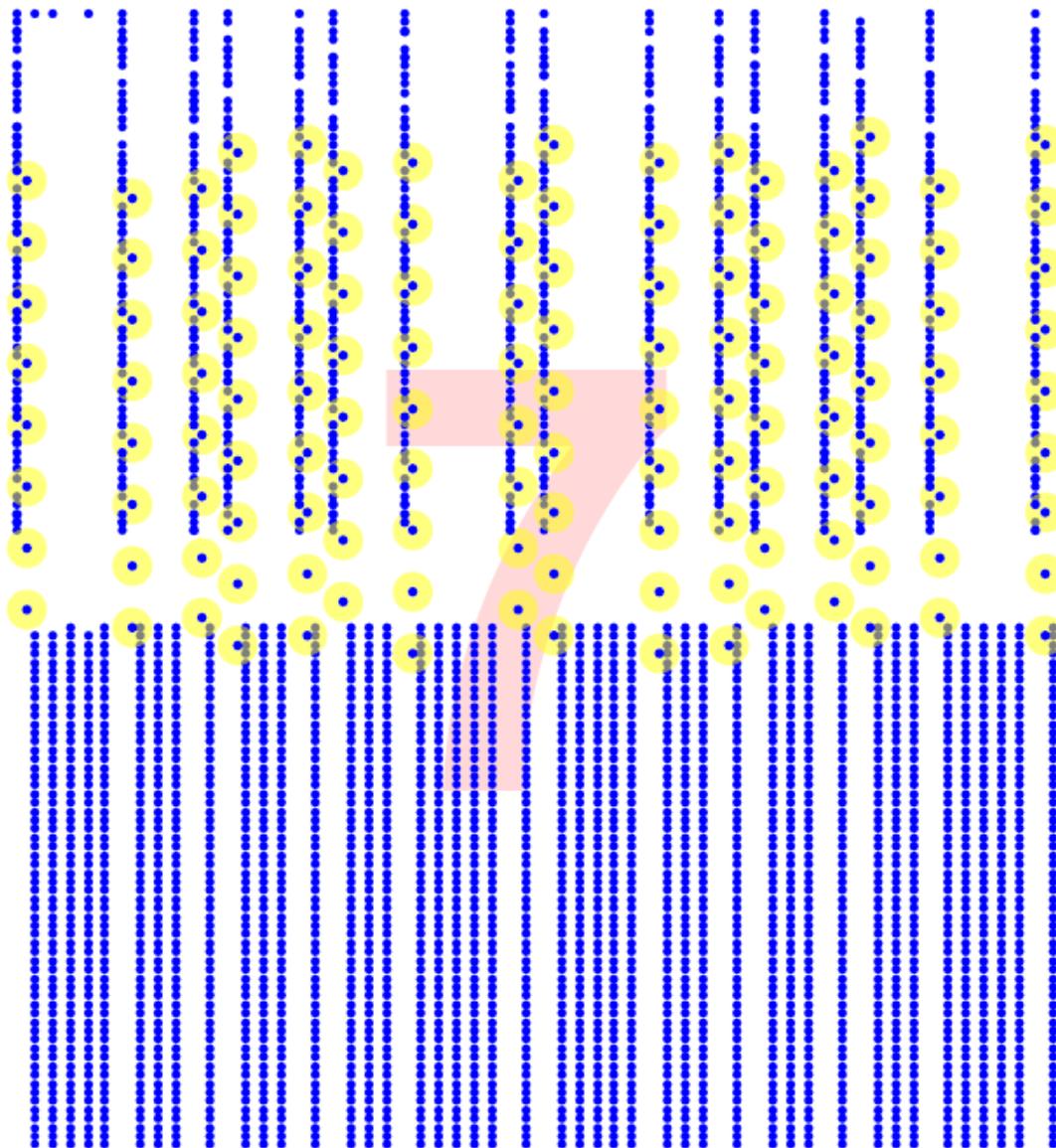


FIGURE 19 : Tous les multiples de 7 sauf 7 lui-même sont en train de descendre dans le rectangle du bas. Pendant que ce mouvement s'effectue, la petite musique correspondant à 7 est jouée.

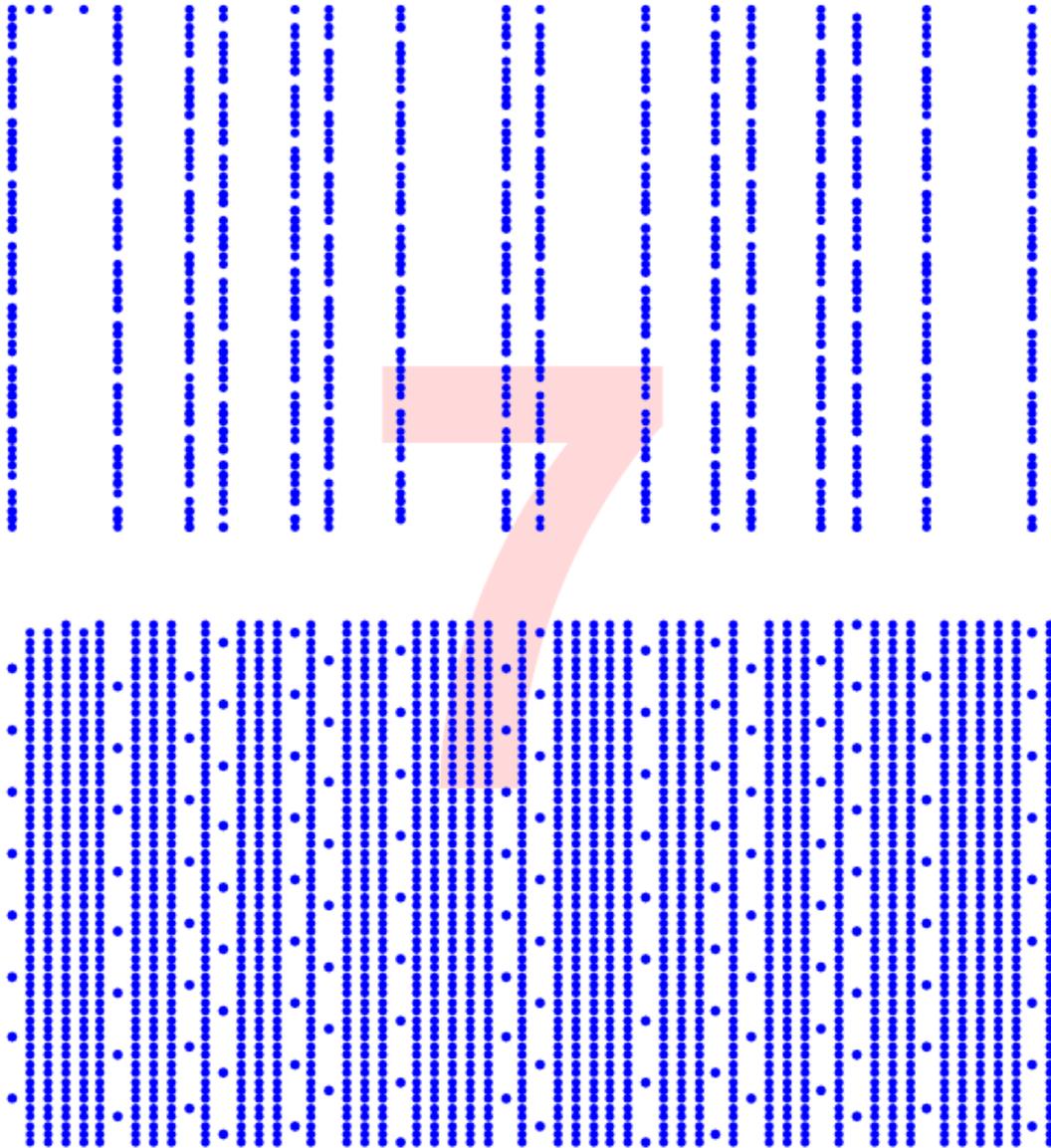


FIGURE 20 : Tous les multiples de 7 sauf 7 lui-même sont en train de descendre et trouvent leur place dans le rectangle du bas. Pendant que ce mouvement s'effectue, la musique correspondant à 7 est jouée.

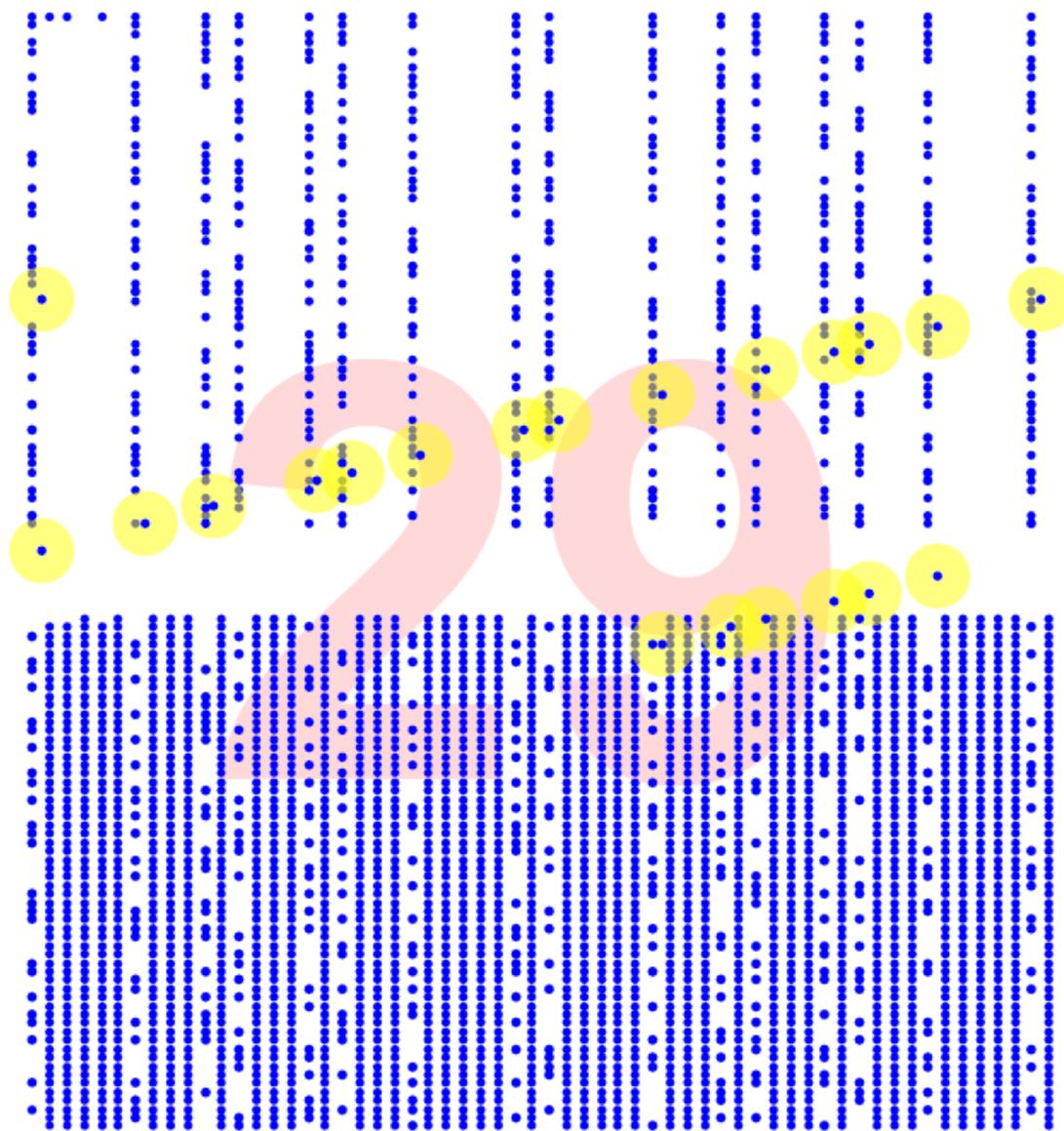


FIGURE 21 : Tous les multiples de 29 sauf 29 sont en train de descendre dans le rectangle du bas. Pour 29 et également pour 31, ces multiples forment une jolie figure géométrique.

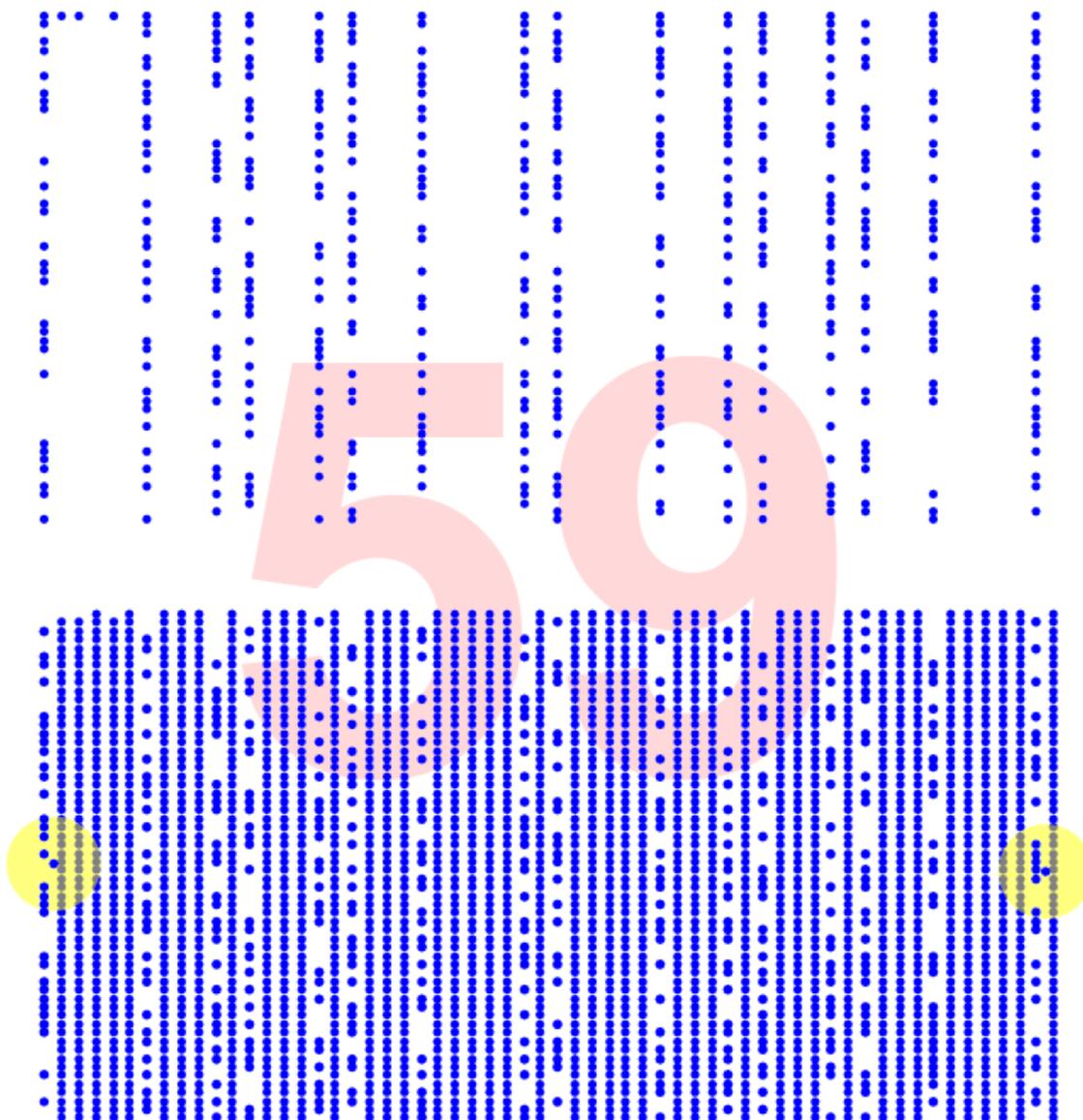


FIGURE 22 : Tous les multiples de 59 excepté 59 lui-même sont en train de descendre dans le rectangle du bas. Les deux derniers danseurs correspondent à 59^2 sur la gauche et à 59×61 sur la droite.

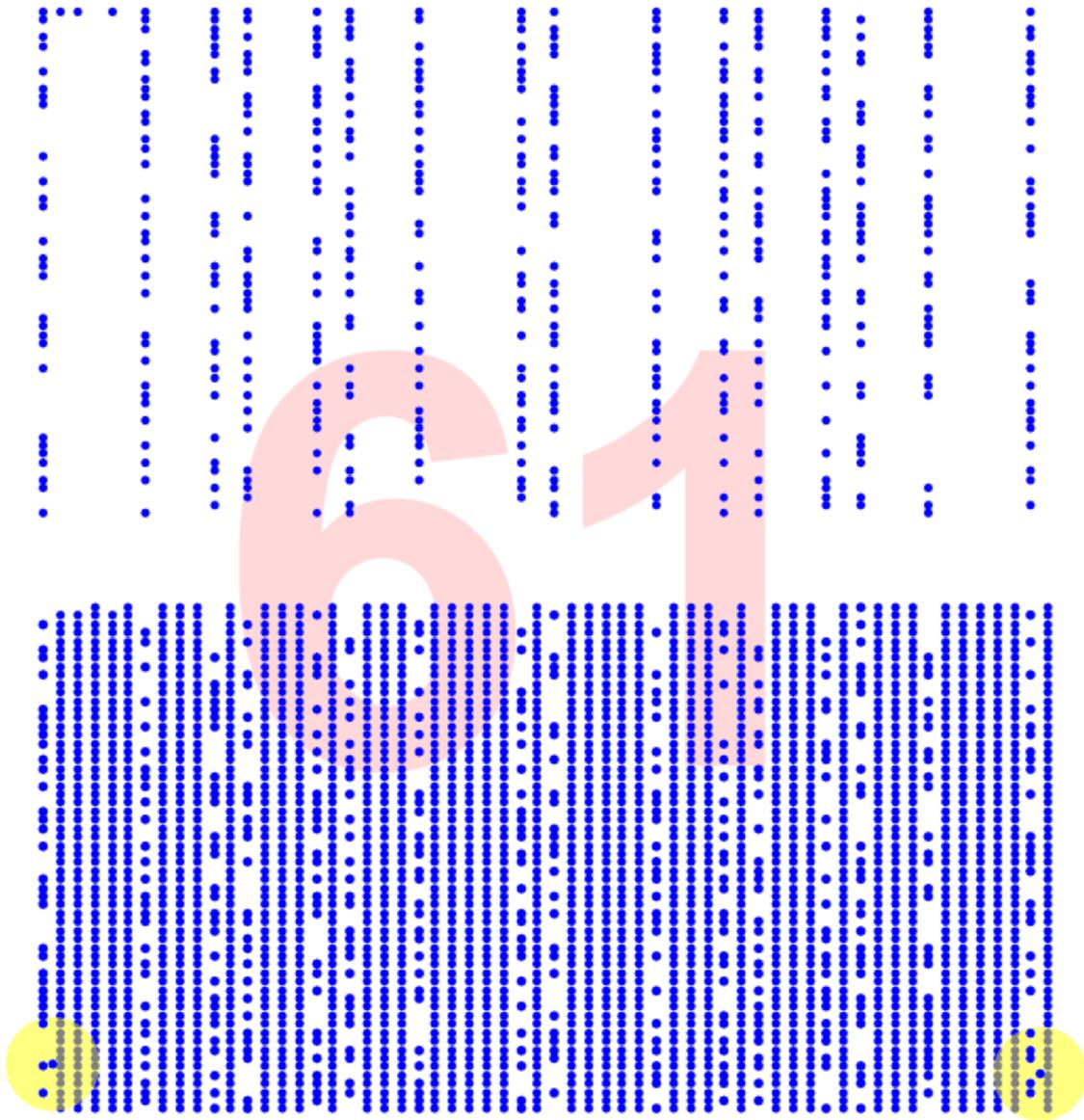


FIGURE 23 : Les deux derniers danseurs correspondant à 59^2 sur la gauche et à 59×61 sur la droite ont presque atteint leur position finale, terminant ainsi la danse.

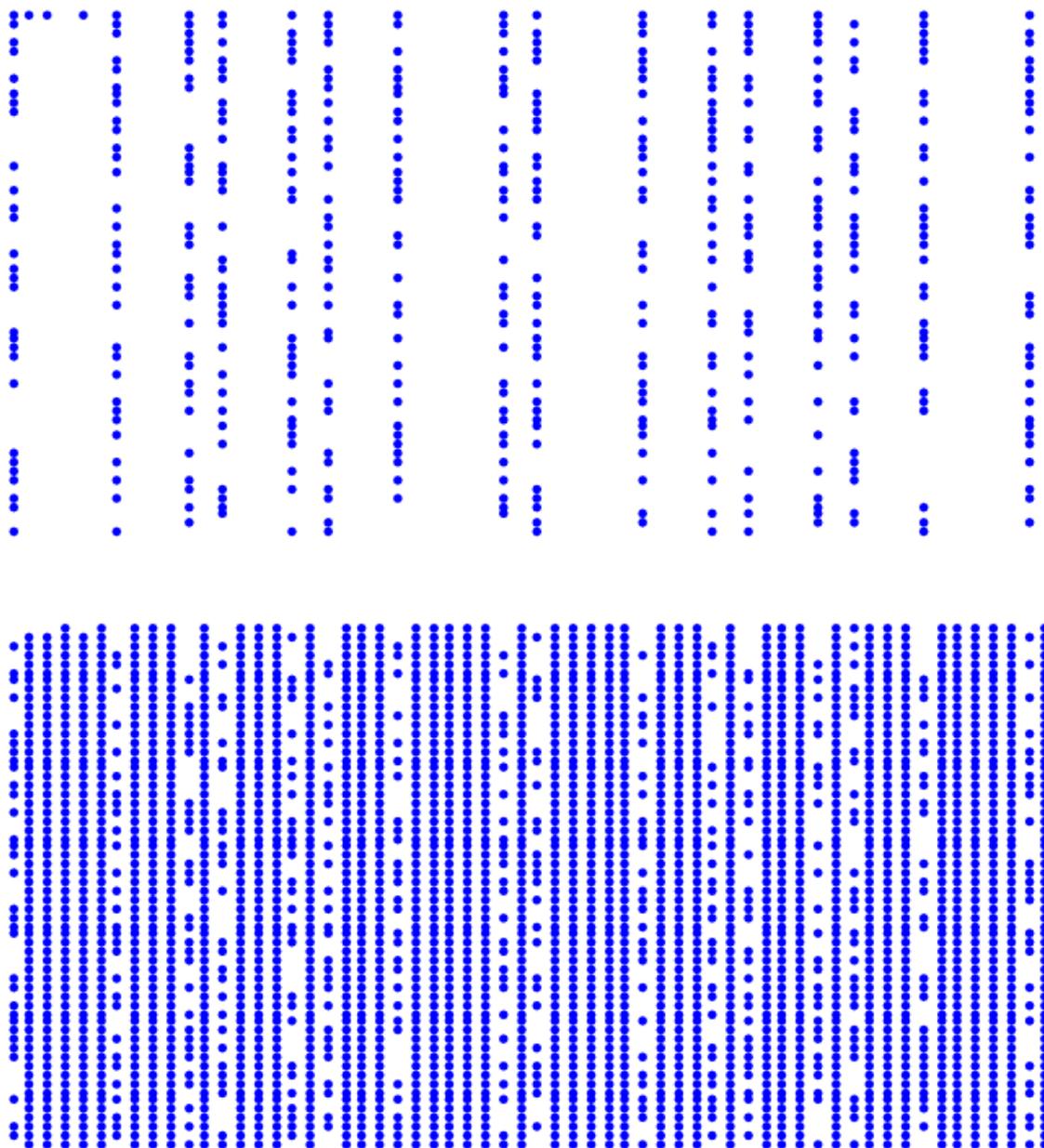


FIGURE 24 : Après que tous les multiples de 59 excepté 59 soient descendus, les danseurs restant dans le rectangle du haut correspondent exactement aux nombres premiers inférieurs à 3600. Ceux qui restent dans le rectangle du bas forment un crible dans la mesure où cet ensemble reste stable par multiplication par n'importe quel nombre. En fait cette propriété d'être un crible est vérifiée par toutes les configurations intermédiaires du rectangle du bas.

4.2. Interprétation rythmique par $H^1(C_j/p)$

La seconde partie de la vidéo est une illustration de l'interprétation rythmique donnée par les

valeurs propres du Frobenius sur $H^1(C_j/p)$, où p est un nombre premier tel que $7 \leq p \leq 67$

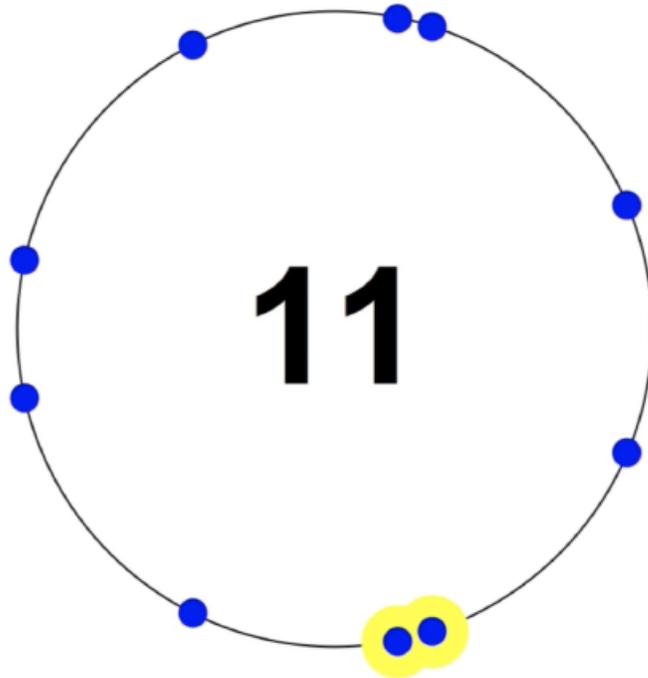


FIGURE 25 : Chacun des six motifs devient un interprète (au niveau rythmique) du même morceau.

Dans le but d'illustrer ces rythmes qui fournissent les instants irrationnels précis d'attaque dans la musique, la vidéo est synchronisée de façon à ce que les zéros correspondant apparaissent en couleur brillante lorsqu'ils sont joués. Le tempo est accéléré comme $\log p$ lorsque p varie de 7 à 67 et cela est fait pour chacun des six motifs $H^1(C_j/p)$. La vidéo peut être visionnée en cliquant sur le lien suivant : [Vidéo](#).

Nous avons déjà décrit C_1 et C_2 . Les courbes suivantes et quelques exemples des interprétations rythmiques associées sont fournis ci-après :

$$C_3 : y^2 = x^{11} - x^{10} + x^9 - 5x^8 + 8x^7 - 8x^6 + 8x^5 - 14x^4 + 5x^3 - 7x^2 + x - 1$$

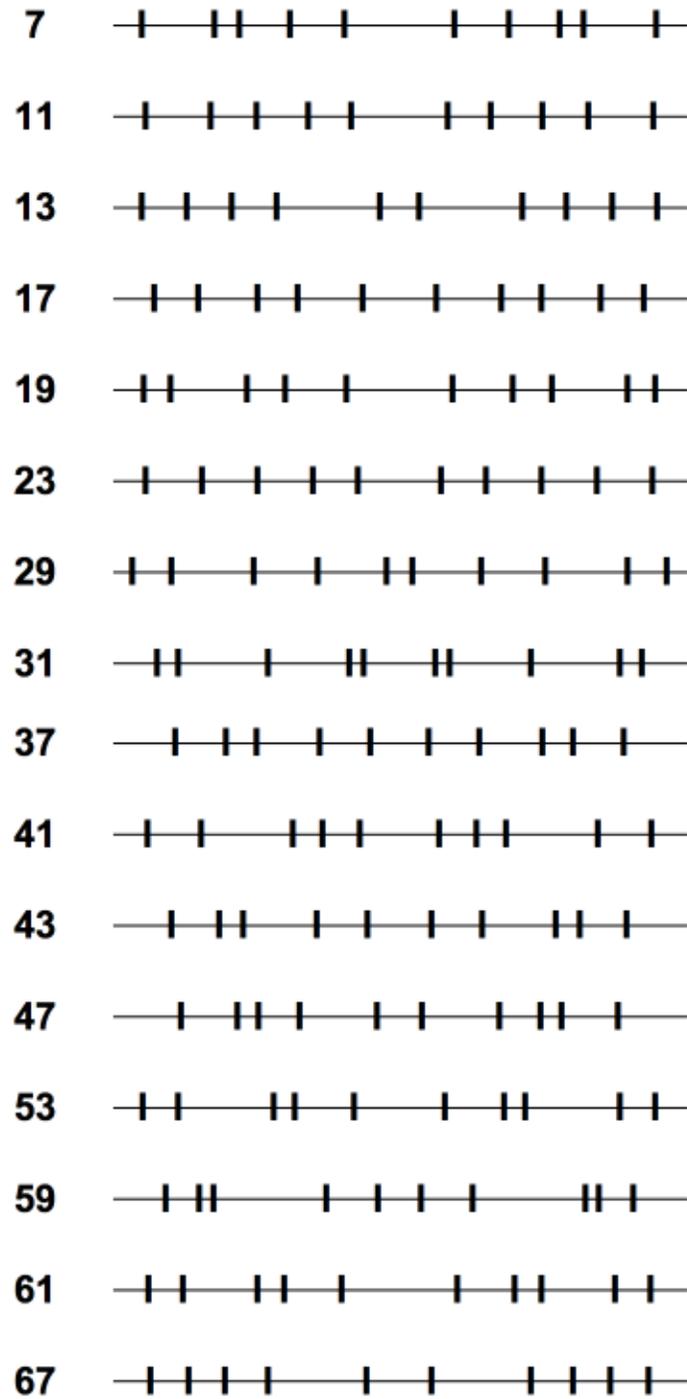


FIGURE 26 : Rythmes associés au $H^1(C_3/p)$ pour $7 \leq p \leq 67$.

$$C_4 : y^2 = x^{11} - x^{10} + 3x^9 + x^8 - 8x^7 - 8x^5 + 24x^4 + 58x^3 + 86x^2 + 86x + 50$$

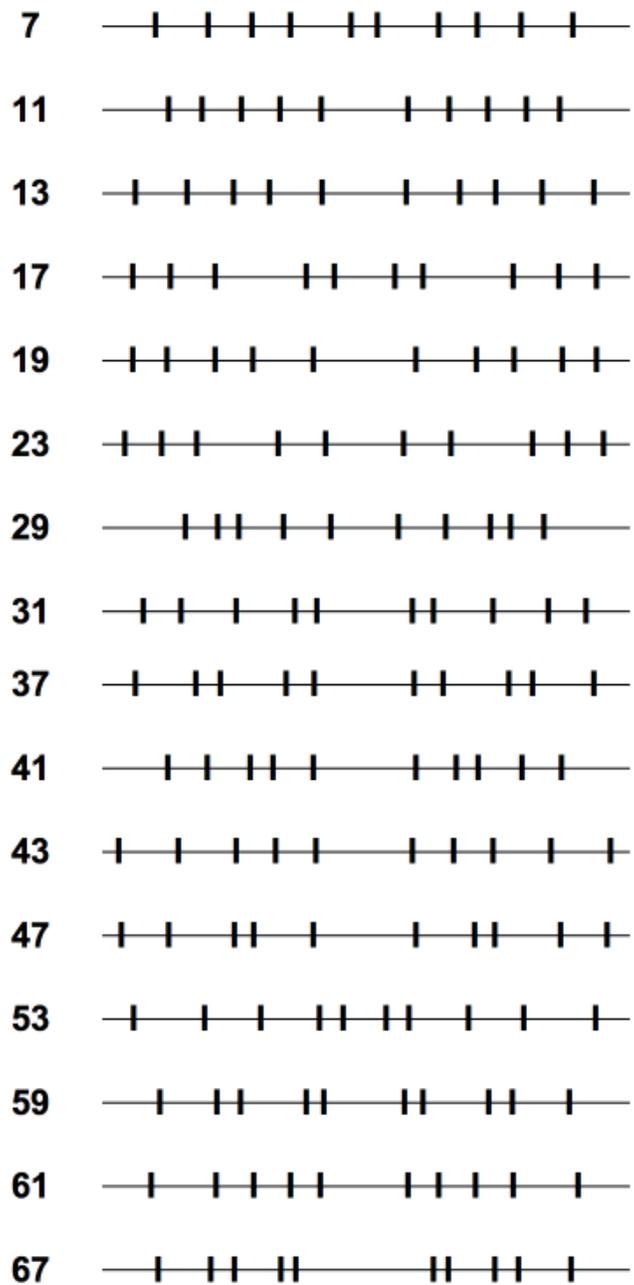


FIGURE 27 : Rythmes associés au $H^1(C_4/p)$ pour $7 \leq p \leq 67$.

$$C_5 : y^2 = x^{11} - x^{10} + 7x^9 - 15x^8 + 36x^7 - 48x^6 + 108x^5 - 144x^4 + 90x^3 - 162x^2 + 162x + 198$$

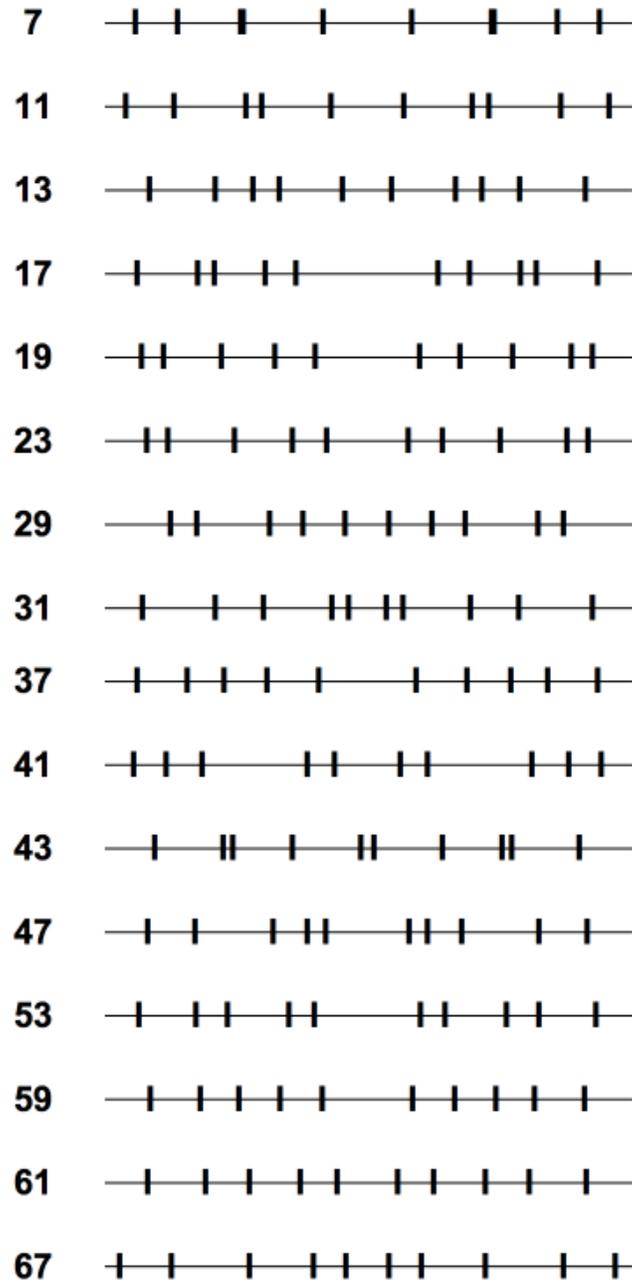


FIGURE 28 : Rythmes associés au $H^1(C_5/p)$ pour $7 \leq p \leq 67$.

$$C_6 : y^2 = x^{11} - 3x^{10} - 6x^9 + 12x^8 + 18x^7 - 54x^6 - 96x^5 + 72x^4 + 126x^3 - 206x^2 - 336x - 96$$

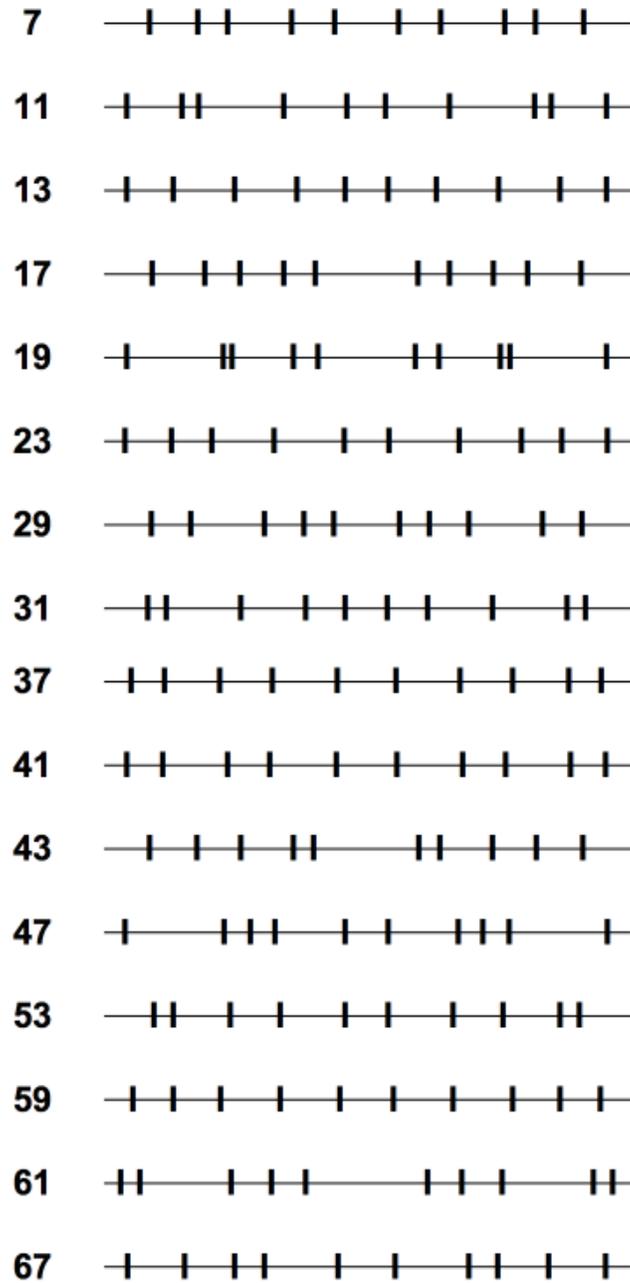


FIGURE 29 : Rythmes associés au $H^1(C_6/p)$ pour $7 \leq p \leq 67$.

Remarque : Le fait que le tempo accélère avec $\log p$, *i.e.* que la période naturelle déterminée par $p^{-is} = 1$ soit $\frac{2\pi}{\log p}$ montre dans quel sens la stratégie poursuivie dans notre travail commun avec C. Consani (voir en particulier [5, 6]) est naturelle. En effet, si l’on faisait tendre par exemple $p \rightarrow \infty$, la période tendrait vers 0 et il n’y aurait aucun moyen d’obtenir des valeurs ressemblant aux zéros de la fonction zeta de Riemann. Mais dans notre stratégie, on fait tendre $p \rightarrow 1$ de telle façon que la période $\frac{2\pi}{\log p}$ tend maintenant vers l’infini. De plus, comme expliqué dans [5, 6], le genre tend vers l’infini, permettant ainsi d’obtenir le type de configuration désirée.

Remerciements : Je remercie les évaluateurs pour leurs commentaires utiles, ainsi que Fernando Rodriguez Villegas, Moreno Andreatta, Karim Haddad, Carlos Agon et Ugo Moschella pour leur aide dans l’implémentation de ces idées ; je remercie également les membres de notre groupe de discussion sur les mathématiques et la musique avec, outre Moreno, Charles Alunni, Olivia Caramello et Pierre Cartier. Les principes des développements ci-dessus ont été obtenus durant la collaboration avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, collaboration qui a donné naissance au roman [3].

Références

- [1] M. Babbitt, *Twelve-Tone Rhythmic Structure and the Electronic Medium*, Perspectives of New Music 1, no. 1 (Fall 1962) : 49–79.
- [2] M. Berry and J. Keating, *The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics*. SIAM Rev. **41** (1999), no. 2, 236–266.
- [3] D. Chéreau, A. Connes, J. Dixmier, *Le Spectre d’Atacama*. Editions Odile Jacob, 2018.
- [4] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*. Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.
- [5] A. Connes, C. Consani, *Schemes over \mathbb{F}_1 and zeta functions*, Compositio Mathematica 146 (6), (2010) 1383–1415.
- [6] A. Connes, C. Consani, *From monoids to hyperstructures : in search of an absolute arithmetic*, in Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis, de Gruyter (2010), 147–198.
- [7] M. Kac, *Can One Hear the Shape of a Drum ?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 73, No. 4, Part 2 : Papers in Analysis (Apr. 1966), pp. 1–23.
(Available online at : <https://www.math.ucdavis.edu/hunter/m207b/kac.pdf>)
- [8] Olivier Messiaen, *Technique de mon langage musical*, Paris, Alphonse Leduc, 1944 (English translation as “The Technique of My Musical Language”, Paris, Alphonse Leduc, 1956).
- [9] O. Messiaen, *Traité de Rythme, de Couleur, et d’Ornithologie*. Editions musicales Alphonse Leduc.
- [10] J. Pressing, *Cognitive Isomorphisms between Pitch and Rhythm in World Musics : West Africa, the Balkans and Western Tonality*, Studies in Music, 17, (1983) 38–61.
- [11] J. Rahn, *On Pitch or Rhythm : Interpretations of Orderings of and in Pitch and Time*, Perspectives of New Music, vol. 13, no. 2, 1975, p. 182.

LE FLOT DE RIEMANN ET LES ZÉROS DE ZETA
ALAIN CONNES
COLLÈGE DE FRANCE, IHÉS, OHIO STATE UNIVERSITY

Je vais vous présenter un espace $(X, \mathfrak{C})_{\mathbb{R}_+^*}$ (sur les nombres réels classiques) qui permettra deux choses :

1. la première chose qu'il donnera est une interprétation spectrale des zéros de la fonction zeta de Riemann ;
2. et la seconde chose qu'il fera est qu'en quelque sorte, il réduira l'hypothèse de Riemann au fait de démontrer (ce que je ne peux pas faire) une formule de trace, et par formule de trace, je veux dire la chose suivante : je veux dire que l'exemple le plus simple d'une formule de trace est juste le fait que si vous prenez une matrice, la somme de ses valeurs propres (appelons les coefficients de la matrice a_{ij}) est égal à la somme de ses éléments diagonaux $\text{Tr } M = \sum \lambda_j = \sum a_{ii}$.

La formule de trace que nous avons écrite est satisfaite bien sûr par des matrices finies dont les valeurs sont des éléments entiers mais ce que je veux expliquer, c'est comment, une fois que nous aurons le flot et etc, nous pourrons obtenir l'interprétation spectrale et le fait que l'hypothèse de Riemann est satisfaite, en supposant qu'on peut démontrer la formule de trace.

Laissez-moi commencer au tout début, par quelques relations déjà connues dans l'article de Riemann et qui sont que si vous commencez avec la fonction zeta de Riemann et que vous regardez le nombre de zéros (je les appellerai ρ_1, ρ_2, \dots), vous commencez par visualiser la fonction $N(E)$ qui est le nombre de zéros qui sont non triviaux et dont la partie imaginaire est dans l'intervalle $]0, E]$ (i.e. $N(E) = \#$ de zéros tels que $\Im \rho \in]0, E]$). Donc vous comptez combien il y a de zéros, en supposant que vous savez exactement où ils sont, et vous trouvez bien sûr que cette fonction est une fonction en escalier et que cette fonction s'avère provenir de la superposition de deux comportements. Donc si nous appelons cette fonction $N(E)$, elle est égale à la somme de deux choses, la somme d'une fonction très lisse et jolie qui est la courbe que j'ai dessinée ici, qui peut facilement être calculée, en fait elle est donnée dans l'article de Riemann, elle est égale à

$$N(E) = \langle N(E) \rangle + N_{\text{osc}}$$

avec

$$\langle N(E) \rangle = \left(\frac{E}{2\pi} \right) \left(\log \frac{E}{2\pi} - 1 \right) + \frac{7}{8} + o(1)$$

Cette première fonction est juste fournie par la formule de Stirling appliquée aux facteurs gamma (*mal audible*). Vous avez ce terme. Et alors, vous avez un autre terme, qui est si vous voulez la partie intéressante en quelque sorte, parce qu'au lieu d'être justement cette fonction lisse complètement contrôlable, c'est la partie qui oscille et qui est bien sûr nécessaire parce que vous voulez obtenir une fonction en escalier. Donc si vous visualisez cette partie oscillante, parce que c'est juste une différence que vous devez calculer (pour $N(E)$), le type de graphe sera comme ceci, vous obtenez un graphe qui oscille si erratiquement que si vous prenez son intégrale sur tout intervalle, vous

Vidéo visionnable ici <https://www.youtube-nocookie.com/embed/yTpnamUP9Q4>.

Transcription d'une vidéo mise en ligne le 16.10.2021, Denise Vella-Chemla, octobre 2021.

obtenez 0. Donc cette partie oscillante a une formule, qui est égale à

$$N_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \log \zeta \left(\frac{1}{2} + iE \right)$$

(le facteur $\frac{1}{\pi}$ parce que vous comptez un entier), et vous devez prendre la branche du log qui vient de $+\infty$. Et cette fonction est en $O(\log E)$. Et une observation très importante qui motive le problème de l'interprétation spectrale des zéros est le suivant, il est dû théoriquement à la fois à Hugh Montgomery et à un expérimentateur Andrew Odlyzko ; l'observation est la suivante : elle est que si vous séparez les deux comportements, entre celui qui est le comportement moyen et celui qui oscille, la meilleure façon de les séparer est de procéder à une mise à l'échelle des zéros, dans le sens où si on appelle x_j la valeur moyenne évaluée sur les ρ_j (notée $x_j = \langle N(\rho_j) \rangle$), cela fait que maintenant, cette courbe-là est remplacée par une courbe en escalier de hauteur des marches $\log 1$ (*mal audible*). En quelque sorte, la moyenne des x_j est égale à un. Donc ce que vous faites maintenant, vous comptez le nombre de paires (i, j) dans un intervalle $[1, M]$ d'entiers tels que $x_i - x_j$ appartient à un certain intervalle $[\alpha, \beta]$ et ce que Montgomery a démontré dans un certain domaine et que Odlyzko a testé avec une très grande précision est que cette fonction est équivalente à

$$\#\{i, j \in [1, M]; x_i - x_j \in [\alpha, \beta]\} \sim M \int_{\alpha}^{\beta} \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 \right) du$$

Donc c'est un fait, qui est conjecturé en général, et qui est numériquement testé.

Et maintenant le fait surprenant en quelque sorte est que cela correspond à des statistiques (*montrant l'intégrale*). C'est très différent des statistiques obtenues par les nombres aléatoires. Si vous avez des nombres aléatoires, vous n'avez pas ce comportement intégral, vous avez juste une distribution de Poisson.

Et les statistiques obtenues dans notre cas sont exactement identiques aux statistiques des valeurs propres d'une matrice aléatoire hermitienne. Cela a été observé lors d'une rencontre célèbre entre Hugh Montgomery et Freeman Dyson, à Princeton. Dyson a prouvé que c'étaient les statistiques des valeurs propres d'une matrice aléatoire hermitienne.

Maintenant nous arrivons à l'idée suivante : où rencontre-t-on de telles matrices. Pourquoi ont-elles été inventées ? Elles ont été inventées par des physiciens, précisément parce qu'ils voulaient calculer les niveaux d'énergie de spectres atomiques, ils ont trouvé que c'était le bazar et que la seule manière d'obtenir quelque chose était d'utiliser des matrices aléatoires mais les matrices qu'ils utilisaient n'étaient pas hermitiennes. Les matrices que vous obtenez pour des systèmes atomiques sont des matrices symétriques réelles, ce qui est différent.

Donc il y a alors un problème évident qui est que ces zéros sont des sortes de statistiques réinterprétées comme les valeurs propres d'un opérateur adéquat, cet opérateur et l'espace de Hilbert correspondant auront un nom, parce que cette idée d'interpréter les zéros comme les valeurs propres d'opérateurs est une vieille idée. C'est une idée qui a été initiée par Pólya et aussi par Hilbert. Et donc j'utiliserai juste la terminologie et j'appellerai espace de Pólya-Hilbert \mathcal{H} cet espace de Hilbert hypothétique et j'appellerai D l'opérateur hypothétique. Cet opérateur devrait être tel que ses zéros sont exactement les zéros non triviaux de zeta et alors, ce que vous souhaiteriez prouver est que

$$\left(D - \frac{1}{2} \right)^* = - \left(D - \frac{1}{2} \right)$$

(D est adjoint à gauche).

Maintenant il y a une autre importante suite à cette idée, qui est le travail d'Atle Selberg dans lequel ce que Selberg a fait, vraiment, a été de construire un système, exactement comme l'ont fait les deux autres, notamment en quantifiant un système classique. Quel était le système classique dans l'espace de Selberg, c'était le flot géodésique sur une variété riemannienne adéquate M , et une partie de ce flot géodésique, bien sûr, fournit par quantification le Laplacien agissant dans la mesure L^2 . Pourtant, le travail de Selberg donnait des formules qui étaient très proches des formules de la théorie des nombres, et c'est le fait qu'on espère pour deux raisons.

La première raison est qu'en quelque sorte, alors que dans le cas de la fonction zeta de Riemann, vous avez un nombre de valeurs propres qui grossissent comme E (comme $E(\log E)$), dans le cas de Selberg, vous avez quelque chose qui grossit plus vite.

La seconde raison est qu'à chaque fois que vous prenez un flot géodésique, ou en fait à chaque fois que vous prenez un flot sur un espace qui a une symétrie temporelle (la symétrie temporelle est la chose suivante, c'est que vous avez une symétrie de l'espace des phases : dans le cas d'un flot géodésique, cette symétrie est juste que (p, q) va sur $(-p, q)$ (i.e. $(p, q) \rightarrow (-p, q)$). Mais une telle symétrie sera satisfaite pour tout opérateur hermitien recouvrant un Hamiltonien de la forme

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$$

($V(q)$ est un certain potentiel). Donc chaque fois que vous aurez un système qui ne change pas quand vous passez de (p, q) à $(-p, q)$, vous aurez quelques problèmes. Parce que quand vous quantifiez le système, vous n'obtenez pas une matrice hermitienne, mais vous obtenez une matrice symétrique d'éléments réels. Maintenant les matrices symétriques à valeurs réelles n'ont pas les mêmes statistiques que celles que vous voulez. Mais il y a une autre façon de voir cela très rapidement, qui est que quand vous avez un système qui a ce type de symétrie, il y a une résonance entre deux orbites, deux orbites proches du système, l'orbite sur (p, q) est transformée quand vous prenez $(-p, q)$ à la place de (p, q) , donc elles auront la même longueur, et etc.

Bien, les gens cherchent un tel système et laissez-moi vous montrer pourquoi cette chasse, de la manière dont elle a été définie, a grossi : laissez-moi vous parler du travail de M. Berry et J. Keating, ce sont des idées générales provenant du chaos quantique, mais ce qu'on devrait faire alors, ce serait de chercher un système classique, typiquement un système comme celui d'un flot sur une variété qui par quantification fournira le bon espace d'opérateurs de Pólya-Hilbert. On peut faire le même type de calcul que ceux que j'ai évoqués pour le nombre de zéros de zeta, on peut le faire pour le nombre de valeurs propres de l'hamiltonien qui appartiennent à l'intervalle $[0, E]$ (i.e. $N_H(E) = \#$ de valeurs propres de $H \in [0, E]$). Donc vous pouvez le prolonger et ce que vous obtiendrez, c'est qu'il se séparera en deux morceaux : un morceau est quantifié comme un volume dans l'espace des phases (ça correspond à la valeur moyenne) et le deuxième morceau est la partie oscillante :

$$N_H(E) = \langle N_H(E) \rangle + N_{\text{osc}}(E)$$

Vous pouvez vraiment prolonger cette partie oscillante par un prolongement asymptotique et ce que vous trouvez, c'est que le prolongement asymptotique est couvert par (vous devez supposer que le système est correctement chaotique et etc), mais vous pouvez écrire un prolongement asymptotique de la partie oscillante et elle ressemble à ça, pour un système qui a (*mal audible*) de dimension 2 (ce

n'est pas une formule exacte, c'est une formule asymptotique) :

$$N_{\text{osc}}(E) \simeq \frac{1}{\pi} \sum_{\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{2 \operatorname{sh} \left(\frac{m \lambda_{\gamma}}{2} \right)} \sin(m E T_{\gamma}^{\#})$$

γ étiquette les orbites périodiques. Mais je n'étiquette les orbites périodiques qu'une seule fois, je n'étiquette pas les traversées des orbites périodiques. Et alors (l'indice m), vous sumez sur le nombre de fois que vous traversez les orbites périodiques, dans le sens positif, et T_{γ} est la longueur du (*mal audible*); λ_{γ} est appelé l'exposant d'instabilité de l'orbite. Ce n'est pas une formule exacte, c'est quelque chose que vous pouvez utiliser en pratique et etc.

Maintenant ce que vous faites, c'est que si vous voulez avoir une certaine information à propos de ce flot hypothétique, vous devriez certainement être capable de comparer la formule qui vous donne cela avec la formule que vous devriez obtenir de cette expression là-haut en remplaçant zeta par la formule du produit eulérien. Si vous écrivez log comme log de zeta, c'est le log d'un produit, c'est donc une somme, convergente, et chacun des termes qui apparaît en zeta est juste $\frac{1}{1 - \frac{1}{p^{\frac{1}{2} + iE}}}$, et

vous obtenez

$$-\log \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{1}{2} + iE}} \right).$$

Qu'obtiendrez-vous lorsque vous développerez cela ? Vous obtiendrez une autre formule. Laissez-moi l'écrire :

$$N_{\text{osc}}^{\zeta}(E) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{p=2,3,5,7,\dots} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m/2}} \sin(m E \log p)$$

(écrivant le terme $\frac{1}{p^{m/2}}$, il dit que ça a l'air bon; et quand il écrit le sin, il dit "parce que c'est la partie imaginaire donc vous trouvez un sinus aussi."). Excepté que j'ai fait une erreur, donc si vous vous ennuyez, vous pouvez essayer de trouver l'erreur, et vous verrez que cette erreur est absolument essentielle.

Donc ignorons l'erreur pour l'instant, et écrivons que *cele* est positif. Donc je veux dire que vous pouvez dire :

- Ⓐ la première chose que vous pouvez dire est que pour le flot que vous cherchez, les orbites périodiques devraient être étiquetées par des nombres premiers; les longueurs des orbites, les périodes, devraient être $\log p$, c'est clair, et l'exposant d'instabilité devrait être aussi égal à $\log p$ (i.e. $\exp \lambda_p = \log p$);
- Ⓑ La seconde chose qu'on peut dire bien sûr est aussi qu'il ne doit pas y avoir de symétrie temporelle; si vous avez une symétrie temporelle, cela signifie en fait que chaque orbite est comptée deux fois et c'est impossible, je ne peux pas avoir de 2 pour une orbite;

Quelle est l'erreur que j'ai faite ? J'ai oublié un signe moins, un signe moins global. Vous voyez si vous êtes attentif, quand vous calculez le signe qui est ici, vous trouverez malheureusement qu'il y a un signe moins global ici (*mettant un signe moins en gras devant l'expression pour $N_{\text{osc}}^{\zeta}(E)$*).

Maintenant c'est vraiment problématique, ce signe moins global. Parce que vous pouvez essayer de dire qu'en mettant des exposants plus grands, etc, mais ça ne sera jamais consistant avec le signe moins. Parce que ça serait un certain i élevé à une certaine puissance n , et ça ne consisterait jamais à vous donner le signe moins. Donc c'est un gros problème.

(une remarque d'un auditeur : "Pourquoi est-ce un problème ?") Bon vous avez deux oscillations, l'une d'elles est une sorte d'oscillation positive et l'autre une oscillation négative. Vous n'avez aucun moyen de dire que vous savez.

Donc ceci est vraiment le tout début, la raison pour laquelle une approche relativement naïve comme celle de Dyson ne marche pas. Et si vous souhaitez avancer, il est vraiment nécessaire que vous étendiez le cadre.

Il y a une autre chose bien sûr qui devrait être faite par rapport à ce problème et qui est de comprendre en quelque sorte quel est le paradigme correct dans lequel il faut penser aux fonctions zeta. Laissez-moi aller vers ce point, ce paradigme est :

Les corps globaux et la géométrie algébrique.

L'idée ici est la suivante : après un petit temps, vous trouvez que la fonction zeta qui est associée à un corps, qui est le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q} = K$, et vous trouvez que les seules propriétés de ce corps qui sont réellement utilisées principalement (*mal audible*), ce que vous aurez, c'est qu'il y aura des fonctions zeta pour des corps comme $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, le corps des nombres algébriques (*qu'il écrit $a\mathbb{Q}\#$*). Mais il sera isomorphe à K . Mais il s'avère qu'il y a un autre cas particulier de ce fait "quels sont les bons corps ?" pour traiter le problème et ce sont les corps de fonctions, les corps de fonctions sur une courbe Σ mais maintenant, plutôt que de travailler dans des corps finis de nombres, vous travaillez sur des corps finis de fonctions sur Σ , \mathbb{F}_q . Donc ce qui est le plus important, ce n'est pas que vous ayez ces deux cas particuliers, vraiment, ce qui est le plus important, c'est que les corps pour lesquels le problème est bien posé et par chance, la réponse soit positive et puisse être définie conceptuellement de manière fructueuse, et c'est vraiment ce qui importe. Ces corps sont techniquement appelés des corps globaux mais laissez-moi vous fournir leur définition.

La définition est la suivante : un corps K (je considère un corps dénombrable, il n'a pas de structure topologique). Donc K est global si et seulement si K est dans un anneau localement compact A dont nous devons supposer qu'il est non discret et semi-simple, et $K \subseteq A$ et c'est un sous-ensemble et parfois il y a égalité. Par cette égalité, je veux dire qu'il est discret et co-compact.

Donc ce que vous déduisez de cette égalité, c'est que même si le corps lui-même n'a pas de topologie connue, il est lié par cette relation à un anneau localement compact qui bien sûr a une topologie très intéressante et en quelque sorte, il s'avère de plus que cet anneau est unique. Notamment K détermine A et A détermine K . Et l'hypothèse de Riemann devrait être vraie pour cette situation, pour tous les corps globaux. Maintenant il s'avère que vous pouvez spécialiser votre étude au cas des corps de fonctions, et ce qui se produit là c'est que vous avez quelque chose de mieux qui agit pour vous au sens où vous avez une sorte de dictionnaire, une sorte de dictionnaire de ce texte bilingue qui vous permet de traduire immédiatement les propriétés que vous trouvez techniquement pour la théorie de la fonction zeta correspondante, pour les traduire géométriquement ; si vous voulez, c'est comme la première chose que vous obtenez, il s'avère que les zéros de ζ ont là une interprétation spectrale claire :

Le dictionnaire est le suivant :

zéros de ζ	valeurs propres du Frobenius agissant sur $H_{\text{et}}^1(\overline{\Sigma}, \mathbb{Q}_l)$
Expansion fonctionnelle	Dualité de Poincaré
Formules explicites	Formule de Lefschetz
Hypothèse de Riemann	inégalité de Castelnuovo

(*Première ligne du dictionnaire*) : Le corps fini \mathbb{F}_q n'est pas algébriquement clos et vous avez besoin de passer là par le produit agissant sur un certain espace étrange qui est appelé la cohomologie étale de la courbe avec des valeurs qui malheureusement ne sont pas des nombres complexes, ce qui serait trop beau, mais des nombres l -adiques, où l est premier à la caractéristique du corps. Donc en quelque sorte, vous n'obtenez pas vraiment l'interprétation spectrale mais vous l'obtenez presque parce que vous obtenez effectivement un espace qui n'est pas un espace de Hilbert complexe mais qui n'en est pas loin.

Alors la seconde chose que vous avez, c'est que l'équation fonctionnelle correspond à la dualité de Poincaré pour cette cohomologie.

La ligne suivante qui est extrêmement importante est celle des formules explicites. Donc qu'est-ce qu'une formule explicite, par exemple pour $SO(1)$, et si vous comprenez cela, vous comprendrez que vous savez ce que c'est : dans $SO(1)$, une formule explicite, c'est une formule qui relie les zéros aux premiers dans le développement du produit eulérien. Dans $SO(1)$, nous avons vu comment calculer le terme oscillant donné asymptotiquement par cette formule. C'est typique de ce que vous avez dans les formules explicites. Donc la formule explicite est en fait identique à la formule de Lefschetz pour le Frobenius. Notamment, quelle est cette formule ? À quoi ressemble la formule de Lefschetz ? C'est une transformation de Fourier qui vous dit juste que si vous comptez le nombre de points fixes d'une certaine transformation φ , vous pouvez les compter par la formule suivante :

$$\#\text{fix } \varphi = \text{Trace } \varphi/H^0 - \text{Trace } \varphi/H^1 + \text{Trace } \varphi/H^2$$

(*Traces de l'action de φ sur H^0 (resp. H^1 , resp. H^2)).*)

C'est vraiment ce que vous avez. Bon. Et alors, vous poursuivez et vous avez un beau dictionnaire pour comprendre ce texte bilingue qui vous permet de penser aux choses, parce que vous avez des notions géométriques. C'était ce que je voulais fournir parce qu'en général, je veux donner des outils qui permettent de penser géométriquement.

Maintenant nous voyons tout de suite à partir de la formule de Lefschetz quel était le problème dans cette étrange approche et pourquoi nous avons ce problème du signe moins global.

À partir de ce dessin, nous voyons immédiatement la solution : quand on regarde cette dernière formule (*montrant H^1 dans la première ligne du dictionnaire*), on voit que la réalisation spectrale est dans H^1 ; mais quand on regarde cette dernière formule, on voit que H^1 est précédé par un signe moins. H^0 est un espace très trivial, c'est un espace à une dimension et par dualité, H^2 est aussi un espace trivial en 1-dimension. Dans la formule, vous voyez le signe moins global avant la partie concernant H^1 . Donc vous êtes coincé, cela vous dit que vous aviez tort de chercher une interprétation spectrale au sens de ce que les physiciens appellent un spectre d'émission. (*une remarque d'un auditeur, mal audible*), (*il a raison mais AC dit qu'il reviendra à la remarque ultérieurement*). Maintenant le point problématique est vraiment le suivant : quelle est la leçon de cela ? La leçon de cela est que maintenant on comprend quel était le problème. L'information C est la suivante :

Ⓒ L'interprétation spectrale des zéros de Pólya-Hilbert devrait être un spectre d'absorption.

Qu'est-ce que je veux dire par là ? Je vais le dire dans le domaine de la physique habituelle : quand vous regardez une étoile très éloignée, ce que vous voyez dans la lumière qu'elle émet c'est qu'un certain nombre de raies lumineuses sont manquantes, c'est un certain nombre de raies noires. Vous ne voyez pas le foncé avec un certain nombre de raies blanches, ce que vous voyez, ce sont des lignes manquantes. En d'autres termes, ce que je suis en train de dire c'est que vous devriez vous attendre à ce que cet espace apparaisse non tel quel, mais à partir de son négatif. Dans un langage opérationnel mathématique plus fantaisiste, il devrait apparaître comme un conoyau, il devrait apparaître comme une différence. Donc, c'est extrêmement important bien sûr. Et il y a autre chose que nous apprenons, en continuant avec ce dictionnaire, qui est si vous voulez ce que devrait être le groupe. Si vous regardez la situation d'une caractéristique positive, notamment la situation où l'on prend une courbe dans notre corps fini, alors ce qui arrive c'est que ce n'est pas un flot que vous obtenez, c'est vraiment une seule transformation qui est la transformation de Frobenius. Donc ce que vous avez ici ce sont les entiers naturels \mathbb{Z} . Ce n'est pas un flot. Cela peut vous gêner parce que vous pourriez vous dire "Comment vais-je trouver une réponse générale, si dans un cas je cherche une action pour \mathbb{Z} , et dans l'autre cas, face à une caractéristique 0, je cherche une action de \mathbb{R} . Maintenant ce que vous obtenez rapidement, c'est qu'à cause de la théorie du corps de classe, ces deux groupes en fait (*reliant \mathbb{Z} et \mathbb{R} à un troisième objet les englobant tous les deux*) ont une formulation générale. Le vrai groupe, le groupe que vous devriez chercher et qui devrait agir sur l'espace est le suivant : c'est $G = \text{GL}_1(\mathbb{A})/\text{GL}_1(K)$. Ce groupe a un nom, on l'appelle le groupe des classes d'idèles. Une étape essentielle dans la théorie du corps de classe est que ce groupe est à un groupe compact près isomorphe à \mathbb{Z} quand vous prenez la situation des corps finis et il est isomorphe à \mathbb{R} quand vous prenez le cas des corps de nombres. Donc en quelque sorte, ce que vous rassemblez de cela est ce qui remplacera le Frobenius. Et quand nous remplaçons le groupe en général, ce n'est pas \mathbb{Z} ou \mathbb{R} (la droite réelle) mais c'est ce groupe. (*Donc il écrit la condition D.*)

Ⓓ Le groupe qui agit n'est pas \mathbb{Z} ou \mathbb{R} mais c'est le groupe $G = \text{GL}_1(\mathbb{A})/\text{GL}_1(K)$ (les éléments inversibles dans \mathbb{A} évalués par $\text{GL}_1(K)$).

Ce groupe a un nom, il s'appelle le groupe des classes d'idèles, et le terme idèle précise le terme adèle. Le terme idèle vient de la notion d'idéal dans un corps de nombres et alors il y a les classes d'idéals, puis les idèles, et finalement les adèles. Donc ce qui est connu de nombreux théoriciens, c'est que ceci est le paradigme correct pour notre sujet.

C'est l'information que nous avons, mais maintenant bien sûr, nous devrions trouver l'espace. Pour une autre raison que je ne veux pas décrire qui est due à la mécanique statistique et qui est la

première ligne du dictionnaire de la géométrie non-commutative, on est immédiatement amené à l'espace et au flot suivants

$$\text{Espace } X = \mathbb{A}/\text{GL}_1(K)$$

L'espace est extrêmement simple et c'est l'espace que je considérerai. Notamment, je considère deux adèles a et b et je dis (en notant K^* les éléments inversibles de K , qui ne sont pas nuls) :

$$a \sim b \iff \exists q \in k^* \text{ tel que } a = bq$$

C'est mon espace. Et il est en quelque sorte évident que vous avez une action sur le groupe des classes d'idèles, notamment le quotient sur cet espace. Pourquoi ? Parce que $\text{GL}_1(\mathbb{A})$ agit sur \mathbb{A} simplement par ceci : si je prends $j \in \text{GL}_1(\mathbb{A})$ et si je prends $x \in \mathbb{A}$, je leur associerai jx , leur produit. L'action la plus simple qu'on peut prendre, c'est de prendre juste le groupe multiplicatif sur le groupe additif. Et parce que je veux qu'il agisse non pas par $\text{GL}_1(\mathbb{A})$, mais par le quotient par $\text{GL}_1(K)$, je dois diviser, donc je veux dire que ceci est si simple (*mal audible*).

Donc laissez-moi écrire le premier théorème. Le premier théorème est l'interprétation spectrale.

Pour l'énoncer, il y a des petits sujets complètement sans lien et je les mets ici : c'est à propos du fait que ce groupe G est un peu plus gros que \mathbb{R} ou \mathbb{Z} , il a une partie compacte, donc laissez-moi juste vous rappeler cela :

$$\begin{array}{ll} G = K \times \mathbb{R}_+^* & \text{corps de nombres} \\ G = K \times \mathbb{Z} & \text{corps de fonctions} \end{array}$$

Ne vous inquiétez pas trop à propos de cette partie K (*soulignant K dans les deux lignes ci-dessus*). Ce K est important parce que quand je décrirai l'espace de Hilbert, je devrai le décomposer selon le caractère de K . Donc cela introduira quelques notations mais ne vous inquiétez pas. Vous pourriez vous restreindre au cas d'un espace de Hilbert qui est un corps de type K .

Je vais maintenant vous donner l'interprétation des zéros et je n'aurai même pas besoin de définir les fonctions zeta en général, ou les L -fonctions. C'est le test pour une interprétation spectrale, vous ne devriez pas avoir à définir les fonctions zeta, vous ne devriez pas avoir besoin de prolonger analytiquement, mais vous devriez être capable de définir les zéros, directement, sans rien faire.

Théorème 1. *Soit E l'application qui est la restriction de $L_\delta^2(X) \rightarrow L_\delta^2(G)$ (texte du théorème complété plus bas)*

J'expliquerai pourquoi je dois mettre cette petite décoration δ pour L^2 . Ce que je suis en train de dire ici est extrêmement simple : à l'intérieur de X , j'ai le groupe G parce que si je prends un élément de $\text{GL}_1(G)$, si c'est un élément inversible de \mathbb{A} , c'est un élément de \mathbb{A} , OK?! Donc à l'intérieur de mon espace X , j'ai un espace beaucoup plus trivial, qui est l'espace G . Donc je considère la restriction de l'application, je définirai le morphisme d'espace plus tard, et je l'appelle E . Qu'est-ce que $L_\delta^2(G)$, c'est la représentation régulière de G , mais je mets un poids, juste pour contrôler l'additivité de Hecke (grösse-additivité), c'est trivial d'un point de vue calculatoire. Maintenant l'assertion présumée est qu'alors, l'espace \mathcal{H} , qui est le conoyau de E , est l'espace de Pólya-Hilbert.

Mais pour vous expliquer comment l'espace est l'espace de Hilbert, je dois vous expliquer quel est l'opérateur. Mais qu'avons-nous ? Ce que nous avons, c'est une représentation du groupe G .

Théorème 1. Soit E l'application restriction de $L^2_\delta(X) \rightarrow L^2_\delta(G)$ alors l'espace \mathcal{H} , qui est le conoyau de E , est l'espace de Pólya-Hilbert, i.e. avec G agissant sur X par W (et sur G lui-même) vous pouvez décomposer \mathcal{H} comme une somme directe

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{K}} \mathcal{H}_\chi,$$

soit

$$D_\chi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{W(e^\epsilon) - W(1)}{\epsilon}.$$

χ est un caractère de K (i.e. est dans \widehat{K}), je restreins l'action du groupe G au sous-groupe compact K . Je décompose bien sûr l'action selon les caractères de ce sous-groupe compact. Donc, j'obtiens une somme d'espaces de Hilbert. Sur chacun de ces espaces de Hilbert, développons l'opérateur. U est la représentation dans $L^2_\delta(X)$, V est la représentation dans $L^2_\delta(G)$, et W est la représentation dans le quotient, G agit par W . Cela est clair parce que tout espace est en quelque sorte covariant constructif de telle façon qu'il a une (*mal audible*) représentation.

(réponse à une question) : Le groupe des classes d'idèles a un sous-groupe compact maximal que j'appelle K , c'est tout..

Maintenant laissez-moi écrire une assertion qui est beaucoup plus précise :

(suite du Théorème 1)

Alors le spectre de D_χ est discret, purement imaginaire, (il n'est pas auto-adjoint parce que c'est comme un générateur d'un groupe d'isométrie), et de plus, un élément ρ appartient au spectre de G_χ si et seulement si deux contraintes sont satisfaites (χ est appelé un caractère de Hecke (i.e. grössen-caractère)) :

$$\rho \in \text{Sp } D_\chi \iff \begin{cases} (\chi, \frac{1}{2} + \rho) = 0 \\ \Re \rho = 0 \end{cases}$$

Je n'obtiens pas tous les zéros, j'obtiens seulement ces zéros qui ont la partie réelle correcte. De plus, vous pouvez démontrer a priori (ça n'est pas très difficile à voir)... (*interruption* : "Vous pouvez obtenir tous les zéros (*mal audible*).") "Oui, mais vous ne pouvez pas prouver cela à cette étape. C'est très important, vous savez. Vous savez, la stratégie complète est de démontrer cela plus tard, mais à cette étape, ce que vous avez, c'est la situation suivante. Vous ne pourriez pas le prouver, ce serait complètement fou, d'espérer cela à cette étape, que vous puissiez obtenir tous les zéros. C'est de la folie. Pourquoi est-ce de la folie ? Parce qu'en quelque sorte, si vous voulez, c'est vrai qu'un opérateur D_χ de cette sorte a un spectre purement imaginaire, c'est comme la formule du rayon du spectre, quand vous appliquez le Frobenius, graduellement, vous rétrécissez le spectre, c'est un peu délicat. Pourtant, il serait fou d'attendre cela, le point est qu'en quelque sorte, si vous voulez, la compréhension de quels zéros vous obtenez découlera, comme dans le cas de Selberg, de la formule de trace. En quelque sorte, c'est comme une histoire de petit epsilon (*mal audible*). Pourtant, laissez-moi vous dire le fait suivant : même pour la fonction zeta de Riemann, je n'ai pas eu à amener le prolongement analytique, mais seulement à définir la fonction zeta de Riemann ou la L -fonction, je n'ai pas défini le (*Lefschetz ? mal audible*). Ce que je suis en train de vous raconter, c'est que juste par une histoire très simple, du groupe additif et du groupe multiplicatif, d'un corps global, que j'ai écrit là-haut, sortant de la comparaison entre la multiplication et l'addition, tombent (*mal audible*) les zéros des L -fonctions. Vous n'avez pas eu besoin de définir quoi que ce soit, en quelque sorte le

problème se présente comme celui de comprendre la droite. Mais ce n'est pas la droite réelle, c'est la droite adélique. Ce que je suis en train de dire, c'est que si vous essayez de comprendre la droite adélique, vous aurez immédiatement besoin d'un espace comme celui-là pour comprendre les zéros.

Maintenant, comme je l'ai dit, le gros problème est que ok, vous avez les zéros qui sont sur la droite critique mais comment savez-vous que vous les avez tous. Pour faire cela, la chose naturelle à faire... D'abord, je devrais dire pourquoi c'est L^2 et pourquoi ce n'est pas de la quantification. C'est très clair. La raison pour laquelle c'est L^2 , c'est parce que l'espace est comme l'espace des feuilles du Lagrangien dans un feuilletage quand vous (*mal audible*) à partir de l'espace propre.

Maintenant, je poursuis et la chose naturelle à faire maintenant est de calculer la trace, notamment, ce qu'on veut, c'est avoir une formule de trace qui calcule la trace suivante d'une intégrale d'une certaine fonction $h(g)$:

$$\text{Trace} \int_{g \in G} h(g) W(g) d^*g$$

où d^*g est la mesure de Haar du groupe. G est un groupe localement compact, il a une mesure de Haar et etc, et maintenant, ce que nous voudrions faire, c'est calculer cette trace. Bien sûr, du côté spectral, nous savons ce qu'est cette trace. Elle est juste égale à :

$$\text{Trace} \int_{g \in G} h(g) W(g) d^*g = \sum_{\rho} \hat{h}(\chi, \rho)$$

(ρ , l'indice de la somme satisfait les conditions apparaissant dans le théorème 1 ci-dessus). $\hat{h}(k)$ est la transformation de Fourier de h évaluée sur un caractère de Hecke (größen-caractère) χ et sur ρ .

C'est exactement la même chose dans la situation de Selberg, on a d'un côté le côté spectral, le calcul de la trace, mais maintenant, ce que vous voulez, c'est une autre trace. Ici vous avez que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres. Maintenant, ce que vous voulez, c'est une autre formule qui vous dit que la trace de la matrice est donnée par la somme de ses éléments diagonaux. Et c'est exactement où la formule de Lefschetz entre en jeu. Qu'avons-nous ? Nous avons un espace qui est $L^2_{\delta}(X)$ et nous définissons h comme étant le conoyau. Donc qu'est-ce que cela signifie d'être le conoyau ? Cela signifie que vous aurez comme une séquence exacte :

$$0 \rightarrow L^2_{\delta}(X) \rightarrow L^2_{\delta}(G) \rightarrow h \rightarrow 0$$

Qu'est-ce que cela nous dit ? Cela dit que si vous voulez calculer la trace ici (*soulignant* h), vous devriez calculer et avoir que la somme de la trace $L^2_{\delta}(X)$ et de la trace h est égale à la trace $L^2_{\delta}(G)$. C'est exactement là que le signe moins intervient bien sûr. Parce qu'au sortir d'une telle formule, vous allez obtenir que la trace sur h est moins la trace sur $L^2_{\delta}(X)$ plus la trace sur $L^2_{\delta}(G)$. Mais la trace ici (*soulignant* $L^2_{\delta}(G)$) est très triviale à calculer parce que c'est la trace de la transformation régulière, qui est proportionnelle à h de 1. Donc il n'y a pas de problème. Donc vous voyez que le problème complet est de comprendre quelle est la trace dans cet espace (*entourant* $L^2_{\delta}(X)$).

Quelle est la trace dans cet espace ? Qu'avons-nous ? Nous avons un espace X sur lequel G agit par transformation. Nous voulons calculer la trace d'un groupe de difféomorphismes pour un flot agissant sur cet espace X . Et ce que nous avons pour ça, c'est exactement le groupe de Atiyah et Bott pour une formule de Lefschetz par exemple, dans le cas des variétés, et dans les cas plus élaborés.

Laissez-moi faire quelques rappels : si vous prenez une variété M et φ un difféomorphisme sur la variété (i.e. $M, \varphi \circ$). Alors vous pouvez regarder l'opérateur suivant qui est

$$(U\chi)(x) = \xi(\varphi(x)).$$

On peut réécrire cela comme une intégrale :

$$(U\xi)(x) = \xi(\varphi(x)) = \int k(x, y)\xi(y)dy$$

où $k(x, y)$ est juste les coordonnées, c'est la fonction delta $\delta(y - \varphi(x))$. J'ai juste réécrit le noyau.

Que devrait être la trace ? Ça devrait être :

$$\text{"Trace"}(U) = \int k(x, x) dx = \int \delta(x - \varphi(x))dx$$

Bien sûr, elle n'existera que sur les points fixes, sinon la fonction zeta s'évanouit. Et près des points fixes, vous pouvez faire un changement de variable, et cela vous donnera que cette intégrale est égale à :

$$\int \delta(x - \varphi(x))dx = \sum_{\varphi(x)=x} \frac{1}{|1 - \varphi'(x)|}$$

Le dénominateur de la fraction est un déterminant.

Donc en d'autres termes, je n'ai fait rien d'autre que réécrire le fait que la trace d'une matrice d'application est la somme des éléments diagonaux mais comme ces éléments diagonaux sont continus, je dois introduire un facteur transversal qui est là (*montrant la dernière fraction au-dessus*).

Cela s'étend bien sûr immédiatement aux flots. Vous savez, je suppose, comment déduire la formule de Lefschetz de cela : vous écrivez juste la même formule pour l'action sur une forme différentielle et alors, au dénominateur, vous obtenez non pas la valeur absolue du déterminant mais vous obtenez le déterminant.

Donc maintenant, cette formule s'étend aux flots, et qu'est-ce qu'elle vous donne ? Vous prenez un flot maintenant, c'est un petit peu plus compliqué, parce que vous devrez distinguer les orbites périodiques du flot et les zéros du flot. Il y aura deux types de contributions mais la formule sera essentiellement la même. Donc laissez-moi d'abord l'écrire d'une manière fantaisiste et ensuite d'une manière élégante. Donc pour un flot, si vous prenez la trace de l'intégrale de $h(t)U(t)dt$:

$$\text{Trace} \int h(t)U(t)dt$$

(*soulignant $U(t)$, ceci est $\xi(f_\sigma(x))$*) (*mal audible*) Utilisez une transformation de fonctions qui transforme cela, (*et écrivant devant ce qu'il vient d'écrire*) en $(U_t\xi)(x)$. C'est égal à ça : vous avez un flot F_t , F_t est l'exponentielle du champ de vecteurs (i.e. $F_t = \exp t\nu$). Donc laissez-moi d'abord écrire la formule en termes fantaisistes. Ce que vous aurez, c'est une somme d'orbites périodiques d'abord, il y aura des points fixes donc vous aurez des orbites périodiques, et chacune d'elles contribuera par la somme (*écrivant*) mais maintenant ce sera pour m appartenant à \mathbb{Z} :

$$\text{Trace} \int h(t)U(t)dt = \sum_{\gamma} \sum_{m \in \mathbb{Z}} T_{\gamma}^* \frac{h(mT_{\gamma}^*)}{|1 - F_{T/mT_{\gamma}^*}|} + \sum_{\nu_i=0} \int \frac{h(u)}{|1 - F_u^*|} du$$

(T_γ^* est la longueur de l'orbite primitive). Ceci est la première contribution et vous avez une autre contribution qui est la somme des zéros du flot et chaque zéro contribue par une intégrale, le dénominateur est l'application tangente du flot.

Bien sûr, je ne veux pas avoir décrit la forme parce que je veux avoir cette formule par ses ingrédients. Quelle est la belle formule ? C'est la suivante, il s'avère que c'est une somme en fait, sur toutes les orbites périodiques, qu'il y ait un point ou une orbite non triviale, et pour chacune d'elles, vous écrivez une intégrale, même pour ça (*pointant la première somme*), vous écrivez une intégrale. C'est une intégrale sur le groupe isotrope pour tout point dans l'orbite. Donc ce serait (*mal audible*)

$$\begin{aligned} \text{Trace} \int h(t)U(t)dt &= \sum_{\gamma} \sum_{m \in \mathbb{Z}} T_{\gamma}^* \frac{h(mT_{\gamma}^*)}{|1 - F_{T/mT_{\gamma}^*}|} + \sum_{\nu_i=0} \int \frac{h(u)}{|1 - F_u^*|} du \\ &= \sum_{\text{periodic orbit}} \int_{I_x} \frac{h(u)}{|1 - F_u|} \end{aligned}$$

Bien, d^*u est la mesure de Haar sur l'isotropie, qui est normalisée jusqu'à ce qu'elle ait un covolume 1. Quand vous avez ce premier facteur ici (*soulignant T_γ^* dans la première ligne de la dernière formule ci-dessus*), cela vous dit que la vraie mesure est la mesure de comptage multipliée par ce facteur. Et ceci a comme covolume 1.

Donc cette formule n'est pas très difficile à prouver, elle est juste spectrale, et ce qui n'est pas difficile à justifier c'est cela, parce que je mets une valeur absolue au dénominateur plutôt que de prendre le déterminant, cette formule continue d'être satisfaite quand vous prenez un corps local, et si vous prenez les adèles, et etc.

Donc ce que je vais écrire maintenant, c'est simplement la même formule pour l'action du groupe G sur cet espace. Et je continue juste et je l'écris. Quand vous calculez les orbites périodiques sur ce flot, et que vous trouvez qu'ils sont paramétrés exactement par des rangs, en fait par ce que les théoriciens des nombres appellent des places, il y a davantage de premiers parce qu'il y a aussi des nombres premiers à l'infini qui sont appelés des places. Donc ce que vous obtenez, c'est une somme, vous avez juste à la calculer, naïvement, et alors vous obtenez les mêmes types de termes que dans la formule précédente, une intégrale, et vous calculez l'isotropie qui correspond à chaque place et vous trouvez que c'est ce qu'on appelle un corps local à la place t , notamment vous prenez le corps K , vous le complétez à la place, et vous obtenez le sous-groupe non trivial qui est contenu comme un sous-groupe du groupe G , cette inclusion est bien connue en théorie des corps de classes, donc vous êtes sur la bonne voie, maintenant ce que vous obtenez, vous obtenez un terme qui est $h(u^{-1})$ (l'inverse de u) sur $|1 - u|_v$ (i.e. le module de 1 moins u dans le corps local) et finalement vous avez la mesure de Haar multiplicative d^*u normalisée sur le corps local de telle façon qu'elle ait comme covolume 1. C'est ce que vous obtenez de la trace, par ce calcul.

$$\sum_{v \text{ a place}} \int_{K_t^* \subset G} \frac{h(u^{-1})}{|1 - u|_v} d^*u$$

Maintenant ce que vous faites, c'est que vous ouvrez un livre de théorie des nombres, quels sont les ingrédients d'André Weil, le livre dans lequel il a pris le travail de Riemann et il a essayé de réécrire cette formule explicite très compliquée de Riemann (dans laquelle interviennent des valeurs principales, etc), et il trouve lui-même cette formule (*montrant la dernière formule qu'il a encadrée*). En d'autres termes, cette formule est calculée par Weil et qu'est-ce que c'est ? À quoi est-elle égale ? Bon, est-elle égale à la suivante ? Weil dit que ceci est égal à la transformation de

Fourier de h en 0 plus la transformation de Fourier de h en 1 moins (et c'est à nouveau notre signe moins) la somme sur les zéros des L -fonctions (l'indice est $L(\chi, \rho) = 0$, (*écrivait le ρ , il dit "et vous la prenez sur un caractère de Hecke (un grössen-caractère)"*, comme ici, montrant le caractère de Hecke (*grössen-caractère*) précédent sur un tableau éloigné) sur la transformation de Fourier de χ et ρ .

$$\sum_{v \text{ a place}} \int_{K_t^* \subset G} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|_v} d_u^* = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{L(\chi, \rho)=0} \widehat{h}(\chi, \rho)$$

Maintenant vous regardez en arrière, et il n'est pas difficile de voir (je n'ai pas assez de temps pour définir l'espace $L_\delta^2(X)$ mais c'est très facile de voir que quand vous le définissez, vous devez imposer que la fonction s'évanouit en zéro et que sa transformation de Fourier s'évanouit en zéro, parce que le point 0 et l'espace X sont fixés par l'action du groupe G .

Donc ce que vous trouvez quand vous calculez cette trace... est que si vous pouviez, bon, ceci est vraiment le point principal. Le point principal est le suivant : si l'on peut justifier la formule de trace là-bas (qui a été justement calculée par Lefschetz), alors vous obtenez la chose suivante :

$$\widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\chi=0} \widehat{h}(\chi, \rho) = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\substack{\chi=0 \\ \Re(\chi)=\frac{1}{2}}} \widehat{h}(\chi, \rho)$$

(du côté gauche, la somme est calculée sur tous les zéros, du côté droit, seulement sur ceux qui sont sur la droite critique).

Maintenant il est très facile de déduire de cela que la fonction de test lambda h (*mal audible*). Laissez-moi juste dire une chose. La formule de Weil était très étonnante pour moi la première fois (*?? mal audible*) et il y a un fait qui est complètement évident sur cette forme. Laissez-moi vous raconter ce que c'est. C'est qu'à chaque fois que la fonction h est positive, au sens naïf, où $h(u)$ est positif pour toute valeur de u , alors cette forme (*la dernière écrite*), est positive, c'est complètement évident. Donc en quelque sorte, ce que vous savez, c'est que si vous voulez obtenir une formule de trace, cela ne pourrait pas être une formule de trace d'une nature trop compliquée d'un point de vue théorique, parce qu'il n'est pas vrai en général que quand vous prenez la trace d'un opérateur, elle sera positive. (*mal audible*). C'est seulement vrai à la terminaison du système. Cette formule a été échelonnée pour une interprétation, exactement comme pour le Frobenius, par permutation de l'espace.

Pendant quelques temps, j'ai vraiment essayé de justifier cette formule rigoureusement, il y a des problèmes et l'un d'eux est que vous avez des valeurs principales, exactement comme dans celle de Selberg, et etc. Il y a un très joli fait de Selberg qui est que quand vous calculez les valeurs de la trace de Selberg, vous trouvez exactement les mêmes que dans la formule d'André Weil, et elles font intervenir la constante d'Euler et un $\log(2\pi)$, c'est un scalaire (*mal audible*). Après un certain temps, j'ai plutôt pensé qu'au lieu d'essayer de justifier sans retard cette formule, peut-être devrais-je plutôt simplement dire la chose suivante : on est exactement dans la même situation que dans le cas des corps finis dans lesquels on a une courbe, et le rôle de cette courbe... vous voyez, la courbe est comme la différence entre G et X . C'est un cercle et quand vous le calculez, vous trouvez exactement les bonnes orbites du Frobenius. On doit remplacer pour le Frobenius, on a une interprétation spectrale, comme la première évolution temporelle, et on a les autres lignes du dictionnaire, par exemple la formule de Lefschetz avec les formules explicites. Il est possible que l'hypothèse de Riemann soit beaucoup plus profonde. Ces éléments sont peut-être seulement les premières lignes de la démonstration, mais ma conviction, et c'est la raison pour laquelle je

souhaitais parler dans ce meeting, est la suivante : c'est que je crois que c'est en comprenant de mieux en mieux les aspects dynamiques de cet espace et quelle est la géométrie derrière cet espace que nous serons capables d'imiter exactement ce qu'André Weil a fait dans le cas des courbes et des corps finis, et finalement de rendre l'hypothèse de Riemann évidente, de telle façon qu'elle tombera, comme un fruit mûr. Donc je considère cela comme une ambition extrêmement forte de ne pas se sentir limité, et de borner l'étude à des espaces géométriques classiques, il faut comprendre quelle est la géométrie de l'espace X dans le paradigme non-commutatif.

Automorphismes périodiques du facteur hyperfini de type II_1

A. Connes

Introduction

Il y a de nombreuses constructions de facteurs qui donnent naissance au facteur hyperfini de type II_1 , que nous noterons R dans la suite. Par exemple 1) tout produit tensoriel infini d'un nombre dénombrable d'algèbres matricielles selon leur trace, 2) la construction de l'espace du groupe de mesure pour une mesure ergodique préservant les transformations, 3) la représentation régulière à gauche d'un groupe discret localement fini avec classes de conjugaison infinies.

À chacune de ces façons d'obtenir R correspondent des automorphismes de R . Deux automorphismes α et β of R sont conjugués quand pour un certain automorphisme σ de R on a $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta$.

Le problème le plus simple non trivial de la théorie ergodique est certainement celui de classifier, à conjugaison près, les automorphismes périodiques de R . Il s'avère qu'une classification complète est possible, au moyen d'invariants très simples que nous allons maintenant décrire.

Notons d'abord que le problème de la conjugaison se sépare en deux problèmes :

- le problème de la conjugaison extérieure : décider s'il existe, étant donné $\alpha, \beta \in \text{Aut } R$ un automorphisme intérieur $\text{Ad } W$ tel que β est conjugué de $\text{Ad } W \cdot \alpha$
- le problème de la conjugaison intérieure : étant donné $\alpha \in \text{Aut } R$ décider quels W , unitaires dans R , sont tels que $\text{Ad } W \cdot \alpha$ est conjugué de α .

Pour résoudre le problème a) on définit d'abord deux invariants de conjugaison extérieure :

- $p_0(\alpha)$ est la période extérieure de α défini comme l'entier tel que, pour $n \in \mathbf{Z}$, $\alpha^n \in \text{Int } R \iff n \in p_0(\alpha)\mathbf{Z}$.
- $\gamma(\alpha)$ est un nombre complexe de module 1 défini par l'implication : U unitaire dans R , $\alpha^{p_0(\alpha)} = \text{Ad } U \implies \alpha(U) = \gamma U$. On vérifie par calcul direct (prop. 1.4) que p_0 et γ sont invariants de classes de conjugaison extérieures et que $\gamma(\alpha)^{p_0(\alpha)} = 1$.

On trouve pour chaque couple $p \in \mathbf{N}$, $\gamma \in \mathbf{C}$, avec $\gamma^p = 1$, un automorphisme de R , s_p^γ , de période égale à $p \cdot \text{Ordre de } \gamma$ et tel que

$$p_0(s_p^\gamma) = p, \quad \gamma(s_p^\gamma) = \gamma \quad (\text{prop. 1.6}).$$

On démontre que les invariants p_0, γ classifient complètement les automorphismes périodiques de R , à conjugaison extérieure près, de telle façon que tout automorphisme périodique de R est conjugué extérieur d'un (et d'un seul) des s_p^γ (théorème 6.2).

Reçu le 5 février 1975.

Référence http://acta.bibl.u-szeged.hu/14612/1/math039_fasc01_02_039-066.pdf

Traduction : Denise Vella-Chemla, juin 2022.

La preuve s'appuie sur l'introduction d'une structure de groupe sur l'ensemble Br_p , des classes de conjugaison extérieures des automorphismes de période extérieure p . On vérifie que si α et β sont de telles classes alors $\alpha \otimes \beta$ est également une classe appartenant à Br_p , ainsi que la classe de l'opposé α^0 de α , une fois que $R \otimes R$ et R^0 (le facteur opposé de R) sont identifiés avec R par un certain isomorphisme (les classes $\alpha \otimes \beta$ et α^0 étant bien sûr indépendantes de cet isomorphisme).

Une fois ceci fait, on démontre que Br_p est un groupe d'opération inverse $\alpha \rightarrow \alpha^0$ et que γ est un isomorphisme de Br_p sur le groupe des racines $p^{\text{ièmes}}$ de 1 dans \mathbf{C} .

La preuve de l'injectivité de γ , i.e. de l'unicité de la classe de conjugaison extérieure avec invariants extérieurs $(p, 1)$, est obtenue grâce à une technique de séquences centrales, comme cela a été utilisé par D. MCDUFF dans [7] (voir le théorème 5.1).

Le lecteur familier avec la construction du groupe de Brauer $B(k)$ d'un corps commutatif arbitraire k reconnaîtra l'analogie avec la construction de Br_p ci-dessus - les objets que nous étudions sont des automorphismes périodiques de R et le concept de similarité des algèbres centrales simples sur k correspond au concept de conjugaison extérieure de deux automorphismes périodiques. Le rôle des algèbres de division est joué par l'automorphisme périodique *minimal* : α est dit minimal périodique quand sa période est la plus petite période de sa classe de conjugaison extérieure. Exactement comme tout algèbre centrale simple sur k est le produit tensoriel d'une unique algèbre de division par une algèbre de matrices $M_n(k)$, on a que tout automorphisme périodique de R est le produit tensoriel d'un automorphisme périodique minimal (déterminé de manière unique à conjugaison près) par un automorphisme intérieur (théorème 1.11). De plus, les automorphismes minimaux sont également caractérisés par le fait que leur algèbre de point fixe est un facteur (théorème 2.5).

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\gamma \in \mathbf{C}$, $\gamma^p = 1$, l'automorphisme s_p^γ est l'unique automorphisme minimal de la classe de conjugaison extérieure avec invariants extérieurs p, γ .

Aussi, le produit tensoriel de deux algèbres de division sur k peut ne pas être une algèbre de division et de la même façon que le produit tensoriel de deux automorphismes minimaux peut ne pas être minimal. La réponse au problème b) est obtenue en définissant l'invariant intérieur (a) d'un automorphisme périodique arbitraire α de R comme la mesure spectrale (définie seulement à rotation près) correspondant au vecteur trace et un $U \in R$ arbitraire tel que $\alpha^{p_m(\alpha)} = \text{Ad } U$, où $p_m(\alpha)$ est la période minimale de α . Il s'avère que p_0, γ et ε forment un système complet d'invariants pour les automorphismes intérieurs de R , les seules relations étant que $\gamma^{p_0} = 1$ et que le support de ε est l'une des $n^{\text{ièmes}}$ racines de 1 pour un certain n (théorème 1.11).

Cela permet aussi de résoudre le problème de l'équivalence faible :

- c) Pour α et $\beta \in \text{Aut } R$, quand existe-t-il un $\sigma \in \text{Aut } R$ tel que $\sigma[\alpha]\sigma^{-1} = [\beta]$? (où le groupe complet $[\alpha]$ de α est défini en termes classiques (voir par exemple [4] déf. 1.5.4)). Les invariants d'équivalence faible sont $p_0(\alpha)$, l'ordre de $\gamma(\alpha) = c(\alpha)$ et les symboles de Legendre $(j/p) = \pm 1$, où p est un nombre premier divisant $c(\alpha)$, et $\gamma(\alpha) = -\exp i2\pi j/c$, avec deux symboles additionnels $\varepsilon(j), \omega(j)$ (resp. un : $\varepsilon(j)$) quand $c(\alpha)$ est divisible par 4 (resp. 2 mais pas 4) qui sont classiques en arithmétique élémentaire.

Il s'avère que ce sont des invariants complets d'équivalence faible, la seule relation étant que $c(\alpha)$ divise $p(\alpha)$ (théorème 6.5).

On applique alors ces résultats à des questions simples de théorie ergodique non-commutative et on obtient les réponses suivantes : un α périodique est conjugué de l'opposé de son inverse si et seulement si $\gamma(\alpha)^2 = 1$ (théorème 7.2).

Un α périodique est le produit tensoriel infini d'automorphismes intérieurs si et seulement si $\gamma(\alpha) = 1$ (théorème 7.9).

On détermine également les conditions, de nature arithmétique, selon lesquelles α est un produit tensoriel infini d'automorphismes de facteurs de dimension finie (théorème 7.4 (c)).

On démontre alors que tout automorphisme périodique α de R admet une très bonne approximation par des automorphismes de dimension finie, au sens où $\alpha(P_n) = P_n, \forall n \in \mathbf{N}$ pour une certaine séquence croissante de sous-algèbres de dimension finie de R avec $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, dense dans R .

Cela, bien sûr, implique que les produits croisés ou les algèbres de von Neumann à points fixes de n'importe quel automorphisme périodique arbitraire de R sont hyperfinis (voir la remarque 7.10 sur ce point).

Finalement, on donne un exemple d'un automorphisme (périodique) de R qui n'a pas de racine carrée, et on donne les conditions (théorème 7.7) (notamment $c(= \text{Ordre de } \gamma)$ impair) selon lesquelles s_p^γ a une racine carrée.

I. Construction des automorphismes $s_p^\gamma, p \in \mathbf{N}, \gamma^p = 1$

Soit N un facteur, $\alpha \in \text{Aut } N$, alors on définit deux nombres, $p_0(\alpha)$ et $\gamma(\alpha)$ comme suit^[1] :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \{n \in \mathbf{Z}, \alpha^n \in \text{Int } N\} &= p_0(\alpha)\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad p_0(\alpha) \in \mathbf{N} \\ (\alpha^{p_0(\alpha)} = \text{Ad } U, \quad U \text{ unitaire dans } N) &\implies \alpha(U) = \gamma(\alpha)U. \end{aligned}$$

On voit que pour tout α , $p_0(\alpha)$ est un entier, que l'on appelle période extérieure de α ; il est égal à 0 si toutes les puissances non nulles de α sont extérieures.

On voit également que $\gamma(\alpha)$ est un nombre complexe de module 1, indépendant du choix de U tel que $\alpha^{p_0(\alpha)} = \text{Ad } U$, et satisfaisant

$$(1.2) \quad \gamma(\alpha)^{p_0(\alpha)} = 1$$

parce que $\alpha^{p_0(\alpha)}(U) = \gamma(\alpha)^{p_0(\alpha)}U$ et $\alpha^{p_0(\alpha)}(U) = UUU^* = U$.

Définition 1.3. α et $\beta \in \text{Aut } N$ sont dits extérieurs conjugués ssi il existe un $\sigma \in \text{Aut } N$ tel que β et $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ ont la même image dans $\text{Out } N = \text{Aut } N/\text{Int } N$.

¹Voir la remarque 6.8 pour une interprétation cohomologique de $\gamma(\alpha)$ comme une obstruction.

Pour W unitaire dans N , posons que $\alpha \in \text{Aut } N$, ${}_W\alpha = \text{Ad } W \cdot \alpha$. Quand W varie, les ${}_W\alpha$ forment la classe de α dans $\text{Out } N$ par conséquent les $\beta \in \text{Aut } N$ qui sont conjugués extérieurs des α sont tous les automorphismes conjugués d'un certain ${}_W\alpha$, W unitaire dans N .

Proposition 1.4. *Si α et β sont conjugués extérieurs alors $p_0(\alpha) = p_0(\beta)$, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$; $(p_0(\alpha), \gamma(\alpha))$ est appelé l'invariant extérieur de α .*

Démonstration. La première égalité est claire. Pour démontrer la seconde, on peut supposer que $\beta = {}_W\alpha$ pour un certain W unitaire dans N . Alors appelons $p = p_0(\alpha)$, $\gamma = \gamma(\alpha)$; $\alpha^p = \text{Ad } U$, $\alpha(U) = \gamma U$, alors on a

$$({}_W\alpha)^p = \text{Ad } (W\alpha(W) \dots \alpha^{p-1}(W))(U),$$

$${}_W\alpha(W\alpha(W) \dots \alpha^{p-1}(W)U) = W\alpha(W) \dots \alpha^{p-1}(W)UWU^*\alpha(U)W^*,$$

$$\text{donc } {}_W\alpha(W\alpha(W) \dots \alpha^{p-1}(W)U) = W\alpha(W) \dots \alpha^{p-1}(W)U\gamma \quad \text{Q.E.D.}$$

Fixons maintenant nos notations, aussi loin que la classification simple des automorphismes périodiques intérieurs est concernée, pour le cas du facteur N de type II_1 avec trace canonique τ ($\tau(1) = 1$).

Soit $\alpha = \text{Ad } U$ périodique, alors l'unitaire U qui est déterminé de manière unique par α à multiplication près par un $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$, a la propriété que U^p est un scalaire λ_0 pour $p =$ période de α . Il s'ensuit de cela que U est une combinaison linéaire finie de ses projections spectrales correspondant aux $p^{\text{ièmes}}$ racines a_j de λ_0 , disons $U = \sum_{j=1}^p a_j e_j$, où e_j est la projection spectrale de U correspondant à $\{a_j\}$.

On définit maintenant l'invariant intérieur $\varepsilon(\alpha)$ comme étant la mesure de probabilité $\sum \tau(e_j)\varepsilon_{a_j}$, déterminée à rotation près sur $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$. Il est facile de voir que deux automorphismes intérieurs α et β sont conjugués ssi $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta)$ et que toutes les mesures de probabilité sur \mathbf{T} qui ont un support contenu dans les $p^{\text{ièmes}}$ racines de d'un certain $\lambda_0 \in \mathbf{T}$ surgissent comme $\varepsilon(\alpha)$. Pour $\alpha \in \text{Aut } N$, α périodique avec invariants extérieurs p_0, γ on pose $p_m = p_0 \cdot$ Ordre de γ et on pose $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\alpha^{p_m})$. (Vérifier que $\alpha^{p_m} \in \text{Int } N$.)

Théorème 1.5. *Soit N le facteur II_1 hyperfini R . Deux automorphismes périodiques $\alpha, \beta \in \text{Aut } R$ sont conjugués si et seulement s'ils ont les mêmes invariants extérieurs et intérieurs (i.e. $p_0(\alpha), \gamma(\alpha)$ et $\varepsilon(\alpha)$).*

Cet article est entièrement consacré à la démonstration du théorème 1.5. On utilise le reste de ce paragraphe à donner une description simple des automorphismes, les $s_p^\gamma \otimes \text{Ad } V$, en ayant contraint les invariants extérieurs et intérieurs. Notre première tâche est de décrire les automorphismes s_p^γ , $p \in \mathbf{N}$, $\gamma^p = 1$ qui ont un invariant extérieur (p, γ) et un invariant intérieur trivial. Pour $p = 1$ on appelle s_1^1 l'automorphisme identité de R . Soit $p \neq 1$. Alors on écrit R comme le produit tensoriel infini, indexé par \mathbf{N} , des couples $(F_p, \text{Trace canonique sur } F_p)$ où F_p est l'algèbre des matrices $p \times p$ sur \mathbf{C} avec les unités matricielles $(e_{i,j})_{i,j=1\dots p}$.

Pour $q \in \mathbf{N}$, soit π_q l'isomorphisme canonique de F_p sur un sous-facteur F_p^q de R , tel que $\pi_q(x) = 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes x \otimes 1 \dots$.

Soit $e_{ij}^q = \pi_q(e_{ij})$ et θ le décalage : $\theta\pi_q(x) = \pi_{q+1}(x), x \in F_p$. Le décalage θ est un automorphisme de R sur le commutant de F_p^1 dans R .

Soit $\gamma \in \mathbf{C}, \gamma^p = 1$, et $U_\gamma \in F_p^1$ l'unitaire :

$$U_\gamma = \sum_{j=1}^p \gamma^j e_{jj}^1.$$

On définit un unitaire $v_\gamma \in (F_p^1 \cup F_p^2)''$ par la formule :

$$v_\gamma = e_{p1}^1 \theta(U_\gamma^*) + \sum_{j=1}^{p-1} e_{j,j+1}^1.$$

La proposition suivante est en même temps la définition de l'automorphisme s_p^γ de R .

Proposition 1.6. Soit p et γ comme ci-dessus.

(a) La séquence des automorphismes intérieurs de R définis par

$$\alpha_n = \text{Ad} (v_\gamma \theta(v_\gamma) \theta^2(v_\gamma) \theta^3(v_\gamma) \dots \theta^n(v_\gamma))$$

converge point par point fortement vers un automorphisme s_p^γ de R .

(b) La $p^{\text{ième}}$ puissance $(s_p^\gamma)^p$ de cet automorphisme est égale à $\text{Ad} U_\gamma$ et $s_p^\gamma(U_\gamma) = \gamma U_\gamma$.

(c) L'invariant extérieur de s_p^γ est égal à (p, γ) , son invariant intérieur est $\{\varepsilon_1\}$.

Démonstration. (a) Soit m donné et $x \in F_p^{(1,m)} = \left(\bigcup_1^m F_p^q \right)''$. Alors pour $n \geq m$ on a $[\theta^n(v), x] = 0$ pour tout $v \in R$. Il s'ensuit que $\alpha_n(x) = \text{Ad} (v_\gamma \theta(v_\gamma) \dots \theta^{m-1}(v_\gamma))(x) = \alpha_{m-1}(x)$ de telle façon que la séquence $(\alpha_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est constante pour $n \geq m$. Pour tout n, α_n est une isométrie dans la norme L^2 de R ; cela découle donc de la densité forte dans R de la sous-algèbre $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_p^{(1,m)}$ qu'il existe un homomorphisme s_p^γ de R dans R tel que

$$s_p^\gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(x), \quad x \in R.$$

On va démontrer maintenant que $(s_p^\gamma)^p = \text{Ad} U_\gamma$. Il s'ensuivra de cela que s_p^γ est surjective et est un automorphisme de R .

²À partir de maintenant, on pose $F_p^{(i,j)} = \left(\sum_{i \leq q \leq j} F_p^q \right)''$, donc par exemple $v_\gamma \in F_p^{(1,2)}$

(b) On a d'abord, en utilisant l'égalité $s_p^\gamma(U_\gamma) = \alpha_0(U_\gamma)$, que :

$$s_p^\gamma(U_\gamma) = \text{Ad } v_\gamma(U_\gamma) = \text{Ad} \left(\sum_{j=1}^p e_{j,j+1} \right) (U_\gamma) = \left(\sum_1^p e_{j,j+1} \right) \left(\sum_1^p \gamma^k e_{kk} \right) \left(\sum_1^p e_{l+1,l} \right) = \sum_1^p \gamma^{j+1} e_{jj} = \gamma U_\gamma. \quad \boxed{3}$$

On termine la preuve de (b) en montrant par induction sur m que l'énoncé suivant est vrai :

$$(1.7) \quad \forall \gamma \in \mathbf{C}, \gamma^p = 1, \quad x \in F_p^{(1,m)} \quad \text{on a} \quad (s_p^\gamma)^p(x) = U_\gamma x U_\gamma^*.$$

On suppose que l'énoncé est vrai pour m , on le démontre pour $m+1$, sa vérité pour $m=1$ découle également de ce calcul.

Posons, pour $x \in R$, $\beta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ad} (\theta(v_\gamma) \theta^2(v_\gamma) \dots \theta^n(v_\gamma))(x)$ alors, comme ci-dessus, β est un homomorphisme de R dans R , qui laisse F_p^1 ponctuellement invariant et satisfait l'égalité :

$$(1.8) \quad \beta(\theta(x)) = \theta(s_p^\gamma(x)), \quad x \in R.$$

Prenons $x \in F_p^{(1,m+1)}$, $x = \sum_{i,j} e_{ij}^1 \theta(x_{ij})$ avec $x_{ij} \in F_p^{(1,m)}$. De (1.8) et de l'hypothèse d'induction on conclut que :

$$\beta^p \theta(x_{ij}) = \theta((s_p^\gamma)^p(x_{ij})) = \theta(U_\gamma) \theta(x_{ij}) \theta(U_\gamma)^* \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, p;$$

et par conséquent, en utilisant les égalités $\beta^p(e_{ij}^1) = e_{ij}^1$, pour $i, j = 1, \dots, p$:

$$(1.9) \quad \beta^p(x) = \theta(U_\gamma) x \theta(U_\gamma)^*.$$

Mais on a $s_p^\gamma = \text{Ad } v_\gamma \cdot \beta$, et donc (1.7) s'ensuivra de

$$(1.10) \quad v_\gamma \beta(v_\gamma) \dots \beta^{p-1}(v_\gamma) = U_\gamma \theta(U_\gamma^*).$$

Pour prouver (1.10) on a juste à utiliser l'égalité $\beta \theta(U_\gamma) = \theta(s_p^\gamma(U_\gamma)) = \theta(\gamma U_\gamma)$, de telle façon qu'on ait : $\beta^k \theta(U_\gamma^*) = \gamma^{-k} \theta(U_\gamma^*)$,

$$\begin{aligned} \beta^k(v_\gamma) &= \gamma^{-k} e_{p1}^1 \theta(U_\gamma^*) + \sum_{j=1}^{p-1} e_{j,j+1}^1, \\ v_\gamma(\beta^p v_\gamma) \dots \beta^{-1}(v_\gamma) &= \sum \gamma^j e_{jj}^1 \theta(U_\gamma^*) = U_\gamma \theta(U_\gamma^*). \end{aligned}$$

(c) On a juste à prouver que $(s_p^\gamma)^q$ est extérieur pour $q \in \{1, \dots, p-1\}$. Pour faire cela, noter que $v_{\gamma''}$ commute avec $\theta^j(U_{\gamma'})$ pour $j \geq 1$, $\{\gamma'\}^p = 1$, $(\gamma'')^p = 1$. Aussi $v_{\gamma''} U_{\gamma'} v_{\gamma''}^* = \gamma' U_{\gamma'}$ comme vu ci-dessus, de telle façon que :

$$s_p^\gamma(\theta^n(U_{\gamma'})) = \gamma' \theta^n(U_{\gamma'}), \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall \gamma', \gamma'^p = 1.$$

Cela montre que pour $q \in \{1, \dots, p-1\}$ on a $\|(s_p^\gamma)^q \theta^n(U_{\gamma'}) - \theta^n(U_{\gamma'})\|_2 = |\gamma'^q - 1|$, et donc que $(s_p^\gamma)^q$ ne peut être un automorphisme intérieur parce que la séquence $(\theta^n(U_{\gamma'}))_{n \in \mathbf{N}}$ est une séquence

³Dans toutes les sommes comme $\sum_1^p e_{j,j+1}$, on prend $e_{p,p+1} = e_{p,1}$, disons plus généralement que $e_{i+p_1, j+p_2} = e_{i,j}$ à chaque fois que p_1 et p_2 sont des multiples de p .

centrale dans R .

On peut maintenant établir une conséquence importante du théorème 1.5 et de la proposition 1.6 :

Théorème 1.11. *Soit R le facteur hyperfini de type II_1 . Soit $p \in \mathbf{N}$, $\gamma \in \mathbf{C}$ avec $\gamma^p = 1$ et ε une mesure de probabilité sur \mathbf{T} telle que $\text{Support de } \varepsilon \{n^{\text{ième}} \text{ racine de } \lambda_0\}$ pour un certain $\lambda_0 \in \mathbf{T}$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors il existe un certain automorphisme périodique $\alpha \in \text{Aut } R$, satisfaisant les conditions $p_0(\alpha) = p, \gamma(\alpha) = \gamma, \varepsilon(\alpha) = \varepsilon$. De plus, soit β un automorphisme intérieur de R tel que $\varepsilon(\beta^{p \text{ Ordre de } \gamma}) = \varepsilon$ alors tout $\alpha \in \text{Aut } R$ périodique, avec les invariants $p_0(\alpha) = p, \gamma(\alpha) = \gamma, \varepsilon(\alpha) = \varepsilon$ est conjugué de*

$$s_p^\gamma \otimes \beta \in \text{Aut } R \otimes R.$$

Démonstration. On a juste à vérifier que l'invariant extérieur de $s_p^\gamma \otimes \beta$ est (p, γ) , ce qui est facile et à vérifier que son invariant intérieur est ε . Mais $(s_p^\gamma \otimes \beta)^{p \text{ Ordre de } \gamma} = 1 \otimes \beta^{p \text{ Ordre de } \gamma}$

Q.E.D.

II. Automorphismes périodiques minimaux

Dans toute la suite, N est un facteur, décomposable de façon dénombrable pour simplifier. Étant donné $\alpha \in \text{Aut } N$ soit $\text{Sp } \alpha$ le spectre de α dans l'algèbre de Banach $B(N)$ des applications linéaires faiblement continues de N dans N . Alors $\text{Sp } \alpha$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ et est égal au spectre au sens de [1] [4] de la représentation $n \rightarrow \alpha^n$ de \mathbf{Z} sur $N^{\mathbb{A}}$ (cf. [4] 2.3.8).

Pour n'importe quelle projection non nulle $e \in N^\alpha$ on pose comme dans [4] p.170, $\alpha^e = \alpha$ restreint à N_e , et on a par [4] 2.2.1 et 2.3.17 que

$$(2.1) \quad \Gamma(\alpha) = \bigcap_{e \in N^\alpha} \text{Sp } \alpha^e = \bigcap_{W \text{ unitaire dans } N} \text{Sp } W\alpha$$

où $W\alpha = \text{Ad } W \cdot \alpha$ par définition.

Par le théorème 2.2.4 de [4], $\Gamma(\alpha)$ est un sous-groupe fermé de \mathbf{T} et par le théorème 2.3.1 de [4] on a :

$$(2.2) \quad \Gamma(\alpha)^\perp = \{n \in \mathbf{Z}, \alpha^n \text{ est intérieur} : \alpha^n(x) = uxu^*, \forall x \in N \text{ avec } u \in N^\alpha\}.$$

Proposition 2.3. *Soit α un automorphisme périodique de N et soit $p_m(\alpha) = p_0(\alpha) \cdot \text{Ordre de } \gamma(\alpha)$, où (p_0, γ) sont les invariants extérieurs de α . Alors $p_m(\alpha)$ est la plus petite période des automorphismes conjugués extérieurs de α . (On appelle $p_m(\alpha)$ la période minimale de α .)*

Démonstration. Comme $\alpha^{p_m(\alpha)} = \text{Ad } U^{\text{Ordre de } \gamma(\alpha)}$, où $\alpha^{p_0(\alpha)} = \text{Ad } U$, on voit que $p_m(\alpha) \in \Gamma(\alpha)^\perp$. Inversement, si $q \in \Gamma(\alpha)^\perp$ alors q est un multiple $np_0(\alpha)$ de $p_0(\alpha)$ et nécessairement $\gamma(\alpha)^n = 1$ de telle façon que q est un multiple de $p_m(\alpha)$. En utilisant le corollaire 2.3.11 de [4] on obtient la proposition 2.3 parce que

$$(2.4) \quad \Gamma(\alpha)^\perp = \{p_m(\alpha)\mathbf{Z}\}, \quad \Gamma(\alpha) = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda^{p_m(\alpha)} = 1\}.$$

⁴en identifiant \mathbf{T} avec le groupe dual de \mathbf{Z} , par $(n, \lambda) = \lambda^n, \lambda \in \mathbf{T}, n \in \mathbf{Z}$.

Les conditions équivalentes suivantes définissent les automorphismes périodiques minimaux :

Théorème 2.5. Soit α un automorphisme périodique de N , alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Période de $\alpha =$ période minimale de α ,
- (b) $\text{Sp } \alpha = \Gamma(\alpha)$,
- (c) N^α est un facteur,
- (d) Pour $n \in \{1, (\text{période de } \alpha) - 1\}$ et $\alpha^n = \text{Ad } U$, $U \in N$ on a $\alpha(U) \neq U$.

Démonstration. (a) \iff (b) découle de 2.4 ; (b) \iff (c) est un corollaire du théorème 2.4.1 de [4], et également (a) \iff (d) découle de 2.2.

Corollaire 2.6. Soit α un automorphisme périodique minimal de N de période minimale p , alors

- (a) Un unitaire $U \in N$ est de la forme $v^*\alpha(v)$, v unitaire dans N , si et seulement si $U\alpha(U)\dots\alpha^{p-1}(U) = 1$.
- (b) Tout $\beta \in \text{Aut } N$ périodique minimal qui est conjugué extérieur de α est conjugué de α .

Démonstration. La condition (a) est clairement nécessaire puisque pour tout v on a

$$v^*\alpha(v)\alpha(v^*\alpha(v))\dots\alpha^{p-1}(v^*\alpha(v)) = v^*v = 1.$$

Pour prouver que c'est suffisant, soit ([4] lemme 2.2.6) β l'automorphisme de $N \otimes F_2$ 9 tel que :

$$\beta(x \otimes e_{11}) = \alpha(x) \otimes e_{11}, \quad \beta(x \otimes e_{22}) = U\alpha(x)U^*, \quad \beta(1 \otimes e_{21}) = U \otimes e_{21}$$

Alors la condition (a) et le calcul dans [4] p. 176 montre que $\beta^p = 1$. Par conséquent, comme $\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha) = \{p\mathbf{Z}\}$ on voit que β est périodique minimal.

Si N est fini, alors $1 \otimes e_{11}$ et $1 \otimes e_{22}$ ont la même trace dans le facteur fini $(N \otimes F_2)^\beta$ et par conséquent sont équivalents dans $(N \otimes F_2)^\beta$.

Si N est proprement infini, alors il en est de même de N^α et $N^{(U^\alpha)}$ ce qui signifie que $1 \otimes e_{11}$, et $1 \otimes e_{22}$ sont proprement infinis, et par conséquent équivalents, dans $(N \otimes F_2)^\beta$.

Dans tous les cas il existe donc une isométrie partielle $v^* \otimes e_{21} \in (N \otimes F_2)^\beta$ avec $1 \otimes e_{11}$ comme support initial et $1 \otimes e_{22}$ comme support final. Mais alors $\beta(v^* \otimes e_{21}) = v^* \otimes e_{21}$ signifie $U\alpha(v^*)$ de telle façon que v est l'unitaire requis. (b) On peut supposer que $\beta = {}_W\alpha$ pour un certain W . Comme $\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha)$ on voit que la période de β est égale à $p =$ période de α . Il s'ensuit de cela que $W\alpha(W)\dots\alpha^{p-1}(W)$ est un scalaire. En remplaçant W par λW , $\lambda \in \mathbf{C}$, pour un λ adéquat, on peut supposer que $W\alpha(W)\dots\alpha^{p-1}(W) = 1$. Alors l'énoncé (a) du corollaire montre que β est conjugué de α .

⁵ F_2 est un facteur de type I_2 avec un système d'unités matricielles $(e_{ij})_{i,j=1,2}$

Corollaire 2.7. *Soit α un automorphisme minimal période de N .*

- (a) *Soit e_1, e_2 deux projections dans N^* qui sont équivalentes relativement à N . Alors pour tout $\lambda \in \text{Sp } \alpha$ il existe une isométrie partielle $U \in N$ telle que :*

$$\alpha(U) = \lambda U, \quad U^*U = e_1, \quad UU^* = e_2.$$

- (b) *Si N est continu, alors pour tout entier m divisant période de $\alpha = p$ et pour chaque $\lambda, \lambda^m = 1$ il existe un système d'unités matricielles de taille $m \times m$ notées $e_{ij} \in N$ telles que*

$$\alpha(e_{ij}) = \lambda^{i-j} e_{ij}. \quad \square$$

Démonstration. (a) Comme on l'a vu ci-dessus, soit N est fini et $e_1 \sim e_2(N^\alpha)$, soit N est proprement infini et on a encore $e_1 \sim e_2(N^\alpha)$ de telle façon qu'il existe une isométrie partielle $v \in N^\alpha, v^*v = e_1, vv^* = e_2$. Maintenant α^{e_1} a une période au plus égale à la période de α alors que $\Gamma(\alpha^{e_1}) = \Gamma(\alpha)$ par [4] 2.3.3. Donc α^{e_1} est périodique minimal avec la même période que α . Mais alors par le corollaire 2.6 (a), il existe un opérateur unitaire $W \in N^{e_1}$ tel que $\alpha(W) = \lambda W$ (appliquer 2.6 (a) à $U = \lambda$). On a alors $W^*W = e_1, WW^* = e_1$, et $\alpha(W) = \lambda W$ de telle façon que $U = vW$ satisfait la condition (a) de 2.7. (b) Le facteur N^α est continu parce qu'une projection minimale dans N^α est automatiquement minimale dans N .

Donc on définit $(e_j)_{j=1, \dots, m}$ comme étant une famille de m projections de N^α équivalentes dans N . Alors par 2.7 (a), appelons U_j satisfaisant $U_j \in N, U_j^*U_j = e_j, U_jU_j^* = e_{j+1}$ et $\alpha(U_j) = \lambda U_j$, pour $j = 1, 2, \dots, m-1$.

Il s'ensuit que $e_{j+1, j} = U_j$ engendre un système d'unités matricielles satisfaisant les conditions requises.

Q.E.D.

Corollaire 2.8. *Soient α et β des automorphismes périodiques d'un facteur N de type II_1 , ayant pour trace canonique τ . Alors α et β sont conjugués si et seulement s'ils sont conjugués extérieurs et si les automorphismes intérieurs $\alpha^{p_m(\alpha)}$ et $\beta^{p_m(\alpha)}$ sont conjugués.*

En d'autres termes, deux éléments d'une classe de conjugaison extérieure sont conjugués si et seulement s'ils ont le même invariant intérieur.

Démonstration. La condition est clairement nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, notons d'abord que si α et β sont extérieurs conjugués on a $p_m(\alpha) = p_m(\beta) = p$ pour un certain $p \in N$. Écrivons maintenant $\alpha^p = \text{Ad } U, U = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$ où les e_i sont les projections appartenant au centre de N^α (on utilise 2.4 et 2.2), avec disons $\tau(e_i) = \mu_i$, et les λ_i sont des nombres complexes de module 1. Pour chaque λ_i choisissons une racine $p^{\text{ième}}$ et appelons-la $\lambda_i^{1/p}$ alors $U^{1/p} = \sum_{i=1}^k \lambda_i^{1/p} e_i$ appartient à N^* de telle façon que $\tilde{\alpha} = \text{Ad } U^{-1/p} \alpha$ satisfait $\tilde{\alpha}^p = \text{Ad } U^* \alpha^p = 1$.

⁶Dans la suite $i \pm j$ pour $i, j \in \{1, \dots, m\}$ signifie $i \pm j$ modulo m .

Écrivons alors $\beta^p = \text{Ad } v$, avec $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i$ où les λ_i sont identiques aux λ_i utilisés ci-dessus pour U et où pour chaque i , f_i est une projection (appartenant à N^β) qui est équivalent à e_i relativement au facteur N . On a utilisé le fait que α^p et β^p sont des automorphismes conjugués intérieurs de N .

Choisissons $v^{1/p} = \sum_{i=1}^k \lambda_i^{1/p} f_i$ et posons comme ci-dessus :

$$\tilde{\beta} = \text{Ad } v^{-1/p} \beta.$$

On a $\tilde{\beta}^p = 1$. Par conséquent $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont conjugués extérieurs et périodiques minimaux, de telle façon que par 2.6 ils sont conjugués, disons $\tilde{\beta} = \sigma \tilde{\alpha} \sigma^{-1}$, $\sigma \in \text{Aut } N$. Maintenant $\alpha = \tilde{\alpha} \cdot \text{Ad } U^{1/p} = \text{Ad } U^{1/p} \tilde{\alpha}$ et :

$$\sigma \alpha \sigma^{-1} = \tilde{\beta} \text{Ad } \sigma(U^{1/p}) = \text{Ad } \sigma(U^{1/p}) \tilde{\beta}.$$

Comme on a $\beta = \text{Ad } v^{1/p} \tilde{\beta}$ on doit juste trouver un automorphisme θ de N commutant avec $\tilde{\beta}$ et tel que $\theta \sigma(U^{1/p}) = v^{1/p}$. À la fois $\sigma(U^{1/p})$ et $v^{1/p}$ appartiennent à N^β et on cherche θ comme un automorphisme intérieur défini par un unitaire $X \in N^\beta$.

On a $\sigma(U^{1/p}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i^{1/p} \sigma(e_i)$, $v^{1/p} = \sum_{i=1}^k \lambda_i^{1/p} f_i$, et donc il suffit de vérifier que pour chaque i , $\sigma(e_i)$ est équivalent à f_i relativement à N^β . Mais cela est vrai parce que $\tau(e_i) = \tau(f_i)$, ainsi $\tau(\sigma(e_i)) = \tau(f_i)$ pour $i = 1, \dots, k$.

III. Action des automorphismes de R sur les séquences centrales

Définition 3.1. [7] *Soit N un facteur de type II_1 avec trace canonique τ , et ω un ultrafiltre libre sur \mathbf{N} .*

- (a) On définit $N_{\tau, \omega}$ comme le quotient de $l^\infty(\mathbf{N}, N)$ par l'idéal à deux côtés $J_\omega = \{(x_n)_{n \in \mathbf{N}}, x_n \rightarrow 0 \text{ fortement quand } n \rightarrow \omega\}$.
- (b) On dénote par N_ω le commutant dans $N_{\tau, \omega}$ de l'image \tilde{N} de N dans $N_{\tau, \omega}$ où pour $x \in N$, $\tilde{x} \in N_{\tau, \omega}$ est représenté par la séquence $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $x_n = x$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Cette définition est exactement celle qui est donnée par MCDUFF dans [7], excepté pour un changement de notations qui s'accorde avec [5] partie II. Par [7] on sait que $N_{\tau, \omega}$ est un facteur de type II_1 avec trace canonique $\tau_\omega : \tau_\omega((x_n)_{n \in \mathbf{N}}) = \lim_{n \rightarrow \omega} \tau(x_n)$.

Soit $\theta \in \text{Aut } N$ alors l'automorphisme $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \rightarrow (\theta(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ de $l^\infty(\mathbf{N}, N)$ laisse J_ω globalement invariant et définit ainsi un automorphisme $\theta_{\tau, \omega}$ de $N_{\tau, \omega}$. De plus $\theta_{\tau, \omega}(\tilde{N}) = \tilde{N}$ de telle façon que $\theta_{\tau, \omega}$ laisse N_ω globalement invariant et définit ainsi un automorphisme θ_ω de N_ω .

Maintenant prenons $N = R$, le facteur hyperfinité II_1 . On sait que toutes les séquences hypercentrales sur R sont triviales [7], et donc par le théorème 4 de [7], R_ω est un facteur de type II_1 .

Théorème 3.2. *Soit α un automorphisme du facteur hyperfinité de type II_1 R , et ω un ultrafiltre libre, alors :*

- (1) α_ω est intérieur sur R_ω , si et seulement si α est intérieur sur R , auquel cas $\alpha_\omega = 1$.
- (2) Il existe un unitaire $U \in R_{\tau,\omega}$ tel que $(\alpha(x))^\sim = U\tilde{x}U^*$, $\forall x \in R$.

Avant que l'on ne poursuive et prouve ce théorème, notons une conséquence pour les automorphismes périodiques :

Corollaire 3.3. Soit $\alpha \in \text{Aut } R$ périodique, avec période extérieure $\alpha =$ période de $\alpha = n$, alors il existe un unitaire $v \in R_{\tau,\omega}$, tel que :

$$\alpha_{\tau,\omega}(v) = v ; v^{n'} = 1 ; (\alpha(x))^\sim = v\tilde{x}v^*, \quad \forall x \in R.$$

Démonstration. Soit U un unitaire, $U \in R_{\tau,\omega}$ tel que $(\alpha(x))^\sim = U\tilde{x}U^*$, $x \in R$. On a alors ça $\alpha_{\tau,\omega}(\tilde{x}) = U\tilde{x}U^*$, $\forall x \in R$ et en remplaçant x par $\alpha^{-1}(x)$: $\alpha_{\tau,\omega}(\tilde{x}) = \alpha_{\tau,\omega}(U)\tilde{x}\alpha_{\tau,\omega}(U^*)$, $\forall x \in R$. Alors $U^*\alpha_{\tau,\omega}(U) \in (\tilde{R})' \cap R_{\tau,\omega} = R_\omega$.

Appelons $w = U^*\alpha_{\tau,\omega}(U)$. On a $w\alpha_{\tau,\omega}(w)\dots\alpha_{\tau,\omega}^{n-2}(w)\alpha_{\tau,\omega}^{n-1}(w) = 1$.

Maintenant comme période extérieure $\alpha = n$ on a période extérieure $\alpha_\omega = n$ en utilisant la partie (1) du théorème 3.2. Ainsi il s'ensuit du corollaire 2.6 que ce $w \in R_\omega$, tel que $w\alpha_\omega(w)\dots\alpha_\omega^{n-1}(w) = 1$ peut s'écrire $w = X^*\alpha_\omega(X)$ pour un certain unitaire $X \in R_\omega$.

Posons $Y = UX^*$. Alors $\alpha_{\tau,\omega}(Y) = \alpha_{\tau,\omega}(U)\alpha_{\tau,\omega}(X^*) = Uww^*X^* = Y$ et $(\alpha(x))^\sim = Y\tilde{x}Y^*$, $\forall x \in R$, parce que $X^* \in (\tilde{R})'$.

Maintenant $\alpha_{\tau,\omega}^n(\tilde{x}) = Y^n\tilde{x}(Y^*)^n$, $\forall x \in R$, de telle façon que $Y^n \in R_\omega$. Comme $R_\omega^{\alpha_\omega}$ est une algèbre de von Neumann, il existe un certain $Z \in R_\omega^{\alpha_\omega}$ tel que $Z^n = Y^n$ et Z est dans l'algèbre de von Neumann engendrée par Y^n dans $R_\omega^{\alpha_\omega}$. En particulier Z et Y commutent comme éléments de $R_{\tau,\omega}$. Posons $U' = YZ^*$ alors on a :

$$\begin{aligned} \alpha_{\tau,\omega}(U') &= \alpha_{\tau,\omega}(Y)\alpha_\omega(Z^*) = YZ^* = U', \\ U'^n &= Y^n(Z)^{-n} = 1, \quad U'\tilde{x}U'^* = Y\tilde{x}Y^* = (\alpha(x))^\sim, \quad \forall x \in R. \end{aligned}$$

Q.E.D.

La preuve du théorème, partie (1), repose sur l'adaptation simple suivante de la preuve donnée dans [10] p. 156-157 du théorème de dérivation qu'on peut aussi trouver dans [3] avec $\|\cdot\|$ à la place de $\|\cdot\|_2$.

Lemme 3.4. Soit P un facteur de type II_1 , et K un sous-facteur de dimension finie de P . Soit $\alpha \in \text{Aut } P$, alors si $\sup_{U \text{ unitaire dans } K' \cap P} \|\alpha(U) - U\|_2 < 1$ l'automorphisme α est intérieur.

Démonstration. Soit U_0 le groupe unitaire de $K' \cap P$. Alors, exactement comme dans [10] p. 156-157 on définit une action de U_0 sur l'espace vectoriel P par la formule

$$\varphi_u(x) = ux\alpha(u^*), \quad x \in P, \quad u \in U_0.$$

Comme $\|\varphi_u(x)\|_2 = \|x\|_2$, $\forall x \in P$ on peut étendre cette action à une action de U_0 sur $L^2(P, \tau)$ où τ est la trace canonique de P . Si l'hypothèse du lemme est satisfaite, la projection orthogonale y de

0 sur $\overline{\text{Conv}}\{\varphi_u(1), u \in U_0\}$ ⁷ est différente de 0 et est un point fixe pour φ_u , pour tout $u \in U_0$. En d'autres termes on a $uy = y\alpha(u), \forall u \in U_0$, donc $xy = y\alpha(x) \quad \forall x \in K' \cap P$. Maintenant il existe un unitaire $v \in P$ tel que ${}_v\alpha = \text{Ad } v \cdot \alpha$ est de la forme $1_K \otimes \beta$ où $\beta \in \text{Aut}(K' \cap P)$, et on a :

$$xyv^* = yv_v^*\alpha(x), \quad \forall x \in K' \cap P.$$

Soit $yv^* = \sum e_{ij} \otimes y_{ij}$, avec $e_{ij} \in K$ et $y_{ij} \in K' \cap P$, alors si les e_{ij} sont des unités matricielles dans K on obtient $xy_{ij} = y_{ij}\beta(x), \forall x \in K' \cap P, \forall i, j$. Il s'ensuit alors qu'il existe un $z \in K' \cap P$ non nul tel que

$$xz = z\beta(x), \forall x \in K' \cap P.$$

Par conséquent par [9] $\beta = ({}_v\alpha \text{ restreint à } K' \cap P)$ est un automorphisme intérieur, de telle façon que ${}_v\alpha$ est intérieur sur P , étant l'identité sur K , et finalement α est intérieur sur P .

Démonstration de la partie (1) du théorème 3.2. Si α est un automorphisme intérieur alors facilement $\alpha_\omega = 1$. Soit α un automorphisme extérieur, et u_n une séquence d'unitaires de R . On construit une séquence centrale $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'unitaires telle que $\|u_n v_n u_n^* - v_n\|_2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $\|\alpha(v_n) - v_n\|_2 \geq \frac{1}{2}, \forall n$. Il découle de cela que pour tout unitaire $u \in R_{\tau, \omega}$, il existe un unitaire $v \in R_\omega$ tel que $uvu^* = v$ alors que $\alpha(v) \neq v$. Cela montrera donc que α_ω n'est pas intérieur sur R_ω .

Pour construire la séquence $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$, soit K_n une séquence croissante de sous-facteurs de dimension finie de R telle que : $u_n \overset{1/n}{\in} K_n$ ⁸ $\forall n \in \mathbf{N}, (\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n)^\perp = R$. Dénotons alors, pour tout n , par v_n un unitaire dans K'_n tel que $\|\alpha(v_n) - v_n\|_2 \geq \frac{1}{2}$ (on applique le lemme 3.4).

Clairement $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une séquence centrale dans R et $\| [u_n, v_n] \|_2 \leq \frac{2}{n}, \forall n \in \mathbf{N}$, de telle façon que $\|u_n v_n u_n^* - v_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Q.E.D.

Démonstration de la partie (2) du théorème 3.2. Soit $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une séquence croissante de sous-facteurs de dimension finie de R . Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ il existe un unitaire u'_n tel que $\alpha(K_n) = u'_n K_n u_n'^*$ donc un unitaire u_n tel que $\alpha(x) = u_n x u_n^*, \forall x \in K_n$.

Il s'ensuit de cela que $\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n x u_n^*, \forall x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, et par conséquent $\forall x \in R$, en supposant que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ est fortement dense dans R .

Q.E.D.

IV. Quelques lemmes techniques

Lemme 4.1. *Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, et N un facteur de type II_1 . Soient e_1, \dots, e_n des projections de N telles que $\| \sum_{j=1}^n e_j - 1 \|_2 \leq \varepsilon$. Alors*

⁷L'image canonique de la boule unité C^* de P dans $L^2(P, \tau)$ est faiblement fermée et contient les $\varphi_u(1), u \in U_0$. Ainsi y appartient à cette boule-unité.

⁸ $x \overset{\varepsilon}{\in} K$ signifie que, comme dans [7], il existe un certain $y \in K$ tel que $\|x - y\|_2 < \varepsilon$.

(a) $f_j = \bigvee_1^j e_l - \bigvee_1^{j-1} e_k$ est une famille de projections orthogonales deux à deux telles que $\|f_j - e_j\|_2 \leq 10n\varepsilon^{1/4}$.

(b) Il existe une famille de projections deux à deux orthogonales $E_j \sim e_j$ avec $\|E_j - e_j\|_2 \leq 14n\varepsilon^{1/8}$, à condition que $\sum \tau(e_j) \leq 1$.

Démonstration. (a) Dénotons par $T_j = \sum_1^j e_l$, et $F_j = \bigvee_1^j e_l$. On a $F_j = \text{Support de } T_j$. Soit f^j la projection spectrale de T_j correspondant à l'intervalle $[1 + \sqrt{\varepsilon}, \infty[$. Comme on a $T_j \leq T_n$, on obtient $\tau(f^j) \leq \tau(f^n)$ par le théorème du minimax, ainsi $\tau(f^j) \leq \varepsilon$. Aussi, f^j commute avec T_j et F_j et comme $\|(1 + \sqrt{\varepsilon}F_j - T_j)\| \leq n$, on a $\tau((1 - f^j)((1 + \sqrt{\varepsilon})F_j - T_j)) \leq \tau((1 + \sqrt{\varepsilon})F_j - T_j) + n\tau(f^j) \leq \sqrt{\varepsilon} + n\varepsilon$. (Parce que $\tau(F_j \leq \sum_1^j \tau(E_j) = \tau(T_j))$). Comme $0 \leq (1 - f^j)((1 + \sqrt{\varepsilon})F_j - T_j) \leq 1 + \sqrt{\varepsilon} \leq 2$, on a $\|(1 - f^j)((1 + \sqrt{\varepsilon})F_j - T_j)\|_2 \leq \sqrt{2}(n + 1)^{1/2}\varepsilon^{1/4}$.

Mais $\|f^j((1 + \sqrt{\varepsilon})F_j - T_j)\|_2 \leq n(\tau(f^j))^{1/2} \leq n\varepsilon^{1/4}$, de telle façon que $\|F_j - T_j\|_2 \leq \|(1 + \sqrt{\varepsilon})F_j - T_j\|_2 + \sqrt{\varepsilon} \leq (n\sqrt{2} + (n + 1)^{1/2}\sqrt{2} + 1)\varepsilon^{1/4}$. Comme $T_j - T_{j-1} = e_j$ et $F_j - F_{j-1} = f_j$, on obtient (a).

(b) On a $\sum \tau(e_j) \leq 1$. Prenons f_j comme dans (a). Soit $I = \{j \in \{1, \dots, n\}, \tau(f_j) \leq \tau(e_j)\}$ et $J = \{j \in \{1, \dots, n\}, \tau(f_j) > \tau(e_j)\}$. Soit pour tout $j \in J, f'_j$ une sous-projection de f_j telle que $\tau(f'_j) = \tau(f_j) - \tau(e_j)$. Alors les f'_j sont des projections deux à deux orthogonales avec $\sum_{j \in J} \tau(f'_j) + \tau(1 - \bigvee_{j=1}^n f_j) = \sum_{j \in J} \tau(f'_j) + 1 - \sum_{j=1}^n \tau(f_j) = 1 - \sum_{j \in I} \tau(f_j) - \sum_{j \in J} \tau(e_j) \geq \sum_{j \in I} (\tau(e_j) - \tau(f_j))$. Soit $(f''_j)_{j \in I}$ une famille de projections deux à deux orthogonales, avec $f''_j \leq \sum_{j \in J} f'_j + 1 - \sum_{j=1}^n f_j$, $\tau(f''_j) = \tau(e_j - f_j)$, $\forall j \in I$. Posons $E_j = f_j + f''_j$ pour $j \in I, R_j = f_j - f'_j$ pour $j \in J$. Alors chaque E_j est une projection équivalente à e_j , les E_j sont deux à deux orthogonales, et

$$\|E_j - f_j\|_2 \leq |\tau(e_j) - \tau(f_j)|^{1/2} \leq 4n^{1/2}\varepsilon^{1/8}, \quad \|E_j - e_j\|_2 \leq (10n + 4n^{1/2})\varepsilon^{1/8} \leq 14n\varepsilon^{1/8}.$$

Lemme 4.2. Soient $n, m \in \mathbf{N}$ avec n divisant m . Soit α un automorphisme minimal périodique de période m , d'un facteur N de type II_1 . Soit $\eta \in]0, 1/m[$ et $\lambda \in \mathbf{C}, \lambda^n = 1$. Soit $(u_j)_{j=1, \dots, n-1}$ une famille de $n - 1$ éléments de N de norme inférieure à 1 telle que

- (a) $\|\alpha(u_j) - \lambda u_j\|_2 \leq \eta, j \in \{1, \dots, n - 1\}$,
- (b) $\left\| \left(\sum_1^{n-1} u_j^* u_j \right) + u_{n-1} u_{n-1}^* - 1 \right\|_2 \leq \eta$
- (c) $\|u_j^* u_j - (u_j^* u_j)^2\|_2 \leq \eta$ pour $j \in \{1, \dots, n - 1\}$, et $\|u_{n-1} u_{n-1}^* - (u_{n-1} u_{n-1}^*)^2\|_2 \leq \eta$
- (d) $\|u_j u_j^* - u_{j+1}^* u_{j+1}\|_2 \leq \eta$ pour $j = 1, \dots, n - 2$.

Alors il existe un système d'unités matricielles $(e_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ de N tel que $\alpha(e_{ij}) = \lambda^{i-j} e_{ij}$ et

$$\|u_j - e_{j+1,j}\|_2 \leq 142n(m\eta)^{1/256} \quad \text{pour tout } j \in \{1, \dots, n - 1\}.$$

Démonstration. Pour $x \in N$, on pose $x^\lambda = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda^j \alpha^j(x)$. Alors si $\|x\| \leq 1$, $\|\alpha(x) - \lambda x\|_2 \leq \eta$, on a $\|x^\lambda\| \leq 1$, $\alpha(x^\lambda) = \lambda x^\lambda$ et $\|x - x^\lambda\|_2 \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m k_j \eta \leq \frac{m-1}{2} \eta$. Prenons $v_j = u_j^\lambda$, alors on a

$$(e) \quad \|u_j - v_j\|_2 \leq \frac{m-1}{2} \eta, \quad \|u_j^* u_j - v_j^* v_j\| \leq (m-1) \eta,$$

$\|u_{n-1} u_{n-1}^* - v_{n-1} v_{n-1}^*\| \leq (m-1) \eta$ et les v_j satisfont une condition comme (b) avec $nm\eta$ à la place de η , comme (c) avec $3m\eta$ et (d) avec $2m\eta$.

Posons $T_j = v_j^* v_j$, pour $j = 1, \dots, n-1$ et $T_n = v_{n-1} v_{n-1}^*$. Alors on a $T_l \in N^\alpha$ ($l = 1, \dots, n$) et $\|T_l^2 - T_l\|_2 \leq 3m\eta$ ($l = 1, \dots, m$).

Alors par [6] p. 273-274 il existe pour $j \in \{1, \dots, n\}$ une projection spectrale F_j of T_j , $F_j \in N^\alpha$ telle que :

$$(f) \quad \|T_j - F_j\|_2 \leq 8(m\eta)^{1/2}, \quad \|T_j^{1/2} - F_j\|_2 \leq 6(m\eta)^{1/4}.$$

Si pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$ on dénote par $v_j = V_j T_j^{1/2}$ la décomposition polaire de v_j on obtient :

$$(f') \quad \|v_j - V_j F_j\|_2 \leq 6(m\eta)^{1/4}.$$

Posons $a = \inf(1/n, \tau(F_1), \dots, \tau(F_n))$. On a $|\tau(F_j) - \tau(T_j)| \leq 8(m\eta)^{1/2}$, $j \in \{1, \dots, n\}$;

par conséquent, en utilisant la condition (b) pour les v :

$$\left| \sum_{j=1}^n \tau(F_j) - 1 \right| \leq \left| \sum_{j=1}^n \tau(T_j) - 1 \right| + 8n(m\eta)^{1/2} \leq nm\eta + 8n(m\eta)^{1/2} \leq 9n(m\eta)^{1/2}.$$

(parce que $m\eta \leq 1$.)

Pour $j < n-1$

$$|\tau(F_j) - \tau(F_{j+1})| \leq |\tau(v_j v_j^*) - \tau(v_{j+1}^* v_{j+1})| + 16(m\eta)^{1/2} \leq 2m\eta + 16(m\eta)^{1/2} \leq 18(m\eta)^{1/2}.$$

De plus $\tau(F_{n-1}) - \tau(F_n) \leq 18(m\eta)^{1/2}$. De telle façon que

$$\left| \tau(F_j) - \frac{1}{n} \right| \leq \left| \tau(F_j) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau(F_i) \right| + 9(m\eta)^{1/2} \leq \frac{n-1}{2} 18(m\eta)^{1/2} + 9(m\eta)^{1/2} \leq 9n(m\eta)^{1/2}.$$

Ainsi $\left| a - \frac{1}{n} \right| \leq 9n(m\eta)^{1/2}$ et $|\tau(F_j) - a| \leq 18n(m\eta)^{1/2}$. Pour chaque j , appelons E_j une projection dans N^α avec $E_j \leq F_j$, $\tau(E_j) = a$. Posons $W_j = V_j E_j$, $j < n$. Alors

$$\begin{aligned} \|W_j - v_j\|_2 &\leq \|F_j - E_j\|_2 + \|v_j - V_j F_j\|_2 \leq 5n^{1/2}(m\eta)^{1/4} + 6(m\eta)^{1/4} \leq (16n)(m\eta)^{1/4}, \\ \|W_{n-1} W_{n-1}^* - T_n\|_2 &\leq 32n(m\eta)^{1/4}; \end{aligned}$$

pour $j < n-1$,

$$\|W_j W_j^* - W_{j+1}^* W_{j+1}\|_2 \leq 4 \cdot 16n(m\eta)^{1/4} + 2m\eta \leq 66n(m\eta)^{1/4}.$$

Maintenant on a $\tau(E_j) = a \leq \frac{1}{n}$,

$$\left\| \sum_{j=1}^n E_j - 1 \right\|_2 \leq 5n^{3/2}(m\eta)^{1/4} + 8n(m\eta)^{1/2} + \left\| \sum_{j=1}^n T_j - 1 \right\|_2 \leq 14n^{3/2}(m\eta)^{1/4}$$

Ainsi il existe un système G_j de projections deux à deux orthogonales de N^α , avec $\tau(G_j) = \tau(E_j) = a$, et $\|G_j - E_j\|_2 \leq 22n^2(m\eta)^{1/32}$ (Lemme 4.1). Pour chaque $j < n$, on dénote, en utilisant le lemme 7 de [6] p. 275, par X_j un unitaire dans N^α tel que $X_j G_j X_j^* = E_j$, par Y_j un unitaire dans N^α avec $Y_j W_j W_j^* Y_j^* = G_{j+1}$ et tel que :

$$\|X_j - 1\|_2 \leq 50n^{1/4}(m\eta)^{1/256}, \quad \|Y_j - 1\|_2 \leq 72n^{1/4}(m\eta)^{1/256}.$$

Choisissons n projections orthogonales deux à deux G'_j telles que $G'_j \in N^\alpha$, $\tau(G'_j) = \frac{1}{n} - a$, $G'_j \leq 1 - \sum_{k=1}^n G_k$, et $n-1$ isométries partielles $(U'_j)_{j=1, n-1}$ où $U'_j U'_j = G'_j$, $U'_j U'_j^* = G'_{j+1}$, $\alpha(U'_j) = \lambda U'_j$ (appliquer 2.7a). Posons $U_j = Y_j W_j X_j + U'_j$ pour $j = 1, \dots, n-1$. Alors U_j est une isométrie partielle de support initial $G_j + G'_j$ et de support final $G_{j+1} + G'_{j+1}$.

Également $\alpha(U_j) = \lambda U_j$, et on a :

$$\|U_j - W_j\|_2 \leq 122(n^{1/4}(m\eta)^{1/256}) + \left(\frac{1}{n} - a\right)^{1/2}, \quad \text{et en utilisant (e),}$$

$$\begin{aligned} \|U_j - u_j\|_2 &\leq \frac{m-1}{2}\eta + 16n(m\eta)^{1/4} + 122n^{1/4}(m\eta)^{1/256} + 3n^{1/2}(m\eta)^{1/4} \\ &\leq (1 + 16n + 122n^{1/4} + 3n^{1/2})(m\eta)^{1/256} \leq 142n(m\eta)^{1/256}. \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

Lemme 4.3. Soient $n, m \in \mathbf{N}$ avec n divisant m . Soit α un automorphisme minimal périodique de période m d'un facteur N de type II_1 . Soit $\delta > 0$, et $(e_j)_{j=1, \dots, n}$ une partition de l'unité dans N telle que $\alpha(e_j) = e_{j+1}$, $j = 1, \dots, n$ ($e_{n+1} = e_1$), et $U \in N$, $\|U\| \leq 1$ avec

- (1) $\|U^{n-1} - (U^*)^l\|_2 \leq \delta, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{lire } (U^*)^0 = 1),$
- (2) $\|\alpha(U) - U\|_2 \leq \delta,$
- (3) $\|U e_l U^* - e_{i+1}\|_2 \leq \delta \quad (i = 1, \dots, n).$

Alors il existe une partition de l'unité $(E_j)_{j=1, \dots, n}$ of N , telle que $\alpha(E_j) = E_{j+1}$ for $j = 1, \dots, n$ ($E_{n+1} = E_1$), et un unitaire V , $V^n = 1$, $V \in N^\alpha$ tel que $V E_i V^* = E_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n$ et tel que

$$\|V - U\|_2 \leq \varepsilon, \quad \|E_i - e_i\| \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

où $\varepsilon = 143n^4(2mn^2\delta)^{1/256}$ (en supposant $2n^2\delta \leq 1/m$).

Démonstration. Soit $\lambda = \exp(i2\pi/n)$. Posons $W = \sum \lambda^j e_j$. Alors W est un unitaire de N tel que $\alpha(W) = \sum \lambda^j e_{j+1} = \lambda W$.

Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, posons $f_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda^{jk} U^j$, où U^0 est pris égal à 1. Alors $U^l = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{kl} f_k$ pour $l = 0, 1, \dots, n-1$.

De plus $\|f_k\| \leq 1$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) et

$$\|f_k^* - f_k\|_2 \leq \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda^{-k})^{n-j} (U^{n-j} - (U^*)^j) \right\|_2 + \frac{1}{n} \|U^n - 1\|_2 \leq 2\delta,$$

$$n^2 f_k^* f_k = \sum_{j,l=0,\dots,n-1} (\lambda^k)^j (\lambda^k)^{-l} (U^*)^j U^l.$$

Pour $l \geq j$ on a $\|(U^*)^j U^l - U^{l-j}\|_2 \leq \|(U^*)^j U^l - U^{n-j} U^l\|_2 \leq 2\delta$. Et pour $l < j$, on a $\|(U^*)^j U^l - U^{n-(j-l)}\|_2 \leq \delta$. Il s'ensuit de cela que, dans la somme ci-dessus pour $n^2 f_k^* f_k$ on peut remplacer chaque $(U^*)^j U^l$ par $U^{\underline{l-j}}$ où $\underline{l-j} = l-j \bmod n$, et $0 \leq \underline{l-j} < n$ pour obtenir

$$\|n^2 f_k^* f_k - n^2 f_k\|_2 \leq 2n^2 \delta, \quad \|f_k^* f_k - f_k\|_2 \leq 2\delta$$

Posons $U_j = W f_j$ avec f_j comme ci-dessus. Alors comme W est unitaire on obtient : $U_j^* U_j = f_j^* f_j$, $\|U_j^* U_j - f_j\|_2 \leq 2\delta$. Également $U_{n-2} U_{n-2}^* = W f_{n-2} f_{n-2}^* W^*$ so $\|U_{n-2} U_{n-2}^* - (U_{n-2} U_{n-2}^*)^2\|_2 \leq 4\delta$. On obtient $\|U_j^* U_j - (U_j^* U_j)^2\|_2 \leq 4\delta$ (parce que $\|U_j^* U_j - f_j^*\|_2 \leq 2\delta$, $\|U_j^* U_j - f_j\|_2 \leq 2\delta$).

Aussi $U W U^* = \sum \lambda^j U e_j U^*$ de telle façon que $\|U W U^* - \lambda W\|_2 \leq n\delta$ et $\|U W^* U^* - \lambda W^*\|_2 \leq n\delta$, $\|W U W^* - \lambda U\|_2 \leq n\delta + \|U^* U - 1\|_2 \leq (n+2)\delta$ parce que $\|U^* - U^{n-1}\|_2 \leq \delta$ et $\|U^n - 1\|_2 \leq \delta$.

Ainsi pour $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ on obtient $\|W U^j W^* - \lambda^j U^j\|_2 \leq j(n+2)\delta$. Par conséquent $\|W f_k W^* - f_{k+1}\|_2 \leq \frac{1}{n} \sum \|W U^j W^* - \lambda^j U^j\|_2 \leq \frac{n-1}{n} (n+2)\delta \leq n^2 \delta$. Il découle de cela que $\|U_k U_k^* - U_{k+1}^* U_{k+1}\|_2 \leq \|W f_k W^* - f_{k+1}\|_2 + 4\delta \leq (n^2 + 4)\delta$ pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$. Donc aussi $\|U_{n-2} U_{n-2}^* - f_{n-1}\|_2 \leq (n^2 + 2)\delta$ et $\left\| \left(\sum_0^{n-2} U_j^* U_j \right) + U_{n-2} U_{n-2}^* - 1 \right\|_2 \leq 2(n-1)\delta + (n^2 + 2)\delta$ parce que $\sum_{j=0}^{n-1} f_j = 1$. Comme $\alpha(W) = \lambda W$ et $\|\alpha(f_j) - f_j\|_2 \leq \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \|U^l - \alpha(U^l)\|_2 \leq \frac{n-1}{2} \delta$ on a $\|\alpha(U_j) - \lambda U_j\|_2 \leq \frac{n-1}{2} \delta$.

On a montré que la famille $(U_j)_{j=0,\dots,n-2}$ satisfait les conditions (a), (b), (c), (d) du Lemme 4.2 avec $\eta = 2n^2 \delta$. Par hypothèse $2n^2 \delta \leq \frac{1}{m}$ de telle façon qu'on peut trouver une famille $(e_{ij})_{i,j \in \{0,\dots,n-1\}}$ d'isométries partielles de N , telle que $\alpha(e_{ij}) = \lambda^{i-j} e_{ij}$ et

$$\|U_j - e_{j+1,j}\|_2 \leq 142n(2mn^2\delta)^{1/256} = \delta' \quad (j = 0, 1, \dots, n-2).$$

De plus, on a $U_{n-1} = W f_{n-1} = (W^*)^{n-1} f_{n-1}$ et comme $\|f_k^* W^* - W^* f_{k+1}^*\|_2$ est plus petit que $n^2 \delta$

pour tout k on obtient :

$$\|U_{n-1} - U_0^* U_1^* \dots U_{n-2}^*\|_2 \leq n(n^2\delta) + \sum_{j=1}^{n-1} \|(f_j^*)^2 - f_j^*\|_2 \leq nn^2\delta + 4n\delta,$$

$$\|U_{n-1} - e_{0,n-1}\|_2 \leq 2n^3\delta + n\delta' \leq \delta'' = 143n^2(2mn^2\delta)^{1/256}$$

Posons $W_1 = \sum_{j=0}^{n-1} e_{j+1,j}$. Alors W_1 est un unitaire tel que $W_1^n = 1$ et $\alpha(W_1) = \lambda W_1$. Posons

$E_j = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \lambda^{jl} W_1^l$, pour $j = 0, \dots, n-1$, de telle façon que $W_1 = \sum \lambda^j E_j$ et les E_j sont les projections spectrales des W_1 correspondant aux λ^j , $j = 0, \dots, n-1$. On a $\alpha(E_j) = E_{j+1}$ ($j = 0, \dots, n-1$).

Posons $V = \sum \lambda^k e_{kk}$ alors V est unitaire, $V^n = 1$, $\alpha(V) = V$ et $V E_j V^* = E_{j+1}$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$). (parce que $V W_1 V^* = \lambda W_1$.)

On a

$$\|W_1 - W\|_2 \leq \left\| \sum_0^{n-1} (U_j - e_{j+1,j}) \right\|_2 \leq n\delta'',$$

et donc

$$\|E_j - e_j\|_2 \leq \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \|W_1^l - W^l\|_2 \leq \left(\frac{n-1}{2}\right) n\delta''.$$

Aussi $\|V - U\|_2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|e_{kk} - f_k\|_2 \leq n(2\delta') + (n-1)2\delta + n^2\delta \leq 2\delta''$. Ainsi on obtient la conclusion du lemme, en prenant $\varepsilon = n^2\delta'' = 143n^4(2mn^2\delta)^{1/256}$. Q.E.D.

V. Actions des groupes cycliques finis, par automorphismes extérieurs, sur le facteur hyperfini II_1

Le fait que pour chaque n il n'existe qu'une seule action par automorphisme extérieur de \mathbf{Z}/n sur R découle de l'assertion (b) de

Théorème 5.1. *Soit R le facteur de type II_1 et $p, q \in \mathbf{N}$.*

- (a) *Soit $\alpha \in \text{Aut } R$ périodique minimal avec (période extérieure de α) = pq alors $\alpha \otimes s_q^1$ est conjugué de α , et également $\alpha \otimes 1_R$ est conjugué de α .*
- (b) *Tout périodique $\alpha \in \text{Aut } R$ tel que période de α = période extérieure de α = p est conjugué de s_p^1 .*

Démonstration. Soit $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une séquence fortement dense dans la boule unité R_1 de R . Nous construirons, dans la preuve de (a) et (b), une séquence (K_j) de sous-facteurs de type I_n de R commutant deux à deux, avec :

$$(5.2) \quad \|E_{K'_m}(x_l) - x_l\|_2 \leq \frac{1}{2^m}, \quad l < m. \quad \square$$

On rappelle qu'en utilisant [7], on a alors pour chaque l et

$$l' \geq l, \quad x_l \stackrel{1/2^{l'-1}}{\in} \bigcap_{m \geq l'} K'_m = \left((K_1 \cup \dots \cup K_{l'})'' \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right)'' \right)''$$

parce que $(\prod_{m \geq l'} E_{K'_m})(x)$ appartient à $\bigcap_{m \geq l'} K'_m$.

Donc on sait ([7]) qu'en posant $K = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right)''$ le facteur R se décompose en le produit tensoriel de K par son commutant K' dans R .

(a) Soit λ une racine $n^{\text{ième}}$ de 1 où n est un entier divisant la période extérieure de α . On construit par induction sur m une séquence K_m de sous-facteurs de type I_n commutant deux à deux de R satisfaisant la condition 5.2 et :

$$(5.3) \quad \alpha(K_m) = K_m \text{ et il existe un système d'unités matricielles } e_{ij}^m \text{ de } K_m \text{ tel que } \alpha(e_{ij}^m) = \lambda^{i-j} e_{ij}^m.$$

L'existence de K_1 découle du corollaire 2.7.

Supposons que l'on a construit les K_j jusqu'à K_m inclus. On cherche K_{m+1} tel que :

- (1) $K_{m+1} \subset (K_1 \cup \dots \cup K_m)'$,
- (2) K_{m+1} est engendré par un système d'unités matricielles de taille $n \times n$ dénotées (e_{ij}) tel que $\alpha(e_{ij}) = \lambda^{i-j} e_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n)$.
- (3) $\| [e_{i+1, i}, x_l] \|_2 < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n-1; l = 1, \dots, m$.

Clairement, si ε est choisi suffisamment petit, les conditions (1), (2), (3) impliqueront les conditions (5.2) et (5.3).

Pour obtenir K_{m+1} , restreignons-nous à $P = (K_1 \cup \dots \cup K_m)'$ qui est un facteur hyperfini de type II_1 sur lequel la restriction β de α a une période extérieure égale à $p_0(\alpha)$. Alors par le corollaire 2.7 et par le fait que β_ω est périodique minimal de période $p_0(\alpha)$ (théorème 3.2.1) il existe un système $(v_j)_{j=1, \dots, n}$ d'isométries partielles dans P_ω tel que, avec $v_{n+1} = v_1$:

$$\beta_\omega(v_j) = \lambda v_j, \quad \sum_{j=1}^n v_j^* v_j = 1, \quad v_j v_j^* = v_{j+1}^* v_{j+1} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Appliquons alors le lemme 4.2 pour construire les $(e_{j,k})_{j,k=1, \dots, n}$ satisfaisant les conditions (1), (2), (3) ci-dessus.

⁹Dans la suite, si K est une sous-algèbre de von Neumann de R , on dénote par E_K la trace préservant l'attente conditionnelle de R sur K et soit K' le commutant relatif de K dans R .

Maintenant soit $K = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \right)''$. Prenons d'abord $n = q$ et $\lambda = e^{i2\pi/q}$ alors la restriction de α à K est de façon évidente conjugué de s_q^1 . Maintenant $s_q^1 \otimes s_q^1$ est conjugué de s_q^1 de telle façon que $s_q^1 \otimes \alpha$ est conjugué de α , parce que $\alpha = \alpha/K \otimes \alpha/K'$.

Prenons alors $n =$ période extérieure de α et $\lambda = 1$, alors la restriction de α à K est l'identité de telle façon que $\alpha \otimes 1_R$ est conjugué de α parce que $1_R \otimes 1_R = 1_R$.

(b) Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ on choisit un ε_n positif ayant la propriété suivante :

(5.4) Soit U un unitaire dans R avec $U^p = 1$, $(e_j)_{j=1, \dots, p}$ une partition de l'unité dans R avec $Ue_jU^* = e_{j+1}$, $j = 1, \dots, p-1$, et K un sous-facteur de type I_p de R engendré par U et les e_j .

Alors $x \in R$, $\|x\|_{\infty} \leq 1$, $\|[x, U]\|_2 \leq 2\varepsilon_n$, $\|[x, e_j]\|_2 \leq 2\varepsilon_n$, $j = 1, \dots, p$ implique

$$\|E_{K'}(x) - x\|_2 \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Nous pouvons de plus supposer que $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n$ pour chaque $n \in \mathbf{N}$ et $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Alors on construit par induction une séquence $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-facteurs de type I_p de R commutant deux à deux et satisfaisant la condition 5.2 et

(5.5) Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ on a $\alpha(K_n)K_n$, α restreint à K_n égale $\text{Ad } U_n$, U_n unitaire dans K_n et :

$$\left\| \alpha(x_j) - \left(\prod_1^n \text{Ad } U_k \right) (x_j) \right\|_2 \leq \varepsilon_n \quad j = 1, \dots, n.$$

On prouve directement l'existence de K_{n+1} en supposant que K_1, \dots, K_n ont déjà été construits. Cela montrera également comment construire K_1 . Soit $P = (K_1 \cup \dots \cup K_n)' \cap R$ et P_1 sa boule-unité. P est globalement invariant par α , soit $\beta = \alpha/P$, alors $p_0(\beta) = p$ de telle façon que par 5.1 (a) il existe une partition de l'unité $(e_j)_{j=1, \dots, n}$ in P , avec $\beta(e_j) = e_{j+1}$ ($j = 1, \dots, p$) et :

$$\|[e_j, x_j]\|_2 \leq \varepsilon_n \quad (j = 1, \dots, p ; l = 1, \dots, n).$$

On choisit alors un système d'unités matricielles $(f_r)_{r=1, \dots, n}$ n^{2n} dans $(K_1 \cup \dots \cup K_n)''$ et on écrit $x_j = \sum_r \lambda_{r,j} f_r y_{r,j}$ où les λ sont des scalaires, les y appartiennent à P_1 , pour $j = 1, \dots, n+1$. Clairement on a ainsi un nombre fini k d'éléments de P_1 , disons y_1, \dots, y_k et un $\eta > 0$ tel que

$$(5.6) \quad \begin{aligned} & (v \text{ unitaire dans } P, \|\beta(y_j) - v y_j v^*\|_2 \leq \eta \quad (j = 1, \dots, k)) \\ & \implies (\|\alpha(x_j) - \left(\prod_1^n \text{Ad } U_l \right) \text{Ad } v(x_j)\|_2 \leq \varepsilon_{n+1} \quad (j = 1, \dots, n+1)). \end{aligned}$$

On suppose de plus que $\eta \leq 2\varepsilon_n$.

On choisit $\delta > 0$ à partir du $\eta > 0$ ci-dessus et du lemme 4.3 avec $\varepsilon = \frac{1}{4}\eta$. Maintenant par le corollaire 3.3 on peut trouver un élément U de P , $\|U\| \leq 1$, satisfaisant les conditions suivantes :

$$(5.7) \quad \|U^{p-l} - (U^*)^l\|_2 \leq \delta, \quad \|\beta(U) - U\|_2 \leq \delta$$

$$\|U^p - 1\| \leq \delta, \quad \|Ue_iU^* - \beta(e_i)\|_2 \leq \delta \quad (i = 1, \dots, p)$$

et

$$\|Uy_jU^* - \beta(y_j)\|_2 \leq \frac{1}{2}\eta \quad (j = 1, \dots, k).$$

Il découle alors du lemme 4.3 appliqué à $\beta \in \text{Aut } P$ qu'il existe une partition de l'unité $(E_j)_{j=1, \dots, p}$ dans P , un unitaire $V \in P$ tel que $VE_jV^* = E_{j+1}$ pour tout j , $V^p = 1$, que le sous-facteur K de P de type I_p engendré par $(E_j)_{j=1, \dots, p}$, et V est globalement invariant par β , avec $\beta/K = \text{Ad } V/K$ et que

$$\|E_j - e_j\|_2 \leq \frac{1}{4}\eta, \quad \|V - U\|_2 \leq \frac{1}{4}\eta.$$

On prendra $K_{n+1} = K, U_{n+1} = V$. On a pour $j \in \{1, \dots, k\}$:

$$\|Vy_jV^* - \beta(y_j)\| \leq 2\|V - U\|_2 + \|Uy_jU^* - \beta(y_j)\|_2 \leq \eta$$

de telle façon que par 5.6 on obtient :

$$\left\| \alpha(x_j) - \left(\prod_1^{n+1} \text{Ad } U_l \right) (x_j) \right\|_2 \leq \varepsilon_{n+1} \quad (j = 1, \dots, n+1).$$

Mais par l'hypothèse d'induction on avait :

$$\left\| \alpha(x_j) - \left(\prod_1^n \text{Ad } U_l \right) (x_j) \right\|_2 \leq \varepsilon_n \quad (j = 1, \dots, n).$$

Cela, en utilisant le fait que $\prod_1^n \text{Ad } U_l$ préserve la norme $\| \cdot \|_2$ montre que $\|Vx_jV^* - x_j\|_2 \leq \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} \leq 2\varepsilon_n \quad (j = 1, \dots, n)$.

On a aussi $\|[E_i, x_j]\|_2 \leq \|[e_i, x_j]\|_2 + 2\|E_i - e_i\|_2 \leq 2\varepsilon_n \quad (j = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad i = 1, \dots, p)$.

Ainsi il découle de 5.4 que :

$$\|E_{K'_{n+1}}(x_j) - x_j\|_2 \leq \frac{1}{2^{n+1}} \quad (j = 1, \dots, n).$$

On a montré comment construire la séquence $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ satisfaisant 5.2 et 5.5. Soit $K = \left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n \right)''$, alors par (5.2) on a une séparation de R comme produit tensoriel de K par K'_R . Notons également par 5.5 que :

$$\alpha(x) = \left(\prod_1^\infty \text{Ad } U_l \right) (x), \quad \forall x \in R.$$

Cela montre que α est conjugué de $s_p^1 \otimes (\text{identité sur } K'_R)$; mais α est conjugué de $\alpha \otimes 1_R$ (théorème 5.1 (a)) et (Identité sur K'_R) \otimes (Identité sur R) est clairement 1_R parce que $K'_R \otimes R$ est isomorphe à R . Ainsi α est conjugué de $s_p^1 \otimes 1_R$ qui à nouveau par 5.1 (a) est conjugué de s_p^1 . Q.E.D.

VI. Le groupe cyclique des classes de conjugaison extérieures avec une période extérieure donnée p

Dans cette section on démontrera que pour $p \in \mathbf{N}$ donné et $\gamma, \gamma^p = 1$, il n'y a qu'une classe de conjugaison extérieure avec invariants extérieurs (p, γ) . La preuve repose sur l'étude du produit tensoriel comme loi de composition entre les classes de conjugaison extérieures de période extérieure p .

Définition 6.1. Soit R le facteur hyperfini II_1 , a et b des classes de conjugaison extérieures dans $\text{Aut } R$, alors on définit $a \times b$ comme la classe de conjugaison extérieure de n'importe quel automorphisme $\alpha \otimes \beta \in \text{Aut } R \otimes R$ avec $\alpha \in a, \beta \in b$, ramenée à $\text{Aut } R$ par n'importe quel isomorphisme Π de R sur $R \otimes R$.

En d'autres termes, pour $\alpha \in a, \beta \in b$ et $\pi : R \rightarrow R \otimes R$ l'automorphisme $\pi^{-1}(\alpha \otimes \beta)\pi$ appartient à $a \times b$. Clairement changer α en $\alpha' \in a, \beta$ en $\beta' \in b$, et π en $\pi' : R \rightarrow R \otimes R$ ne change pas la classe de conjugaison extérieure de $\pi^{-1}(\alpha \otimes \beta)\pi$, de telle façon que 6.1 a du sens.

Théorème 6.2. Pour chaque $p \in \mathbf{N}$ l'ensemble Br_p des classes de conjugaison extérieures dans $\text{Aut } R$, de période extérieure égale à p , muni de la loi de composition $(a, b) \rightarrow a \times b$ est un groupe abélien et γ est un isomorphisme de ce groupe sur le groupe des racines $p^{\text{ièmes}}$ de 1 dans \mathbf{C} .

Corollaire 6.3. Pour chaque $p \in \mathbf{N}$, Br_p est un groupe cyclique d'ordre p avec comme unité la classe de conjugaison extérieure de s_p^1 et comme générateur la classe de conjugaison extérieure de s_p^γ si γ est une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de 1.

Démonstration. Découle immédiatement de 6.2 et de la proposition 1.6.

Corollaire 6.4. Soit R le facteur hyperfini II_1 , $\alpha, \beta \in \text{Aut } R$ périodiques, alors,

$$(\alpha \text{ conjugué de } \beta) \iff (p_0(\alpha) = p_0(\beta), \gamma(\alpha) = \gamma(\beta), \varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta)).$$

Démonstration. Par 6.2, α et β sont conjugués extérieurs ssi ils ont les mêmes invariants extérieurs. Par 2.8 si α et β sont conjugués extérieurs et $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta)$ alors α et β sont conjugués. Q.E.D.

Démonstration du théorème 6.2. Vérifions d'abord que $a \in Br_p, b \in Br_p \implies a \times b \in Br_p$. Par [9] Corollaire 6 on sait que le produit tensoriel $\alpha \otimes \beta$ de deux automorphismes α et β est intérieur si et seulement si tous les deux sont intérieurs. Il en découle en général que $p_0(\alpha \otimes \beta)$ est égal au p.p.c.m. $(p_0(\alpha), p_0(\beta))$ et en particulier que Br_p est stable par $(a, b) \rightarrow a \times b$. Ensuite, on montre que la classe e de s_p^1 est une unité dans Br_p . Soit $a \in Br_p$ et soit α un automorphisme minimal périodique. Alors par le théorème 5.1 (a) on sait que $\alpha \otimes s_p^1$ est conjugué de α et ainsi que $a \times e$ est égal à a .

Vérifions maintenant que γ est un homomorphisme ; soit $a, b \in Br_p, \alpha \in a, \beta \in b$, et $\alpha^p = \text{Ad } u, \beta^p = \text{Ad } v, u, v \in R$ avec $\alpha(u) = \gamma(\alpha)u, \beta(v) = \gamma(\beta)v$. On a alors $(\alpha \otimes \beta)^p = \text{Ad } (u \otimes v)$ et $\alpha \otimes \beta(u \otimes v) = \alpha(u) \otimes \beta(v) = \gamma(\alpha)\gamma(\beta)u \otimes v$.

Prouvons que e est caractérisé dans Br_p par la condition $\gamma(e) = 1$. Prenons $a \in Br_p$, avec $\gamma(a) = 1$, et soit α périodique minimal. Alors la période de α est égal à sa période extérieure, égale à p . Ainsi par le théorème 5.1 (b) α est conjugué de s_p^1 de telle façon que $a = e$.

On sait ainsi que Br_p est un groupe, on peut en fait donner une description de l'inverse d'un élément a de Br_p : soit R^0 l'algèbre de von Neumann opposée de R , i.e. R^0 coïncide avec R comme espace vectoriel complexe mais le produit est $(x, y) \rightarrow yx$ au lieu de $(x, y) \rightarrow xy$. Alors soit $\alpha \in \text{Aut } R$, de façon évidente, α comme transformation linéaire de R définit un automorphisme α^0 de R^0 , qui, parce que R^0 est hyperfini et par conséquent isomorphe à R , définit une classe de conjugaison dans $\text{Aut } R$, appelée l'opposée de α . Clairement, $p(\alpha) = p(\alpha^0)$. Soit $\alpha^p = \text{Ad } U, \alpha(U) = \gamma U$, alors l'égalité $\alpha^p(x) = UxU^*, x \in R$, signifie que $(\alpha^0)^p(x) = U^*xU, x \in R^0$, de telle façon que, comme $\alpha^0(U^*) = \alpha(U^*) = \gamma U^*$, on obtient $\gamma(\alpha^0) = \gamma(\alpha)^{-1}$.

Bien sûr a^0 a du sens pour $a \in Br_p$ et $a \times a^0$ est égal à e parce que $\gamma(a \times a^0) = 1$.

La fin de la preuve de 6.2 est maintenant facile. On sait que Br_p est un groupe, que γ est un homomorphisme de noyau trivial et que γ est surjective par 1.6 (c). Q.E.D.

On applique maintenant le théorème 6.2 pour déterminer les conditions selon lesquelles deux automorphismes périodiques $\alpha, \beta \in \text{Aut } R$ sont faiblement équivalents, i.e. il existe un $\sigma \in \text{Aut } R$ tel que $\sigma[\alpha]\sigma^{-1} = [\beta]$, où $[\alpha]$ est le groupe complet, [4] p. 163, du groupe $\{\alpha^n, n \in \mathbf{Z}\} \subset \text{Aut } R$.

Soit $n = 2^l m, m$ impair, un entier. Soit S_n l'ensemble contenant tous les diviseurs premiers de m en plus d'un élément ε si $l = 2$ et de deux éléments ε, ω si $l > 2$. Soit pour chaque entier k premier à n , $\left(\frac{k}{n}\right) \in \{-1, 1\}^{S_n}$ tel que $\left(\frac{k}{n}\right)_\varepsilon = (-1)^{\varepsilon(k)}, \varepsilon(k) = \frac{k-1}{2}, \left(\frac{k}{n}\right)_\omega = (-1)^{\omega(k)}$ où $\omega(k) = \frac{k^2-1}{8}$, and $\left(\frac{k}{n}\right)_p = \left(\frac{k}{n}\right)$ comme dans [11] p. 14 sinon.

Théorème 6.5. Pour un périodique $\alpha \in \text{Aut } R$ définissons $c(\alpha) = \text{Ordre de } \gamma(\alpha)$ et $q(\alpha) = \left(\frac{k}{c(\alpha)}\right)$ où $\gamma(\alpha) = \exp(2\pi i k/c(\alpha))$.

- (a) Deux automorphismes périodiques α et β sont faiblement équivalents si et seulement si $p_0(\alpha) = p_0(\beta), c(\alpha) = c(\beta)$ and $q(\alpha) = q(\beta)$.
- (b) Soient c et d deux entiers $\geq 1, S_c$ définis comme ci-dessus, et $q \in \{-1, 1\}^{S_c}$. Alors il existe un périodique $\alpha \in \text{Aut } R$ tel que $p_0(\alpha) = cd, c(\alpha) = c, q(\alpha) = q$.

Démonstration. (a) Si α est faiblement équivalent à β alors $p_0(\alpha) = p_0(\beta) = p$ parce que $p_0(\alpha)$ est l'ordre de l'image de $[\alpha]$ dans $\text{Out } R$. Aussi, il existe un entier s , nécessairement premier à p , et tel que α est équivalent extérieur à β^s .

On a, avec $p = p(\alpha) = p(\beta)$, que $\beta^p = \text{Ad } U, \beta(U) = \gamma(\beta)U$ pour un certain unitaire $U \in R$. Ainsi $(\beta^s)^p = \text{Ad } U^s, \beta^s(U^s) = \gamma(\beta)^{s^2}U$ de telle façon que $\gamma(\beta^s) = \gamma(\beta)^{s^2}$.

Comme s est premier à p il s'ensuit que l'ordre de $\gamma(\beta)^{s^2}$ est le même que l'ordre de $\gamma(\beta)$ de telle façon que $c(\alpha) = c(\beta) = c$. Posons $\gamma(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi ik}{c}\right)$, $\gamma(\beta) = \exp\left(\frac{2\pi ik'}{c}\right)$. Alors on a $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)^{s^2}$ de telle façon que dans \mathbf{Z}/c on obtient $k = s^2 k'$, où k, k', s^2 sont des unités dans \mathbf{Z}/c . Il s'ensuit ainsi que $q(\alpha) = q(\beta)$.

Inversement, supposons que $p_0(\alpha) = p_0(\beta)$, $c(\alpha) = c(\beta)$, $q(\alpha) = q(\beta)$, et posons $\gamma(\alpha) = \exp\left(\frac{2\pi ik}{c}\right)$, $\gamma(\beta) = \exp\left(\frac{2\pi ik'}{c}\right)$. Alors par le théorème 3 de [11], p. 39 et 1, p. 46, prenons s , premier à $p_0(\alpha)$, tel que $ks^2 = k'(c(\alpha))$. Il s'ensuit que α^s a les mêmes invariants extérieurs que β et que α et β sont faiblement équivalents.

(b) Soit $k \in \mathbf{Z}/c$ une unité dans \mathbf{Z}/c tel que $\left(\frac{k}{c}\right) = q$ ([11] lemme 1, p. 46) alors prenons $\gamma = \exp\left(\frac{2\pi ik}{c}\right)$ et $\alpha = s_{cd}^\gamma$.

Il s'ensuit que $p_0(\alpha) = cd$, $c(\alpha) = \text{Ordre de } \gamma = c$, and $q(\alpha) = q$.

Q.E.D.

Remarque 6.7. Par 6.5, il y a des automorphismes α de R , le plus simple étant s_3^j where $j^3 = 1$, $j \neq 1$, qui ne sont pas faiblement équivalents à leur opposé α^0 . On peut déduire de cela que la paire $R^\alpha \subset R$ n'est pas isomorphe à la paire opposée.

Remarque 6.8. Soit $n \in \mathbf{N}$ et M un vecteur arbitraire. Soit $\alpha \in \text{Aut } M$, $p_0(\alpha) = n$. Alors considérons le noyau abstrait

$$q \in \mathbf{Z}/n \rightarrow \varepsilon(\alpha^q) \in \text{Out } M$$

où ε est l'application canonique de $\text{Aut } M$ dans $\text{Out } M$. À ce noyau abstrait il correspond une obstruction $k \in H^3(\mathbf{Z}/n, \mathbf{T})$ ([12] p. 216) avec $\mathbf{T} = \text{centre du groupe unitaire de } M$ (i.e. $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$) avec action triviale of \mathbf{Z}/n . Pour obtenir k on prend pour $q \in \mathbf{Z}/n$ un $\beta_q \in \text{Aut } M$ arbitraire avec $\varepsilon(\beta_q) = \varepsilon(\alpha^q)$, on prend alors pour $q_1, q_2 \in \mathbf{Z}/n$ un unitaire u_{q_1, q_2} de M avec $\text{Ad } u_{q_1, q_2} = \beta_{q_1} \beta_{q_2} \beta_{q_1+q_2}^{-1}$ et : $k(q_1, q_2, q_3) = \beta_{q_1}(u_{q_2, q_3}) u_{q_1, q_2+q_3}^{-1} u_{q_1+q_2, q_3}^{-1} u_{q_1, q_2}^{-1} \in \mathbf{T}$. Avec le choix $\beta_q = \alpha^q$, on obtient :

$$k(q_1, q_2, q_3) = \gamma(\alpha)^{q_1 \eta(q_2, q_3)} \quad \text{where} \quad \eta(q_2, q_3) = \begin{cases} 0 & \text{si } q_2 + q_3 < n, \\ 1 & \text{si } q_2 + q_3 \geq n. \end{cases}$$

En comparant la résolution bar du module triviale $\mathbf{Z}/n \mathbf{Z}$ avec sa résolution périodique de période, on ramène k à l'élément $\gamma(\alpha)$ de $\{a \in \mathbf{T}, a^n = 1\}$.

VII. Applications à diverses questions de théorie ergodique non-commutative

Dans la suite, on note R le facteur hyperfini de type II_1 . Cette section est dédiée à l'application du théorème 1.5 pour répondre aux questions qui suivent.

Problème 7.1. Le périodique $\alpha \in \text{Aut } R$ est-il conjugué de l'opposé de son inverse ? (Il est facile de montrer qu'il y a des automorphismes intérieurs qui ne sont ni conjugués de leur opposé ni l'inverse. Pourtant ils sont toujours conjugués de l'opposé de leur inverse, quand ils sont périodiques).

Théorème 7.2. *Soit $\alpha \in \text{Aut } R$ périodique. Alors α est conjugué de $(\alpha^0)^{-1}$ si et seulement si $\gamma(\alpha)^2 = 1$.*

Démonstration. On a $\gamma(\alpha^{-1}) = \gamma(\alpha)$ ($\alpha^{-p} = \text{Ad } U^*$ où $p = p_0(\alpha)$ et $\alpha(U) = \gamma(\alpha)U$, de telle façon que $\alpha^{-1}(U^*) = \gamma(\alpha)U^*$).

Ainsi, $\gamma((\alpha^{-1})^0) = \overline{\gamma(\alpha)}$ de telle façon que si $\gamma(\alpha)^2 \neq 1$, α n'est même pas conjugué extérieur de $(\alpha^0)^{-1}$.

On a $\varepsilon(\alpha^0) = \varepsilon(\alpha^{-1})$ pour tout $\alpha \in \text{Int } R$, α périodique. Ainsi l'égalité $\varepsilon(\alpha^0) = \varepsilon(\alpha^{-1})$ est vérifiée par n'importe quel périodique $\alpha \in \text{Aut } R$ (parce que $(\alpha^0)^{p_m} = (\alpha^{p_m})^0$, $(\alpha^{-1})^{p_m} = (\alpha^{p_m})^{-1}$).

Donc 7.2 découle de 1.5 et on a les égalités :

$$p_0((\alpha^0)^{-1}) = p_0(\alpha), \quad \gamma((\alpha^0)^{-1}) = \overline{\gamma(\alpha)}, \quad \varepsilon((\alpha^0)^{-1}) = \varepsilon(\alpha).$$

En particulier si $\gamma(\alpha)^2 \neq 1$, α ne peut être conjugué extérieur d'un produit tensoriel infini d'automorphismes de facteurs de dimension finie, parce que de tels automorphismes sont conjugués des opposés de leur inverse. Cela amène au :

Problème 7.3. Quels automorphismes $\alpha \in \text{Aut } R$, α périodique, sont conjugués (resp. conjugués extérieurs) d'un produit tensoriel infini d'automorphismes de facteurs de dimension finie ? d'un produit tensoriel infini d'automorphismes intérieurs de facteurs arbitraires ?

Théorème 7.4. *Soit $\alpha \in \text{Aut } R$, un périodique, alors :*

- (a) *Si α est un produit tensoriel infini d'automorphismes intérieurs $\text{Ad } U_j$ de facteurs finis R_j alors $\gamma(\alpha) = 1$.¹⁰*
- (b) *Si $\gamma(\alpha) = 1$, α est le produit tensoriel d'un automorphisme intérieur de R par un produit tensoriel infini d'automorphismes de facteurs de dimension finie.*
- (c) *Soit α périodique de période p , avec $\gamma(\alpha) = 1$. Posons $p = qp_0(\alpha)$, supposons q premier, soit $\varepsilon = \sum_{j=0}^{q-1} \lambda_j \varepsilon(e^{i2\pi j/n})$ l'invariant intérieur de α . Alors α est un produit tensoriel infini d'automorphismes de facteurs de dimension finie si et seulement si soit tous les λ'_j sont des nombres rationnels soit il sont tous $\neq 0$ ainsi que les $\hat{\lambda}_k$:*

$$\hat{\lambda}_k = \sum \lambda_j \exp \frac{i2\pi jk}{n} \quad k = 0, \dots, q-1.$$

Démonstration. Peut être laissée au lecteur.

¹⁰Donc si $\gamma(\alpha) \neq 1$, α n'est pas conjugué extérieur d'un tel produit tensoriel.

On a le résultat général positif suivant concernant l'approximation des automorphismes périodiques de R par des automorphismes d'algèbres de von Neumann de dimension finie :

Théorème 7.5. *Soit α un automorphisme périodique de R , alors il existe une séquence croissante de sous-algèbres de dimension finie P_n de R telle que $\alpha(P_n) = P_n$ pour tout n et $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ est fortement dense dans R .*

Démonstration. D'abord prenons $p \in \mathbf{N}$, $\gamma \in \mathbf{C}$, $\gamma^p = 1$ et s_p^γ comme construit dans la partie 1. Considérons $P_n = (F_p^{(1,n)} \cup \{\theta^n(U_\gamma)\})''$ avec les notations de la proposition 1.6. Alors, comme $\alpha\theta^n(U_\gamma) = \gamma\theta^n(U_\gamma)$ avec $\alpha = s_p^\gamma$ et comme $\alpha(F_p^{(1,n)})$ est contenu dans l'algèbre engendrée par $F_p^{(1,n)}$ et $\theta^{n-1}(v_\gamma)$, i.e. par $F_p^{(1,n)}$ et $\theta^n(U_\gamma^*)$, on voit que P_n est globalement invariant par α pour tout n .

En ayant prouvé 7.5 pour les s_p^γ on a juste à prouver cela pour les automorphismes périodiques intérieurs et à conclure en utilisant 1.11.

Soit $\text{Ad } U$ un automorphisme intérieur périodique de R , avec $U = \sum_{j=1}^m a_j e_j$ où $a_j \in \mathbf{C}$, $a_j^m = 1$ et les e_j sont des projections dans R .

Choisissons une séquence croissante de projections $f_n \in R$ commutant avec U , telle que pour chaque n, j : $\tau(f_n e_j)$ est un rationnel dyadique, et avec $f_n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$.

Soit $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une séquence dense dans la boule unité de R (dense pour la topologie forte). Alors par induction sur n on construit une séquence $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ où K_n est un sous-facteur de type $I_2 p_n$ de R_{f_n} contenant $U f_n$ de telle façon que $K_{n-1} + \mathbf{C}(f_n - f_{n-1}) \subset K_n$ et qu'il approxime le $f_n x_j f_n$ ($j = 1, \dots, n$) jusqu'à $\frac{1}{n}$ dans la norme trace.

Il s'ensuit de cela que la séquence $P_n = K_n + \mathbf{C}(1 - f_n)$ est croissante, qu'elle engendre R et que $U P_n U^* = P_n$ pour chaque $n \in \mathbf{N}$. Q.E.D.

Problème 7.6. Quels automorphismes périodiques de R ont une racine carrée ?

Clairement, n'importe quel automorphisme intérieur de R a une racine carrée, et ainsi par 1.11 on voit qu'un périodique α avec invariants extérieurs (p, γ) a une racine carrée dans $\text{Aut } R$ si s_p^γ en a une. Pour calculer $p_0(\alpha^2)$, $\gamma(\alpha^2)$ on distingue deux cas :

- (1) $p_0(\alpha)$ est impair. Alors α^{2q} est extérieur pour $q = 1, \dots, p_0(\alpha) - 1$ parce que $2q$ n'est pas un multiple de $p_0(\alpha)$. Donc :

$$p_0(\alpha^2) = p_0(\alpha), \quad \gamma(\alpha^2) = \gamma(\alpha)^4.$$

- (2) $p_0(\alpha)$ est pair. Alors $(\alpha^2)^{\frac{p_0(\alpha)}{2}}$ est intérieur et

$$p_0(\alpha^2) = \frac{1}{2} p_0(\alpha), \quad \gamma(\alpha^2) = \gamma(\alpha)^2.$$

Théorème 7.7.^[11] : Soit $p \in \mathbf{N}$, $\gamma \in \mathbf{C}$, $\gamma^p = 1$. Si l'ordre de γ est impair, alors tout automorphisme périodique d'invariant extérieur (p, γ) a une racine carrée.

Si l'ordre de γ est pair alors s_p^γ n'a pas de racine carrée.

Démonstration. Supposons que l'ordre de $\gamma = 2q + 1$. Appelons $\gamma' = \gamma^{-q}$, alors γ' est une racine de 1 d'un ordre divisant l'ordre de γ et $\gamma'^2 = \gamma^{-2q} = \gamma$. Ainsi $s_{2m}^{\gamma'}$ a une période divisant $2 \cdot$ période de s_p^γ . Comme $2p$ est pair, on a $p_0((s_{2p}^{\gamma'})^2) = p$, $\gamma((s_{2p}^{\gamma'})^2) = \gamma'^2 = \gamma$, et

$$(s_{2p}^{\gamma'})^{2p \text{ Ordre de } \gamma} = 1$$

Donc $(s_{2p}^{\gamma'})^2$ a des invariants extérieurs (p, γ) et un invariant intérieur trivial, de telle façon qu'il est conjugué de s_p^γ par le théorème 1.5. Par conséquent $s_p^\gamma \otimes \text{Ad } U$ a une racine carrée pour tous les automorphismes intérieurs et le théorème 1.11 s'applique.

Si les racines carrées γ', γ'' de γ satisfont l'ordre de $\gamma' = \text{Ordre de } \gamma'' = 2 \text{ Ordre de } \gamma$, prenons α de telle façon que $\alpha^2 = s_p^\gamma$. Alors on doit avoir $p_0(\alpha) = 2p_0(\alpha^2)$ parce que $p_0(\alpha)$ doit être pair. Alors on a également $\gamma(\alpha)^2 = \gamma$, de telle façon que, disons $\gamma(\alpha) = \gamma'$. On a :

$$(\text{période de } \alpha) \text{ est un multiple de } (\text{période de } s_{2p}^{\gamma'}).$$

Par conséquent, comme $(\text{période de } s_{2p}^{\gamma'}) = 2p \cdot \text{Ordre de } \gamma' = 4p \cdot \text{Ordre de } \gamma$ on voit qu'on ne peut pas avoir $\alpha^{2p \text{ Ordre de } \gamma} = 1$ comme requis par $\alpha^2 = s_p^\gamma$. Q.E.D.

Remarque 7.8. Dans $\text{Out } R$ tout élément périodique a une racine $q^{\text{ième}}$ pour tout $q \in \mathbf{N}$, $q \neq 0$, parce que $(s_p^{\gamma^q})^q$ est conjugué extérieur de s_{pq}^γ pour tout p, q et γ , $(\gamma^q)^p = 1$.

Remarque 7.9. Dans [2] H. BORCHERS étudie les automorphismes α des algèbres de von Neumann M et leurs relations avec les automorphismes intérieurs. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ il introduit une classe K_n d'automorphismes, et le théorème 4.1 de [2] énonce que, quand M est un facteur pour simplifier, $(\alpha^i \text{ est intérieur ssi } i = 0 \text{ (} n)) \iff \alpha \in K_n$.

Pourtant les automorphismes $s_p^\gamma, \gamma \neq 1$, donnent un contre-exemple à ce théorème parce que par [2] prop. 4.7, si $\alpha \in K_n$ alors α^n est de la forme $\text{Ad } U$ avec $U \in M^\alpha$. (Dans les notations de [2] $U \in Z_0$ où (Déf. 2.1) Z_0 dénote le centre de l'algèbre point fixe.) Pourtant, si dans [2] on remplace partout le mot "intérieur" par "intérieur implémenté dans Z_0 " alors tous les arguments continuent de s'appliquer.

Remarque 7.10. Dans le théorème 1 de [8], V. YA GOLODETS énonce que le produit croisé du facteur R hyperfini II_1 par tout groupe cyclique d'automorphismes extérieurs est encore hyperfini. Ce théorème est vrai à partir de nos résultats ci-dessus. (Appliquer 7.5.) Pourtant la preuve donnée dans [8] ne marche pas. Pour voir cela, on prend les notations de [8]. L'automorphisme h de $\mathcal{M} = G \times M$ correspond à l'action duale de Takesaki, du générateur de G associé à ε (ε est une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de 1). En effet, dans $G_h \times \mathcal{M}$ le commutant du facteur de type I_n engendré par V_g et V_h est, par dualité, l'algèbre de von Neumann $\tilde{\Pi}(M)$, où $\tilde{\Pi}$ est un isomorphisme de M

¹¹Clairement, n'importe quel $\alpha \in \text{Aut } R$ de période impaire, disons $2m + 1$, a une racine carrée, notamment α^{m+1} .

dans $G_h \times \mathcal{M}$ défini par

$$\tilde{\Pi}(x) = \sum \hat{x}_q V_h^q, \quad x = \sum \hat{x}_q, \quad g(\hat{x}_q) = \varepsilon^q \hat{x}_q.$$

Maintenant \mathcal{M} , comme sous-facteur de $G_h \times \mathcal{M}$, a \mathbf{C} comme commutant relatif de telle sorte que le normalisateur de \mathcal{M} dans $G_h \times \mathcal{M}$ consiste simplement en les unitaires de la forme vV_h^m unitaires dans \mathcal{M} , $0 \leq m < n$.

Nous pouvons donc trouver un unitaire X dans $G_h \times \mathcal{M}$ qui commute avec V_g et V_h mais pour lequel $X\mathcal{M}X^* \neq \mathcal{M}$.

L'assertion dans [8] est que pour n'importe quel automorphisme φ de $G_h \times \mathcal{M}$ pour lequel $\varphi(W_1) = V_h$, $\varphi(W_2) = V_g$, la famille d'opérateurs $\varphi(W_2) = V_g$, $V_k = \varphi(W_k)$, $k = 3, 4, \dots$ engendre \mathcal{M} .

Mais si cela est vrai pour un certain φ , remplaçons φ par $\varphi' = (\text{Ad } X)\varphi$ avec X comme ci-dessus, alors certainement $\varphi'(W_1) = V_h$, $\varphi'(W_2) = V_g$, mais les $\varphi'(W_p)$ ($p = 2, 3, 4, \dots$) engendrent $X\mathcal{M}X^*$ qui est différent de \mathcal{M} , de telle façon que la condition ne sera pas vérifiée pour φ' .

Bibliographie

- [1] W. ARVESON, On group of automorphisms of operator algebras, *J. Funct. Analysis*, **15** (1974), 217-243.
- [2] H. BORCHERS, Characterization of inner * automorphisms of W^* algebras, *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.*, **10** (1974), 11-50.
- [3] E. CHRISTENSEN, Perturbation of operator algebras, *I.S.B.N. Oslo Preprint Series* No. 14, July 74.
- [4] A. CONNES, Une classification des facteurs de type III, *Ann. Sci. E.N.S.*, (4) **6** (1973), 133-252.
- [5] A. CONNES, Almost periodic states and factors of type III_1 , *J. Funct. Analysis*, **16** (1974), 415-445.
- [6] J. DIXMIER, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2ed., Gauthier Villars (Paris, 1969).
- [7] D. MCDUFF, Central sequences and the hyperfinite factor, *Proc. London Math. Soc.*, 21 (1970), 443-461.
- [8] V. YA GOLODETS, On von Neumann's approximately finite algebras with finite trace, *Soviet Math. Dokl.*, **9** (1968), No. 4.
- [9] R. KALLMAN, A decomposition theorem for automorphisms of von Neumann algebras, *Funct. Analysis*, Edited by C. O. Wilde, Academic Press (1970), pp. 33-35.
- [10] S. SAKAI, *C^* and W^* algebras* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Bd. 60), Springer-Verlag (Berlin Heidelberg-New York, 1971).
- [11] J. P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, Presse Universitaire de France.
- [12] Z. TAKEDA, On the extensions of finite factors. II, *Proc. Japan Acad.*, **35** (1959), 215-220.

3.2. Triplets spectraux

Dans cette section, on introduit l'outil principal des algèbres d'opérateurs utilisé pour étudier la géométrie fractale - le triplet spectral. On définit également la trace de Dixmier qui sera utilisée pour définir la mesure induite par le triplet spectral. Les exemples incluront des triplets spectraux pour des fractals comme l'ensemble de Cantor dans \mathbb{R} , pour des courbes, et pour une certaine classe d'ensembles construits à partir de courbes (comme le triangle de Sierpinski et la courbe étirée de Sierpinski).

3.2.1 Triplets spectraux

On utilise la notation $[A, B] := AB - BA$ pour le commutateur de deux opérateurs A, B sur un espace de Hilbert. En outre, étant donné un espace de Hilbert \mathcal{H} on écrit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour l'espace des opérateurs bornés sur \mathcal{H} .

Définition 12. Une *triplet spectral* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ est une collection de trois objets

- \mathcal{A} une C^* -algèbre unitaire,
- \mathcal{H} un espace de Hilbert qui transporte une représentation fidèle unitaire : $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$,
et
- un opérateur, principalement auto-adjoint D de domaine $\text{Dom}(D) \subseteq \mathcal{H}$, tel que
 - (a) l'ensemble $\{a \in \mathcal{A} : [D, \pi(a)] \text{ est densément défini et a une extension bornée vers } \mathcal{H}\}$ est dense dans \mathcal{A} , et
 - (b) l'opérateur $(I + D^2)^{-1}$ est compact.

La C^* -algèbre \mathcal{A} sera souvent $C(X)$, avec X un espace de Hausdorff compact. L'opérateur $[D, \pi(a)]$, pour $a \in \mathcal{A}$, agira comme la "dérivée" de l'élément a et l'ensemble dense dans la condition (a) agira comme l'ensemble des fonctions C^1 dans $C(X)$. L'opérateur D et ses valeurs propres sera la clef pour retrouver l'information géométrique comme la dimension et la mesure. La condition que l'opérateur $(I + D^2)^{-1}$ soit compact assure que le spectre de l'opérateur D^{-1} ne contient que des valeurs propres et que le seul point d'accumulation possible de ces valeurs propres est 0. On peut alors considérer des sommes infinies de ces valeurs propres.

En utilisant les trois outils d'un triplet spectral, on peut définir les notions de dimension, métrique, et mesure sur un espace de Hausdorff X .

¹Thèse de Andrea Arauza intitulée *Spectral Triples and Fractal Geometry*, dans le but d'obtenir le titre de Docteur en philosophie des mathématiques, soutenue à Riverside, à l'Université de Californie, en juin 2018.

Définition 13. *Étant donné un triplet spectral $(C(X), \mathcal{H}, D)$, le nombre*

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(X) := \inf\{p > 0 : \text{tr}((I + D^2)^{-p/2}) < \infty\}$$

*est la **dimension spectrale** (ou **dimension métrique**) de l'espace X .*

Notons que la condition (b) dans la définition d'un triplet spectral est nécessaire de telle façon que la trace dans la définition de la dimension spectrale ait la possibilité d'être finie. A priori il n'y a pas de raison que la dimension spectrale \mathfrak{d} soit finie.

On définit ensuite une notion de distance induite par le triplet spectral. La définition semblera familière à ceux qui connaissent les métriques sur des espaces d'états. Pour davantage de détails à ce sujet, voir les travaux de Marc Rieffel dans [30], [31], [32] et d'Alain Connes dans [10].

Définition 14. *Étant donné un triplet spectral $(C(X), \mathcal{H}, D)$, définissons la **distance spectrale** par*

$$d_X(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : f \in C(X), \|[D, \pi(f)]\| \leq 1\}, \quad \text{pour } x, y \in X.$$

En utilisant un triplet spectral et une autre notion de géométrie non-commutative, on peut définir la notion de mesure. Pour cela on doit introduire la notion de trace de Dixmier.

3.2.2 La trace de Dixmier

Comme référence à la discussion à venir, on peut se reporter au livre *Noncommutative Geometry* d'Alain Connes [9]. Ce livre est la référence pour la géométrie non-commutative. Pour définir la trace de Dixmier on aura besoin d'extensions de la notion habituelle de limite. Pour cela, on utilisera des limites étendues. Les limites étendues sont des extensions à l^∞ de la fonctionnelle limite habituelle agissant sur c , l'espace des séquences convergentes. Par Hahn Banach la limite classique sur c s'étend à l^∞ , notée Lim , et $|\text{Lim}(x)| \leq \|x\|_\infty$ pour tout $x \in l^\infty$.

Définition 3.2.2.1. *Une fonctionnelle linéaire positive ϕ sur une algèbre de von Neumann \mathcal{N} est un **état** si $\phi(1) = 1$.*

Les limites étendues sont des états sur l^∞ puisque $\text{Lim}(1) = 1$ et sont caractérisés par le fait qu'ils s'évanouissent sur c_0 . En d'autres termes, un état ϕ sur l^∞ s'évanouit sur c_0 si et seulement si ϕ est une extension de la limite classique à l^∞ (i.e. $\phi = \text{Lim}$). Notons que tout état sur l^∞ est continu :

$$|\phi(x)| \leq |\phi(1 \cdot \|x\|_\infty)| \leq \|x\|_\infty$$

où $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$. Cela signifie qu'il suffit qu'un état s'évanouisse sur des séquences avec un nombre fini d'entrées non nulles pour que l'état puisse être une limite étendue.

Définition 3.2.2.2. *Soit w un état sur l'algèbre de von Neumann l^∞ . Alors w est appelé une **limite étendue** si elle s'évanouit sur toute séquence avec un nombre fini d'entrées non nulles dans l^∞ .*

Nous aurons besoin que nos limites étendues satisfassent une certaine propriété de dilatation. Le semi-groupe discret de dilatation $\sigma_k : l^\infty \rightarrow l^\infty$ pour $k \in \mathbb{N}$ agit par la formule

$$\sigma_k(x) = (x_0, x_0, \dots, x_0, x_1, x_1, \dots, x_1, \dots)$$

où $x \in l^\infty$ et chaque x_j apparaît k fois. On utilisera des limites étendues invariantes par 2-dilatation. C'est-à-dire des limites étendues, $w : l^\infty \rightarrow \mathbb{R}$, qui satisfont

$$w(\sigma_2(x)) = w(x).$$

Le fait que des limites étendues invariantes par dilatation existent découle d'une version du théorème de Hahn Banach invariante par dilatation. La preuve de cette version du théorème de Hahn Banach peut être trouvée dans le texte [11] d'Edwards, Théorème 3.3.1.

Théorème 3.2.2.3. (Théorème de Hahn Banach invariant) *Soit X un espace linéaire et G un semi-groupe commutatif. Étant donné*

- (a) *une action $g : x \rightarrow g(x)$ de G sur X ,*
- (b) *un sous-espace G -invariant Y de X ,*
- (c) *une fonctionnelle convexe homogène $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $p \circ g \leq p$ pour tout $g \in G$,*
- (d) *une fonctionnelle linéaire invariante G , $w : Y \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $w \leq p$,*

alors il existe une extension invariante G , $w : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $w \leq p$.

Corollaire 3.2.2.4. *Des limites étendues invariantes par dilatation existent sur l^∞ .*

L'espace dans la définition qui suit est un idéal dans l'ensemble des opérateurs compacts et servira de domaine de la trace de Dixmier. Pour un opérateur compact T , notons par $\mu_j(T)$ les valeurs propres de $|T|$ ordonnées de telle façon que $0 \leq \mu_{j+1}(T) \leq \mu_j(T)$ pour $j \in \mathbb{N}$.

Définition 3.2.2.5. *Soit $w : l^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle linéaire qui s'évanouit sur c_0 et satisfait pour $x \in l^\infty$, $w(\sigma_2(x)) = w(x)$. Définissons*

$$\mathcal{L}^{(1,\infty)} = \left\{ T \in \mathcal{K} : \|T\|_{(1,\infty)} = \sup_N \frac{1}{\log(1+N)} \sum_{j=1}^N \mu_j(T) < \infty \right\}.$$

La trace de Dixmier de $T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$ où $T \geq 0$, est donnée par

$$\text{Tr}_w(T) = w \left\{ \frac{1}{\log(1+N)} \sum_{j=1}^N \mu_j(T) \right\}.$$

Définissons Tr_w pour les opérateurs auto-adjoints et ensuite pour des opérateurs arbitraires par linéarité.

La séquence

$$\left\{ \frac{1}{\log(1+N)} \sum_{j=1}^N \mu_j(T) \right\}_{N=1}^\infty$$

ne converge pas toujours lorsque $N \rightarrow \infty$, donc $\text{Tr}_w(T)$ peut dépendre de la limite étendue w . Dans la plupart des applications on peut montrer l'indépendance de $\text{Tr}_w(T)$ à partir de w . Comme pour la trace des opérateurs habituelle, la trace de Dixmier a de nombreuses propriétés utiles.

Proposition 3.2.2.6. [9]

1. $\text{Tr}_w(\cdot)$ est une fonctionnelle linéaire positive sur l'idéal des opérateurs T pour lesquels $\mu_j(T) = O(n^{-1})$.
2. $\text{Tr}_w(ST) = \text{Tr}_w(TS)$ pour tous les opérateurs compacts T avec $\mu_j(T) = O(n^{-1})$ et $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
3. $\text{Tr}_w(\cdot)$ s'évanouit sur les opérateurs compacts T avec $\mu_j(T) = O(n^{-\alpha})$ pour $\alpha > 1$. i.e. $\text{Tr}_w(T) = 0$ si $n\mu_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Un résultat de Connes est que pour un choix adéquat du triplet spectral, l'application $\text{Tr}_w(\pi(f)|D|^{-\delta})$ est une fonctionnelle linéaire positive non triviale sur $C(X)$ et induit par conséquent une mesure ; voir [9]. C'est comme cela qu'on utilisera un triplet spectral pour induire une mesure sur un ensemble fractal. Maintenant que nous avons tous les outils nécessaires, nous pouvons commencer à explorer comment les utiliser pour étudier la géométrie fractale. Voir [28] pour davantage d'éléments sur la théorie des traces singulières comme la trace de Dixmier. Le théorème suivant d'Alain Connes dans [9] est souvent utilisé pour calculer la trace de Dixmier comme résidu d'une certaine série. On utilisera ce théorème dans les sections qui suivent.

Théorème 15.

Pour $T \geq 0, T \in \mathcal{L}^{(1,\infty)}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1.
$$(s - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^s \rightarrow L \text{ lorsque } s \rightarrow 1^+ ;$$
2.
$$\frac{1}{\log(N + 1)} \sum_{n=1}^N \mu_n(T) \rightarrow L \text{ lorsque } N \rightarrow \infty.$$

Références bibliographiques

- [9] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, 1994.
- [10] A. Connes, Compact metric spaces, Fredholm modules, and hypofiniteness, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **9** (1989), 207220.
- [11] R. E. Edwards, *Functional Analysis : Theory and Applications*, Dover Publications Inc., New York, 1995.
- [28] S. Lord, F. Sukochev, D. Zanin, *Singular Traces: Theory and Applications*, vol. 46. De Gruyter Studies in Mathematics, 2013.

- [30] M. A. Rieffel, Metrics on states from actions of compact groups, *Doc. Math.* 3 (1998) 215-229.
- [31] M. A. Rieffel, Metrics on state spaces, *Doc. Math.* 4 (1999) 559-600.
<https://arxiv.org/pdf/math/9906151.pdf>
- [32] M. A. Rieffel, Compact quantum metric spaces, in : *Operator Algebras, Quantization, and Non-Commutative Geometry*, Contemp. Math., 365, Amer. Math. Soc., 2004, 315-330.