```
10   pi(x) =  4
        Li(x) =  6.1655995047873
        diff  2.1655995047873
        sqrt(x) =  3.1622776601683795
        log(x) =  2.302585092994046
        sqrt fois log =  7.281413400211802
        sqrt fois log fois log =  16.766073951254786

10010   pi(x) =  1231
        Li(x) =  1247.22289318689
        diff  16.2228931868913
        sqrt(x) =  100.0499875062461
        log(x) =  9.211339872309265
        sqrt fois log =  921.5944391403285
        sqrt fois log fois log =  8489.119603351803

20010   pi(x) =  2262
        Li(x) =  2289.62376290408
        diff  27.6237629040756
        sqrt(x) =  141.45670715805596
        log(x) =  9.903987427577778
        sqrt fois log =  1400.9854492399377
        sqrt fois log fois log =  13875.342275491748

30010   pi(x) =  3245
        Li(x) =  3277.86914139869
        diff  32.8691413986926
        sqrt(x) =  173.23394586512194
        log(x) =  10.309285938434412
        sqrt fois log =  1785.9182821668098
        sqrt fois log fois log =  18411.542233535234

40010   pi(x) =  4204
        Li(x) =  4233.9549910184
        diff  29.954991018396
        sqrt(x) =  200.02499843769527
        log(x) =  10.59688470185128
        sqrt fois log =  2119.6418459322394
        sqrt fois log fois log =  22461.600250563155

50010   pi(x) =  5133
        Li(x) =  5167.47098875256
        diff  34.4709887525642
        sqrt(x) =  223.62915731183176
        log(x) =  10.81997826441295
        sqrt fois log =  2419.662621403004
        sqrt fois log fois log =  26180.69697079296

60010   pi(x) =  6057
        Li(x) =  6083.75585455175
        diff  26.7558545517531
        sqrt(x) =  244.9693858423946
        log(x) =  11.002266493983559
        sqrt fois log =  2695.2184659055083
        sqrt fois log fois log =  29653.511821397944

70010   pi(x) =  6938
        Li(x) =  6986.19087320696
        diff  48.1908732069551
        sqrt(x) =  264.59402865522117
        log(x) =  11.156393367971244
        sqrt fois log =  2951.915066493903
        sqrt fois log fois log =  32932.72567064697
```

```
80010   pi(x) =  7837
        Li(x) =  7877.09892098159
        diff  40.0989209815925
        sqrt(x) =  282.860389591756
        log(x) =  11.28990690584417
        sqrt fois log =  3193.4674658417384
        sqrt fois log fois log =  36053.95039619532

90010   pi(x) =  8715
        Li(x) =  8758.1682036697
        diff  43.1682036696984
        sqrt(x) =  300.0166662037294
        log(x) =  11.40767605425113
        sqrt fois log =  3422.4929389285385
        sqrt fois log fois log =  39042.69074525867

100010   pi(x) =  9593
        Li(x) =  9630.67758624252
        diff  37.6775862425184
        sqrt(x) =  316.24357700987383
        log(x) =  11.513025459970562
        sqrt fois log =  3640.9203536668383
        sqrt fois log fois log =  41918.00872949133

110010   pi(x) =  10453
        Li(x) =  10495.6271837251
        diff  42.6271837251224
        sqrt(x) =  331.67755426015793
        log(x) =  11.608326549733482
        sqrt fois log =  3850.221359068859
        sqrt fois log fois log =  44694.62682482996

120010   pi(x) =  11301
        Li(x) =  11353.8191149328
        diff  52.8191149328159
        sqrt(x) =  346.42459496981445
        log(x) =  11.695330351625486
        sqrt fois log =  4051.5500801000367
        sqrt fois log fois log =  47384.216622924636

130010   pi(x) =  12160
        Li(x) =  12205.9100379286
        diff  45.910037928581
        sqrt(x) =  360.568994784632
        log(x) =  11.775366649556215
        sqrt fois log =  4245.832116050965
        sqrt fois log fois log =  49996.22989896123

140010   pi(x) =  13011
        Li(x) =  13052.4467538886
        diff  41.446753888571
        sqrt(x) =  374.17910150087215
        log(x) =  11.849469127611972
        sqrt fois log =  4433.823711432171
        sqrt fois log fois log =  52538.457185889434

150010   pi(x) =  13849
        Li(x) =  13893.891162678
        diff  44.8911626780191
        sqrt(x) =  387.31124435007047
        log(x) =  11.918457237522937
        sqrt fois log =  4616.152503398112
        sqrt fois log fois log =  55017.41621363485
```

```
160010   pi(x) =  14685
        Li(x) =  14730.6382559042
        diff  45.6382559042067
        sqrt(x) =  400.0124998046936
        log(x) =  11.98299159226292
        sqrt fois log =  4793.346421959716
        sqrt fois log fois log =  57438.62987314683

170010   pi(x) =  15498
        Li(x) =  15563.0294056594
        diff  65.029405659423
        sqrt(x) =  412.3226891646881
        log(x) =  12.043612537831775
        sqrt fois log =  4965.854708856351
        sqrt fois log fois log =  59806.83003263331

180010   pi(x) =  16344
        Li(x) =  16391.3623843979
        diff  47.3623843979003
        sqrt(x) =  424.27585366127073
        log(x) =  12.10076768388475
        sqrt fois log =  5134.063539036921
        sqrt fois log fois log =  62126.110160188946

190010   pi(x) =  17170
        Li(x) =  17215.8990576544
        diff  45.8990576544347
        sqrt(x) =  435.90136498983344
        log(x) =  12.154831981336578
        sqrt fois log =  5298.307851886696
        sqrt fois log fois log =  64400.041725079114

200010   pi(x) =  17986
        Li(x) =  18036.871384555
        diff  50.8713845549573
        sqrt(x) =  447.2247757000947
        log(x) =  12.206122644280216
        sqrt fois log =  5458.880461756066
        sqrt fois log fois log =  66631.76441665956

210010   pi(x) =  18807
        Li(x) =  18854.4861646351
        diff  47.486164635091
        sqrt(x) =  458.2684802602073
        log(x) =  12.254910427613474
        sqrt fois log =  5616.039177387394
        sqrt fois log fois log =  68824.05707685057

220010   pi(x) =  19619
        Li(x) =  19668.9288403107
        diff  49.9288403106766
        sqrt(x) =  469.0522358970267
        log(x) =  12.301428278846927
        sqrt fois log =  5770.012438920065
        sqrt fois log fois log =  70979.39418542982

230010   pi(x) =  20438
        Li(x) =  20480.3665773823
        diff  42.3665773822977
        sqrt(x) =  479.5935779386542
        log(x) =  12.34587806522105
        sqrt fois log =  5921.0038340937135
        sqrt fois log fois log =  73099.99135942732
```

```
240010   pi(x) =  21222
        Li(x) =  21288.9507861693
        diff  66.9507861692655
        sqrt(x) =  489.90815465758476
        log(x) =  12.388435868122764
        sqrt fois log =  6069.195755245857
        sqrt fois log fois log =  75187.84238494621

250010   pi(x) =  22045
        Li(x) =  22094.8192039833
        diff  49.8192039833375
        sqrt(x) =  500.009999900002
        log(x) =  12.429256196044404
        sqrt fois log =  6214.752389341262
        sqrt fois log fois log =  77244.74964210165

260010   pi(x) =  22839
        Li(x) =  22898.0976298053
        diff  59.0976298053392
        sqrt(x) =  509.9117570717506
        log(x) =  12.4684753707965
        sqrt fois log =  6357.822184328691
        sqrt fois log fois log =  79272.3493172059

270010   pi(x) =  23643
        Li(x) =  23698.9013804274
        diff  55.9013804273745
        sqrt(x) =  519.624864686054
        log(x) =  12.506214274331695
        sqrt fois log =  6498.539900034404
        sqrt fois log fois log =  81272.13246012433

280010   pi(x) =  24434
        Li(x) =  24497.3365214697
        diff  63.3365214697187
        sqrt(x) =  529.1597112403778
        log(x) =  12.542580595799361
        sqrt fois log =  6637.028326282355
        sqrt fois log fois log =  83245.46269899978

290010   pi(x) =  25224
        Li(x) =  25293.5009148943
        diff  69.5009148943391
        sqrt(x) =  538.5257654003195
        log(x) =  12.57767068412676
        sqrt fois log =  6773.399732122524
        sqrt fois log fois log =  85193.59124258952

300010   pi(x) =  25998
        Li(x) =  26087.4851157687
        diff  89.4851157687335
        sqrt(x) =  547.7316861383865
        log(x) =  12.611571086416129
        sqrt fois log =  6907.75709601683
        sqrt fois log fois log =  87117.66966411169

310010   pi(x) =  26800
        Li(x) =  26879.3731442885
        diff  79.3731442885219
        sqrt(x) =  556.7854164756832
        log(x) =  12.644359834005565
        sqrt fois log =  7040.195156245189
        sqrt fois log fois log =  89018.7608571872
```

```
320010   pi(x) =  27609
        Li(x) =  27669.2431538839
        diff  60.2431538839446
        sqrt(x) =  565.6942637149506
        log(x) =  12.676107524287637
        sqrt fois log =  7170.80131272344
        sqrt fois log fois log =  90897.84847538527

330010   pi(x) =  28404
        Li(x) =  28457.1680122154
        diff  53.1680122154321
        sqrt(x) =  574.4649684706632
        log(x) =  12.70687823601384
        sqrt fois log =  7299.656405212246
        sqrt fois log fois log =  92755.8451057705

340010   pi(x) =  29183
        Li(x) =  29243.2158087177
        diff  60.2158087177231
        sqrt(x) =  583.1037643507372
        log(x) =  12.736730307924532
        sqrt fois log =  7426.835388070918
        sqrt fois log fois log =  94593.5993792093

350010   pi(x) =  29978
        Li(x) =  30027.4502998706
        diff  49.4502998706375
        sqrt(x) =  591.6164297921416
        log(x) =  12.765717004486012
        sqrt fois log =  7552.407917930847
        sqrt fois log fois log =  96411.90218274461

360010   pi(x) =  30758
        Li(x) =  30809.9313014021
        diff  51.93130140211
        sqrt(x) =  600.0083332754638
        log(x) =  12.793887087824276
        sqrt fois log =  7676.438867679921
        sqrt fois log fois log =  98211.49210968254

370010   pi(x) =  31524
        Li(x) =  31590.7150350499
        diff  66.7150350498778
        sqrt(x) =  608.2844729236477
        log(x) =  12.82128531128221
        sqrt fois log =  7798.988777777006
        sqrt fois log fois log =  99993.06025936714

380010   pi(x) =  32300
        Li(x) =  32369.8544362353
        diff  69.8544362353023
        sqrt(x) =  616.4495113145925
        log(x) =  12.847952847145788
        sqrt fois log =  7920.114254015949
        sqrt fois log fois log =  101757.25447960413

390010   pi(x) =  33068
        Li(x) =  33147.3994279704
        diff  79.3994279703984
        sqrt(x) =  624.5078061962076
        log(x) =  12.873927658802744
        sqrt fois log =  8039.868319327581
        sqrt fois log fois log =  103504.68312932328
```

```
400010   pi(x) =  33861
        Li(x) =  33923.3971654767
        diff  62.3971654766719
        sqrt(x) =  632.4634376784163
        log(x) =  12.899244825777624
        sqrt fois log =  8158.30072596684
        sqrt fois log fois log =  105235.9184265656

410010   pi(x) =  34615
        Li(x) =  34697.892255303
        diff  82.8922553029697
        sqrt(x) =  640.320232383766
        log(x) =  12.923936828626957
        sqrt fois log =  8275.458233419524
        sqrt fois log fois log =  106951.49943665478

420010   pi(x) =  35391
        Li(x) =  35470.9269521593
        diff  79.9269521593014
        sqrt(x) =  648.0817849623611
        log(x) =  12.948033799499918
        sqrt fois log =  8391.384856532888
        sqrt fois log fois log =  108651.93474699961

430010   pi(x) =  36164
        Li(x) =  36242.5413362107
        diff  78.5413362107211
        sqrt(x) =  655.7514773143862
        log(x) =  12.971563743213286
        sqrt fois log =  8506.122087689842
        sqrt fois log fois log =  110337.70486802325

440010   pi(x) =  36942
        Li(x) =  37012.7734731813
        diff  70.7734731812525
        sqrt(x) =  663.3324958118666
        log(x) =  12.994552732908911
        sqrt fois log =  8619.709096279379
        sqrt fois log fois log =  112009.26439393702

450010   pi(x) =  37707
        Li(x) =  37781.6595592883
        diff  74.6595592883023
        sqrt(x) =  670.8278467684537
        log(x) =  13.017025083721816
        sqrt fois log =  8732.182908244056
        sqrt fois log fois log =  113667.04395225979

460010   pi(x) =  38458
        Li(x) =  38549.2340527507
        diff  91.2340527506967
        sqrt(x) =  678.2403703702693
        log(x) =  13.039003507359421
        sqrt fois log =  8843.578568090694
        sqrt fois log fois log =  115311.45196694316

470010   pi(x) =  39223
        Li(x) =  39315.5297933796
        diff  92.5297933796392
        sqrt(x) =  685.5727532508859
        log(x) =  13.060509250055642
        sqrt fois log =  8953.929285419308
        sqrt fois log fois log =  116942.87625656299
```

```
480010   pi(x) =  40005
        Li(x) =  40080.5781115636
        diff  75.57811156362
        sqrt(x) =  692.8275398683282
        log(x) =  13.081562216000396
        sqrt fois log =  9063.26656774603
        sqrt fois log fois log =  118561.68548616607

490010   pi(x) =  40768
        Li(x) =  40844.4089277898
        diff  76.4089277897729
        sqrt(x) =  700.0071428207001
        log(x) =  13.10218107804183
        sqrt fois log =  9171.620341159502
        sqrt fois log fois log =  120168.23048892358

500010   pi(x) =  41539
        Li(x) =  41607.0508437002
        diff  68.0508437001918
        sqrt(x) =  707.1138522190045
        log(x) =  13.122383377204331
        sqrt fois log =  9279.019060149583
        sqrt fois log fois log =  121762.84547166906

510010   pi(x) =  42292
        Li(x) =  42368.5312255585
        diff  76.5312255585013
        sqrt(x) =  714.1498442203849
        log(x) =  13.142185612351415
        sqrt fois log =  9385.489807776148
        sqrt fois log fois log =  123345.84911662653

520010   pi(x) =  43061
        Li(x) =  43128.8762808961
        diff  67.8762808961037
        sqrt(x) =  721.1171888119156
        log(x) =  13.161603321141932
        sqrt fois log =  9491.058387199442
        sqrt fois log fois log =  124917.54559011618

530010   pi(x) =  43825
        Li(x) =  43888.1111290161
        diff  63.1111290160625
        sqrt(x) =  728.0178569238532
        log(x) =  13.180651153274836
        sqrt fois log =  9595.74940546806
        sqrt fois log fois log =  126478.22546771889

540010   pi(x) =  44572
        Li(x) =  44646.2598659538
        diff  74.2598659538053
        sqrt(x) =  734.8537269416274
        log(x) =  13.19934293688751
        sqrt fois log =  9699.586350352432
        sqrt fois log fois log =  128028.16658425488

550010   pi(x) =  45324
        Li(x) =  45403.3456244252
        diff  79.3456244252302
        sqrt(x) =  741.6265906775458
        log(x) =  13.217691738861548
        sqrt fois log =  9802.591660918652
        sqrt fois log fois log =  129567.63481595757
```

```
560010   pi(x) =  46072
        Li(x) =  46159.3906292333
        diff  87.390629233334
        sqrt(x) =  748.3381588560081
        log(x) =  13.235709919694752
        sqrt fois log =  9904.786792456574
        sqrt fois log fois log =  131096.88480137903

570010   pi(x) =  46820
        Li(x) =  46914.4162485526
        diff  94.4162485525521
        sqrt(x) =  754.9900661598138
        log(x) =  13.25340918351649
        sqrt fois log =  10006.192276306198
        sqrt fois log fois log =  132616.16060682834

580010   pi(x) =  47589
        Li(x) =  47668.4430414646
        diff  79.4430414646049
        sqrt(x) =  761.5838758797353
        log(x) =  13.270800623753281
        sqrt fois log =  10106.827775065232
        sqrt fois log fois log =  134125.69634150268

590010   pi(x) =  48351
        Li(x) =  48421.4908020799
        diff  70.4908020798684
        sqrt(x) =  768.1210842048278
        log(x) =  13.28789476489081
        sqrt fois log =  10206.712133607583
        sqrt fois log fois log =  135625.71672691172

600010   pi(x) =  49098
        Li(x) =  49173.5786005434
        diff  75.5786005433984
        sqrt(x) =  774.6031241868316
        log(x) =  13.304701600726062
        sqrt fois log =  10305.863426295948
        sqrt fois log fois log =  137116.43762470386

610010   pi(x) =  49861
        Li(x) =  49924.724821194
        diff  63.7248211939877
        sqrt(x) =  781.0313694084252
        log(x) =  13.321230629457746
        sqrt fois log =  10404.299000730842
        sqrt fois log fois log =  138598.0665265723

620010   pi(x) =  50613
        Li(x) =  50674.9471981174
        diff  61.9471981173774
        sqrt(x) =  787.4071373819264
        log(x) =  13.337490885923462
        sqrt fois log =  10502.035518342527
        sqrt fois log fois log =  140070.80300953792

630010   pi(x) =  51341
        Li(x) =  51424.2628483109
        diff  83.2628483108565
        sqrt(x) =  793.7316927022632
        log(x) =  13.353490971257614
        sqrt fois log =  10599.088992100695
        sqrt fois log fois log =  141534.83915957258
```

```
640010   pi(x) =  52076
        Li(x) =  52172.6883026552
        diff  96.6883026552023
        sqrt(x) =  800.0062499755861
        log(x) =  13.369239080213786
        sqrt fois log =  10695.474821588885
        sqrt fois log fois log =  142990.3599662287

650010   pi(x) =  52831
        Li(x) =  52920.239534871
        diff  89.239534871027
        sqrt(x) =  806.2319765427318
        log(x) =  13.384743026368863
        sqrt fois log =  10791.207825665913
        sqrt fois log fois log =  144437.54369067893

660010   pi(x) =  53565
        Li(x) =  53666.9319886196
        diff  101.931988619617
        sqrt(x) =  812.4099950148324
        log(x) =  13.400010265402976
        sqrt fois log =  10886.302272914734
        sqrt fois log fois log =  145876.5622093372

670010   pi(x) =  54310
        Li(x) =  54412.7806028938
        diff  102.780602893785
        sqrt(x) =  818.5413856366702
        log(x) =  13.4150479166289
        sqrt fois log =  10980.771910059746
        sqrt fois log fois log =  147307.58133502412

680010   pi(x) =  55064
        Li(x) =  55157.7998358303
        diff  93.7998358303375
        sqrt(x) =  824.6271884918663
        log(x) =  13.429862782926511
        sqrt fois log =  11074.629988516239
        sqrt fois log fois log =  148730.7611174561

690010   pi(x) =  55815
        Li(x) =  55902.0036870643
        diff  87.0036870643235
        sqrt(x) =  830.6684055626529
        log(x) =  13.444461369222047
        sqrt fois log =  11167.889289220358
        sqrt fois log fois log =  150146.25612467178

700010   pi(x) =  56544
        Li(x) =  56645.4057187341
        diff  101.405718734059
        sqrt(x) =  836.666002655779
        log(x) =  13.458849899637787
        sqrt fois log =  11260.56214587408
        sqrt fois log fois log =  151554.21570686242

710010   pi(x) =  57307
        Li(x) =  57388.0190752367
        diff  81.0190752366834
        sqrt(x) =  842.6209112050329
        log(x) =  13.473034333425355
        sqrt fois log =  11352.660466727566
        sqrt fois log fois log =  152954.78424394122
```

```
720010   pi(x) =  58030
        Li(x) =  58129.8565018251
        diff  99.856501825052
        sqrt(x) =  848.5340299599068
        log(x) =  13.487020379784678
        sqrt fois log =  11444.195755010085
        sqrt fois log fois log =  154348.1013780663

730010   pi(x) =  58790
        Li(x) =  58870.9303621291
        diff  80.9303621291401
        sqrt(x) =  854.4062265690718
        log(x) =  13.500813511660885
        sqrt fois log =  11535.179128110916
        sqrt fois log fois log =  155734.3022322285

740010   pi(x) =  59531
        Li(x) =  59611.2526546781
        diff  80.2526546780937
        sqrt(x) =  860.2383390665635
        log(x) =  13.51441897860256
        sqrt fois log =  11625.62133560271
        sqrt fois log fois log =  157113.51761591612

750010   pi(x) =  60238
        Li(x) =  60350.8350284926
        diff  112.835028492635
        sqrt(x) =  866.0311772678857
        log(x) =  13.527841818756938
        sqrt fois log =  11715.532776191807
        sqrt fois log fois log =  158485.87421878512

760010   pi(x) =  60979
        Li(x) =  61089.6887978119
        diff  110.688797811927
        sqrt(x) =  871.7855240826152
        log(x) =  13.541086870070686
        sqrt fois log =  11804.923513672793
        sqrt fois log fois log =  159851.49479318337

770010   pi(x) =  61733
        Li(x) =  61827.8249560137
        diff  94.8249560136901
        sqrt(x) =  877.5021367495352
        log(x) =  13.554158780758524
        sqrt fois log =  11893.80329195808
        sqrt fois log fois log =  161210.49832630824

780010   pi(x) =  62468
        Li(x) =  62565.2541887817
        diff  97.2541887816769
        sqrt(x) =  883.1817479998101
        log(x) =  13.567062019096413
        sqrt fois log =  11982.181549247403
        sqrt fois log fois log =  162563.00020271225

790010   pi(x) =  63207
        Li(x) =  63301.9868865704
        diff  94.9868865703756
        sqrt(x) =  888.8250671532616
        log(x) =  13.579800882590938
        sqrt fois log =  12070.06743139681
        sqrt fois log fois log =  163909.11235781453
```

```
800010   pi(x) =  63951
        Li(x) =  64038.0331564129
        diff  87.0331564128792
        sqrt(x) =  894.4327811523905
        log(x) =  13.59237950657194
        sqrt fois log =  12157.469804541897
        sqrt fois log fois log =  165248.94342302243

810010   pi(x) =  64683
        Li(x) =  64773.4028331143
        diff  90.4028331143491
        sqrt(x) =  900.0055555384089
        log(x) =  13.604801872251427
        sqrt fois log =  12244.39726702563
        sqrt fois log fois log =  166582.59886302054

820010   pi(x) =  65416
        Li(x) =  65508.1054898702
        diff  92.1054898702423
        sqrt(x) =  905.5440353732114
        log(x) =  13.617071814288026
        sqrt fois log =  12330.858160677197
        sqrt fois log fois log =  167910.18110574095

830010   pi(x) =  66162
        Li(x) =  66242.1504483455
        diff  80.1504483454773
        sqrt(x) =  911.0488461108987
        log(x) =  13.629193027892972
        sqrt fois log =  12416.860581484598
        sqrt fois log fois log =  169231.78966548896

840010   pi(x) =  66890
        Li(x) =  66975.5467882482
        diff  85.5467882482189
        sqrt(x) =  916.5205944221875
        log(x) =  13.64116907551054
        sqrt fois log =  12502.412389700481
        sqrt fois log fois log =  170547.52125966205

850010   pi(x) =  67618
        Li(x) =  67708.3033564292
        diff  90.3033564291691
        sqrt(x) =  921.9598689747835
        log(x) =  13.653003393103178
        sqrt fois log =  12587.52121941768
        sqrt fois log fois log =  171857.46991946787

860010   pi(x) =  68343
        Li(x) =  68440.4287755354
        diff  97.4287755354453
        sqrt(x) =  927.3672411725572
        log(x) =  13.664699296069063
        sqrt fois log =  12672.194487648152
        sqrt fois log fois log =  173161.72709501596

870010   pi(x) =  69096
        Li(x) =  69171.9314522455
        diff  75.9314522454515
        sqrt(x) =  932.7432658561519
        log(x) =  13.676259984817582
        sqrt fois log =  12756.439402936558
        sqrt fois log fois log =  174460.38175513153
```

```
880010   pi(x) =  69825
        Li(x) =  69902.81958511
        diff  77.8195851099736
        sqrt(x) =  938.0884819674528
        log(x) =  13.687688550026188
        sqrt fois log =  12840.262973537352
        sqrt fois log fois log =  175753.52048221242

890010   pi(x) =  70556
        Li(x) =  70633.1011720224
        diff  77.1011720224051
        sqrt(x) =  943.4034131801728
        log(x) =  13.698987977600256
        sqrt fois log =  12923.672015182234
        sqrt fois log fois log =  177041.2275624303

900010   pi(x) =  71276
        Li(x) =  71362.7840173396
        diff  86.7840173395525
        sqrt(x) =  948.6885684986406
        log(x) =  13.71016115335583
        sqrt fois log =  13006.673158462814
        sqrt fois log fois log =  178323.58507155286

910010   pi(x) =  72027
        Li(x) =  72091.8757386734
        diff  64.8757386733632
        sqrt(x) =  953.9444428267299
        log(x) =  13.721210867443643
        sqrt fois log =  13089.272855851597
        sqrt fois log fois log =  179600.67295664604

920010   pi(x) =  72734
        Li(x) =  72820.3837733719
        diff  86.3837733718974
        sqrt(x) =  959.1715175087301
        log(x) =  13.732139818531367
        sqrt fois log =  13171.47738838279
        sqrt fois log fois log =  180872.5691138968

930010   pi(x) =  73474
        Li(x) =  73548.3153847073
        diff  74.3153847072535
        sqrt(x) =  964.3702608438317
        log(x) =  13.742950617759801
        sqrt fois log =  13253.292872012918
        sqrt fois log fois log =  182139.3494627815

940010   pi(x) =  74189
        Li(x) =  74275.6776677866
        diff  86.6776677866001
        sqrt(x) =  969.5411285757815
        log(x) =  13.753645792487474
        sqrt fois log =  13334.725263679853
        sqrt fois log fois log =  183401.08801678685

950010   pi(x) =  74908
        Li(x) =  75002.4775552015
        diff  94.4775552014617
        sqrt(x) =  974.6845643591572
        log(x) =  13.764227789837111
        sqrt fois log =  13415.78036707759
        sqrt fois log fois log =  184657.8569508805
```

```
960010   pi(x) =  75618
        Li(x) =  75728.7218224297
        diff  110.721822429725
        sqrt(x) =  979.8010002036128
        log(x) =  13.774698980056433
        sqrt fois log =  13496.46383816298
        sqrt fois log fois log =  185909.7266659121

970010   pi(x) =  76350
        Li(x) =  76454.4170930033
        diff  104.417093003343
        sqrt(x) =  984.8908568973518
        log(x) =  13.785061659704775
        sqrt fois log =  13576.781190409467
        sqrt fois log fois log =  187156.7658501145

980010   pi(x) =  77067
        Li(x) =  77179.5698434545
        diff  112.569843454505
        sqrt(x) =  989.9545444110048
        log(x) =  13.795318054676326
        sqrt fois log =  13656.73779982201
        sqrt fois log fois log =  188399.0415378652

990010   pi(x) =  77778
        Li(x) =  77904.1864080517
        diff  126.186408051668
        sqrt(x) =  994.9924622830065
        log(x) =  13.805470323069859
        sqrt fois log =  13736.338909726252
        sqrt fois log fois log =  189636.61916585555

1000010   pi(x) =  78499
        Li(x) =  78628.2729833367
        diff  129.272983336734
        sqrt(x) =  1000.0049999875
        log(x) =  13.815520557914274
        sqrt fois log =  13815.58963534437
        sqrt fois log fois log =  190869.5626268075

1010010   pi(x) =  79252
        Li(x) =  79351.8356324733
        diff  99.835632473274
        sqrt(x) =  1004.9925372857253
        log(x) =  13.825470789758526
        sqrt fois log =  13894.494968169103
        sqrt fois log fois log =  192097.93432086875

1020010   pi(x) =  79972
        Li(x) =  80074.8802894158
        diff  102.880289415771
        sqrt(x) =  1009.9554445617886
        log(x) =  13.835322989133964
        sqrt fois log =  13973.059780146727
        sqrt fois log fois log =  193321.79520480716

1030010   pi(x) =  80702
        Li(x) =  80797.4127629088
        diff  95.4127629087743
        sqrt(x) =  1014.8940831436549
        log(x) =  13.845079068896553
        sqrt fois log =  14051.288827679175
        sqrt fois log fois log =  194541.2048391209
```

```
1040010   pi(x) =  81403
        Li(x) =  81519.4387403245
        diff  116.438740324491
        sqrt(x) =  1019.8088056101496
        log(x) =  13.854740886455943
        sqrt fois log =  14129.18675545474
        sqrt fois log fois log =  195756.22143317058

1050010   pi(x) =  82134
        Li(x) =  82240.9637913469
        diff  106.963791346891
        sqrt(x) =  1024.6999560847069
        log(x) =  13.86431024589788
        sqrt fois log =  14206.758100116309
        sqrt fois log fois log =  196966.90188843524

1060010   pi(x) =  82833
        Li(x) =  82961.9933715099
        diff  128.993371509918
        sqrt(x) =  1029.567870516558
        log(x) =  13.873788900006014
        sqrt fois log =  14284.007293775452
        sqrt fois log fois log =  198173.30183998682

1070010   pi(x) =  83549
        Li(x) =  83682.5328255967
        diff  133.532825596732
        sqrt(x) =  1034.4128769500117
        log(x) =  13.88317855218881
        sqrt fois log =  14360.938667380324
        sqrt fois log fois log =  199375.47569627344

1080010   pi(x) =  84271
        Li(x) =  84402.5873909069
        diff  131.587390906905
        sqrt(x) =  1039.2352957824326
        log(x) =  13.892480858316794
        sqrt fois log =  14437.556453944637
        sqrt fois log fois log =  200573.47667729398

1090010   pi(x) =  84977
        Li(x) =  85122.1622003977
        diff  145.162200397681
        sqrt(x) =  1044.035440011497
        log(x) =  13.901697428475169
        sqrt fois log =  14513.86479164477
        sqrt fois log fois log =  201767.3568512444

1100010   pi(x) =  85715
        Li(x) =  85841.2622857055
        diff  126.262285705496
        sqrt(x) =  1048.813615472263
        log(x) =  13.910829828636368
        sqrt fois log =  14589.867726791512
        sqrt fois log fois log =  202957.16716971042

1110010   pi(x) =  86451
        Li(x) =  86559.892580053
        diff  108.892580053041
        sqrt(x) =  1053.570121064564
        log(x) =  13.919879582256945
        sqrt fois log =  14665.569216682603
        sqrt fois log fois log =  204142.95750147614
```

```
1120010   pi(x) =  87167
        Li(x) =  87278.0579210477
        diff  111.057921047657
        sqrt(x) =  1058.3052489712031
        log(x) =  13.928848171802846
        sqrt fois log =  14740.973132341898
        sqrt fois log fois log =  205324.77666501532

1130010   pi(x) =  87884
        Li(x) =  87995.7630533755
        diff  111.763053375529
        sqrt(x) =  1063.0192848674008
        log(x) =  13.937737040206889
        sqrt fois log =  14816.08326115061
        sqrt fois log fois log =  206502.67245972814

1140010   pi(x) =  88602
        Li(x) =  88713.0126313969
        diff  111.012631396938
        sqrt(x) =  1067.7125081219194
        log(x) =  13.94654759226203
        sqrt fois log =  14890.903309375808
        sqrt fois log fois log =  207676.6916959819

1150010   pi(x) =  89302
        Li(x) =  89429.8112216467
        diff  127.811221646713
        sqrt(x) =  1072.385191990266
        log(x) =  13.9552811959538
        sqrt fois log =  14965.436904601067
        sqrt fois log fois log =  208846.8802240123

1160010   pi(x) =  90031
        Li(x) =  90146.1633052442
        diff  115.163305244234
        sqrt(x) =  1077.03760380035
        log(x) =  13.963939183735045
        sqrt fois log =  15039.687598063809
        sqrt fois log fois log =  210013.28296173722

1170010   pi(x) =  90765
        Li(x) =  90862.0732802172
        diff  97.0732802171551
        sqrt(x) =  1081.670005130955
        log(x) =  13.97252285374596
        sqrt fois log =  15113.658866903777
        sqrt fois log fois log =  211175.94392153333

1180010   pi(x) =  91491
        Li(x) =  91577.5454637424
        diff  86.5454637423973
        sqrt(x) =  1086.2826519833593
        log(x) =  13.98103347098221
        sqrt fois log =  15187.354116326665
        sqrt fois log fois log =  212334.90623602257

1190010   pi(x) =  92225
        Li(x) =  92292.5840943082
        diff  67.5840943081857
        sqrt(x) =  1090.8757949464275
        log(x) =  13.98947226841375
        sqrt fois log =  15260.776681686852
        sqrt fois log fois log =  213490.21218291338
```

1200010   pi(x) = 92939
Li(x) = 93007.1933338006
diff 68.1933338006493
sqrt(x) = 1095.449679355469
log(x) = 13.99784044805684
sqrt fois log = 15333.92983049288
sqrt fois log fois log = 214641.9032089386

1210010   pi(x) = 93615
Li(x) = 93721.3772695179
diff 106.377269517892
sqrt(x) = 1100.004545445154
log(x) = 14.006139182001583
sqrt fois log = 15406.816764339212
sqrt fois log fois log = 215790.0199529303

1220010   pi(x) = 94358
Li(x) = 94435.1399161151
diff 77.1399161151057
sqrt(x) = 1104.540628496752
log(x) = 14.014369613397157
sqrt fois log = 15479.44062076748
sqrt fois log fois log = 216934.60226806943

1230010   pi(x) = 95051
Li(x) = 95148.4852174831
diff 97.4852174831176
sqrt(x) = 1109.0581589799517
log(x) = 14.022532857396852
sqrt fois log = 15551.804475060435
sqrt fois log fois log = 218075.68924334634

1240010   pi(x) = 95747
Li(x) = 95861.4170485636
diff 114.417048563642
sqrt(x) = 1113.5573626895025
log(x) = 14.03063000206483
sqrt fois log = 15623.911341971521
sqrt fois log fois log = 219213.31922426663

1250010   pi(x) = 96471
Li(x) = 96573.9392171035
diff 102.939217103543
sqrt(x) = 1118.0384608769057
log(x) = 14.038662109246484
sqrt fois log = 15695.764177392874
sqrt fois log fois log = 220347.52983283365

1260010   pi(x) = 97182
Li(x) = 97286.0554653508
diff 104.055465350786
sqrt(x) = 1122.5016703773763
log(x) = 14.046630215404104
sqrt fois log = 15767.36587996443
sqrt fois log fois log = 221478.3579868401

1270010   pi(x) = 97901
Li(x) = 97997.7694716944
diff 96.7694716943952
sqrt(x) = 1126.9472037322778
log(x) = 14.054535332419523
sqrt fois log = 15838.71929262668
sqrt fois log fois log = 222605.8399184964

```
1280010   pi(x) =  98610
        Li(x) =  98709.0848522507
        diff  99.084852250744
        sqrt(x) =  1131.3752693072267
        log(x) =  14.062378448365282
        sqrt fois log =  15909.827204119412
        sqrt fois log fois log =  223730.01119242448

1290010   pi(x) =  99332
        Li(x) =  99420.0051623983
        diff  88.0051623983018
        sqrt(x) =  1135.7860714060548
        log(x) =  14.070160528245793
        sqrt fois log =  15980.69235042883
        sqrt fois log fois log =  224850.90672304324

1300010   pi(x) =  100021
        Li(x) =  100130.533898263
        diff  109.533898262918
        sqrt(x) =  1140.1798103808012
        log(x) =  14.077882514709872
        sqrt fois log =  16051.317416185098
        sqrt fois log fois log =  225968.56079137023

1310010   pi(x) =  100730
        Li(x) =  100840.674498156
        diff  110.674498155582
        sqrt(x) =  1144.5566827379062
        log(x) =  14.085545328735984
        sqrt fois log =  16121.705036012469
        sqrt fois log fois log =  227083.00706126483

1320010   pi(x) =  101433
        Li(x) =  101550.430343965
        diff  117.430343964603
        sqrt(x) =  1148.9168812407625
        log(x) =  14.093149870291434
        sqrt fois log =  16191.85779583389
        sqrt fois log fois log =  228194.27859513374

1330010   pi(x) =  102149
        Li(x) =  102259.804762504
        diff  110.804762503903
        sqrt(x) =  1153.2605950087777
        log(x) =  14.100697018966663
        sqrt fois log =  16261.778234131993
        sqrt fois log fois log =  229302.40786912193

1340010   pi(x) =  102852
        Li(x) =  102968.801026819
        diff  116.801026819143
        sqrt(x) =  1157.588009613092
        log(x) =  14.108187634585816
        sqrt fois log =  16331.468843168232
        sqrt fois log fois log =  230407.42678780959

1350010   pi(x) =  103545
        Li(x) =  103677.422357453
        diff  132.422357453383
        sqrt(x) =  1161.8993071690852
        log(x) =  14.115622557794586
        sqrt fois log =  16400.932070161838
        sqrt fois log fois log =  231509.36669843312
```

```
1360010   pi(x) =  104258
        Li(x) =  104385.671923674
        diff  127.671923673726
        sqrt(x) =  1166.1946664258073
        log(x) =  14.12300261062638
        sqrt fois log =  16470.170318430235
        sqrt fois log fois log =  232608.25840465134

1370010   pi(x) =  104967
        Li(x) =  105093.55284466
        diff  126.552844660444
        sqrt(x) =  1170.474262852456
        log(x) =  14.130328597047741
        sqrt fois log =  16539.18594849243
        sqrt fois log fois log =  233704.1321798728

1380010   pi(x) =  105691
        Li(x) =  105801.06819066
        diff  110.068190660095
        sqrt(x) =  1174.7382687220163
        log(x) =  14.137601303483944
        sqrt fois log =  16607.98127913685
        sqrt fois log fois log =  234797.01778016204

1390010   pi(x) =  106386
        Li(x) =  106508.220984104
        diff  122.220984103842
        sqrt(x) =  1178.9868531921804
        log(x) =  14.1448214993256
        sqrt fois log =  16676.558588454987
        sqrt fois log fois log =  235886.9444567411

1400010   pi(x) =  107126
        Li(x) =  107215.014200692
        diff  89.014200692327
        sqrt(x) =  1183.2201823836508
        log(x) =  14.15198993741712
        sqrt fois log =  16744.920114842276
        sqrt fois log fois log =  236973.9409681014

1410010   pi(x) =  107806
        Li(x) =  107921.450770448
        diff  115.450770448369
        sqrt(x) =  1187.4384194559311
        log(x) =  14.159107354527784
        sqrt fois log =  16813.06805796732
        sqrt fois log fois log =  238058.03559174124

1420010   pi(x) =  108488
        Li(x) =  108627.533578739
        diff  139.533578738599
        sqrt(x) =  1191.6417246807027
        log(x) =  14.166174471806167
        sqrt fois log =  16881.004579710843
        sqrt fois log fois log =  239139.25613554276

1430010   pi(x) =  109205
        Li(x) =  109333.265467265
        diff  128.265467265199
        sqrt(x) =  1195.83025551288
        log(x) =  14.173191995218632
        sqrt fois log =  16948.731805075404
        sqrt fois log fois log =  240217.62994880215
```

```
1440010   pi(x) =  109928
        Li(x) =  110038.649235029
        diff  110.649235028803
        sqrt(x) =  1200.004166659433
        log(x) =  14.180160615972515
        sqrt fois log =  17016.25182306701
        sqrt fois log fois log =  241293.1839329253

1450010   pi(x) =  110630
        Li(x) =  110743.687639264
        diff  113.68763926359
        sqrt(x) =  1204.163610146063
        log(x) =  14.1870810109247
        sqrt fois log =  17083.566687549745
        sqrt fois log fois log =  242365.94455180276

1460010   pi(x) =  111332
        Li(x) =  111448.383396346
        diff  116.383396345642
        sqrt(x) =  1208.3087353818146
        log(x) =  14.193953842976132
        sqrt fois log =  17150.678418074338
        sqrt fois log fois log =  243435.93784187405

1470010   pi(x) =  112047
        Li(x) =  112152.739182675
        diff  105.739182675359
        sqrt(x) =  1212.4396892216948
        log(x) =  14.20077976145287
        sqrt fois log =  17217.58900068165
        sqrt fois log fois log =  244503.18942189353

1480010   pi(x) =  112753
        Li(x) =  112856.757635535
        diff  103.757635534959
        sqrt(x) =  1216.556616027384
        log(x) =  14.207559402474228
        sqrt fois log =  17284.300388682088
        sqrt fois log fois log =  245567.7245024092

1490010   pi(x) =  113458
        Li(x) =  113560.441353922
        diff  102.441353921851
        sqrt(x) =  1220.6596577261002
        log(x) =  14.214293389308516
        sqrt fois log =  17350.8145034117
        sqrt fois log fois log =  246629.56789496326

1500010   pi(x) =  114156
        Li(x) =  114263.792899359
        diff  107.792899358901
        sqrt(x) =  1224.7489538676896
        log(x) =  14.220982332716883
        sqrt fois log =  17417.1332349659
        sqrt fois log fois log =  247688.74402102607

1510010   pi(x) =  114886
        Li(x) =  114966.814796682
        diff  80.8147966820252
        sqrt(x) =  1228.824641680008
        log(x) =  14.227626831285734
        sqrt fois log =  17483.25844291156
        sqrt fois log fois log =  248745.27692067134
```

```
1520010   pi(x) =  115590
        Li(x) =  115669.509534806
        diff  79.5095348063478
        sqrt(x) =  1232.8868561226534
        log(x) =  14.234227471748186
        sqrt fois log =  17549.191956978328
        sqrt fois log fois log =  249799.1902610032

1530010   pi(x) =  116279
        Li(x) =  116371.879567471
        diff  92.8795674711873
        sqrt(x) =  1236.9357299391104
        log(x) =  14.240784829294972
        sqrt fois log =  17614.935577729786
        sqrt fois log fois log =  250850.50734434256

1540010   pi(x) =  116967
        Li(x) =  117073.927313965
        diff  106.927313964959
        sqrt(x) =  1240.971393707365
        log(x) =  14.247299467875223
        sqrt fois log =  17680.491077215316
        sqrt fois log fois log =  251899.2511161824

1550010   pi(x) =  117663
        Li(x) =  117775.65515983
        diff  112.655159830494
        sqrt(x) =  1244.9939758890403
        log(x) =  14.253771940487521
        sqrt fois log =  17745.8601996032
        sqrt fois log fois log =  252945.44417291836

1560010   pi(x) =  118377
        Li(x) =  118477.065457551
        diff  100.065457551318
        sqrt(x) =  1249.0036028771094
        log(x) =  14.260202789461584
        sqrt fois log =  17811.044661795724
        sqrt fois log fois log =  253989.10876936425

1570010   pi(x) =  119058
        Li(x) =  119178.16052722
        diff  120.160527219879
        sqrt(x) =  1253.000399042235
        log(x) =  14.266592546730958
        sqrt fois log =  17876.046154026866
        sqrt fois log fois log =  255030.26682605827

1580010   pi(x) =  119759
        Li(x) =  119878.942657188
        diff  119.942657187843
        sqrt(x) =  1256.9844867777804
        log(x) =  14.272941734097046
        sqrt fois log =  17940.86634044314
        sqrt fois log fois log =  256068.9399363678

1590010   pi(x) =  120451
        Li(x) =  120579.414104699
        diff  128.414104699434
        sqrt(x) =  1260.955986543543
        log(x) =  14.279250863484812
        sqrt fois log =  18005.50685966823
        sqrt fois log fois log =  257105.1493733993
```

```
1600010   pi(x) =  121127
        Li(x) =  121279.577096508
        diff  152.577096508219
        sqrt(x) =  1264.9150169082507
        log(x) =  14.28552043719048
        sqrt fois log =  18069.969325351954
        sqrt fois log fois log =  258138.9160967204

1610010   pi(x) =  121847
        Li(x) =  121979.433829478
        diff  132.433829477799
        sqrt(x) =  1268.8616945908643
        log(x) =  14.29175094812148
        sqrt fois log =  18134.255326704013
        sqrt fois log fois log =  259170.2607588991

1620010   pi(x) =  122541
        Li(x) =  122678.986471167
        diff  137.986471167009
        sqrt(x) =  1272.7961345007297
        log(x) =  14.297942880029021
        sqrt fois log =  18198.36642901317
        sqrt fois log fois log =  260199.203711868

1630010   pi(x) =  123250
        Li(x) =  123378.2371604
        diff  128.237160400226
        sqrt(x) =  1276.7184497766139
        log(x) =  14.304096707733452
        sqrt fois log =  18262.304174152217
        sqrt fois log fois log =  261225.76501311763

1640010   pi(x) =  123942
        Li(x) =  124077.188007823
        diff  135.188007822973
        sqrt(x) =  1280.6287518246652
        log(x) =  14.310212897342767
        sqrt fois log =  18326.070081069294
        sqrt fois log fois log =  262249.9644317252

1650010   pi(x) =  124635
        Li(x) =  124775.841096444
        diff  140.841096443502
        sqrt(x) =  1284.527150355336
        log(x) =  14.316291906464459
        sqrt fois log =  18389.665646265952
        sqrt fois log fois log =  263271.82145422476

1660010   pi(x) =  125336
        Li(x) =  125474.198482161
        diff  138.19848216082
        sqrt(x) =  1288.4137534192967
        log(x) =  14.322334184410966
        sqrt fois log =  18453.092344262433
        sqrt fois log fois log =  264291.35529032216

1670010   pi(x) =  126052
        Li(x) =  126172.262194279
        diff  120.262194279407
        sqrt(x) =  1292.2886674423792
        log(x) =  14.328340172398962
        sqrt fois log =  18516.351628050565
        sqrt fois log fois log =  265308.5848784618
```

```
1680010   pi(x) =  126753
        Li(x) =  126870.034236011
        diff  117.034236011095
        sqrt(x) =  1296.1519972595806
        log(x) =  14.33431030374268
        sqrt fois log =  18579.44492953466
        sqrt fois log fois log =  266323.52889124834

1690010   pi(x) =  127429
        Li(x) =  127567.516584965
        diff  138.516584964687
        sqrt(x) =  1300.0038461481565
        log(x) =  14.340245004041513
        sqrt fois log =  18642.373659960853
        sqrt fois log fois log =  267336.2057407287

1700010   pi(x) =  128141
        Li(x) =  128264.711193623
        diff  123.711193623385
        sqrt(x) =  1303.8443158598345
        log(x) =  14.346144691362085
        sqrt fois log =  18705.139210335194
        sqrt fois log fois log =  268346.63358353905

1710010   pi(x) =  128837
        Li(x) =  128961.619989811
        diff  124.619989810584
        sqrt(x) =  1307.6735066521765
        log(x) =  14.35200977641496
        sqrt fois log =  18767.74295183087
        sqrt fois log fois log =  269354.8303259196

1720010   pi(x) =  129523
        Li(x) =  129658.244877144
        diff  135.244877144461
        sqrt(x) =  1311.491517319117
        log(x) =  14.357840662726224
        sqrt fois log =  18830.18623618493
        sqrt fois log fois log =  270360.81362860365

1730010   pi(x) =  130213
        Li(x) =  130354.587735481
        diff  141.587735481371
        sqrt(x) =  1315.2984452207036
        log(x) =  14.363637746804077
        sqrt fois log =  18892.470396084813
        sqrt fois log fois log =  271364.6009115824

1740010   pi(x) =  130902
        Li(x) =  131050.650421349
        diff  148.650421348837
        sqrt(x) =  1319.0943863120638
        log(x) =  14.369401418300633
        sqrt fois log =  18954.59674554497
        sqrt fois log fois log =  272366.2093587505

1750010   pi(x) =  131609
        Li(x) =  131746.434768368
        diff  137.434768367995
        sqrt(x) =  1322.8794351716258
        log(x) =  14.375132060169085
        sqrt fois log =  19016.566580274008
        sqrt fois log fois log =  273365.65592243685
```

```
1760010   pi(x) =  132292
        Li(x) =  132441.942587666
        diff  149.942587666097
        sqrt(x) =  1326.6536850286136
        log(x) =  14.380830048816375
        sqrt fois log =  19078.38117803246
        sqrt fois log fois log =  274362.957327822

1770010   pi(x) =  132972
        Li(x) =  133137.175668279
        diff  165.175668279378
        sqrt(x) =  1330.4172277898388
        log(x) =  14.386495754251566
        sqrt fois log =  19140.041798981652
        sqrt fois log fois log =  275358.13007724704

1780010   pi(x) =  133674
        Li(x) =  133832.135777546
        diff  158.135777546238
        sqrt(x) =  1334.1701540658148
        log(x) =  14.392129540230016
        sqrt fois log =  19201.549686023845
        sqrt fois log fois log =  276351.1904544182

1790010   pi(x) =  134359
        Li(x) =  134526.824661491
        diff  167.82466149141
        sqrt(x) =  1337.9125531962095
        log(x) =  14.397731764393512
        sqrt fois log =  19262.90606513389
        sqrt fois log fois log =  277342.1545285067

1800010   pi(x) =  135072
        Li(x) =  135221.244045201
        diff  149.244045201194
        sqrt(x) =  1341.6445132746603
        log(x) =  14.403302778406516
        sqrt fois log =  19324.11214568277
        sqrt fois log fois log =  278331.0381581518

1810010   pi(x) =  135777
        Li(x) =  135915.39563319
        diff  138.395633190055
        sqrt(x) =  1345.366121172969
        log(x) =  14.408842928088625
        sqrt fois log =  19385.16912075316
        sqrt fois log fois log =  279317.8569953661

1820010   pi(x) =  136449
        Li(x) =  136609.281109759
        diff  160.281109758653
        sqrt(x) =  1349.0774625646964
        log(x) =  14.414352553543377
        sqrt fois log =  19446.078167447253
        sqrt fois log fois log =  280302.6264893474

1830010   pi(x) =  137166
        Li(x) =  137302.902139344
        diff  136.902139343874
        sqrt(x) =  1352.7786219481738
        log(x) =  14.419831989283548
        sqrt fois log =  19506.84044718719
        sqrt fois log fois log =  281285.36189020006
```

```
1840010   pi(x) =  137841
        Li(x) =  137996.260366861
        diff  155.260366860894
        sqrt(x) =  1356.4696826689492
        log(x) =  14.425281564353009
        sqrt fois log =  19567.45710600817
        sqrt fois log fois log =  282266.0782525679

1850010   pi(x) =  138542
        Li(x) =  138689.357418037
        diff  147.357418037369
        sqrt(x) =  1360.1507269416873
        log(x) =  14.430701602445303
        sqrt fois log =  19627.92927484455
        sqrt fois log fois log =  283244.7904391823

1860010   pi(x) =  139250
        Li(x) =  139382.19489974
        diff  132.194899740396
        sqrt(x) =  1363.8218358715335
        log(x) =  14.436092422019017
        sqrt fois log =  19688.258069809108
        sqrt fois log fois log =  284221.513124326

1870010   pi(x) =  139952
        Li(x) =  140074.774400296
        diff  122.774400295777
        sqrt(x) =  1367.4830894749668
        log(x) =  14.441454336410054
        sqrt fois log =  19748.44459246568
        sqrt fois log fois log =  285196.26079721714

1880010   pi(x) =  140641
        Li(x) =  140767.097489801
        diff  126.097489800653
        sqrt(x) =  1371.1345667001472
        log(x) =  14.446787653940921
        sqrt fois log =  19808.489930095322
        sqrt fois log fois log =  286169.0477653142

1890010   pi(x) =  141338
        Li(x) =  141459.165720429
        diff  121.165720428835
        sqrt(x) =  1374.7763454467786
        log(x) =  14.45209267802712
        sqrt fois log =  19868.39515595627
        sqrt fois log fois log =  287139.8881575451

1900010   pi(x) =  142030
        Li(x) =  142150.98062673
        diff  120.980626729666
        sqrt(x) =  1378.4085025855
        log(x) =  14.457369707280714
        sqrt fois log =  19928.161329537776
        sqrt fois log fois log =  288108.7959274624

1910010   pi(x) =  142719
        Li(x) =  142842.54372592
        diff  123.543725920201
        sqrt(x) =  1382.0311139768164
        log(x) =  14.462619035611201
        sqrt fois log =  19987.789496808058
        sqrt fois log fois log =  289075.7848563259
```

```
1920010   pi(x) =  143415
        Li(x) =  143533.856518171
        diff  118.856518171262
        sqrt(x) =  1385.6442544895858
        log(x) =  14.467840952323733
        sqrt fois log =  20047.28069045652
        sqrt fois log fois log =  290040.86855611566

1930010   pi(x) =  144125
        Li(x) =  144224.920486887
        diff  99.9204868868692
        sqrt(x) =  1389.2479980190722
        log(x) =  14.473035742214796
        sqrt fois log =  20106.635930130382
        sqrt fois log fois log =  291004.0604724772

1940010   pi(x) =  144810
        Li(x) =  144915.737098978
        diff  105.73709897825
        sqrt(x) =  1392.842417504579
        log(x) =  14.4782036856654
        sqrt fois log =  20165.856222665905
        sqrt fois log fois log =  291965.3738876

1950010   pi(x) =  145502
        Li(x) =  145606.307805131
        diff  104.307805131422
        sqrt(x) =  1396.4275849466737
        log(x) =  14.483345058731908
        sqrt fois log =  20224.94256231434
        sqrt fois log fois log =  292924.821923032

1960010   pi(x) =  146187
        Li(x) =  146296.634040069
        diff  109.634040069446
        sqrt(x) =  1400.003571424016
        log(x) =  14.4884601332345
        sqrt fois log =  20283.895930962775
        sqrt fois log fois log =  293882.4175424317

1970010   pi(x) =  146859
        Li(x) =  146986.717222809
        diff  127.717222808889
        sqrt(x) =  1403.5704471097986
        log(x) =  14.49354917684342
        sqrt fois log =  20342.717298349973
        sqrt fois log fois log =  294838.17355425865

1980010   pi(x) =  147529
        Li(x) =  147676.558756911
        diff  147.558756911167
        sqrt(x) =  1407.1282812878148
        log(x) =  14.498612453163014
        sqrt fois log =  20401.40762227738
        sqrt fois log fois log =  295792.1026144057

1990010   pi(x) =  148220
        Li(x) =  148366.160030728
        diff  146.160030728177
        sqrt(x) =  1410.6771423681607
        log(x) =  14.503650221813677
        sqrt fois log =  20459.967848815457
        sqrt fois log fois log =  296744.217228773
```

```
2000010   pi(x) =  148934
        Li(x) =  149055.522417643
        diff  121.522417643369
        sqrt(x) =  1414.2170979025816
        log(x) =  14.508662738511719
        sqrt fois log =  20518.398912505363
        sqrt fois log fois log =  297694.52975578594

2010010   pi(x) =  149638
        Li(x) =  149744.647276307
        diff  106.647276307194
        sqrt(x) =  1417.7482145994754
        log(x) =  14.51365025514726
        sqrt fois log =  20576.70173655625
        sqrt fois log fois log =  298643.05240885867

2020010   pi(x) =  150330
        Li(x) =  150433.535950868
        diff  103.535950868187
        sqrt(x) =  1421.2705583385593
        log(x) =  14.518613019860183
        sqrt fois log =  20634.877233038158
        sqrt fois log fois log =  299589.79725880426

2030010   pi(x) =  151022
        Li(x) =  151122.189771199
        diff  100.189771199133
        sqrt(x) =  1424.7841941852107
        log(x) =  14.523551277114212
        sqrt fois log =  20692.92630307076
        sqrt fois log fois log =  300534.7762361936

2040010   pi(x) =  151711
        Li(x) =  151810.610053118
        diff  99.6100531183765
        sqrt(x) =  1428.28918640449
        log(x) =  14.52846526776917
        sqrt fois log =  20750.849837007918
        sqrt fois log fois log =  301478.00113366306

2050010   pi(x) =  152383
        Li(x) =  152498.798098607
        diff  115.798098607018
        sqrt(x) =  1431.7855984748555
        log(x) =  14.533355229151473
        sqrt fois log =  20808.648714618314
        sqrt fois log fois log =  302419.48360817414

2060010   pi(x) =  153078
        Li(x) =  153186.755196022
        diff  108.755196021521
        sqrt(x) =  1435.2734931015762
        log(x) =  14.538221395122914
        sqrt fois log =  20866.323805262135
        sqrt fois log fois log =  303359.23518322455

2070010   pi(x) =  153772
        Li(x) =  153874.482620302
        diff  102.482620301918
        sqrt(x) =  1438.752932229853
        log(x) =  14.543063996147758
        sqrt fois log =  20923.875968063992
        sqrt fois log fois log =  304297.26725101273
```

```
2080010   pi(x) =  154447
        Li(x) =  154561.981633176
        diff  114.981633175979
        sqrt(x) =  1442.2239770576552
        log(x) =  14.547883259358251
        sqrt fois log =  20981.306052082142
        sqrt fois log fois log =  305233.59107455774

2090010   pi(x) =  155133
        Li(x) =  155249.253483359
        diff  116.253483359382
        sqrt(x) =  1445.6866880482783
        log(x) =  14.552679408618543
        sqrt fois log =  21038.61489647412
        sqrt fois log fois log =  306168.21778977424

2100010   pi(x) =  155806
        Li(x) =  155936.299406752
        diff  130.29940675167
        sqrt(x) =  1449.141124942633
        log(x) =  14.557452664587075
        sqrt fois log =  21095.803330658844
        sqrt fois log fois log =  307101.1584075045

2110010   pi(x) =  156505
        Li(x) =  156623.120626629
        diff  118.120626628632
        sqrt(x) =  1452.5873467712709
        log(x) =  14.562203244777512
        sqrt fois log =  21152.872174475357
        sqrt fois log fois log =  308032.423815509

2120010   pi(x) =  157188
        Li(x) =  157309.718353831
        diff  121.718353830511
        sqrt(x) =  1456.0254118661528
        log(x) =  14.566931363618203
        sqrt fois log =  21209.822238338173
        sqrt fois log fois log =  308962.0247804152

2130010   pi(x) =  157885
        Li(x) =  157996.093786947
        diff  111.093786946993
        sqrt(x) =  1459.4553778721704
        log(x) =  14.571637232510268
        sqrt fois log =  21266.65432338946
        sqrt fois log fois log =  309889.97194962733

2140010   pi(x) =  158560
        Li(x) =  158682.248112498
        diff  122.248112498084
        sqrt(x) =  1462.8773017584215
        log(x) =  14.576321059884313
        sqrt fois log =  21323.36922164802
        sqrt fois log fois log =  310816.275853197

2150010   pi(x) =  159251
        Li(x) =  159368.182505112
        diff  117.182505111967
        sqrt(x) =  1466.2912398292503
        log(x) =  14.580983051255819
        sqrt fois log =  21379.96771615518
        sqrt fois log fois log =  311740.94690565526
```

```
2160010   pi(x) =  159963
        Li(x) =  160053.898127699
        diff  90.8981276990671
        sqrt(x) =  1469.6972477350564
        log(x) =  14.585623409279261
        sqrt fois log =  21436.45058111774
        sqrt fois log fois log =  312663.995407809

2170010   pi(x) =  160629
        Li(x) =  160739.396131623
        diff  110.396131622925
        sqrt(x) =  1473.0953804828796
        log(x) =  14.590242333800955
        sqrt fois log =  21492.818582047934
        sqrt fois log fois log =  313585.43154849956

2180010   pi(x) =  161319
        Li(x) =  161424.677656868
        diff  105.677656867803
        sqrt(x) =  1476.485692446764
        log(x) =  14.594840021910715
        sqrt fois log =  21549.072475900586
        sqrt fois log fois log =  314505.2654063285

2190010   pi(x) =  161998
        Li(x) =  162109.743832203
        diff  111.743832203007
        sqrt(x) =  1479.8682373779093
        log(x) =  14.599416667992305
        sqrt fois log =  21605.21301120744
        sqrt fois log fois log =  315423.5069513461

2200010   pi(x) =  162662
        Li(x) =  162794.595775344
        diff  132.595775344176
        sqrt(x) =  1483.2430684146143
        log(x) =  14.60397246377276
        sqrt fois log =  21661.24092820884
        sqrt fois log fois log =  316340.1660467094

2210010   pi(x) =  163364
        Li(x) =  163479.234593112
        diff  115.234593111556
        sqrt(x) =  1486.6102380920158
        log(x) =  14.608507598370576
        sqrt fois log =  21717.156958982705
        sqrt fois log fois log =  317255.25245030527

2220010   pi(x) =  164024
        Li(x) =  164163.661381585
        diff  139.661381585145
        sqrt(x) =  1489.969798351631
        log(x) =  14.613022258342822
        sqrt fois log =  21772.96182757095
        sqrt fois log fois log =  318168.77581634285

2230010   pi(x) =  164719
        Li(x) =  164847.877226257
        diff  128.877226257144
        sqrt(x) =  1493.3218005507051
        log(x) =  14.61751662773118
        sqrt fois log =  21828.656250103395
        sqrt fois log fois log =  319080.74569691456
```

2240010   pi(x) = 165399
Li(x) = 165531.883202181
diff 132.88320218146
sqrt(x) = 1496.666295471372
log(x) = 14.621990888106971
sqrt fois log = 21884.240934919217
sqrt fois log fois log = 319991.1715435264

2250010   pi(x) = 166081
Li(x) = 166215.68037412
diff 134.680374120333
sqrt(x) = 1500.0033333296296
log(x) = 14.62644521861517
sqrt fois log = 21939.71658268598
sqrt fois log fois log = 320900.0627085993

2260010   pi(x) = 166770
Li(x) = 166899.269796688
diff 129.269796688488
sqrt(x) = 1503.332963784138
log(x) = 14.63087979601744
sqrt fois log = 21995.083886516364
sqrt fois log fois log = 321807.428446941

2270010   pi(x) = 167471
Li(x) = 167582.652514494
diff 111.652514494461
sqrt(x) = 1506.6552359448394
log(x) = 14.635294794734225
sqrt fois log = 22050.343532082574
sqrt fois log fois log = 322713.2779171896

2280010   pi(x) = 168164
Li(x) = 168265.829562279
diff 101.829562279396
sqrt(x) = 1509.9701983814118
log(x) = 14.639690386885917
sqrt fois log = 22105.496197728575
sqrt fois log fois log = 323617.6201832302

2290010   pi(x) = 168828
Li(x) = 168948.801965053
diff 120.801965053368
sqrt(x) = 1513.2778991315508
log(x) = 14.644066742333115
sqrt fois log = 22160.542554580068
sqrt fois log fois log = 324520.4642155837

2300010   pi(x) = 169512
Li(x) = 169631.570738229
diff 119.570738229115
sqrt(x) = 1516.5783857090935
log(x) = 14.648424028716013
sqrt fois log = 22215.483266652427
sqrt fois log fois log = 325421.8188927699

2310010   pi(x) = 170201
Li(x) = 170314.136887753
diff 113.13688775347
sqrt(x) = 1519.8717051119809
log(x) = 14.652762411492935
sqrt fois log = 22270.318990956508
sqrt fois log fois log = 326321.6930026448

```
2320010   pi(x) =  170864
        Li(x) =  170996.501410236
        diff  132.50141023632
        sqrt(x) =  1523.1579038300658
        log(x) =  14.65708205397803
        sqrt fois log =  22325.050377602452
        sqrt fois log fois log =  327220.09524371236

2330010   pi(x) =  171535
        Li(x) =  171678.665293077
        diff  143.665293077443
        sqrt(x) =  1526.4370278527706
        log(x) =  14.661383117378167
        sqrt fois log =  22379.678069901518
        sqrt fois log fois log =  328117.0342264125

2340010   pi(x) =  172208
        Li(x) =  172360.629514591
        diff  152.629514590837
        sqrt(x) =  1529.7091226765956
        log(x) =  14.665665760829027
        sqrt fois log =  22434.20270446596
        sqrt fois log fois log =  329012.5184743843

2350010   pi(x) =  172874
        Li(x) =  173042.395044127
        diff  168.395044127014
        sqrt(x) =  1532.9742333124846
        log(x) =  14.669930141430436
        sqrt fois log =  22488.62491130703
        sqrt fois log fois log =  329906.55642570637

2360010   pi(x) =  173564
        Li(x) =  173723.962842193
        diff  159.962842193141
        sqrt(x) =  1536.2324042930484
        log(x) =  14.674176414280952
        sqrt fois log =  22542.94531393117
        sqrt fois log fois log =  330799.1564341141

2370010   pi(x) =  174255
        Li(x) =  174405.333860571
        diff  150.333860570914
        sqrt(x) =  1539.4836796796515
        log(x) =  14.678404732511694
        sqrt fois log =  22597.164529434314
        sqrt fois log fois log =  331690.32677019405

2380010   pi(x) =  174917
        Li(x) =  175086.509042433
        diff  169.509042432561
        sqrt(x) =  1542.7281030693646
        log(x) =  14.682615247319502
        sqrt fois log =  22651.283168594546
        sqrt fois log fois log =  332580.0756225579

2390010   pi(x) =  175622
        Li(x) =  175767.489322455
        diff  145.489322454698
        sqrt(x) =  1545.9657176017843
        log(x) =  14.686808107999358
        sqrt fois log =  22705.30183596293
        sqrt fois log fois log =  333468.4110989931
```

```
2400010   pi(x) =  176303
       Li(x) =  176448.27562693
       diff  145.275626930234
       sqrt(x) =  1549.1965659657267
       log(x) =  14.69098346197616
       sqrt fois log =  22759.221129952748
       sqrt fois log fois log =  334355.3412275942

2410010   pi(x) =  176962
       Li(x) =  177128.868873878
       diff  166.868873878295
       sqrt(x) =  1552.4206904057933
       log(x) =  14.695141454835822
       sqrt fois log =  22813.04164292702
       sqrt fois log fois log =  335240.87395787274

2420010   pi(x) =  177655
       Li(x) =  177809.269973152
       diff  154.269973152375
       sqrt(x) =  1555.6381327288168
       log(x) =  14.699282230355736
       sqrt fois log =  22866.763961284476
       sqrt fois log fois log =  336125.01716184785

2430010   pi(x) =  178327
       Li(x) =  178489.479826547
       diff  162.479826546623
       sqrt(x) =  1558.848934310185
       log(x) =  14.7034059305346
       sqrt fois log =  22920.388665543916
       sqrt fois log fois log =  337007.77863511647

2440010   pi(x) =  178985
       Li(x) =  179169.4993279
       diff  184.499327900034
       sqrt(x) =  1562.0531361000496
       log(x) =  14.707512695621642
       sqrt fois log =  22973.91633042708
       sqrt fois log fois log =  337889.16609790566

2450010   pi(x) =  179686
       Li(x) =  179849.329363199
       diff  163.3293631993
       sqrt(x) =  1565.2507786294182
       log(x) =  14.711602664145232
       sqrt fois log =  23027.34752493995
       sqrt fois log fois log =  338769.18719610467

2460010   pi(x) =  180371
       Li(x) =  180528.97081068
       diff  157.970810679602
       sqrt(x) =  1568.4419020161379
       log(x) =  14.715675972940934
       sqrt fois log =  23080.68281245266
       sqrt fois log fois log =  339647.84950228035

2470010   pi(x) =  181041
       Li(x) =  181208.424540924
       diff  167.424540923879
       sqrt(x) =  1571.6265459707658
       log(x) =  14.71973275717896
       sqrt fois log =  23133.922750777907
       sqrt fois log fois log =  340525.1605166731
```

2480010 pi(x) = 181712
Li(x) = 181887.69141696
diff 175.69141696021
sqrt(x) = 1574.8047498023366
log(x) = 14.7237731503911
sqrt fois log = 23187.06789224802
sqrt fois log fois log = 341401.1276681769

2490010 pi(x) = 182398
Li(x) = 182566.772294358
diff 168.772294357826
sqrt(x) = 1577.9765524240213
log(x) = 14.727797284497083
sqrt fois log = 23240.11878379057
sqrt fois log fois log = 342275.75831530034

2500010 pi(x) = 183073
Li(x) = 183245.668021321
diff 172.668021321442
sqrt(x) = 1581.1419923586875
log(x) = 14.73180528983043
sqrt fois log = 23293.075967002736
sqrt fois log fois log = 343149.059747113

2510010 pi(x) = 183748
Li(x) = 183924.379438784
diff 176.379438783828
sqrt(x) = 1584.301107744358
log(x) = 14.735797295163776
sqrt fois log = 23345.939978224284
sqrt fois log fois log = 344021.0391841732

2520010 pi(x) = 184423
Li(x) = 184602.907380497
diff 179.90738049717
sqrt(x) = 1587.4539363395713
log(x) = 14.7397734277337
sqrt fois log = 23398.71134860928
sqrt fois log fois log = 344891.70377944206

2530010 pi(x) = 185122
Li(x) = 185281.252673123
diff 159.252673122654
sqrt(x) = 1590.6005155286477
log(x) = 14.743733813265061
sqrt fois log = 23451.39060419656
sqrt fois log fois log = 345761.0606191794

2540010 pi(x) = 185792
Li(x) = 185959.416136319
diff 167.41613631873
sqrt(x) = 1593.7408823268606
log(x) = 14.747678575994843
sqrt fois log = 23503.97826597896
sqrt fois log fois log = 346629.1167238264

2550010 pi(x) = 186463
Li(x) = 186637.398582828
diff 174.398582827853
sqrt(x) = 1596.875073385517
log(x) = 14.751607838695547
sqrt fois log = 23556.47484997132
sqrt fois log fois log = 347495.8790488714

```
2560010   pi(x) =  187134
        Li(x) =  187315.200818562
        diff  181.200818561978
        sqrt(x) =  1600.0031249969481
        log(x) =  14.755521722698116
        sqrt fois log =  23608.880867277338
        sqrt fois log fois log =  348361.3544857027

2570010   pi(x) =  187812
        Li(x) =  187992.823642686
        diff  180.823642686359
        sqrt(x) =  1603.1250730994136
        log(x) =  14.759420347914416
        sqrt fois log =  23661.19682415527
        sqrt fois log fois log =  349225.5498624453

2580010   pi(x) =  188511
        Li(x) =  188670.267847702
        diff  159.267847702256
        sqrt(x) =  1606.2409532819165
        log(x) =  14.76330383285928
        sqrt fois log =  23713.423222082463
        sqrt fois log fois log =  350088.47194478434

2590010   pi(x) =  189204
        Li(x) =  189347.534219528
        diff  143.534219528374
        sqrt(x) =  1609.3508007889393
        log(x) =  14.767172294672127
        sqrt fois log =  23765.560557818826
        sqrt fois log fois log =  350950.12743677484

2600010   pi(x) =  189880
        Li(x) =  190024.623537581
        diff  144.62353758057
        sqrt(x) =  1612.454650525093
        log(x) =  14.77102584913816
        sqrt fois log =  23817.609323469187
        sqrt fois log fois log =  351810.52298163745

2610010   pi(x) =  190533
        Li(x) =  190701.536574851
        diff  168.53657485079
        sqrt(x) =  1615.5525370596897
        log(x) =  14.77486461070916
        sqrt fois log =  23869.57000654461
        sqrt fois log fois log =  352669.66516254074

2620010   pi(x) =  191215
        Li(x) =  191378.274097985
        diff  163.27409798454
        sqrt(x) =  1618.644494631233
        log(x) =  14.77868869252389
        sqrt fois log =  23921.44309002265
        sqrt fois log fois log =  353527.56050337147

2630010   pi(x) =  191886
        Li(x) =  192054.836867357
        diff  168.836867356935
        sqrt(x) =  1621.7305571518345
        log(x) =  14.782498206428087
        sqrt fois log =  23973.229052406616
        sqrt fois log fois log =  354384.21546949056
```

2640010   pi(x) = 192567
Li(x) = 192731.225637148
diff 164.22563714796
sqrt(x) = 1624.8107582115524
log(x) = 14.786293262994112
sqrt fois log = 24024.928367783832
sqrt fois log fois log = 355239.6364684782

2650010   pi(x) = 193258
Li(x) = 193407.441155416
diff 149.441155416163
sqrt(x) = 1627.8851310826572
log(x) = 14.79007397154019
sqrt fois log = 24076.5415058829
sqrt fois log fois log = 356093.8298508657

2660010   pi(x) = 193952
Li(x) = 194083.484164171
diff 131.484164171445
sqrt(x) = 1630.9537087238252
log(x) = 14.793840440149312
sqrt fois log = 24128.068932130027
sqrt fois log fois log = 356946.8019108554

2670010   pi(x) = 194613
Li(x) = 194759.355399447
diff 146.355399446591
sqrt(x) = 1634.016523784261
log(x) = 14.79759277568777
sqrt fois log = 24179.511107704424
sqrt fois log fois log = 357798.5588870291

2680010   pi(x) = 195280
Li(x) = 195435.055591368
diff 155.055591367709
sqrt(x) = 1637.0736086077497
log(x) = 14.801331083823362
sqrt fois log = 24230.868489592765
sqrt fois log fois log = 358649.10696304543

2690010   pi(x) = 195960
Li(x) = 196110.585464224
diff 150.585464223637
sqrt(x) = 1640.1249952366436
log(x) = 14.80505546904323
sqrt fois log = 24282.141530642773
sqrt fois log fois log = 359498.4522683245

2700010   pi(x) = 196645
Li(x) = 196785.945736534
diff 140.945736534195
sqrt(x) = 1643.1707154157782
log(x) = 14.808766034671402
sqrt fois log = 24333.330679615883
sqrt fois log fois log = 360346.60087872326

2710010   pi(x) = 197327
Li(x) = 197461.137121117
diff 134.137121117412
sqrt(x) = 1646.210800596327
log(x) = 14.812462882885976
sqrt fois log = 24384.436381239102
sqrt fois log fois log = 361193.5588171986

```
2720010   pi(x) =  198020
        Li(x) =  198136.160325156
        diff  116.160325155826
        sqrt(x) =  1649.2452819395908
        log(x) =  14.81614611473601
        sqrt fois log =  24435.459076255964
        sqrt fois log fois log =  362039.3320544606

2730010   pi(x) =  198665
        Li(x) =  198811.016050262
        diff  146.016050261591
        sqrt(x) =  1652.2741903207227
        log(x) =  14.819815830158097
        sqrt fois log =  24486.3992014767
        sqrt fois log fois log =  362883.926509615

2740010   pi(x) =  199321
        Li(x) =  199485.704992541
        diff  164.704992540675
        sqrt(x) =  1655.2975563323955
        log(x) =  14.823472127992629
        sqrt fois log =  24537.257189827575
        sqrt fois log fois log =  363727.3480507958

2750010   pi(x) =  199993
        Li(x) =  200160.227842656
        diff  167.227842656197
        sqrt(x) =  1658.3154102884048
        log(x) =  14.827115105999779
        sqrt fois log =  24588.033470399427
        sqrt fois log fois log =  364569.60249578755

2760010   pi(x) =  200664
        Li(x) =  200834.585285891
        diff  170.585285890702
        sqrt(x) =  1661.327782227216
        log(x) =  14.830744860875175
        sqrt fois log =  24638.728468495436
        sqrt fois log fois log =  365410.69561263756

2770010   pi(x) =  201349
        Li(x) =  201508.778002207
        diff  159.778002207371
        sqrt(x) =  1664.334701915453
        log(x) =  14.834361488265309
        sqrt fois log =  24689.342605678117
        sqrt fois log fois log =  366250.6331202593

2780010   pi(x) =  202015
        Li(x) =  202182.806666311
        diff  167.806666310556
        sqrt(x) =  1667.3361988513295
        log(x) =  14.837965082782652
        sqrt fois log =  24739.87629981558
        sqrt fois log fois log =  367089.42068902566

2790010   pi(x) =  202679
        Li(x) =  202856.671947705
        diff  177.671947705385
        sqrt(x) =  1670.3323022680247
        log(x) =  14.841555738020515
        sqrt fois log =  24790.32996512702
        sqrt fois log fois log =  367927.0639413529
```

```
2800010   pi(x) =  203364
       Li(x) =  203530.374510756
       diff  166.374510756199
       sqrt(x) =  1673.3230411370066
       log(x) =  14.845133546567626
       sqrt fois log =  24840.704012227536
       sqrt fois log fois log =  368763.568452276

2810010   pi(x) =  204053
       Li(x) =  204203.915014744
       diff  150.915014744474
       sqrt(x) =  1676.3084441712988
       log(x) =  14.848698600022457
       sqrt fois log =  24890.99884817219
       sqrt fois log fois log =  369598.939750015

2820010   pi(x) =  204748
       Li(x) =  204877.294113926
       diff  129.294113925745
       sqrt(x) =  1679.2885398286978
       log(x) =  14.852250989007299
       sqrt fois log =  24941.2148764994
       sqrt fois log fois log =  370433.18331653177

2830010   pi(x) =  205414
       Li(x) =  205550.512457586
       diff  136.512457585544
       sqrt(x) =  1682.263356314938
       log(x) =  14.855790803182082
       sqrt fois log =  24991.352497273678
       sqrt fois log fois log =  371266.3045880798

2840010   pi(x) =  206118
       Li(x) =  206223.570690095
       diff  105.570690094872
       sqrt(x) =  1685.2329215868056
       log(x) =  14.85931813125795
       sqrt fois log =  25041.412107127628
       sqrt fois log fois log =  372098.3089557439

2850010   pi(x) =  206789
       Li(x) =  206896.469450964
       diff  107.469450964418
       sqrt(x) =  1688.197263355204
       log(x) =  14.862833061010607
       sqrt fois log =  25091.394099303358
       sqrt fois log fois log =  372929.20176597236

2860010   pi(x) =  207444
       Li(x) =  207569.209374898
       diff  125.209374898433
       sqrt(x) =  1691.1564090881718
       log(x) =  14.86633567929342
       sqrt fois log =  25141.298863693228
       sqrt fois log fois log =  373758.9883211017

2870010   pi(x) =  208116
       Li(x) =  208241.791091847
       diff  125.791091847466
       sqrt(x) =  1694.1103860138512
       log(x) =  14.86982607205029
       sqrt fois log =  25191.126786879948
       sqrt fois log fois log =  374587.6738798719
```

```
2880010   pi(x) =  208769
        Li(x) =  208914.21522706
        diff  145.215227060486
        sqrt(x) =  1697.0592211234114
        log(x) =  14.873304324328323
        sqrt fois log =  25240.87825217609
        sqrt fois log fois log =  375415.26365793543

2890010   pi(x) =  209449
        Li(x) =  209586.482401136
        diff  137.482401136367
        sqrt(x) =  1700.0029411739263
        log(x) =  14.876770520290242
        sqrt fois log =  25290.553639662972
        sqrt fois log fois log =  376241.76282835717

2900010   pi(x) =  210109
        Li(x) =  210258.593230074
        diff  149.593230074359
        sqrt(x) =  1702.9415726912066
        log(x) =  14.88022474322662
        sqrt fois log =  25340.153326228945
        sqrt fois log fois log =  377067.17652210826

2910010   pi(x) =  210791
        Li(x) =  210930.548325324
        diff  139.548325324111
        sqrt(x) =  1705.8751419725888
        log(x) =  14.883667075567887
        sqrt fois log =  25389.677685607116
        sqrt fois log fois log =  377891.5098285513

2920010   pi(x) =  211453
        Li(x) =  211602.348293835
        diff  149.348293834773
        sqrt(x) =  1708.803675089681
        log(x) =  14.887097598896135
        sqrt fois log =  25439.127088412482
        sqrt fois log fois log =  378714.7677959191

2930010   pi(x) =  212125
        Li(x) =  212273.993738104
        diff  148.993738103571
        sqrt(x) =  1711.7271978910658
        log(x) =  14.890516393956709
        sqrt fois log =  25488.501902178494
        sqrt fois log fois log =  379536.9554317856

2940010   pi(x) =  212804
        Li(x) =  212945.485256224
        diff  141.485256223503
        sqrt(x) =  1714.6457360049626
        log(x) =  14.893923540669624
        sqrt fois log =  25537.802491393104
        sqrt fois log fois log =  380358.07770353113

2950010   pi(x) =  213455
        Li(x) =  213616.823441931
        diff  161.82344193061
        sqrt(x) =  1717.5593148418484
        log(x) =  14.897319118140766
        sqrt fois log =  25587.029217534222
        sqrt fois log fois log =  381178.13953879895
```

```
2960010   pi(x) =  214106
        Li(x) =  214288.00888465
        diff  182.008884650335
        sqrt(x) =  1720.4679595970395
        log(x) =  14.900703204672915
        sqrt fois log =  25636.182439104676
        sqrt fois log fois log =  381997.1458259465

2970010   pi(x) =  214799
        Li(x) =  214959.042169543
        diff  160.042169543391
        sqrt(x) =  1723.3716952532325
        log(x) =  14.904075877776581
        sqrt fois log =  25685.262511666635
        sqrt fois log fois log =  382815.10141448985

2980010   pi(x) =  215460
        Li(x) =  215629.923877551
        diff  169.923877550871
        sqrt(x) =  1726.2705465830088
        log(x) =  14.907437214180655
        sqrt fois log =  25734.269787875524
        sqrt fois log fois log =  383632.0111155405

2990010   pi(x) =  216129
        Li(x) =  216300.654585439
        diff  171.654585438897
        sqrt(x) =  1729.1645381513003
        log(x) =  14.910787289842881
        sqrt fois log =  25783.204617513446
        sqrt fois log fois log =  384447.8797022378

3000010   pi(x) =  216816
        Li(x) =  216971.234865842
        diff  155.234865842445
        sqrt(x) =  1732.0536943178176
        log(x) =  14.914126179960162
        sqrt fois log =  25832.06734752208
        sqrt fois log fois log =  385262.7119101731

3010010   pi(x) =  217487
        Li(x) =  217641.665287309
        diff  154.665287308802
        sqrt(x) =  1734.938039239442
        log(x) =  14.917453958978676
        sqrt fois log =  25880.858322035117
        sqrt fois log fois log =  386076.51243780897

3020010   pi(x) =  218145
        Li(x) =  218311.94641434
        diff  166.946414340113
        sqrt(x) =  1737.8175968725832
        log(x) =  14.920770700603848
        sqrt fois log =  25929.577882410227
        sqrt fois log fois log =  386889.28594689205

3030010   pi(x) =  218808
        Li(x) =  218982.078807436
        diff  174.07880743561
        sqrt(x) =  1740.6923909754992
        log(x) =  14.92407647781014
        sqrt fois log =  25978.226367260537
        sqrt fois log fois log =  387701.03706286015
```

3040010 pi(x) = 219466
Li(x) = 219652.063023133
diff 186.063023133291
sqrt(x) = 1743.5624451105846
log(x) = 14.927371362850678
sqrt fois log = 26026.804112485646
sqrt fois log fois log = 388511.7703752425

3050010 pi(x) = 220137
Li(x) = 220321.899614051
diff 184.899614050635
sqrt(x) = 1746.427782646623
log(x) = 14.930655427266744
sqrt fois log = 26075.311451302226
sqrt fois log fois log = 389321.4904380563

3060010 pi(x) = 220793
Li(x) = 220991.589128925
diff 198.58912892529
sqrt(x) = 1749.2884267610073
log(x) = 14.93392874189708
sqrt fois log = 26123.748714274134
sqrt fois log fois log = 390130.2017701954

3070010 pi(x) = 221459
Li(x) = 221661.132112655
diff 202.132112654857
sqrt(x) = 1752.144400441927
log(x) = 14.937191376887066
sqrt fois log = 26172.11622934211
sqrt fois log fois log = 390937.90885581495

3080010 pi(x) = 222152
Li(x) = 222330.529106336
diff 178.529106336238
sqrt(x) = 1754.9957264905233
log(x) = 14.940443401697733
sqrt fois log = 26220.41432185306
sqrt fois log fois log = 391744.6161447103

3090010 pi(x) = 222838
Li(x) = 222999.780647304
diff 161.780647304462
sqrt(x) = 1757.8424275230132
log(x) = 14.943684885114646
sqrt fois log = 26268.643314588888
sqrt fois log fois log = 392550.32805268985

3100010 pi(x) = 223493
Li(x) = 223668.887269171
diff 175.887269170984
sqrt(x) = 1760.684525972782
log(x) = 14.946915895256623
sqrt fois log = 26316.80352779495
sqrt fois log fois log = 393355.0489619439

3110010 pi(x) = 224168
Li(x) = 224337.849501861
diff 169.849501861463
sqrt(x) = 1763.5220440924463
log(x) = 14.950136499584332
sqrt fois log = 26364.895279208053
sqrt fois log fois log = 394158.7832214069

```
3120010   pi(x) =  224845
        Li(x) =  225006.667871653
        diff  161.667871653015
        sqrt(x) =  1766.3550039558866
        log(x) =  14.953346764908733
        sqrt fois log =  26412.91888408411
        sqrt fois log fois log =  394961.5351471159

3130010   pi(x) =  225512
        Li(x) =  225675.342901211
        diff  163.342901211145
        sqrt(x) =  1769.1834274602506
        log(x) =  14.956546757399412
        sqrt fois log =  26460.87465522539
        sqrt fois log fois log =  395763.3090225636

3140010   pi(x) =  226177
        Li(x) =  226343.875109626
        diff  166.875109625777
        sqrt(x) =  1772.0073363279284
        log(x) =  14.95973654259274
        sqrt fois log =  26508.762903007333
        sqrt fois log fois log =  396564.1090990456

3150010   pi(x) =  226836
        Li(x) =  227012.265012447
        diff  176.265012447344
        sqrt(x) =  1774.826752108498
        log(x) =  14.962916185399951
        sqrt fois log =  26556.583935405073
        sqrt fois log fois log =  397363.9395960049

3160010   pi(x) =  227514
        Li(x) =  227680.513121722
        diff  166.513121721946
        sqrt(x) =  1777.6416961806449
        log(x) =  14.966085750115049
        sqrt fois log =  26604.338058019493
        sqrt fois log fois log =  398162.804701369

3170010   pi(x) =  228180
        Li(x) =  228348.619946026
        diff  168.619946026301
        sqrt(x) =  1780.4521897540524
        log(x) =  14.969245300422621
        sqrt fois log =  26652.025574103012
        sqrt fois log fois log =  398960.708571885

3180010   pi(x) =  228844
        Li(x) =  229016.585990502
        diff  172.585990502237
        sqrt(x) =  1783.258253871267
        log(x) =  14.972394899405502
        sqrt fois log =  26699.646784584922
        sqrt fois log fois log =  399757.6553334478

3190010   pi(x) =  229535
        Li(x) =  229684.411756891
        diff  149.411756890506
        sqrt(x) =  1786.059909409536
        log(x) =  14.975534609552351
        sqrt fois log =  26747.201988096444
        sqrt fois log fois log =  400553.64908142574
```

3200010 pi(x) = 230210
Li(x) = 230352.097743564
diff 142.09774356446
sqrt(x) = 1788.85717708262
log(x) = 14.978664492765072
sqrt fois log = 26794.6914809954
sqrt fois log fois log = 401348.69388098054

3210010 pi(x) = 230896
Li(x) = 231019.644445563
diff 123.644445563114
sqrt(x) = 1791.6500774425792
log(x) = 14.981784610366145
sqrt fois log = 26842.115557390545
sqrt fois log fois log = 402142.7937673833

3220010 pi(x) = 231570
Li(x) = 231687.052354624
diff 117.052354623738
sqrt(x) = 1794.4386308815356
log(x) = 14.98489502310583
sqrt fois log = 26889.47450916556
sqrt fois log fois log = 402935.95274632616

3230010 pi(x) = 232241
Li(x) = 232354.321959214
diff 113.321959214285
sqrt(x) = 1797.2228576334098
log(x) = 14.98799579116928
sqrt fois log = 26936.76862600277
sqrt fois log fois log = 403728.1747942302

3240010 pi(x) = 232928
Li(x) = 233021.453744565
diff 93.4537445649912
sqrt(x) = 1800.0027777756345
log(x) = 14.991086974183503
sqrt fois log = 26983.99819540644
sqrt fois log fois log = 404519.4638585486

3250010 pi(x) = 233577
Li(x) = 233688.4481927
diff 111.448192700016
sqrt(x) = 1802.7784112308423
log(x) = 14.994168631224264
sqrt fois log = 27031.163502725813
sqrt fois log fois log = 405309.8238580656

3260010 pi(x) = 234240
Li(x) = 234355.305782468
diff 115.305782468378
sqrt(x) = 1805.5497777685332
log(x) = 14.997240820822848
sqrt fois log = 27078.26483117787
sqrt fois log fois log = 406099.2586831924

3270010 pi(x) = 234916
Li(x) = 235022.026989575
diff 106.026989574573
sqrt(x) = 1808.3168970067165
log(x) = 15.000303600972735
sqrt fois log = 27125.302461869695
sqrt fois log fois log = 406887.77219625853

```
3280010   pi(x) =  235584
        Li(x) =  235688.612286609
        diff  104.612286608812
        sqrt(x) =  1811.0797884135309
        log(x) =  15.003357029136167
        sqrt fois log =  27172.27667382059
        sqrt fois log fois log =  407675.3682317989

3290010   pi(x) =  236253
        Li(x) =  236355.062143077
        diff  102.062143076997
        sqrt(x) =  1813.8384713088428
        log(x) =  15.006401162250613
        sqrt fois log =  27219.187743983894
        sqrt fois log fois log =  408462.05059683754

3300010   pi(x) =  236902
        Li(x) =  237021.37702543
        diff  119.377025430033
        sqrt(x) =  1816.5929648658228
        log(x) =  15.009436056735147
        sqrt fois log =  27266.035947268483
        sqrt fois log fois log =  409247.8230711682

3310010   pi(x) =  237573
        Li(x) =  237687.557397093
        diff  114.557397093071
        sqrt(x) =  1819.343288112499
        log(x) =  15.012461768496719
        sqrt fois log =  27312.821556560004
        sqrt fois log fois log =  410032.68940763007

3320010   pi(x) =  238233
        Li(x) =  238353.603718494
        diff  120.60371849424
        sqrt(x) =  1822.0894599332933
        log(x) =  15.015478352936327
        sqrt fois log =  27359.54484274181
        sqrt fois log fois log =  410816.65333238035

3330010   pi(x) =  238910
        Li(x) =  239019.516447093
        diff  109.51644709293
        sqrt(x) =  1824.8314990705305
        log(x) =  15.018485864955121
        sqrt fois log =  27406.20607471563
        sqrt fois log fois log =  411599.7185451638

3340010   pi(x) =  239556
        Li(x) =  239685.296037408
        diff  129.296037408028
        sqrt(x) =  1827.5694241259346
        log(x) =  15.021484358960377
        sqrt fois log =  27452.80551942195
        sqrt fois log fois log =  412381.8887195779

3350010   pi(x) =  240230
        Li(x) =  240350.942941045
        diff  120.942941045389
        sqrt(x) =  1830.3032535620976
        log(x) =  15.024473888871421
        sqrt fois log =  27499.343441860143
        sqrt fois log fois log =  413163.1675033353
```

3360010 pi(x) = 240853
Li(x) = 241016.457606725
diff 163.457606725337
sqrt(x) = 1833.0330057039344
log(x) = 15.027454508125434
sqrt fois log = 27545.8201051083
sqrt fois log fois log = 413943.55851852195

3370010 pi(x) = 241543
Li(x) = 241681.84048031
diff 138.840480309649
sqrt(x) = 1835.7586987401148
log(x) = 15.030426269683192
sqrt fois log = 27592.235770342853
sqrt fois log fois log = 414723.06536185346

3380010 pi(x) = 242208
Li(x) = 242347.092004828
diff 139.092004828126
sqrt(x) = 1838.480350724478
log(x) = 15.033389226034707
sqrt fois log = 27638.59069685788
sqrt fois log fois log = 415501.6916049263

3390010 pi(x) = 242877
Li(x) = 243012.212620505
diff 135.212620505074
sqrt(x) = 1841.1979795774273
log(x) = 15.03634342920479
sqrt fois log = 27684.885142084182
sqrt fois log fois log = 416279.4407944668

3400010 pi(x) = 243539
Li(x) = 243677.202764785
diff 138.202764785266
sqrt(x) = 1843.9116030873063
log(x) = 15.039288930758536
sqrt fois log = 27731.11936160815
sqrt fois log fois log = 417056.3164525772

3410010 pi(x) = 244217
Li(x) = 244342.06287236
diff 125.062872359675
sqrt(x) = 1846.621238911759
log(x) = 15.042225781806719
sqrt fois log = 27777.29360919033
sqrt fois log fois log = 417832.32207697775

3420010 pi(x) = 244882
Li(x) = 245006.793375191
diff 124.793375190813
sqrt(x) = 1849.3269045790687
log(x) = 15.045154033011121
sqrt fois log = 27823.40813678375
sqrt fois log fois log = 418607.4611412465

3430010 pi(x) = 245554
Li(x) = 245671.394702538
diff 117.394702537887
sqrt(x) = 1852.0286174894813
log(x) = 15.048073734589767
sqrt fois log = 27869.463194552063
sqrt fois log fois log = 419381.73709505517

```
3440010   pi(x) =  246239
        Li(x) =  246335.867280982
        diff  96.8672809815616
        sqrt(x) =  1854.7263949165117
        log(x) =  15.0509849363221
        sqrt fois log =  27915.459030887414
        sqrt fois log fois log =  420155.15336440323

3450010   pi(x) =  246909
        Li(x) =  247000.211534448
        diff  91.2115344484046
        sqrt(x) =  1857.4202540082306
        log(x) =  15.053887687554067
        sqrt fois log =  27961.39589242805
        sqrt fois log fois log =  420927.7133518475

3460010   pi(x) =  247555
        Li(x) =  247664.427884235
        diff  109.427884235163
        sqrt(x) =  1860.110211788538
        log(x) =  15.05678203720314
        sqrt fois log =  28007.27402407579
        sqrt fois log fois log =  421699.42043673043

3470010   pi(x) =  248211
        Li(x) =  248328.516749033
        diff  117.516749032598
        sqrt(x) =  1862.7962851584175
        log(x) =  15.05966803376327
        sqrt fois log =  28053.09366901319
        sqrt fois log fois log =  422470.2779754047

3480010   pi(x) =  248847
        Li(x) =  248992.478544949
        diff  145.478544949117
        sqrt(x) =  1865.4784908971747
        log(x) =  15.062545725309747
        sqrt fois log =  28098.855068720513
        sqrt fois log fois log =  423240.2893014543

3490010   pi(x) =  249482
        Li(x) =  249656.313685534
        diff  174.313685534056
        sqrt(x) =  1868.156845663661
        log(x) =  15.065415159504017
        sqrt fois log =  28144.558462992525
        sqrt fois log fois log =  424009.45772591466

3500010   pi(x) =  250150
        Li(x) =  250320.022581801
        diff  170.022581800906
        sqrt(x) =  1870.8313659974808
        log(x) =  15.068276383598418
        sqrt fois log =  28190.20408995501
        sqrt fois log fois log =  424777.7865374886

3510010   pi(x) =  250801
        Li(x) =  250983.60564225
        diff  182.605642249866
        sqrt(x) =  1873.502068320182
        log(x) =  15.071129444440839
        sqrt fois log =  28235.792186081108
        sqrt fois log fois log =  425545.2790027595
```

3520010 pi(x) = 251466
Li(x) = 251647.063272891
diff 181.063272890518
sqrt(x) = 1876.1689689364334
log(x) = 15.073974388479336
sqrt fois log = 28281.32298620748
sqrt fois log fois log = 426311.93836640345

3530010 pi(x) = 252094
Li(x) = 252310.395877264
diff 216.395877264033
sqrt(x) = 1878.832084035186
log(x) = 15.076811261766657
sqrt fois log = 28326.79672355021
sqrt fois log fois log = 427077.7678513967

3540010 pi(x) = 252757
Li(x) = 252973.603856465
diff 216.603856465168
sqrt(x) = 1881.4914296908184
log(x) = 15.079640109964725
sqrt fois log = 28372.21362972054
sqrt fois log fois log = 427842.7706592217

3550010 pi(x) = 253414
Li(x) = 253636.687609164
diff 222.687609163928
sqrt(x) = 1884.1470218642705
log(x) = 15.08246097834904
sqrt fois log = 28417.573934740416
sqrt fois log fois log = 428606.94997007115

3560010 pi(x) = 254081
Li(x) = 254299.647531627
diff 218.647531627154
sqrt(x) = 1886.7988764041597
log(x) = 15.085273911813031
sqrt fois log = 28462.87786705781
sqrt fois log fois log = 429370.3089430477

3570010 pi(x) = 254751
Li(x) = 254962.48401774
diff 211.484017739684
sqrt(x) = 1889.4470090478853
log(x) = 15.088078954872348
sqrt fois log = 28508.1256535619
sqrt fois log fois log = 430132.8507163638

3580010 pi(x) = 255391
Li(x) = 255625.197459025
diff 234.197459025279
sqrt(x) = 1892.0914354227177
log(x) = 15.090876151669072
sqrt fois log = 28553.317519597993
sqrt fois log fois log = 430894.578407536

3590010 pi(x) = 256057
Li(x) = 256287.788244668
diff 230.788244667521
sqrt(x) = 1894.7321710468739
log(x) = 15.093665545975902
sqrt fois log = 28598.45368898232
sqrt fois log fois log = 431655.49511357985

3600010 pi(x) = 256728
Li(x) = 256950.25676153
diff 222.256761530123
sqrt(x) = 1897.369231330581
log(x) = 15.096447181200258
sqrt fois log = 28643.53438401665
sqrt fois log fois log = 432415.60391120083

3610010 pi(x) = 257419
Li(x) = 257612.603394177
diff 193.603394177364
sqrt(x) = 1900.002631577125
log(x) = 15.099221100388329
sqrt fois log = 28688.559825502678
sqrt fois log fois log = 433174.9078569829

3620010 pi(x) = 258088
Li(x) = 258274.828524894
diff 186.828524893906
sqrt(x) = 1902.6323869838861
log(x) = 15.101987346229077
sqrt fois log = 28733.53023275627
sqrt fois log fois log = 433933.40998757584

3630010 pi(x) = 258774
Li(x) = 258936.932533705
diff 162.932533704821
sqrt(x) = 1905.258512643363
log(x) = 15.104745961058176
sqrt fois log = 28778.445823621547
sqrt fois log fois log = 434691.1133198791

3640010 pi(x) = 259426
Li(x) = 259598.915798395
diff 172.915798395057
sqrt(x) = 1907.881023544183
log(x) = 15.107496986861896
sqrt fois log = 28823.30681448474
sqrt fois log fois log = 435448.02085122414

3650010 pi(x) = 260064
Li(x) = 260260.778694529
diff 196.778694528708
sqrt(x) = 1910.4999345721005
log(x) = 15.110240465280949
sqrt fois log = 28868.11342028796
sqrt fois log fois log = 436204.13555955514

3660010 pi(x) = 260714
Li(x) = 260922.521595468
diff 208.521595468279
sqrt(x) = 1913.1152605109814
log(x) = 15.112976437614254
sqrt fois log = 28912.865854542717
sqrt fois log fois log = 436959.46040360583

3670010 pi(x) = 261377
Li(x) = 261584.144872394
diff 207.144872393575
sqrt(x) = 1915.7270160437786
log(x) = 15.115704944822681
sqrt fois log = 28957.564329343346
sqrt fois log fois log = 437713.99832307606

```
3680010   pi(x) =  262078
        Li(x) =  262245.64889432
        diff  167.6488943203
        sqrt(x) =  1918.3352157534928
        log(x) =  15.118426027532726
        sqrt fois log =  29002.20905538021
        sqrt fois log fois log =  438467.7522388055

3690010   pi(x) =  262716
        Li(x) =  262907.034028119
        diff  191.034028118651
        sqrt(x) =  1920.9398741241225
        log(x) =  15.121139726040138
        sqrt fois log =  29046.80024195281
        sqrt fois log fois log =  439220.7250529449

3700010   pi(x) =  263399
        Li(x) =  263568.300638532
        diff  169.300638531568
        sqrt(x) =  1923.5410055416028
        log(x) =  15.123846080313504
        sqrt fois log =  29091.338096982665
        sqrt fois log fois log =  439972.9196491262

3710010   pi(x) =  264053
        Li(x) =  264229.449088193
        diff  176.449088192778
        sqrt(x) =  1926.1386242947312
        log(x) =  15.126545129997774
        sqrt fois log =  29135.82282702608
        sqrt fois log fois log =  440724.33889262937

3720010   pi(x) =  264723
        Li(x) =  264890.479737645
        diff  167.479737644724
        sqrt(x) =  1928.7327445760857
        log(x) =  15.12923691441776
        sqrt fois log =  29180.254637286795
        sqrt fois log fois log =  441474.9856305494

3730010   pi(x) =  265411
        Li(x) =  265551.392945356
        diff  140.392945356201
        sqrt(x) =  1931.3233804829267
        log(x) =  15.131921472581553
        sqrt fois log =  29224.63373162839
        sqrt fois log fois log =  442224.8626919588

3740010   pi(x) =  266068
        Li(x) =  266212.18906774
        diff  144.189067739761
        sqrt(x) =  1933.9105460180933
        log(x) =  15.134598843183932
        sqrt fois log =  29268.96031258664
        sqrt fois log fois log =  442973.9728880702

3750010   pi(x) =  266718
        Li(x) =  266872.868459169
        diff  154.868459169229
        sqrt(x) =  1936.4942550908845
        log(x) =  15.137269064609704
        sqrt fois log =  29313.234581381657
        sqrt fois log fois log =  443722.319012396
```

```
3760010   pi(x) =  267385
        Li(x) =  267533.431471997
        diff  148.431471996591
        sqrt(x) =  1939.0745215179327
        log(x) =  15.139932174937009
        sqrt fois log =  29357.456737929933
        sqrt fois log fois log =  444469.9038409067

3770010   pi(x) =  268017
        Li(x) =  268193.878456569
        diff  176.878456568811
        sqrt(x) =  1941.6513590240654
        log(x) =  15.14258821194057
        sqrt fois log =  29401.6269808562
        sqrt fois log fois log =  445216.7301321869

3780010   pi(x) =  268671
        Li(x) =  268854.209761245
        diff  183.209761244943
        sqrt(x) =  1944.2247812431565
        log(x) =  15.145237213094916
        sqrt fois log =  29445.745507505177
        sqrt fois log fois log =  445962.8006275898

3790010   pi(x) =  269331
        Li(x) =  269514.425732412
        diff  183.425732412201
        sqrt(x) =  1946.794801718969
        log(x) =  15.147879215577555
        sqrt fois log =  29489.8125139532
        sqrt fois log fois log =  446708.1180513905

3800010   pi(x) =  269987
        Li(x) =  270174.526714503
        diff  187.526714502601
        sqrt(x) =  1949.3614339059855
        log(x) =  15.1505142562721
        sqrt fois log =  29533.828195019654
        sqrt fois log fois log =  447452.6851109362

3810010   pi(x) =  270643
        Li(x) =  270834.513050009
        diff  191.513050009089
        sqrt(x) =  1951.9246911702305
        log(x) =  15.153142371771356
        sqrt fois log =  29577.792744278337
        sqrt fois log fois log =  448196.5044967954

3820010   pi(x) =  271326
        Li(x) =  271494.385079501
        diff  168.385079501488
        sqrt(x) =  1954.4845867900826
        log(x) =  15.155763598380378
        sqrt fois log =  29621.70635406865
        sqrt fois log fois log =  448939.5788829064

3830010   pi(x) =  272000
        Li(x) =  272154.143141642
        diff  154.143141642329
        sqrt(x) =  1957.0411339570765
        log(x) =  15.158377972119478
        sqrt fois log =  29665.56921550667
        sqrt fois log fois log =  449681.91092672205
```

```
3840010   pi(x) =  272646
       Li(x) =  272813.787573203
       diff  167.787573202571
       sqrt(x) =  1959.5943457766966
       log(x) =  15.160985528727185
       sqrt fois log =  29709.381518496113
       sqrt fois log fois log =  450423.50326935446

3850010   pi(x) =  273324
       Li(x) =  273473.318709077
       diff  149.318709077023
       sqrt(x) =  1962.1442352691608
       log(x) =  15.163586303663191
       sqrt fois log =  29753.14345173913
       sqrt fois log fois log =  451164.35853571765

3860010   pi(x) =  273973
       Li(x) =  274132.7368823
       diff  159.73688229965
       sqrt(x) =  1964.6908153701945
       log(x) =  15.166180332111233
       sqrt fois log =  29796.855202747025
       sqrt fois log fois log =  451904.47933466826

3870010   pi(x) =  274619
       Li(x) =  274792.042424059
       diff  173.042424058774
       sqrt(x) =  1967.2340989317972
       log(x) =  15.168767648981953
       sqrt fois log =  29840.51695785081
       sqrt fois log fois log =  452643.8682591447

3880010   pi(x) =  275271
       Li(x) =  275451.235663712
       diff  180.235663712083
       sqrt(x) =  1969.7740987229981
       log(x) =  15.171348288915723
       sqrt fois log =  29884.12890221167
       sqrt fois log fois log =  453382.52788630594

3890010   pi(x) =  275930
       Li(x) =  276110.316928801
       diff  180.316928801418
       sqrt(x) =  1972.3108274306055
       log(x) =  15.173922286285412
       sqrt fois log =  29927.691219831286
       sqrt fois log fois log =  454120.46077766625

3900010   pi(x) =  276611
       Li(x) =  276769.286545067
       diff  158.286545067327
       sqrt(x) =  1974.8442976599447
       log(x) =  15.176489675199152
       sqrt fois log =  29971.20409356207
       sqrt fois log fois log =  454857.66947923135

3910010   pi(x) =  277265
       Li(x) =  277428.144836464
       diff  163.144836464024
       sqrt(x) =  1977.3745219355892
       log(x) =  15.179050489503036
       sqrt fois log =  30014.667705117237
       sqrt fois log fois log =  455594.1565216307
```

```
3920010   pi(x) =  277921
       Li(x) =  278086.892125173
       diff  165.892125173064
       sqrt(x) =  1979.901512702084
       log(x) =  15.181604762783799
       sqrt fois log =  30058.082235080805
       sqrt fois log fois log =  456329.9244202498

3930010   pi(x) =  278596
       Li(x) =  278745.528731618
       diff  149.528731618251
       sqrt(x) =  1982.425282324658
       log(x) =  15.184152528371468
       sqrt fois log =  30101.447862917477
       sqrt fois log fois log =  457064.97567536036

3940010   pi(x) =  279244
       Li(x) =  279404.054974479
       diff  160.054974479135
       sqrt(x) =  1984.9458430899317
       log(x) =  15.186693819341961
       sqrt fois log =  30144.764766982385
       sqrt fois log fois log =  457799.3127722487

3950010   pi(x) =  279921
       Li(x) =  280062.471170705
       diff  141.471170705394
       sqrt(x) =  1987.463207206614
       log(x) =  15.18922866851967
       sqrt fois log =  30188.03312453075
       sqrt fois log fois log =  458532.9381813439

3960010   pi(x) =  280565
       Li(x) =  280720.77763553
       diff  155.777635530161
       sqrt(x) =  1989.9773868061918
       log(x) =  15.191757108480001
       sqrt fois log =  30231.25311172742
       sqrt fois log fois log =  459265.85435834323

3970010   pi(x) =  281203
       Li(x) =  281378.974682484
       diff  175.974682484055
       sqrt(x) =  1992.4883939436133
       log(x) =  15.194279171551889
       sqrt fois log =  30274.42490365632
       sqrt fois log fois log =  459998.063744337

3980010   pi(x) =  281871
       Li(x) =  282037.062623408
       diff  166.06262340839
       sqrt(x) =  1994.9962405979616
       log(x) =  15.196794889820278
       sqrt fois log =  30317.54867432977
       sqrt fois log fois log =  460729.56876593217

3990010   pi(x) =  282505
       Li(x) =  282695.041768469
       diff  190.041768468509
       sqrt(x) =  1997.500938673121
       log(x) =  15.19930429512857
       sqrt fois log =  30360.62459669772
       sqrt fois log fois log =  461460.3718353738
```

```
4000010   pi(x) =  283146
        Li(x) =  283352.912426167
        diff  206.912426167226
        sqrt(x) =  2000.0024999984375
        log(x) =  15.20180741908104
        sqrt fois log =  30403.652842656877
        sqrt fois log fois log =  462190.4753506657

4010010   pi(x) =  283806
        Li(x) =  284010.674903358
        diff  204.674903357693
        sqrt(x) =  2002.500936329369
        log(x) =  15.204304293045228
        sqrt fois log =  30446.633583059716
        sqrt fois log fois log =  462919.8816956898

4020010   pi(x) =  284464
        Li(x) =  284668.329505256
        diff  204.329505256377
        sqrt(x) =  2004.9962593481316
        log(x) =  15.206794948154299
        sqrt fois log =  30489.566987723432
        sqrt fois log fois log =  463648.5932403248

4030010   pi(x) =  285133
        Li(x) =  285325.876535456
        diff  192.876535455813
        sqrt(x) =  2007.488480664335
        log(x) =  15.209279415309366
        sqrt fois log =  30532.453225438745
        sqrt fois log fois log =  464376.6123405616

4040010   pi(x) =  285810
        Li(x) =  285983.316295937
        diff  173.316295937344
        sqrt(x) =  2009.9776118156142
        log(x) =  15.211757725181794
        sqrt fois log =  30575.29246397862
        sqrt fois log fois log =  465103.9413386195

4050010   pi(x) =  286490
        Li(x) =  286640.649087084
        diff  150.649087083642
        sqrt(x) =  2012.4636642682522
        log(x) =  15.214229908215476
        sqrt fois log =  30618.08487010695
        sqrt fois log fois log =  465830.58256306086

4060010   pi(x) =  287134
        Li(x) =  287297.875207691
        diff  163.875207691104
        sqrt(x) =  2014.9466494177955
        log(x) =  15.216695994629069
        sqrt fois log =  30660.830609587032
        sqrt fois log fois log =  466556.53832890326

4070010   pi(x) =  287786
        Li(x) =  287954.994954982
        diff  168.994954982132
        sqrt(x) =  2017.4265785896646
        log(x) =  15.219156014418216
        sqrt fois log =  30703.529847190057
        sqrt fois log fois log =  467281.81093773176
```

```
4080010   pi(x) =  288458
        Li(x) =  288612.008624617
        diff  154.008624617185
        sqrt(x) =  2019.9034630397562
        log(x) =  15.221609997357733
        sqrt fois log =  30746.18274670346
        sqrt fois log fois log =  468006.4026778092

4090010   pi(x) =  289111
        Li(x) =  289268.916510707
        diff  157.916510707
        sqrt(x) =  2022.3773139550394
        log(x) =  15.22405797300377
        sqrt fois log =  30788.789470939166
        sqrt fois log fois log =  468730.31582418596

4100010   pi(x) =  289774
        Li(x) =  289925.718905824
        diff  151.718905824469
        sqrt(x) =  2024.8481424541446
        log(x) =  15.226499970695953
        sqrt fois log =  30831.350181741785
        sqrt fois log fois log =  469453.552638808

4110010   pi(x) =  290437
        Li(x) =  290582.416101016
        diff  145.416101016221
        sqrt(x) =  2027.3159595879474
        log(x) =  15.228936019559482
        sqrt fois log =  30873.865039996686
        sqrt fois log fois log =  470176.1153706238

4120010   pi(x) =  291066
        Li(x) =  291239.008385815
        diff  173.008385814552
        sqrt(x) =  2029.7807763401445
        log(x) =  15.23136614850723
        sqrt fois log =  30916.334205638
        sqrt fois log fois log =  470898.00625569077

4130010   pi(x) =  291718
        Li(x) =  291895.496048249
        diff  177.496048248839
        sqrt(x) =  2032.2426036278248
        log(x) =  15.23379038624179
        sqrt fois log =  30958.75783765654
        sqrt fois log fois log =  471619.2275172799

4140010   pi(x) =  292350
        Li(x) =  292551.879374857
        diff  201.879374857002
        sqrt(x) =  2034.7014523020325
        log(x) =  15.236208761257517
        sqrt fois log =  31001.13609410762
        sqrt fois log fois log =  472339.78136597923

4150010   pi(x) =  293012
        Li(x) =  293208.158650697
        diff  196.158650696743
        sqrt(x) =  2037.1573331483262
        log(x) =  15.238621301842532
        sqrt fois log =  31043.469132118807
        sqrt fois log fois log =  473059.6699997967
```

```
4160010   pi(x) =  293673
        Li(x) =  293864.334159357
        diff  191.334159357008
        sqrt(x) =  2039.61025688733
        log(x) =  15.24102803608071
        sqrt fois log =  31085.757107897574
        sqrt fois log fois log =  473778.8956042622

4170010   pi(x) =  294344
        Li(x) =  294520.406182969
        diff  176.406182968814
        sqrt(x) =  2042.0602341752801
        log(x) =  15.243428991853644
        sqrt fois log =  31128.000176738908
        sqrt fois log fois log =  474497.46035252727

4180010   pi(x) =  294994
        Li(x) =  295176.375002216
        diff  182.375002216315
        sqrt(x) =  2044.507275604565
        log(x) =  15.245824196842575
        sqrt fois log =  31170.198493032767
        sqrt fois log fois log =  475215.36640546494

4190010   pi(x) =  295668
        Li(x) =  295832.240896348
        diff  164.240896347736
        sqrt(x) =  2046.9513917042584
        log(x) =  15.248213678530318
        sqrt fois log =  31212.352210271543
        sqrt fois log fois log =  475932.6159117686

4200010   pi(x) =  296314
        Li(x) =  296488.004143186
        diff  174.004143186205
        sqrt(x) =  2049.3925929406496
        log(x) =  15.250597464203143
        sqrt fois log =  31254.461481057373
        sqrt fois log fois log =  476649.2110080484

4210010   pi(x) =  296984
        Li(x) =  297143.66501914
        diff  159.665019140113
        sqrt(x) =  2051.8308897177662
        log(x) =  15.252975580952656
        sqrt fois log =  31296.526457109452
        sqrt fois log fois log =  477365.1538189292

4220010   pi(x) =  297628
        Li(x) =  297799.223799214
        diff  171.223799214116
        sqrt(x) =  2054.2662923778894
        log(x) =  15.255348055677633
        sqrt fois log =  31338.547289271133
        sqrt fois log fois log =  478080.44645714393

4230010   pi(x) =  298292
        Li(x) =  298454.680757019
        diff  162.680757019203
        sqrt(x) =  2056.698811202068
        log(x) =  15.25771491508586
        sqrt fois log =  31380.52412751715
        sqrt fois log fois log =  478795.09102363006
```

```
4240010   pi(x) =  298920
        Li(x) =  299110.036164783
        diff  190.036164783291
        sqrt(x) =  2059.128456410624
        log(x) =  15.260076185695926
        sqrt fois log =  31422.457120960575
        sqrt fois log fois log =  479509.08960762183

4250010   pi(x) =  299583
        Li(x) =  299765.290293361
        diff  182.290293361293
        sqrt(x) =  2061.555238163654
        log(x) =  15.262431893839008
        sqrt fois log =  31464.346417859822
        sqrt fois log fois log =  480222.4442867429

4260010   pi(x) =  300245
        Li(x) =  300420.443412245
        diff  175.443412245484
        sqrt(x) =  2063.979166561523
        log(x) =  15.264782065660638
        sqrt fois log =  31506.19216562553
        sqrt fois log fois log =  480935.15712709824

4270010   pi(x) =  300887
        Li(x) =  301075.495789575
        diff  188.495789575332
        sqrt(x) =  2066.4002516453584
        log(x) =  15.26712672712244
        sqrt fois log =  31547.994510827386
        sqrt fois log fois log =  481647.23018336477

4280010   pi(x) =  301544
        Li(x) =  301730.447692148
        diff  186.447692147573
        sqrt(x) =  2068.818503397531
        log(x) =  15.269465904003848
        sqrt fois log =  31589.753599200867
        sqrt fois log fois log =  482358.6654988805

4290010   pi(x) =  302175
        Li(x) =  302385.299385426
        diff  210.299385426217
        sqrt(x) =  2071.2339317421392
        log(x) =  15.271799621903813
        sqrt fois log =  31631.46957565395
        sqrt fois log fois log =  483069.465105734

4300010   pi(x) =  302826
        Li(x) =  303040.051133552
        diff  214.051133551868
        sqrt(x) =  2073.646546545481
        log(x) =  15.274127906242482
        sqrt fois log =  31673.142584273683
        sqrt fois log fois log =  483779.6310248518

4310010   pi(x) =  303486
        Li(x) =  303694.703199352
        diff  208.703199351963
        sqrt(x) =  2076.056357616527
        log(x) =  15.276450782262854
        sqrt fois log =  31714.772768332765
        sqrt fois log fois log =  484489.1652660857
```

4320010 pi(x) = 304152
Li(x) = 304349.25584435
diff 197.255844349798
sqrt(x) = 2078.463374707382
log(x) = 15.278768275032428
sqrt fois log = 31756.36027029599
sqrt fois log fois log = 485198.0698282986

4330010 pi(x) = 304793
Li(x) = 305003.709328775
diff 210.709328774537
sqrt(x) = 2080.8676075137505
log(x) = 15.281080409444828
sqrt fois log = 31797.905231826702
sqrt fois log fois log = 485906.34669945017

4340010 pi(x) = 305451
Li(x) = 305658.06391157
diff 207.063911570061
sqrt(x) = 2083.269065675387
log(x) = 15.283387210221399
sqrt fois log = 31839.407793793092
sqrt fois log fois log = 486613.9978566809

4350010 pi(x) = 306084
Li(x) = 306312.319850405
diff 228.319850404863
sqrt(x) = 2085.6677587765507
log(x) = 15.285688701912798
sqrt fois log = 31880.86809627451
sqrt fois log fois log = 487321.0252663955

4360010 pi(x) = 306727
Li(x) = 306966.477401681
diff 239.477401680662
sqrt(x) = 2088.06369634645
log(x) = 15.287984908900569
sqrt fois log = 31922.286278567666
sqrt fois log fois log = 488027.4308843462

4370010 pi(x) = 307377
Li(x) = 307620.536820542
diff 243.536820542067
sqrt(x) = 2090.456887859685
log(x) = 15.290275855398674
sqrt fois log = 31963.662479192797
sqrt fois log fois log = 488733.21665571415

4380010 pi(x) = 308039
Li(x) = 308274.498360885
diff 235.498360885191
sqrt(x) = 2092.8473427366844
log(x) = 15.292561565455046
sqrt fois log = 32004.996835899743
sqrt fois log fois log = 489438.38451519073

4390010 pi(x) = 308700
Li(x) = 308928.362275367
diff 228.362275366904
sqrt(x) = 2095.2350703441366
log(x) = 15.29484206295308
sqrt fois log = 32046.28948567397
sqrt fois log fois log = 490142.9363870575

4400010 pi(x) = 309335
Li(x) = 309582.128815414
diff 247.128815413569
sqrt(x) = 2097.6200799954217
log(x) = 15.29711737161318
sqrt fois log = 32087.540564742594
sqrt fois log fois log = 490846.8741852665

4410010 pi(x) = 309976
Li(x) = 310235.79823123
diff 259.798231229826
sqrt(x) = 2100.0023809510312
log(x) = 15.299387514994153
sqrt fois log = 32128.750208580204
sqrt fois log fois log = 491550.19981351774

4420010 pi(x) = 310656
Li(x) = 310889.370771807
diff 233.370771807269
sqrt(x) = 2102.3819824189895
log(x) = 15.30165251649476
sqrt fois log = 32169.918551914776
sqrt fois log fois log = 492252.9151653382

4430010 pi(x) = 311338
Li(x) = 311542.846684933
diff 204.846684933349
sqrt(x) = 2104.758893555269
log(x) = 15.303912399355113
sqrt fois log = 32211.04572873343
sqrt fois log fois log = 492955.02212415804

4440010 pi(x) = 311995
Li(x) = 312196.226217199
diff 201.226217199408
sqrt(x) = 2107.133123464201
log(x) = 15.306167186658124
sqrt fois log = 32252.1318722882
sqrt fois log fois log = 493656.5225633883

4450010 pi(x) = 312667
Li(x) = 312849.50961401
diff 182.509614009585
sqrt(x) = 2109.5046811988827
log(x) = 15.30841690133091
sqrt fois log = 32293.177115101647
sqrt fois log fois log = 494357.4183464946

4460010 pi(x) = 313322
Li(x) = 313502.697119589
diff 180.697119589022
sqrt(x) = 2111.8735757615796
log(x) = 15.3106615661462
sqrt fois log = 32334.181588972562
sqrt fois log fois log = 495057.71132707427

4470010 pi(x) = 313981
Li(x) = 314155.788976992
diff 174.788976992131
sqrt(x) = 2114.239816104124
log(x) = 15.312901203723715
sqrt fois log = 32375.14542498145
sqrt fois log fois log = 495757.4033489288

```
4480010   pi(x) =  314628
        Li(x) =  314808.785428111
        diff  180.785428110976
        sqrt(x) =  2116.6034111283107
        log(x) =  15.315135836531534
        sqrt fois log =  32416.068753496078
        sqrt fois log fois log =  496456.4962461379

4490010   pi(x) =  315310
        Li(x) =  315461.686713683
        diff  151.686713683186
        sqrt(x) =  2118.9643696862863
        log(x) =  15.317365486887448
        sqrt fois log =  32456.95170417694
        sqrt fois log fois log =  497154.9918431326

4500010   pi(x) =  315949
        Li(x) =  316114.4930733
        diff  165.4930733004
        sqrt(x) =  2121.322700580937
        log(x) =  15.3195901769603
        sqrt fois log =  32497.794405982622
        sqrt fois log fois log =  497852.89195476676

4510010   pi(x) =  316601
        Li(x) =  316767.204745416
        diff  166.204745415773
        sqrt(x) =  2123.6784125662716
        log(x) =  15.321809928771303
        sqrt fois log =  32538.59698717518
        sqrt fois log fois log =  498550.1983863887

4520010   pi(x) =  317240
        Li(x) =  317419.821967352
        diff  179.821967352415
        sqrt(x) =  2126.0315143478
        log(x) =  15.324024764195347
        sqrt fois log =  32579.359575325423
        sqrt fois log fois log =  499246.91293391155

4530010   pi(x) =  317885
        Li(x) =  318072.344975311
        diff  187.344975310843
        sqrt(x) =  2128.3820145829086
        log(x) =  15.3262347049623
        sqrt fois log =  32620.08229731815
        sqrt fois log fois log =  499943.0373838838

4540010   pi(x) =  318518
        Li(x) =  318724.774004377
        diff  206.774004377075
        sqrt(x) =  2130.729921881232
        log(x) =  15.328439772658276
        sqrt fois log =  32660.765279357336
        sqrt fois log fois log =  500638.5735135575

4550010   pi(x) =  319166
        Li(x) =  319377.10928853
        diff  211.109288530133
        sqrt(x) =  2133.075244805021
        log(x) =  15.330639988726915
        sqrt fois log =  32701.40864697131
        sqrt fois log fois log =  501333.5230909585
```

```
4560010   pi(x) =  319824
        Li(x) =  320029.35106065
        diff  205.351060649671
        sqrt(x) =  2135.4179918695077
        log(x) =  15.332835374470621
        sqrt fois log =  32742.012525017803
        sqrt fois log fois log =  502027.8878749531

4570010   pi(x) =  320497
        Li(x) =  320681.499552524
        diff  184.499552523834
        sqrt(x) =  2137.7581715432643
        log(x) =  15.3350259510518
        sqrt fois log =  32782.57703768901
        sqrt fois log fois log =  502721.6696153158

4580010   pi(x) =  321146
        Li(x) =  321333.554994856
        diff  187.554994856357
        sqrt(x) =  2140.095792248562
        log(x) =  15.337211739494098
        sqrt fois log =  32823.102308516565
        sqrt fois log fois log =  503414.87005279603

4590010   pi(x) =  321787
        Li(x) =  321985.517617274
        diff  198.517617274425
        sqrt(x) =  2142.430862361724
        log(x) =  15.339392760683593
        sqrt fois log =  32863.58846037654
        sqrt fois log fois log =  504107.49091918464

4600010   pi(x) =  322443
        Li(x) =  322637.387648336
        diff  194.3876483356
        sqrt(x) =  2144.7633902134753
        log(x) =  15.341569035370004
        sqrt fois log =  32904.03561549424
        sqrt fois log fois log =  504799.53393737826

4610010   pi(x) =  323104
        Li(x) =  323289.165315536
        diff  185.165315535618
        sqrt(x) =  2147.0933840892903
        log(x) =  15.343740584167875
        sqrt fois log =  32944.443895449185
        sqrt fois log fois log =  505491.0008214453

4620010   pi(x) =  323760
        Li(x) =  323940.850845315
        diff  180.850845315086
        sqrt(x) =  2149.420852229735
        log(x) =  15.345907427557744
        sqrt fois log =  32984.81342117979
        sqrt fois log fois log =  506181.8932766892

4630010   pi(x) =  324405
        Li(x) =  324592.444463067
        diff  187.444463067106
        sqrt(x) =  2151.7458028308083
        log(x) =  15.348069585887298
        sqrt fois log =  33025.14431298817
        sqrt fois log fois log =  506872.2129997127
```

```
4640010   pi(x) =  325056
       Li(x) =  325243.946393144
       diff  187.946393144201
       sqrt(x) =  2154.0682440442783
       log(x) =  15.35022707937253
       sqrt fois log =  33065.43669054492
       sqrt fois log fois log =  507561.9616784806

4650010   pi(x) =  325707
       Li(x) =  325895.356858865
       diff  188.356858865358
       sqrt(x) =  2156.3881839780147
       log(x) =  15.35237992809886
       sqrt fois log =  33105.69067289362
       sqrt fois log fois log =  508251.1409923818

4660010   pi(x) =  326324
       Li(x) =  326546.676082523
       diff  222.676082522958
       sqrt(x) =  2158.705630696321
       log(x) =  15.354528152022272
       sqrt fois log =  33145.90637845566
       sqrt fois log fois log =  508939.75261229195

4670010   pi(x) =  326988
       Li(x) =  327197.90428539
       diff  209.904285389872
       sqrt(x) =  2161.0205922202595
       log(x) =  15.35667177097041
       sqrt fois log =  33186.08392503462
       sqrt fois log fois log =  509627.79820063396

4680010   pi(x) =  327655
       Li(x) =  327849.041687726
       diff  194.041687726101
       sqrt(x) =  2163.3330765279766
       log(x) =  15.358810804643683
       sqrt fois log =  33226.223429820944
       sqrt fois log fois log =  510315.2794114391

4690010   pi(x) =  328321
       Li(x) =  328500.088508786
       diff  179.08850878576
       sqrt(x) =  2165.6430915550236
       log(x) =  15.360945272616352
       sqrt fois log =  33266.3250093964
       sqrt fois log fois log =  511002.19789040677

4700010   pi(x) =  328964
       Li(x) =  329151.044966824
       diff  187.044966823712
       sqrt(x) =  2167.950645194673
       log(x) =  15.363075194337599
       sqrt fois log =  33306.388779738474
       sqrt fois log fois log =  511688.5552749643

4710010   pi(x) =  329616
       Li(x) =  329801.911279102
       diff  185.911279102322
       sqrt(x) =  2170.2557452982355
       log(x) =  15.365200589132597
       sqrt fois log =  33346.41485622485
       sqrt fois log fois log =  512374.35319432605
```

4720010 pi(x) = 330270
Li(x) = 330452.687661898
diff 182.687661897973
sqrt(x) = 2172.558399675369
log(x) = 15.367321476203562
sqrt fois log = 33386.40335363774
sqrt fois log fois log = 513059.5932695519

4730010 pi(x) = 330914
Li(x) = 331103.374330508
diff 189.374330507766
sqrt(x) = 2174.8586160943887
log(x) = 15.369437874630785
sqrt fois log = 33426.35438616819
sqrt fois log fois log = 513744.2771136043

4740010 pi(x) = 331575
Li(x) = 331753.971499256
diff 178.9714992558
sqrt(x) = 2177.1564022825737
log(x) = 15.371549803373675
sqrt fois log = 33466.26806742043
sqrt fois log fois log = 514428.40633140726

4750010 pi(x) = 332221
Li(x) = 332404.4793815
diff 183.479381499928
sqrt(x) = 2179.451765926468
log(x) = 15.373657281271766
sqrt fois log = 33506.14451041605
sqrt fois log fois log = 515111.9825199018

4760010 pi(x) = 332863
Li(x) = 333054.898189638
diff 191.898189637868
sqrt(x) = 2181.744714672182
log(x) = 15.375760327045732
sqrt fois log = 33545.98382759825
sqrt fois log fois log = 515795.0072681029

4770010 pi(x) = 333516
Li(x) = 333705.228135114
diff 189.228135113779
sqrt(x) = 2184.035256125688
log(x) = 15.377858959298385
sqrt fois log = 33585.78613083596
sqrt fois log fois log = 516477.4821571552

4780010 pi(x) = 334145
Li(x) = 334355.469428424
diff 210.469428424316
sqrt(x) = 2186.323397853117
log(x) = 15.37995319651566
sqrt fois log = 33625.55153142803
sqrt fois log fois log = 517159.4087603885

4790010 pi(x) = 334801
Li(x) = 335005.622279125
diff 204.622279124975
sqrt(x) = 2188.6091473810484
log(x) = 15.382043057067591
sqrt fois log = 33665.28014010727
sqrt fois log fois log = 517840.78864337254

```
4800010   pi(x) =  335440
        Li(x) =  335655.686895836
        diff  215.686895836261
        sqrt(x) =  2190.8925121967986
        log(x) =  15.384128559209282
        sqrt fois log =  33704.97206704454
        sqrt fois log fois log =  518521.623363971

4810010   pi(x) =  336096
        Li(x) =  336305.66348625
        diff  209.663486249861
        sqrt(x) =  2193.1734997487088
        log(x) =  15.386209721081862
        sqrt fois log =  33744.62742185271
        sqrt fois log fois log =  519201.9144723957

4820010   pi(x) =  336752
        Li(x) =  336955.552257135
        diff  203.552257134579
        sqrt(x) =  2195.452117446427
        log(x) =  15.388286560713427
        sqrt fois log =  33784.24631359069
        sqrt fois log fois log =  519881.6635112598

4830010   pi(x) =  337382
        Li(x) =  337605.353414342
        diff  223.353414342448
        sqrt(x) =  2197.7283726611895
        log(x) =  15.390359096019987
        sqrt fois log =  33823.82885076734
        sqrt fois log fois log =  520560.87201563036

4840010   pi(x) =  338060
        Li(x) =  338255.067162815
        diff  195.067162814608
        sqrt(x) =  2200.002272726099
        log(x) =  15.392427344806382
        sqrt fois log =  33863.375141345394
        sqrt fois log fois log =  521239.5415130815

4850010   pi(x) =  338695
        Li(x) =  338904.693706587
        diff  209.693706587306
        sqrt(x) =  2202.2738249363997
        log(x) =  15.39449132476721
        sqrt fois log =  33902.88529274531
        sqrt fois log fois log =  521917.6735237455

4860010   pi(x) =  339339
        Li(x) =  339554.233248798
        diff  215.233248797769
        sqrt(x) =  2204.543036549752
        log(x) =  15.396551053487729
        sqrt fois log =  33942.35941184912
        sqrt fois log fois log =  522595.26956036466

4870010   pi(x) =  340010
        Li(x) =  340203.68599169
        diff  193.68599168997
        sqrt(x) =  2206.8099147865
        log(x) =  15.398606548444755
        sqrt fois log =  33981.79760500421
        sqrt fois log fois log =  523272.33112834214
```

```
4880010   pi(x) =  340644
        Li(x) =  340853.05213662
        diff  209.052136620274
        sqrt(x) =  2209.0744668299435
        log(x) =  15.400657827007558
        sqrt fois log =  34021.199978027114
        sqrt fois log fois log =  523948.8597257927

4890010   pi(x) =  341314
        Li(x) =  341502.331884063
        diff  188.331884063431
        sqrt(x) =  2211.3366998266006
        log(x) =  15.40270490643874
        sqrt fois log =  34060.56663620723
        sqrt fois log fois log =  524624.8568435927

4900010   pi(x) =  341994
        Li(x) =  342151.525433618
        diff  157.525433617935
        sqrt(x) =  2213.59662088647
        log(x) =  15.404747803895098
        sqrt fois log =  34099.89768431046
        sqrt fois log fois log =  525300.3239654291

4910010   pi(x) =  342643
        Li(x) =  342800.632984012
        diff  157.6329840119
        sqrt(x) =  2215.854237083297
        log(x) =  15.406786536428507
        sqrt fois log =  34139.193226583004
        sqrt fois log fois log =  525975.2625678503

4920010   pi(x) =  343277
        Li(x) =  343449.654733108
        diff  172.654733108357
        sqrt(x) =  2218.1095554548247
        log(x) =  15.408821120986751
        sqrt fois log =  34178.45336675484
        sqrt fois log fois log =  526649.6741203127

4930010   pi(x) =  343931
        Li(x) =  344098.590877911
        diff  167.590877911134
        sqrt(x) =  2220.3625830030555
        log(x) =  15.410851574414382
        sqrt fois log =  34217.67820804342
        sqrt fois log fois log =  527323.5600852306

4940010   pi(x) =  344585
        Li(x) =  344747.44161457
        diff  162.44161456998
        sqrt(x) =  2222.6133266945017
        log(x) =  15.412877913453555
        sqrt fois log =  34256.867853157215
        sqrt fois log fois log =  527996.9219180238

4950010   pi(x) =  345235
        Li(x) =  345396.207138386
        diff  161.207138386148
        sqrt(x) =  2224.8617934604385
        log(x) =  15.414900154744853
        sqrt fois log =  34296.02240429923
        sqrt fois log fois log =  528669.7610671651
```

```
4960010   pi(x) =  345876
        Li(x) =  346044.887643818
        diff  168.88764381787
        sqrt(x) =  2227.1079901971525
        log(x) =  15.41691831482811
        sqrt fois log =  34335.1419631705
        sqrt fois log fois log =  529342.0789742265

4970010   pi(x) =  346558
        Li(x) =  346693.483324486
        diff  135.48332448554
        sqrt(x) =  2229.351923766187
        log(x) =  15.418932410143222
        sqrt fois log =  34374.22663097361
        sqrt fois log fois log =  530013.8770739272

4980010   pi(x) =  347219
        Li(x) =  347341.994373177
        diff  122.994373177004
        sqrt(x) =  2231.59360099459
        log(x) =  15.420942457030948
        sqrt fois log =  34413.27650841606
        sqrt fois log fois log =  530685.1567941789

4990010   pi(x) =  347872
        Li(x) =  347990.420981853
        diff  118.420981852978
        sqrt(x) =  2233.8330286751516
        log(x) =  15.42294847173371
        sqrt fois log =  34452.29169571371
        sqrt fois log fois log =  531355.9195561318

5000010   pi(x) =  348513
        Li(x) =  348638.763341652
        diff  125.763341652113
        sqrt(x) =  2236.0702135666493
        log(x) =  15.424950470396375
        sqrt fois log =  34491.27229259421
        sqrt fois log fois log =  532026.1667742205

5010010   pi(x) =  349152
        Li(x) =  349287.021642896
        diff  135.021642896289
        sqrt(x) =  2238.3051623940823
        log(x) =  15.426948469067039
        sqrt fois log =  34530.21839830024
        sqrt fois log fois log =  532695.8998562084

5020010   pi(x) =  349792
        Li(x) =  349935.196075095
        diff  143.196075095446
        sqrt(x) =  2240.53788184891
        log(x) =  15.428942483697801
        sqrt fois log =  34569.13011159293
        sqrt fois log fois log =  533365.1202032331

5030010   pi(x) =  350449
        Li(x) =  350583.286826953
        diff  134.286826953001
        sqrt(x) =  2242.7683785892827
        log(x) =  15.430932530145517
        sqrt fois log =  34608.00753075508
        sqrt fois log fois log =  534033.8292098496
```

5040010 pi(x) = 351087
Li(x) = 351231.294086371
diff 144.294086370792
sqrt(x) = 2244.996659240276
log(x) = 15.432918624172567
sqrt fois log = 34646.85075359445
sqrt fois log fois log = 534702.0282640752

5050010 pi(x) = 351715
Li(x) = 351879.218040454
diff 164.21804045391
sqrt(x) = 2247.222730394119
log(x) = 15.434900781447602
sqrt fois log = 34685.659877447004
sqrt fois log fois log = 535369.7187474325

5060010 pi(x) = 352383
Li(x) = 352527.058875516
diff 144.058875515882
sqrt(x) = 2249.446598610423
log(x) = 15.43687901754628
sqrt fois log = 34724.434999180085
sqrt fois log fois log = 536036.9020349927

5070010 pi(x) = 353023
Li(x) = 353174.816777083
diff 151.816777083382
sqrt(x) = 2251.668270416404
log(x) = 15.438853347952008
sqrt fois log = 34763.176215195606
sqrt fois log fois log = 536703.5794954184

5080010 pi(x) = 353671
Li(x) = 353822.491929901
diff 151.49192990124
sqrt(x) = 2253.887752307111
log(x) = 15.440823788056663
sqrt fois log = 34801.883621433204
sqrt fois log fois log = 537369.7524910053

5090010 pi(x) = 354327
Li(x) = 354470.084517937
diff 143.08451793727
sqrt(x) = 2256.105050745643
log(x) = 15.442790353161318
sqrt fois log = 34840.55731337334
sqrt fois log fois log = 538035.4223777258

5100010 pi(x) = 354971
Li(x) = 355117.594724387
diff 146.594724386989
sqrt(x) = 2258.3201721633714
log(x) = 15.444753058476946
sqrt fois log = 34879.19738604041
sqrt fois log fois log = 538700.5905052688

5110010 pi(x) = 355603
Li(x) = 355765.022731678
diff 162.022731678386
sqrt(x) = 2260.533122960157
log(x) = 15.446711919125136
sqrt fois log = 34917.803934005824
sqrt fois log fois log = 539365.2582170824

```
5120010   pi(x) =  356244
        Li(x) =  356412.368721477
        diff  168.368721476756
        sqrt(x) =  2262.7439095045643
        log(x) =  15.448666950138783
        sqrt fois log =  34956.377051390984
        sqrt fois log fois log =  540029.4268504137

5130010   pi(x) =  356900
        Li(x) =  357059.632874689
        diff  159.632874689298
        sqrt(x) =  2264.9525381340777
        log(x) =  15.45061816646279
        sqrt fois log =  34994.91683187039
        sqrt fois log fois log =  540693.0977363511

5140010   pi(x) =  357560
        Li(x) =  357706.81537147
        diff  146.815371469536
        sqrt(x) =  2267.159015155311
        log(x) =  15.452565582954747
        sqrt fois log =  35033.423368674536
        sqrt fois log fois log =  541356.2721998628

5150010   pi(x) =  358198
        Li(x) =  358353.916391223
        diff  155.916391222505
        sqrt(x) =  2269.36334684422
        log(x) =  15.454509214385606
        sqrt fois log =  35071.896754592955
        sqrt fois log fois log =  542018.9515598374

5160010   pi(x) =  358843
        Li(x) =  359000.936112609
        diff  157.936112608586
        sqrt(x) =  2271.565539446309
        log(x) =  15.456449075440364
        sqrt fois log =  35110.33708197709
        sqrt fois log fois log =  542681.1371291244

5170010   pi(x) =  359488
        Li(x) =  359647.874713549
        diff  159.874713548576
        sqrt(x) =  2273.765599176837
        log(x) =  15.458385180718718
        sqrt fois log =  35148.744442743235
        sqrt fois log fois log =  543342.8302145713

5180010   pi(x) =  360119
        Li(x) =  360294.732371228
        diff  175.732371228107
        sqrt(x) =  2275.963532221024
        log(x) =  15.460317544735734
        sqrt fois log =  35187.11892837541
        sqrt fois log fois log =  544004.0321170652

5190010   pi(x) =  360761
        Li(x) =  360941.509262102
        diff  180.509262101725
        sqrt(x) =  2278.159344734253
        log(x) =  15.462246181922488
        sqrt fois log =  35225.46062992824
        sqrt fois log fois log =  544664.7441315688
```

```
5200010   pi(x) =  361408
        Li(x) =  361588.205561898
        diff  180.205561897892
        sqrt(x) =  2280.35304284227
        log(x) =  15.46417110662673
        sqrt fois log =  35263.76963802978
        sqrt fois log fois log =  545324.9675471609

5210010   pi(x) =  362067
        Li(x) =  362234.821445623
        diff  167.821445622831
        sqrt(x) =  2282.544632641386
        log(x) =  15.466092333113505
        sqrt fois log =  35302.04604288432
        sqrt fois log fois log =  545984.7036470731

5220010   pi(x) =  362716
        Li(x) =  362881.357087565
        diff  165.357087565237
        sqrt(x) =  2284.734120198672
        log(x) =  15.468009875565798
        sqrt fois log =  35340.28993427519
        sqrt fois log fois log =  546643.9537087273

5230010   pi(x) =  363367
        Li(x) =  363527.812661301
        diff  160.81266130053
        sqrt(x) =  2286.9215115521565
        log(x) =  15.469923748085167
        sqrt fois log =  35378.50140156753
        sqrt fois log fois log =  547302.7190037739

5240010   pi(x) =  364012
        Li(x) =  364174.188339695
        diff  162.188339694985
        sqrt(x) =  2289.106812711019
        log(x) =  15.471833964692351
        sqrt fois log =  35416.68053371099
        sqrt fois log fois log =  547961.0007981282

5250010   pi(x) =  364685
        Li(x) =  364820.48429491
        diff  135.484294910042
        sqrt(x) =  2291.290029655783
        log(x) =  15.473740539327897
        sqrt fois log =  35454.827419242516
        sqrt fois log fois log =  548618.8003520072

5260010   pi(x) =  365318
        Li(x) =  365466.700698407
        diff  148.700698406727
        sqrt(x) =  2293.4711683385076
        log(x) =  15.47564348585277
        sqrt fois log =  35492.942146288966
        sqrt fois log fois log =  549276.118919966

5270010   pi(x) =  365966
        Li(x) =  366112.837720949
        diff  146.837720949494
        sqrt(x) =  2295.650234682975
        log(x) =  15.477542818048951
        sqrt fois log =  35531.024802569875
        sqrt fois log fois log =  549932.9577509344
```

5280010   pi(x) = 366618
Li(x) = 366758.895532611
diff 140.89553261071
sqrt(x) = 2297.8272345848804
log(x) = 15.479438549620046
sqrt fois log = 35569.07547540002
sqrt fois log fois log = 550589.3180882521

5290010   pi(x) = 367247
Li(x) = 367404.874302775
diff 157.874302774551
sqrt(x) = 2300.002173912016
log(x) = 15.481330694191863
sqrt fois log = 35607.094251692106
sqrt fois log fois log = 551245.2011697036

5300010   pi(x) = 367901
Li(x) = 368050.774200141
diff 149.774200141022
sqrt(x) = 2302.175058504457
log(x) = 15.483219265313023
sqrt fois log = 35645.08121795934
sqrt fois log fois log = 551900.6082275555

5310010   pi(x) = 368554
Li(x) = 368696.59539273
diff 142.595392730378
sqrt(x) = 2304.345894174744
log(x) = 15.48510427645552
sqrt fois log = 35683.03646031805
sqrt fois log fois log = 552555.5404885892

5320010   pi(x) = 369191
Li(x) = 369342.338047887
diff 151.338047886733
sqrt(x) = 2306.5146867080643
log(x) = 15.486985741015308
sqrt fois log = 35720.96006449019
sqrt fois log fois log = 553209.9991741367

5330010   pi(x) = 369834
Li(x) = 369988.002332282
diff 154.002332282311
sqrt(x) = 2308.6814418624326
log(x) = 15.488863672312876
sqrt fois log = 35758.852115805945
sqrt fois log fois log = 553863.9855001151

5340010   pi(x) = 370483
Li(x) = 370633.588411921
diff 150.58841192117
sqrt(x) = 2310.846165368868
log(x) = 15.4907380835938
sqrt fois log = 35796.71269920622
sqrt fois log fois log = 554517.5006770596

5350010   pi(x) = 371131
Li(x) = 371279.096452144
diff 148.096452143509
sqrt(x) = 2313.008862931571
log(x) = 15.492608988029321
sqrt fois log = 35834.54189924514
sqrt fois log fois log = 555170.5459101584

```
5360010   pi(x) =  371773
        Li(x) =  371924.526617629
        diff  151.526617629163
        sqrt(x) =  2315.1695402281016
        log(x) =  15.494476398716886
        sqrt fois log =  35872.339800092544
        sqrt fois log fois log =  555823.1223992864

5370010   pi(x) =  372415
        Li(x) =  372569.879072402
        diff  154.879072401673
        sqrt(x) =  2317.328202909549
        log(x) =  15.496340328680706
        sqrt fois log =  35910.10648553643
        sqrt fois log fois log =  556475.2313390367

5380010   pi(x) =  373070
        Li(x) =  373215.153979832
        diff  145.153979832132
        sqrt(x) =  2319.4848566007063
        log(x) =  15.4982007908723
        sqrt fois log =  35947.842038985385
        sqrt fois log fois log =  557126.8739187558

5390010   pi(x) =  373722
        Li(x) =  373860.351502643
        diff  138.351502643025
        sqrt(x) =  2321.6395069002424
        log(x) =  15.500057798171028
        sqrt fois log =  35985.54654347104
        sqrt fois log fois log =  557778.0513225747

5400010   pi(x) =  374363
        Li(x) =  374505.471802912
        diff  142.471802911721
        sqrt(x) =  2323.7921593808687
        log(x) =  15.50191136338464
        sqrt fois log =  36023.22008165042
        sqrt fois log fois log =  558428.7647294424

5410010   pi(x) =  374993
        Li(x) =  375150.515042075
        diff  157.515042074665
        sqrt(x) =  2325.9428195895102
        log(x) =  15.50376149924979
        sqrt fois log =  36060.862735808354
        sqrt fois log fois log =  559079.015313157

5420010   pi(x) =  375633
        Li(x) =  375795.481380931
        diff  162.481380930752
        sqrt(x) =  2328.0914930474705
        log(x) =  15.505608218432577
        sqrt fois log =  36098.474587859826
        sqrt fois log fois log =  559728.8042423989

5430010   pi(x) =  376289
        Li(x) =  376440.370979645
        diff  151.370979645173
        sqrt(x) =  2330.238185250598
        log(x) =  15.507451533529048
        sqrt fois log =  36136.05571935233
        sqrt fois log fois log =  560378.1326807614
```

```
5440010   pi(x) =  376941
       Li(x) =  377085.183997753
       diff  144.183997753076
       sqrt(x) =  2332.3829016694494
       log(x) =  15.50929145706573
       sqrt fois log =  36173.60621146817
       sqrt fois log fois log =  561027.0017867831

5450010   pi(x) =  377574
       Li(x) =  377729.920594163
       diff  155.920594163181
       sqrt(x) =  2334.525647749452
       log(x) =  15.51112800150013
       sqrt fois log =  36211.126145026756
       sqrt fois log fois log =  561675.4127139779

5460010   pi(x) =  378233
       Li(x) =  378374.580927161
       diff  141.580927161383
       sqrt(x) =  2336.666428911067
       log(x) =  15.512961179221243
       sqrt fois log =  36248.61560048692
       sqrt fois log fois log =  562323.3666108671

5470010   pi(x) =  378874
       Li(x) =  379019.165154414
       diff  145.165154414251
       sqrt(x) =  2338.805250549947
       log(x) =  15.514791002550059
       sqrt fois log =  36286.07465794915
       sqrt fois log fois log =  562970.8646210092

5480010   pi(x) =  379498
       Li(x) =  379663.673432973
       diff  165.673432972806
       sqrt(x) =  2340.942118037095
       log(x) =  15.51661748374005
       sqrt fois log =  36323.50339715785
       sqrt fois log fois log =  563617.9078830307

5490010   pi(x) =  380148
       Li(x) =  380308.105919276
       diff  160.105919275782
       sqrt(x) =  2343.0770367190235
       log(x) =  15.51844063497768
       sqrt fois log =  36360.90189750358
       sqrt fois log fois log =  564264.4975306566

5500010   pi(x) =  380802
       Li(x) =  380952.462769153
       diff  150.462769153412
       sqrt(x) =  2345.210011917909
       log(x) =  15.520260468382865
       sqrt fois log =  36398.27023802523
       sqrt fois log fois log =  564910.6346927396

5510010   pi(x) =  381439
       Li(x) =  381596.744137831
       diff  157.744137830625
       sqrt(x) =  2347.3410489317484
       log(x) =  15.522076996009483
       sqrt fois log =  36435.608497412264
       sqrt fois log fois log =  565556.3204932906
```

```
5520010   pi(x) =  382063
        Li(x) =  382240.950179931
        diff  177.95017993066
        sqrt(x) =  2349.470153034509
        log(x) =  15.52389022984584
        sqrt fois log =  36472.91675400683
        sqrt fois log fois log =  566201.5560515072

5530010   pi(x) =  382695
        Li(x) =  382885.081049478
        diff  190.081049478438
        sqrt(x) =  2351.597329476286
        log(x) =  15.525700181815147
        sqrt fois log =  36510.195085805986
        sqrt fois log fois log =  566846.3424818045

5540010   pi(x) =  383361
        Li(x) =  383529.136899904
        diff  168.136899903999
        sqrt(x) =  2353.7225834834485
        log(x) =  15.527506863775988
        sqrt fois log =  36547.443570463794
        sqrt fois log fois log =  567490.6808938422

5550010   pi(x) =  383979
        Li(x) =  384173.117884046
        diff  194.117884045816
        sqrt(x) =  2355.8459202587933
        log(x) =  15.529310287522796
        sqrt fois log =  36584.66228529349
        sqrt fois log fois log =  568134.5723925553

5560010   pi(x) =  384615
        Li(x) =  384817.024154154
        diff  202.024154154176
        sqrt(x) =  2357.96734498169
        log(x) =  15.531110464786298
        sqrt fois log =  36621.85130726949
        sqrt fois log fois log =  568778.018078181

5570010   pi(x) =  385269
        Li(x) =  385460.855861894
        diff  191.855861894495
        sqrt(x) =  2360.0868628082317
        log(x) =  15.532907407233992
        sqrt fois log =  36659.01071302962
        sqrt fois log fois log =  569421.019046288

5580010   pi(x) =  385904
        Li(x) =  386104.613158351
        diff  200.613158350694
        sqrt(x) =  2362.2044788713783
        log(x) =  15.534701126470583
        sqrt fois log =  36696.14057887706
        sqrt fois log fois log =  570063.5763878044

5590010   pi(x) =  386545
        Li(x) =  386748.296194028
        diff  203.296194028226
        sqrt(x) =  2364.3201982811042
        log(x) =  15.536491634038448
        sqrt fois log =  36733.2409807825
        sqrt fois log fois log =  570705.6911890457
```

```
5600010   pi(x) =  387202
        Li(x) =  387391.905118858
        diff  189.905118857569
        sqrt(x) =  2366.43402612454
        log(x) =  15.538278941418069
        sqrt fois log =  36770.31199438612
        sqrt fois log fois log =  571347.3645317421

5610010   pi(x) =  387835
        Li(x) =  388035.440082198
        diff  200.440082197543
        sqrt(x) =  2368.545967466116
        log(x) =  15.540063060028485
        sqrt fois log =  36807.35369499962
        sqrt fois log fois log =  571988.5974930666

5620010   pi(x) =  388476
        Li(x) =  388678.901232838
        diff  202.901232838049
        sqrt(x) =  2370.6560273477044
        log(x) =  15.541844001227721
        sqrt fois log =  36844.36615760826
        sqrt fois log fois log =  572629.3911456616

5630010   pi(x) =  389111
        Li(x) =  389322.288719004
        diff  211.288719003729
        sqrt(x) =  2372.7642107887586
        log(x) =  15.54362177631323
        sqrt fois log =  36881.34945687283
        sqrt fois log fois log =  573269.7465576666

5640010   pi(x) =  389754
        Li(x) =  389965.602688357
        diff  211.602688356943
        sqrt(x) =  2374.870522786453
        log(x) =  15.545396396522316
        sqrt fois log =  36918.30366713159
        sqrt fois log fois log =  573909.6647927441

5650010   pi(x) =  390379
        Li(x) =  390608.843288001
        diff  229.843288000731
        sqrt(x) =  2376.9749683158216
        log(x) =  15.547167873032562
        sqrt fois log =  36955.228862402335
        sqrt fois log fois log =  574549.1469101072

5660010   pi(x) =  391020
        Li(x) =  391252.010664482
        diff  232.010664482194
        sqrt(x) =  2379.077552329894
        log(x) =  15.548936216962257
        sqrt fois log =  36992.12511638421
        sqrt fois log fois log =  575188.1939645456

5670010   pi(x) =  391654
        Li(x) =  391895.104963796
        diff  241.104963795515
        sqrt(x) =  2381.1782797598335
        log(x) =  15.55070143937081
        sqrt fois log =  37028.992502459754
        sqrt fois log fois log =  575826.8070064518
```

5680010   pi(x) = 392295
Li(x) = 392538.126331385
diff 243.126331384759
sqrt(x) = 2383.2771555150694
log(x) = 15.552463551259164
sqrt fois log = 37065.83109369673
sqrt fois log fois log = 576464.987081847

5690010   pi(x) = 392927
Li(x) = 393181.074912147
diff 254.074912147364
sqrt(x) = 2385.374184483432
log(x) = 15.554222563570214
sqrt fois log = 37102.6409628501
sqrt fois log fois log = 577102.7352324075

5700010   pi(x) = 393607
Li(x) = 393823.950850437
diff 216.950850436755
sqrt(x) = 2387.4693715312874
log(x) = 15.555978487189204
sqrt fois log = 37139.422182363836
sqrt fois log fois log = 577740.0524954894

5710010   pi(x) = 394241
Li(x) = 394466.754290066
diff 225.754290065554
sqrt(x) = 2389.5627215036648
log(x) = 15.557731332944144
sqrt fois log = 37176.17482437284
sqrt fois log fois log = 578376.9399041546

5720010   pi(x) = 394908
Li(x) = 395109.485374308
diff 201.485374308424
sqrt(x) = 2391.654239224391
log(x) = 15.559481111606202
sqrt fois log = 37212.89896070481
sqrt fois log fois log = 579013.3984871965

5730010   pi(x) = 395541
Li(x) = 395752.144245905
diff 211.144245905278
sqrt(x) = 2393.743929496219
log(x) = 15.561227833890097
sqrt fois log = 37249.59466288202
sqrt fois log fois log = 579649.4292691638

5740010   pi(x) = 396173
Li(x) = 396394.731047064
diff 221.731047063775
sqrt(x) = 2395.831797100957
log(x) = 15.56297151045451
sqrt fois log = 37286.26200212322
sqrt fois log fois log = 580285.0332703863

5750010   pi(x) = 396826
Li(x) = 397037.245919463
diff 211.245919462759
sqrt(x) = 2397.917846799594
log(x) = 15.564712151902455
sqrt fois log = 37322.90104934541
sqrt fois log fois log = 580920.2115069993

```
5760010   pi(x) =  397462
        Li(x) =  397679.689004255
        diff  217.689004254644
        sqrt(x) =  2400.0020833324293
        log(x) =  15.566449768781679
        sqrt fois log =  37359.51187516564
        sqrt fois log fois log =  581554.9649909686

5770010   pi(x) =  398081
        Li(x) =  398322.060442069
        diff  241.060442068614
        sqrt(x) =  2402.0845114191966
        log(x) =  15.568184371585033
        sqrt fois log =  37396.09454990281
        sqrt fois log fois log =  582189.2947301131

5780010   pi(x) =  398716
        Li(x) =  398964.360373013
        diff  248.36037301342
        sqrt(x) =  2404.165135759189
        log(x) =  15.56991597075087
        sqrt fois log =  37432.64914357943
        sqrt fois log fois log =  582823.2017281313

5790010   pi(x) =  399353
        Li(x) =  399606.58893668
        diff  253.588936680055
        sqrt(x) =  2406.243961031383
        log(x) =  15.571644576663402
        sqrt fois log =  37469.1757259234
        sqrt fois log fois log =  583456.6869846232

5800010   pi(x) =  399993
        Li(x) =  400248.746272145
        diff  255.746272144665
        sqrt(x) =  2408.3209918945604
        log(x) =  15.573370199653093
        sqrt fois log =  37505.67436636973
        sqrt fois log fois log =  584089.7514951151

5810010   pi(x) =  400647
        Li(x) =  400890.832517971
        diff  243.832517971401
        sqrt(x) =  2410.3962329874316
        log(x) =  15.57509284999701
        sqrt fois log =  37542.14513406227
        sqrt fois log fois log =  584722.3962510832

5820010   pi(x) =  401279
        Li(x) =  401532.847812215
        diff  253.847812215099
        sqrt(x) =  2412.4696889287543
        log(x) =  15.576812537919203
        sqrt fois log =  37578.588097855456
        sqrt fois log fois log =  585354.6222399762

5830010   pi(x) =  401908
        Li(x) =  402174.792292424
        diff  266.792292424012
        sqrt(x) =  2414.5413643174556
        log(x) =  15.57852927359107
        sqrt fois log =  37615.003326316
        sqrt fois log fois log =  585986.4304452393
```

```
5840010   pi(x) =  402547
        Li(x) =  402816.666095643
        diff  269.666095642548
        sqrt(x) =  2416.61126373275
        log(x) =  15.580243067131711
        sqrt fois log =  37651.390887724585
        sqrt fois log fois log =  586617.821846337

5850010   pi(x) =  403204
        Li(x) =  403458.469358414
        diff  254.469358414121
        sqrt(x) =  2418.679391734258
        log(x) =  15.581953928608288
        sqrt fois log =  37687.75085007752
        sqrt fois log fois log =  587248.7974187759

5860010   pi(x) =  403831
        Li(x) =  404100.202216784
        diff  269.202216783655
        sqrt(x) =  2420.7457528621217
        log(x) =  15.583661868036382
        sqrt fois log =  37724.08328108847
        sqrt fois log fois log =  587879.3581341271

5870010   pi(x) =  404466
        Li(x) =  404741.8648063
        diff  275.864806300262
        sqrt(x) =  2422.810351637123
        log(x) =  15.585366895380341
        sqrt fois log =  37760.38824819002
        sqrt fois log fois log =  588509.5049600495

5880010   pi(x) =  405107
        Li(x) =  405383.45726202
        diff  276.457262019976
        sqrt(x) =  2424.8731925607985
        log(x) =  15.587069020553635
        sqrt fois log =  37796.66581853541
        sqrt fois log fois log =  589139.2388603118

5890010   pi(x) =  405784
        Li(x) =  406024.979718508
        diff  240.979718508432
        sqrt(x) =  2426.9342801155535
        log(x) =  15.588768253419197
        sqrt fois log =  37832.91605900011
        sqrt fois log fois log =  589768.5607948143

5900010   pi(x) =  406429
        Li(x) =  406666.432309843
        diff  237.432309843425
        sqrt(x) =  2428.9936187647754
        log(x) =  15.590464603789766
        sqrt fois log =  37869.13903618344
        sqrt fois log fois log =  590397.4717196113

5910010   pi(x) =  407077
        Li(x) =  407307.815169617
        diff  230.815169617301
        sqrt(x) =  2431.051212952948
        log(x) =  15.592158081428227
        sqrt fois log =  37905.3348164102
        sqrt fois log fois log =  591025.972586933
```

```
5920010   pi(x) =  407745
        Li(x) =  407949.12843094
        diff  204.128430939978
        sqrt(x) =  2433.1070671057614
        log(x) =  15.593848696047951
        sqrt fois log =  37941.50346573223
        sqrt fois log fois log =  591654.0643452074

5930010   pi(x) =  408393
        Li(x) =  408590.372226441
        diff  197.372226441104
        sqrt(x) =  2435.1611856302243
        log(x) =  15.595536457313127
        sqrt fois log =  37977.64504993002
        sqrt fois log fois log =  592281.747939081

5940010   pi(x) =  409040
        Li(x) =  409231.546688273
        diff  191.546688272734
        sqrt(x) =  2437.2135729147744
        log(x) =  15.597221374839094
        sqrt fois log =  38013.75963451428
        sqrt fois log fois log =  592909.0243094417

5950010   pi(x) =  409673
        Li(x) =  409872.651948112
        diff  199.651948111947
        sqrt(x) =  2439.2642333293866
        log(x) =  15.59890345819267
        sqrt fois log =  38049.84728472746
        sqrt fois log fois log =  593535.8943934381

5960010   pi(x) =  410311
        Li(x) =  410513.688137163
        diff  202.688137163292
        sqrt(x) =  2441.3131712256827
        log(x) =  15.600582716892474
        sqrt fois log =  38085.90806554534
        sqrt fois log fois log =  594162.3591245023

5970010   pi(x) =  410945
        Li(x) =  411154.655386161
        diff  209.655386161117
        sqrt(x) =  2443.360390937039
        log(x) =  15.602259160409258
        sqrt fois log =  38121.942041678565
        sqrt fois log fois log =  594788.4194323701

5980010   pi(x) =  411580
        Li(x) =  411795.553825372
        diff  215.553825372306
        sqrt(x) =  2445.4058967786923
        log(x) =  15.60393279816622
        sqrt fois log =  38157.94927757412
        sqrt fois log fois log =  595414.0762431017

5990010   pi(x) =  412224
        Li(x) =  412436.383584599
        diff  212.383584598603
        sqrt(x) =  2447.4496930478467
        log(x) =  15.60560363953932
        sqrt fois log =  38193.929837416865
        sqrt fois log fois log =  596039.3304791021
```

```
6000010   pi(x) =  412849
       Li(x) =  413077.144793179
       diff  228.144793179003
       sqrt(x) =  2449.49178402378
       log(x) =  15.607271693857607
       sqrt fois log =  38229.88378513111
       sqrt fois log fois log =  596664.1830591427

6010010   pi(x) =  413511
       Li(x) =  413717.837579992
       diff  206.837579992251
       sqrt(x) =  2451.5321739679453
       log(x) =  15.608936970403517
       sqrt fois log =  38265.81118438197
       sqrt fois log fois log =  597288.6348983801

6020010   pi(x) =  414148
       Li(x) =  414358.462073459
       diff  210.46207345929
       sqrt(x) =  2453.570867124078
       log(x) =  15.610599478413192
       sqrt fois log =  38301.712098576936
       sqrt fois log fois log =  597912.6869083775

6030010   pi(x) =  414812
       Li(x) =  414999.018401545
       diff  187.018401545414
       sqrt(x) =  2455.607867718297
       log(x) =  15.612259227076786
       sqrt fois log =  38337.58659086733
       sqrt fois log fois log =  598536.3399971237

6040010   pi(x) =  415413
       Li(x) =  415639.506691763
       diff  226.506691763003
       sqrt(x) =  2457.6431799592065
       log(x) =  15.613916225538766
       sqrt fois log =  38373.434724149745
       sqrt fois log fois log =  599159.5950690544

6050010   pi(x) =  416040
       Li(x) =  416279.927071174
       diff  239.927071173559
       sqrt(x) =  2459.6768080379993
       log(x) =  15.615570482898221
       sqrt fois log =  38409.256561067494
       sqrt fois log fois log =  599782.4530250705

6060010   pi(x) =  416706
       Li(x) =  416920.27966639
       diff  214.279666390212
       sqrt(x) =  2461.7087561285557
       log(x) =  15.617222008209152
       sqrt fois log =  38445.05216401206
       sqrt fois log fois log =  600404.914762558

6070010   pi(x) =  417322
       Li(x) =  417560.56460358
       diff  238.564603579929
       sqrt(x) =  2463.7390283875443
       log(x) =  15.618870810480782
       sqrt fois log =  38480.8215951245
       sqrt fois log fois log =  601026.9811754086
```

```
6080010   pi(x) =  417975
        Li(x) =  418200.782008466
        diff  225.78200846602
        sqrt(x) =  2465.767628954521
        log(x) =  15.62051689867784
        sqrt fois log =  38516.564916296884
        sqrt fois log fois log =  601648.6531540375

6090010   pi(x) =  418603
        Li(x) =  418840.93200633
        diff  237.932006330171
        sqrt(x) =  2467.794561952028
        log(x) =  15.622160281720856
        sqrt fois log =  38552.28218917369
        sqrt fois log fois log =  602269.9315854035

6100010   pi(x) =  419247
        Li(x) =  419481.014722015
        diff  234.014722014894
        sqrt(x) =  2469.8198314856895
        log(x) =  15.623800968486458
        sqrt fois log =  38587.97347515318
        sqrt fois log fois log =  602890.817353028

6110010   pi(x) =  419900
        Li(x) =  420121.030279926
        diff  221.030279925792
        sqrt(x) =  2471.8434416443124
        log(x) =  15.62543896780765
        sqrt fois log =  38623.63883538881
        sqrt fois log fois log =  603511.3113370133

6120010   pi(x) =  420540
        Li(x) =  420760.978804034
        diff  220.978804033715
        sqrt(x) =  2473.8653964999794
        log(x) =  15.627074288474102
        sqrt fois log =  38659.278330790614
        sqrt fois log fois log =  604131.414414062

6130010   pi(x) =  421175
        Li(x) =  421400.860417877
        diff  225.860417876975
        sqrt(x) =  2475.885700108145
        log(x) =  15.628706939232433
        sqrt fois log =  38694.89202202652
        sqrt fois log fois log =  604751.1274574955

6140010   pi(x) =  421812
        Li(x) =  422040.675244564
        diff  228.675244563725
        sqrt(x) =  2477.9043565077327
        log(x) =  15.630336928786495
        sqrt fois log =  38730.47996952375
        sqrt fois log fois log =  605370.4513372728

6150010   pi(x) =  422450
        Li(x) =  422680.423406774
        diff  230.423406774004
        sqrt(x) =  2479.921369721226
        log(x) =  15.631964265797638
        sqrt fois log =  38766.042233470136
        sqrt fois log fois log =  605989.3869200072
```

```
6160010   pi(x) =  423095
        Li(x) =  423320.105026762
        diff  225.105026761827
        sqrt(x) =  2481.936743754764
        log(x) =  15.633588958885008
        sqrt fois log =  38801.57887381549
        sqrt fois log fois log =  606607.9350689877

6170010   pi(x) =  423752
        Li(x) =  423959.720226358
        diff  207.720226357749
        sqrt(x) =  2483.950482598234
        log(x) =  15.6352110166258
        sqrt fois log =  38837.08995027288
        sqrt fois log fois log =  607226.0966441936

6180010   pi(x) =  424381
        Li(x) =  424599.269126971
        diff  218.269126970554
        sqrt(x) =  2485.962590225364
        log(x) =  15.63683044755554
        sqrt fois log =  38872.57552232001
        sqrt fois log fois log =  607843.8725023157

6190010   pi(x) =  425000
        Li(x) =  425238.75184959
        diff  238.751849589753
        sqrt(x) =  2487.973070593812
        log(x) =  15.638447260168359
        sqrt fois log =  38908.03564920046
        sqrt fois log fois log =  608461.2634967717

6200010   pi(x) =  425649
        Li(x) =  425878.168514787
        diff  229.168514787452
        sqrt(x) =  2489.981927645259
        log(x) =  15.640061462917245
        sqrt fois log =  38943.47038992501
        sqrt fois log fois log =  609078.270477725

6210010   pi(x) =  426292
        Li(x) =  426517.519242721
        diff  225.519242720678
        sqrt(x) =  2491.9891653054997
        log(x) =  15.641673064214324
        sqrt fois log =  38978.87980327297
        sqrt fois log fois log =  609694.8942921025

6220010   pi(x) =  426896
        Li(x) =  427156.804153133
        diff  260.8041531333
        sqrt(x) =  2493.994787484529
        log(x) =  15.643282072431111
        sqrt fois log =  39014.26394779337
        sqrt fois log fois log =  610311.1357836114

6230010   pi(x) =  427547
        Li(x) =  427796.023365358
        diff  249.023365358182
        sqrt(x) =  2495.9987980766336
        log(x) =  15.644888495898785
        sqrt fois log =  39049.62288180632
        sqrt fois log fois log =  610926.9957927577
```

6240010 pi(x) = 428181
Li(x) = 428435.176998319
diff 254.176998319337
sqrt(x) = 2498.0012009604798
log(x) = 15.646492342908429
sqrt fois log = 39084.956663404206
sqrt fois log fois log = 611542.4751568617

6250010 pi(x) = 428817
Li(x) = 429074.265170534
diff 257.265170533909
sqrt(x) = 2500.0019999992
log(x) = 15.648093621711304
sqrt fois log = 39120.26535045299
sqrt fois log fois log = 612157.5747100771

6260010 pi(x) = 429466
Li(x) = 429713.288000114
diff 247.288000114204
sqrt(x) = 2502.00119904048
log(x) = 15.649692340519096
sqrt fois log = 39155.5490005934
sqrt fois log fois log = 612772.2952834065

6270010 pi(x) = 430114
Li(x) = 430352.24560477
diff 238.245604769618
sqrt(x) = 2503.9988019166462
log(x) = 15.651288507504164
sqrt fois log = 39190.807671242204
sqrt fois log fois log = 613386.6377047191

6280010 pi(x) = 430751
Li(x) = 430991.138101809
diff 240.13810180896
sqrt(x) = 2505.9948124447506
log(x) = 15.652882130799801
sqrt fois log = 39226.041419593435
sqrt fois log fois log = 614000.6027987669

6290010 pi(x) = 431414
Li(x) = 431629.965608142
diff 215.965608142142
sqrt(x) = 2507.989234426655
log(x) = 15.65447321850048
sqrt fois log = 39261.25030261959
sqrt fois log fois log = 614614.1913872022

6300010 pi(x) = 432073
Li(x) = 432268.728240282
diff 195.728240282333
sqrt(x) = 2509.9820716491186
log(x) = 15.656061778662089
sqrt fois log = 39296.43437707285
sqrt fois log fois log = 615227.4042885932

6310010 pi(x) = 432719
Li(x) = 432907.426114348
diff 188.426114347938
sqrt(x) = 2511.973327883877
log(x) = 15.657647819302195
sqrt fois log = 39331.593699486264
sqrt fois log fois log = 615840.242318441

```
6320010   pi(x) =  433354
        Li(x) =  433546.059346064
        diff  192.059346064343
        sqrt(x) =  2513.9630068877304
        log(x) =  15.659231348400269
        sqrt fois log =  39366.72832617495
        sqrt fois log fois log =  616452.7062891956

6330010   pi(x) =  434002
        Li(x) =  434184.628050766
        diff  182.628050766303
        sqrt(x) =  2515.951112402624
        log(x) =  15.660812373897942
        sqrt fois log =  39401.838313237306
        sqrt fois log fois log =  617064.7970102729

6340010   pi(x) =  434635
        Li(x) =  434823.132343399
        diff  188.132343399397
        sqrt(x) =  2517.9376481557283
        log(x) =  15.662390903699231
        sqrt fois log =  39436.92371655611
        sqrt fois log fois log =  617676.515288069

6350010   pi(x) =  435265
        Li(x) =  435461.572338522
        diff  196.572338522295
        sqrt(x) =  2519.9226178595245
        log(x) =  15.663966945670785
        sqrt fois log =  39471.98459179978
        sqrt fois log fois log =  618287.8619259783

6360010   pi(x) =  435902
        Li(x) =  436099.948150309
        diff  197.948150308512
        sqrt(x) =  2521.9060252118834
        log(x) =  15.665540507642113
        sqrt fois log =  39507.020994423474
        sqrt fois log fois log =  618898.8377244083

6370010   pi(x) =  436530
        Li(x) =  436738.259892548
        diff  208.259892548376
        sqrt(x) =  2523.8878738961444
        log(x) =  15.667111597405826
        sqrt fois log =  39542.03297967021
        sqrt fois log fois log =  619509.4434807949

6380010   pi(x) =  437137
        Li(x) =  437376.507678651
        diff  239.507678650843
        sqrt(x) =  2525.868167581198
        log(x) =  15.668680222717864
        sqrt fois log =  39577.02060257213
        sqrt fois log fois log =  620119.6799896194

6390010   pi(x) =  437766
        Li(x) =  438014.691621645
        diff  248.69162164547
        sqrt(x) =  2527.846909921564
        log(x) =  15.67024639129772
        sqrt fois log =  39611.98391795148
        sqrt fois log fois log =  620729.5480424225
```

```
6400010   pi(x) =  438410
        Li(x) =  438652.811834184
        diff  242.811834184162
        sqrt(x) =  2529.824104557469
        log(x) =  15.67181011082868
        sqrt fois log =  39646.922980421856
        sqrt fois log fois log =  621339.0484278213

6410010   pi(x) =  439041
        Li(x) =  439290.868428543
        diff  249.86842854321
        sqrt(x) =  2531.799755114926
        log(x) =  15.673371388958039
        sqrt fois log =  39681.83784438925
        sqrt fois log fois log =  621948.1819315228

6420010   pi(x) =  439683
        Li(x) =  439928.861516625
        diff  245.861516624864
        sqrt(x) =  2533.773865205812
        log(x) =  15.67493023329733
        sqrt fois log =  39716.72856405321
        sqrt fois log fois log =  622556.9493363413

6430010   pi(x) =  440319
        Li(x) =  440566.791209959
        diff  247.791209959425
        sqrt(x) =  2535.7464384279433
        log(x) =  15.676486651422547
        sqrt fois log =  39751.59519340792
        sqrt fois log fois log =  623165.3514222119

6440010   pi(x) =  440930
        Li(x) =  441204.657619707
        diff  274.657619706821
        sqrt(x) =  2537.717478365155
        log(x) =  15.678040650874362
        sqrt fois log =  39786.437786243274
        sqrt fois log fois log =  623773.3889662058

6450010   pi(x) =  441563
        Li(x) =  441842.460856659
        diff  279.460856658698
        sqrt(x) =  2539.686988587373
        log(x) =  15.67959223915835
        sqrt fois log =  39821.25639614601
        sqrt fois log fois log =  624381.0627425459

6460010   pi(x) =  442221
        Li(x) =  442480.20103124
        diff  259.201031239936
        sqrt(x) =  2541.654972650694
        log(x) =  15.681141423745203
        sqrt fois log =  39856.05107650078
        sqrt fois log fois log =  624988.373522621

6470010   pi(x) =  442854
        Li(x) =  443117.878253511
        diff  263.878253510513
        sqrt(x) =  2543.621434097456
        log(x) =  15.682688212070943
        sqrt fois log =  39890.82188049116
        sqrt fois log fois log =  625595.3220750004
```

```
6480010   pi(x) =  443481
        Li(x) =  443755.492633167
        diff  274.492633167421
        sqrt(x) =  2545.5863764563164
        log(x) =  15.684232611537142
        sqrt fois log =  39925.56886110082
        sqrt fois log fois log =  626201.9091654494

6490010   pi(x) =  444119
        Li(x) =  444393.044279546
        diff  274.044279546186
        sqrt(x) =  2547.5498032423234
        log(x) =  15.685774629511135
        sqrt fois log =  39960.29207111452
        sqrt fois log fois log =  626808.1355569431

6500010   pi(x) =  444758
        Li(x) =  445030.533301623
        diff  272.533301622898
        sqrt(x) =  2549.5117179569893
        log(x) =  15.687314273326221
        sqrt fois log =  39994.99156311913
        sqrt fois log fois log =  627414.0020096806

6510010   pi(x) =  445399
        Li(x) =  445667.959808016
        diff  268.959808015556
        sqrt(x) =  2551.4721240883664
        log(x) =  15.688851550281882
        sqrt fois log =  40029.66738950477
        sqrt fois log fois log =  628019.5092811

6520010   pi(x) =  446039
        Li(x) =  446305.323906986
        diff  266.323906986276
        sqrt(x) =  2553.431025111115
        log(x) =  15.690386467643991
        sqrt fois log =  40064.31960246577
        sqrt fois log fois log =  628624.6581258927

6530010   pi(x) =  446686
        Li(x) =  446942.625706443
        diff  256.625706442574
        sqrt(x) =  2555.388424486579
        log(x) =  15.691919032645009
        sqrt fois log =  40098.94825400169
        sqrt fois log fois log =  629229.4492960165

6540010   pi(x) =  447315
        Li(x) =  447579.865313939
        diff  264.865313939343
        sqrt(x) =  2557.3443256628543
        log(x) =  15.6934492524842
        sqrt fois log =  40133.55339591843
        sqrt fois log fois log =  629833.8835407108

6550010   pi(x) =  447957
        Li(x) =  448217.04283668
        diff  260.042836680426
        sqrt(x) =  2559.2987320748625
        log(x) =  15.694977134327827
        sqrt fois log =  40168.13507982917
        sqrt fois log fois log =  630437.9616065102
```

6560010 pi(x) = 448595
Li(x) = 448854.15838152
diff 259.158381520247
sqrt(x) = 2561.251647144419
log(x) = 15.696502685309353
sqrt fois log = 40202.69335715538
sqrt fois log fois log = 631041.6842372579

6570010 pi(x) = 449230
Li(x) = 449491.212054966
diff 261.212054965785
sqrt(x) = 2563.2030742803036
log(x) = 15.69802591252965
sqrt fois log = 40237.22827912786
sqrt fois log fois log = 631645.05217412

6580010 pi(x) = 449868
Li(x) = 450128.203963178
diff 260.203963177686
sqrt(x) = 2565.1530168783306
log(x) = 15.699546823057185
sqrt fois log = 40271.739896787745
sqrt fois log fois log = 632248.0661555994

6590010 pi(x) = 450527
Li(x) = 450765.134211973
diff 238.134211972589
sqrt(x) = 2567.101478321416
log(x) = 15.701065423928222
sqrt fois log = 40306.22826098741
sqrt fois log fois log = 632850.7269175479

6600010 pi(x) = 451160
Li(x) = 451402.002906824
diff 242.002906824113
sqrt(x) = 2569.048461979649
log(x) = 15.702581722147022
sqrt fois log = 40340.69342239155
sqrt fois log fois log = 633453.0351931822

6610010 pi(x) = 451800
Li(x) = 452038.810152865
diff 238.810152864899
sqrt(x) = 2570.9939712103564
log(x) = 15.704095724686029
sqrt fois log = 40375.13543147811
sqrt fois log fois log = 634054.9917130949

6620010 pi(x) = 452462
Li(x) = 452675.556054888
diff 213.556054888235
sqrt(x) = 2572.9380093581735
log(x) = 15.705607438486068
sqrt fois log = 40409.55433853927
sqrt fois log fois log = 634656.5972052693

6630010 pi(x) = 453077
Li(x) = 453312.240717349
diff 235.240717349399
sqrt(x) = 2574.8805797551076
log(x) = 15.707116870456534
sqrt fois log = 40443.95019368235
sqrt fois log fois log = 635257.8523950919

```
6640010   pi(x) =  453699
        Li(x) =  453948.864244367
        diff  249.864244367462
        sqrt(x) =  2576.821685720609
        log(x) =  15.70862402747558
        sqrt fois log =  40478.32304683088
        sqrt fois log fois log =  635858.7580053661

6650010   pi(x) =  454338
        Li(x) =  454585.426739727
        diff  247.426739726739
        sqrt(x) =  2578.7613305616323
        log(x) =  15.710128916390305
        sqrt fois log =  40512.67294772544
        sqrt fois log fois log =  636459.3147563246

6660010   pi(x) =  454950
        Li(x) =  455221.928306879
        diff  271.928306878661
        sqrt(x) =  2580.6995175727066
        log(x) =  15.711631544016946
        sqrt fois log =  40546.999945924654
        sqrt fois log fois log =  637059.5233656431

6670010   pi(x) =  455598
        Li(x) =  455858.369048943
        diff  260.369048942928
        sqrt(x) =  2582.636250035998
        log(x) =  15.713131917141057
        sqrt fois log =  40581.30409080613
        sqrt fois log fois log =  637659.3845484528

6680010   pi(x) =  456228
        Li(x) =  456494.749068709
        diff  266.749068709323
        sqrt(x) =  2584.5715312213742
        log(x) =  15.714630042517696
        sqrt fois log =  40615.58543156737
        sqrt fois log fois log =  638258.8990173526

6690010   pi(x) =  456847
        Li(x) =  457131.068468639
        diff  284.068468639336
        sqrt(x) =  2586.5053643864726
        log(x) =  15.716125926871605
        sqrt fois log =  40649.84401722673
        sqrt fois log fois log =  638858.0674824236

6700010   pi(x) =  457498
        Li(x) =  457767.327350868
        diff  269.327350867505
        sqrt(x) =  2588.437752776759
        log(x) =  15.717619576897395
        sqrt fois log =  40684.07989662429
        sqrt fois log fois log =  639456.8906512397

6710010   pi(x) =  458153
        Li(x) =  458403.525817203
        diff  250.525817202928
        sqrt(x) =  2590.3686996255956
        log(x) =  15.719110999259719
        sqrt fois log =  40718.29311842279
        sqrt fois log fois log =  640055.3692288811
```

```
6720010   pi(x) =  458786
        Li(x) =  459039.663969131
        diff  253.663969131012
        sqrt(x) =  2592.298208154301
        log(x) =  15.720600200593463
        sqrt fois log =  40752.48373110858
        sqrt fois log fois log =  640653.5039179473

6730010   pi(x) =  459432
        Li(x) =  459675.741907815
        diff  243.741907814867
        sqrt(x) =  2594.2262815722147
        log(x) =  15.722087187503908
        sqrt fois log =  40786.65178299242
        sqrt fois log fois log =  641251.2954185685

6740010   pi(x) =  460066
        Li(x) =  460311.759734097
        diff  245.759734096704
        sqrt(x) =  2596.152923076759
        log(x) =  15.723571966566915
        sqrt fois log =  40820.797322210485
        sqrt fois log fois log =  641848.7444284186

6750010   pi(x) =  460708
        Li(x) =  460947.7175485
        diff  239.717548499524
        sqrt(x) =  2598.0781358535005
        log(x) =  15.725054544329097
        sqrt fois log =  40854.92039672516
        sqrt fois log fois log =  642445.8516427265

6760010   pi(x) =  461372
        Li(x) =  461583.615451228
        diff  211.615451228456
        sqrt(x) =  2600.001923076212
        log(x) =  15.726534927307993
        sqrt fois log =  40889.021054326
        sqrt fois log fois log =  643042.6177542896

6770010   pi(x) =  461987
        Li(x) =  462219.453542172
        diff  232.45354217221
        sqrt(x) =  2601.924287906933
        log(x) =  15.728013121992241
        sqrt fois log =  40923.09934263056
        sqrt fois log fois log =  643639.0434534855

6780010   pi(x) =  462619
        Li(x) =  462855.231920905
        diff  236.231920904713
        sqrt(x) =  2603.845233496031
        log(x) =  15.729489134841744
        sqrt fois log =  40957.15530908528
        sqrt fois log fois log =  644235.1294282828

6790010   pi(x) =  463240
        Li(x) =  463490.950686686
        diff  250.950686686498
        sqrt(x) =  2605.7647629822613
        log(x) =  15.730962972287845
        sqrt fois log =  40991.18900096636
        sqrt fois log fois log =  644830.8763642546
```

```
6800010   pi(x) =  463872
        Li(x) =  464126.609938466
        diff  254.609938465932
        sqrt(x) =  2607.6828794928265
        log(x) =  15.732434640733489
        sqrt fois log =  41025.20046538059
        sqrt fois log fois log =  645426.2849445894

6810010   pi(x) =  464504
        Li(x) =  464762.209774881
        diff  258.209774881077
        sqrt(x) =  2609.5995861434376
        log(x) =  15.733904146553398
        sqrt fois log =  41059.18974926626
        sqrt fois log fois log =  646021.3558501033

6820010   pi(x) =  465159
        Li(x) =  465397.750294261
        diff  238.750294260681
        sqrt(x) =  2611.5148860383697
        log(x) =  15.73537149609423
        sqrt fois log =  41093.15689939393
        sqrt fois log fois log =  646616.0897592512

6830010   pi(x) =  465792
        Li(x) =  466033.231594626
        diff  241.231594625977
        sqrt(x) =  2613.428782270525
        log(x) =  15.736836695674745
        sqrt fois log =  41127.101962367364
        sqrt fois log fois log =  647210.4873481395

6840010   pi(x) =  466422
        Li(x) =  466668.653773692
        diff  246.653773691854
        sqrt(x) =  2615.3412779214877
        log(x) =  15.738299751585968
        sqrt fois log =  41161.02498462428
        sqrt fois log fois log =  647804.5492905361

6850010   pi(x) =  467056
        Li(x) =  467304.016928868
        diff  248.01692886831
        sqrt(x) =  2617.2523760615827
        log(x) =  15.739760670091357
        sqrt fois log =  41194.92601243725
        sqrt fois log fois log =  648398.2762578833

6860010   pi(x) =  467718
        Li(x) =  467939.321157262
        diff  221.321157261962
        sqrt(x) =  2619.162079749934
        log(x) =  15.741219457426952
        sqrt fois log =  41228.8050919145
        sqrt fois log fois log =  648991.668919308

6870010   pi(x) =  468378
        Li(x) =  468574.566555677
        diff  196.566555677156
        sqrt(x) =  2621.0703920345213
        log(x) =  15.742676119801548
        sqrt fois log =  41262.66226900074
        sqrt fois log fois log =  649584.7279416342
```

6880010 pi(x) = 469002
Li(x) = 469209.753220618
diff 207.753220617771
sqrt(x) = 2622.977315952237
log(x) = 15.744130663396842
sqrt fois log = 41296.497589477956
sqrt fois log fois log = 650177.4539893937

6890010 pi(x) = 469652
Li(x) = 469844.881248288
diff 192.881248288264
sqrt(x) = 2624.8828545289407
log(x) = 15.745583094367598
sqrt fois log = 41330.31109896625
sqrt fois log fois log = 650769.8477248366

6900010 pi(x) = 470284
Li(x) = 470479.950734595
diff 195.95073459507
sqrt(x) = 2626.787010779519
log(x) = 15.7470334188418
sqrt fois log = 41364.102842924636
sqrt fois log fois log = 651361.9098079434

6910010 pi(x) = 470920
Li(x) = 471114.961775148
diff 194.961775148055
sqrt(x) = 2628.6897877079373
log(x) = 15.748481642920808
sqrt fois log = 41397.872866651844
sqrt fois log fois log = 651953.6408964361

6920010 pi(x) = 471561
Li(x) = 471749.914465262
diff 188.914465261798
sqrt(x) = 2630.5911883072977
log(x) = 15.749927772679513
sqrt fois log = 41431.62121528711
sqrt fois log fois log = 652545.0416457881

6930010 pi(x) = 472176
Li(x) = 472384.808899957
diff 208.808899957046
sqrt(x) = 2632.491215559892
log(x) = 15.751371814166488
sqrt fois log = 41465.34793381096
sqrt fois log fois log = 653136.1127092367

6940010 pi(x) = 472829
Li(x) = 473019.645173962
diff 190.645173961879
sqrt(x) = 2634.3898724372593
log(x) = 15.752813773404139
sqrt fois log = 41499.05306704603
sqrt fois log fois log = 653726.8547377919

6950010 pi(x) = 473470
Li(x) = 473654.423381713
diff 184.423381713044
sqrt(x) = 2636.287161900236
log(x) = 15.75425365638886
sqrt fois log = 41532.7366596578
sqrt fois log fois log = 654317.2683802495

```
6960010   pi(x) =  474102
        Li(x) =  474289.143617357
        diff  187.143617357477
        sqrt(x) =  2638.183086899012
        log(x) =  15.755691469091179
        sqrt fois log =  41566.398756155395
        sqrt fois log fois log =  654907.3542831996

6970010   pi(x) =  474749
        Li(x) =  474923.805974753
        diff  174.805974753341
        sqrt(x) =  2640.0776503731854
        log(x) =  15.757127217455906
        sqrt fois log =  41600.03940089236
        sqrt fois log fois log =  655497.113091039

6980010   pi(x) =  475381
        Li(x) =  475558.410547471
        diff  177.410547471489
        sqrt(x) =  2641.9708552518136
        log(x) =  15.758560907402286
        sqrt fois log =  41633.65863806741
        sqrt fois log fois log =  656086.5454459806

6990010   pi(x) =  476012
        Li(x) =  476192.957428797
        diff  180.957428796799
        sqrt(x) =  2643.862704453467
        log(x) =  15.759992544824135
        sqrt fois log =  41667.256511725216
        sqrt fois log fois log =  656675.6519880642

7000010   pi(x) =  476650
        Li(x) =  476827.446711729
        diff  177.446711729222
        sqrt(x) =  2645.753200886281
        log(x) =  15.761422135589996
        sqrt fois log =  41700.83306575711
        sqrt fois log fois log =  657264.4333551674

7010010   pi(x) =  477277
        Li(x) =  477461.878488985
        diff  184.878488985356
        sqrt(x) =  2647.6423474480084
        log(x) =  15.762849685543278
        sqrt fois log =  41734.388343901905
        sqrt fois log fois log =  657852.8901830153

7020010   pi(x) =  477907
        Li(x) =  478096.252852999
        diff  189.252852999431
        sqrt(x) =  2649.5301470260724
        log(x) =  15.764275200502404
        sqrt fois log =  41767.9223897466
        sqrt fois log fois log =  658441.0231051914

7030010   pi(x) =  478560
        Li(x) =  478730.569895925
        diff  170.569895924884
        sqrt(x) =  2651.4166024976157
        log(x) =  15.765698686260942
        sqrt fois log =  41801.43524672711
        sqrt fois log fois log =  659028.8327531475
```

```
7040010   pi(x) =  479209
        Li(x) =  479364.829709635
        diff  155.829709635291
        sqrt(x) =  2653.3017167295543
        log(x) =  15.767120148587761
        sqrt fois log =  41834.92695812905
        sqrt fois log fois log =  659616.3197562138

7050010   pi(x) =  479864
        Li(x) =  479999.032385726
        diff  135.032385725761
        sqrt(x) =  2655.185492578626
        log(x) =  15.768539593227162
        sqrt fois log =  41868.39756708843
        sqrt fois log fois log =  660203.4847416097

7060010   pi(x) =  480492
        Li(x) =  480633.178015514
        diff  141.178015514335
        sqrt(x) =  2657.067932891442
        log(x) =  15.769957025899016
        sqrt fois log =  41901.84711659237
        sqrt fois log fois log =  660790.3283344524

7070010   pi(x) =  481088
        Li(x) =  481267.266690043
        diff  179.266690042918
        sqrt(x) =  2658.9490405045376
        log(x) =  15.771372452298912
        sqrt fois log =  41935.27564947989
        sqrt fois log fois log =  661376.8511577685

7080010   pi(x) =  481747
        Li(x) =  481901.298500079
        diff  154.298500078672
        sqrt(x) =  2660.8288182444207
        log(x) =  15.772785878098283
        sqrt fois log =  41968.68320844254
        sqrt fois log fois log =  661963.053832503

7090010   pi(x) =  482388
        Li(x) =  482535.273536115
        diff  147.273536115244
        sqrt(x) =  2662.707268927623
        log(x) =  15.77419730894455
        sqrt fois log =  42002.069836025206
        sqrt fois log fois log =  662548.9369775298

7100010   pi(x) =  483016
        Li(x) =  483169.191888374
        diff  153.191888373927
        sqrt(x) =  2664.5843953607473
        log(x) =  15.775606750461256
        sqrt fois log =  42035.435574626725
        sqrt fois log fois log =  663134.5012096607

7110010   pi(x) =  483679
        Li(x) =  483803.053646805
        diff  124.053646804823
        sqrt(x) =  2666.460200340519
        log(x) =  15.777014208248195
        sqrt fois log =  42068.78046650069
        sqrt fois log fois log =  663719.7471436555
```

```
7120010   pi(x) =  484287
        Li(x) =  484436.858901088
        diff  149.858901088184
        sqrt(x) =  2668.3346866538313
        log(x) =  15.778419687881554
        sqrt fois log =  42102.10455375607
        sqrt fois log fois log =  664304.6753922324

7130010   pi(x) =  484899
        Li(x) =  485070.607740636
        diff  171.607740635518
        sqrt(x) =  2670.2078570777967
        log(x) =  15.779823194914039
        sqrt fois log =  42135.407878357924
        sqrt fois log fois log =  664889.2865660761

7140010   pi(x) =  485514
        Li(x) =  485704.300254591
        diff  190.300254590577
        sqrt(x) =  2672.0797143797936
        log(x) =  15.78122473487501
        sqrt fois log =  42168.69048212815
        sqrt fois log fois log =  665473.5812738492

7150010   pi(x) =  486169
        Li(x) =  486337.936531831
        diff  168.936531830928
        sqrt(x) =  2673.9502613175137
        log(x) =  15.782624313270611
        sqrt fois log =  42201.952406746095
        sqrt fois log fois log =  666057.5601222002

7160010   pi(x) =  486808
        Li(x) =  486971.516660969
        diff  163.516660968889
        sqrt(x) =  2675.8195006390097
        log(x) =  15.784021935583898
        sqrt fois log =  42235.19369374928
        sqrt fois log fois log =  666641.2237157733

7170010   pi(x) =  487436
        Li(x) =  487605.040730353
        diff  169.040730352688
        sqrt(x) =  2677.6874350827434
        log(x) =  15.78541760727497
        sqrt fois log =  42268.414384534095
        sqrt fois log fois log =  667224.5726572191

7180010   pi(x) =  488052
        Li(x) =  488238.508828068
        diff  186.508828067512
        sqrt(x) =  2679.55406737763
        log(x) =  15.786811333781097
        sqrt fois log =  42301.61452035641
        sqrt fois log fois log =  667807.6075472016

7190010   pi(x) =  488682
        Li(x) =  488871.921041937
        diff  189.921041937021
        sqrt(x) =  2681.4194002430877
        log(x) =  15.788203120516846
        sqrt fois log =  42334.79414233233
        sqrt fois log fois log =  668390.3289844096
```

```
7200010   pi(x) =  489320
        Li(x) =  489505.277459524
        diff  185.277459524164
        sqrt(x) =  2683.283436389082
        log(x) =  15.789592972874209
        sqrt fois log =  42367.95329143881
        sqrt fois log fois log =  668972.7375655649

7210010   pi(x) =  489952
        Li(x) =  490138.578168132
        diff  186.578168132342
        sqrt(x) =  2685.1461785161714
        log(x) =  15.790980896222722
        sqrt fois log =  42401.09200851431
        sqrt fois log fois log =  669554.8338854314

7220010   pi(x) =  490581
        Li(x) =  490771.823254807
        diff  190.823254806688
        sqrt(x) =  2687.0076293155553
        log(x) =  15.7923668959096
        sqrt fois log =  42434.21033425951
        sqrt fois log fois log =  670136.618536825

7230010   pi(x) =  491216
        Li(x) =  491405.012806335
        diff  189.012806335115
        sqrt(x) =  2688.8677914691157
        log(x) =  15.793750977259855
        sqrt fois log =  42467.308309237895
        sqrt fois log fois log =  670718.0921106215

7240010   pi(x) =  491842
        Li(x) =  492038.146909249
        diff  196.146909249364
        sqrt(x) =  2690.726667649466
        log(x) =  15.795133145576415
        sqrt fois log =  42500.38597387645
        sqrt fois log fois log =  671299.2551957669

7250010   pi(x) =  492494
        Li(x) =  492671.225649826
        diff  177.225649826287
        sqrt(x) =  2692.5842605199937
        log(x) =  15.796513406140251
        sqrt fois log =  42533.443368466316
        sqrt fois log fois log =  671880.1083792853

7260010   pi(x) =  493110
        Li(x) =  493304.249114089
        diff  194.249114088656
        sqrt(x) =  2694.4405727349044
        log(x) =  15.7978917642105
        sqrt fois log =  42566.48053316337
        sqrt fois log fois log =  672460.6522462881

7270010   pi(x) =  493757
        Li(x) =  493937.217387807
        diff  180.217387806624
        sqrt(x) =  2696.295606939269
        log(x) =  15.799268225024575
        sqrt fois log =  42599.49750798894
        sqrt fois log fois log =  673040.8873799832
```

```
7280010   pi(x) =  494398
        Li(x) =  494570.130556499
        diff  172.130556498538
        sqrt(x) =  2698.1493657690635
        log(x) =  15.800642793798298
        sqrt fois log =  42632.4943328304
        sqrt fois log fois log =  673620.8143616834

7290010   pi(x) =  495035
        Li(x) =  495202.988705432
        diff  167.988705432159
        sqrt(x) =  2700.001851851217
        log(x) =  15.802015475726012
        sqrt fois log =  42665.471047441824
        sqrt fois log fois log =  674200.4337708158

7300010   pi(x) =  495668
        Li(x) =  495835.791919626
        diff  167.791919625713
        sqrt(x) =  2701.853067803651
        log(x) =  15.803386275980696
        sqrt fois log =  42698.42769144456
        sqrt fois log fois log =  674779.746184929

7310010   pi(x) =  496294
        Li(x) =  496468.540283849
        diff  174.540283848939
        sqrt(x) =  2703.7030162353262
        log(x) =  15.804755199714082
        sqrt fois log =  42731.364304327915
        sqrt fois log fois log =  675358.7521797033

7320010   pi(x) =  496924
        Li(x) =  497101.233882624
        diff  177.233882624074
        sqrt(x) =  2705.551699746283
        log(x) =  15.80612225205678
        sqrt fois log =  42764.28092544976
        sqrt fois log fois log =  675937.4523289588

7330010   pi(x) =  497560
        Li(x) =  497733.872800227
        diff  173.872800227196
        sqrt(x) =  2707.3991209276846
        log(x) =  15.807487438118384
        sqrt fois log =  42797.17759403713
        sqrt fois log fois log =  676515.8472046636

7340010   pi(x) =  498177
        Li(x) =  498366.457120689
        diff  189.45712068904
        sqrt(x) =  2709.245282361861
        log(x) =  15.808850762987591
        sqrt fois log =  42830.05434918684
        sqrt fois log fois log =  677093.9373769423

7350010   pi(x) =  498797
        Li(x) =  498998.986927796
        diff  201.986927795922
        sqrt(x) =  2711.0901866223485
        log(x) =  15.810212231732311
        sqrt fois log =  42862.91122986609
        sqrt fois log fois log =  677671.7234140851
```

7360010   pi(x) = 499439
Li(x) = 499631.462305091
diff 192.462305091147
sqrt(x) = 2712.933836273933
log(x) = 15.811571849399789
sqrt fois log = 42895.748274913094
sqrt fois log fois log = 678249.2058825555

7370010   pi(x) = 500083
Li(x) = 500263.883335876
diff 180.883335875871
sqrt(x) = 2714.7762338726925
log(x) = 15.812929621016702
sqrt fois log = 42928.565523037665
sqrt fois log fois log = 678826.3853469986

7380010   pi(x) = 500717
Li(x) = 500896.25010321
diff 179.250103209983
sqrt(x) = 2716.617381966036
log(x) = 15.814285551589288
sqrt fois log = 42961.36301282181
sqrt fois log fois log = 679403.2623702503

7390010   pi(x) = 501344
Li(x) = 501528.562689913
diff 184.56268991332
sqrt(x) = 2718.4572830927473
log(x) = 15.815639646103442
sqrt fois log = 42994.1407827203
sqrt fois log fois log = 679979.837513344

7400010   pi(x) = 501962
Li(x) = 502160.821178567
diff 198.821178566664
sqrt(x) = 2720.2959397830227
log(x) = 15.816991909524836
sqrt fois log = 43026.89887106133
sqrt fois log fois log = 680556.1113355204

7410010   pi(x) = 502582
Li(x) = 502793.025651513
diff 211.025651512726
sqrt(x) = 2722.133354558516
log(x) = 15.818342346799025
sqrt fois log = 43059.63731604706
sqrt fois log fois log = 681132.0843942347

7420010   pi(x) = 503226
Li(x) = 503425.176190857
diff 199.176190857135
sqrt(x) = 2723.9695299323744
log(x) = 15.81969096285155
sqrt fois log = 43092.35615575417
sqrt fois log fois log = 681707.7572451645

7430010   pi(x) = 503856
Li(x) = 504057.272878469
diff 201.272878469375
sqrt(x) = 2725.8044684092806
log(x) = 15.821037762588057
sqrt fois log = 43125.055428134496
sqrt fois log fois log = 682283.1304422189

```
7440010   pi(x) =  504491
        Li(x) =  504689.315795984
        diff  198.315795984003
        sqrt(x) =  2727.638172485493
        log(x) =  15.822382750894393
        sqrt fois log =  43157.73517101557
        sqrt fois log fois log =  682858.2045375451

7450010   pi(x) =  505148
        Li(x) =  505321.305024801
        diff  173.305024801462
        sqrt(x) =  2729.470644648885
        log(x) =  15.823725932636721
        sqrt fois log =  43190.39542210123
        sqrt fois log fois log =  683432.9800815375

7460010   pi(x) =  505763
        Li(x) =  505953.240646089
        diff  190.240646088962
        sqrt(x) =  2731.301887378984
        log(x) =  15.825067312661618
        sqrt fois log =  43223.03621897214
        sqrt fois log fois log =  684007.4576228452

7470010   pi(x) =  506373
        Li(x) =  506585.122740782
        diff  212.122740781866
        sqrt(x) =  2733.1319031470107
        log(x) =  15.82640689579619
        sqrt fois log =  43255.657599086415
        sqrt fois log fois log =  684581.6377083801

7480010   pi(x) =  507019
        Li(x) =  507216.951389584
        diff  197.951389584166
        sqrt(x) =  2734.9606944159177
        log(x) =  15.827744686848161
        sqrt fois log =  43288.259599780096
        sqrt fois log fois log =  685155.5208833234

7490010   pi(x) =  507650
        Li(x) =  507848.72667297
        diff  198.726672969817
        sqrt(x) =  2736.78826364043
        log(x) =  15.829080690605995
        sqrt fois log =  43320.84225826784
        sqrt fois log fois log =  685729.1076911357

7500010   pi(x) =  508261
        Li(x) =  508480.448671183
        diff  219.448671183491
        sqrt(x) =  2738.61461326708
        log(x) =  15.830414911838984
        sqrt fois log =  43353.405611643335
        sqrt fois log fois log =  686302.3986735626

7510010   pi(x) =  508887
        Li(x) =  509112.117464242
        diff  225.117464241688
        sqrt(x) =  2740.4397457342498
        log(x) =  15.831747355297354
        sqrt fois log =  43385.949696879965
        sqrt fois log fois log =  686875.3943706434
```

7520010   pi(x) = 509513
Li(x) = 509743.733131934
diff 230.733131933608
sqrt(x) = 2742.2636634722053
log(x) = 15.833078025712373
sqrt fois log = 43418.474550831284
sqrt fois log fois log = 687448.0953207187

7530010   pi(x) = 510127
Li(x) = 510375.295753822
diff 248.29575382208
sqrt(x) = 2744.086368903136
log(x) = 15.834406927796444
sqrt fois log = 43450.98021023161
sqrt fois log fois log = 688020.5020604376

7540010   pi(x) = 510765
Li(x) = 511006.805409245
diff 241.805409244553
sqrt(x) = 2745.9078644411943
log(x) = 15.835734066243207
sqrt fois log = 43483.46671169656
sqrt fois log fois log = 688592.6151247657

7550010   pi(x) = 511417
Li(x) = 511638.262177314
diff 221.262177314085
sqrt(x) = 2747.728152492528
log(x) = 15.837059445727641
sqrt fois log = 43515.93409172355
sqrt fois log fois log = 689164.4350469919

7560010   pi(x) = 512062
Li(x) = 512269.66613692
diff 207.666136919986
sqrt(x) = 2749.5472354553212
log(x) = 15.838383070906163
sqrt fois log = 43548.3823866924
sqrt fois log fois log = 689735.962358737

7570010   pi(x) = 512679
Li(x) = 512901.017366729
diff 222.017366729269
sqrt(x) = 2751.365115719831
log(x) = 15.839704946416722
sqrt fois log = 43580.81163286582
sqrt fois log fois log = 690307.1975899602

7580010   pi(x) = 513285
Li(x) = 513532.315945187
diff 247.315945187001
sqrt(x) = 2753.1817956684226
log(x) = 15.841025076878898
sqrt fois log = 43613.221866389955
sqrt fois log fois log = 690878.1412689664

7590010   pi(x) = 513922
Li(x) = 514163.561950518
diff 241.561950517702
sqrt(x) = 2754.997277675606
log(x) = 15.842343466894002
sqrt fois log = 43645.6131232949
sqrt fois log fois log = 691448.793922414

```
7600010   pi(x) =  514565
        Li(x) =  514794.755460726
        diff  229.755460725864
        sqrt(x) =  2756.811564108073
        log(x) =  15.843660121045168
        sqrt fois log =  43677.985439495234
        sqrt fois log fois log =  692019.1560753222

7610010   pi(x) =  515223
        Li(x) =  515425.896553597
        diff  202.896553597238
        sqrt(x) =  2758.624657324733
        log(x) =  15.844975043897453
        sqrt fois log =  43710.338850790555
        sqrt fois log fois log =  692589.2282510777

7620010   pi(x) =  515838
        Li(x) =  516056.985306699
        diff  218.985306699295
        sqrt(x) =  2760.436559676748
        log(x) =  15.846288239997925
        sqrt fois log =  43742.67339286598
        sqrt fois log fois log =  693159.0109714423

7630010   pi(x) =  516488
        Li(x) =  516688.021797383
        diff  200.021797382564
        sqrt(x) =  2762.2472735075694
        log(x) =  15.84759971387577
        sqrt fois log =  43774.98910129268
        sqrt fois log fois log =  693728.5047565608

7640010   pi(x) =  517098
        Li(x) =  517319.006102781
        diff  221.006102781277
        sqrt(x) =  2764.056801152972
        log(x) =  15.84890947004237
        sqrt fois log =  43807.28601152836
        sqrt fois log fois log =  694297.7101249666

7650010   pi(x) =  517740
        Li(x) =  517949.938299814
        diff  209.938299814297
        sqrt(x) =  2765.8651449410904
        log(x) =  15.850217512991406
        sqrt fois log =  43839.56415891778
        sqrt fois log fois log =  694866.627593589

7660010   pi(x) =  518373
        Li(x) =  518580.818465186
        diff  207.818465185934
        sqrt(x) =  2767.672307192454
        log(x) =  15.851523847198951
        sqrt fois log =  43871.82357869332
        sqrt fois log fois log =  695435.2576777625

7670010   pi(x) =  518998
        Li(x) =  519211.646675387
        diff  213.646675387048
        sqrt(x) =  2769.478290220019
        log(x) =  15.852828477123554
        sqrt fois log =  43904.06430597537
        sqrt fois log fois log =  696003.60089123
```

```
7680010   pi(x) =  519628
        Li(x) =  519842.423006696
        diff  214.423006695637
        sqrt(x) =  2771.2830963292076
        log(x) =  15.85413140720634
        sqrt fois log =  43936.28637577293
        sqrt fois log fois log =  696571.6577461537

7690010   pi(x) =  520267
        Li(x) =  520473.147535178
        diff  206.147535177995
        sqrt(x) =  2773.0867278179385
        log(x) =  15.855432641871099
        sqrt fois log =  43968.489822984055
        sqrt fois log fois log =  697139.4287531186

7700010   pi(x) =  520910
        Li(x) =  521103.820336689
        diff  193.820336689241
        sqrt(x) =  2774.889186976662
        log(x) =  15.856732185524368
        sqrt fois log =  44000.674682396384
        sqrt fois log fois log =  697706.914421142

7710010   pi(x) =  521523
        Li(x) =  521734.441486875
        diff  211.441486874537
        sqrt(x) =  2776.6904760883954
        log(x) =  15.858030042555532
        sqrt fois log =  44032.840988687596
        sqrt fois log fois log =  698274.1152576786

7720010   pi(x) =  522168
        Li(x) =  522365.01106117
        diff  197.011061169673
        sqrt(x) =  2778.490597428755
        log(x) =  15.859326217336907
        sqrt fois log =  44064.98877642594
        sqrt fois log fois log =  698841.0317686284

7730010   pi(x) =  522797
        Li(x) =  522995.529134802
        diff  198.529134801996
        sqrt(x) =  2780.2895532659904
        log(x) =  15.86062071422383
        sqrt fois log =  44097.118080070686
        sqrt fois log fois log =  699407.6644583433

7740010   pi(x) =  523404
        Li(x) =  523625.995782791
        diff  221.995782791346
        sqrt(x) =  2782.087345861017
        log(x) =  15.86191353755474
        sqrt fois log =  44129.228933972605
        sqrt fois log fois log =  699974.0138296324

7750010   pi(x) =  524027
        Li(x) =  524256.411079951
        diff  229.411079950805
        sqrt(x) =  2783.883977467452
        log(x) =  15.863204691651278
        sqrt fois log =  44161.32137237451
        sqrt fois log fois log =  700540.0803837711
```

```
7760010   pi(x) =  524652
        Li(x) =  524886.775100888
        diff  234.77510088752
        sqrt(x) =  2785.6794503316423
        log(x) =  15.864494180818365
        sqrt fois log =  44193.39542941164
        sqrt fois log fois log =  701105.864620506

7770010   pi(x) =  525265
        Li(x) =  525517.087920004
        diff  252.087920003571
        sqrt(x) =  2787.473766692702
        log(x) =  15.865782009344288
        sqrt fois log =  44225.45113911223
        sqrt fois log fois log =  701671.3670380617

7780010   pi(x) =  525912
        Li(x) =  526147.349611497
        diff  235.349611496902
        sqrt(x) =  2789.266928782543
        log(x) =  15.867068181500793
        sqrt fois log =  44257.488535397926
        sqrt fois log fois log =  702236.5881331485

7790010   pi(x) =  526522
        Li(x) =  526777.560249362
        diff  255.560249361792
        sqrt(x) =  2791.0589388259073
        log(x) =  15.868352701543154
        sqrt fois log =  44289.507652084256
        sqrt fois log fois log =  702801.5284009674

7800010   pi(x) =  527154
        Li(x) =  527407.71990739
        diff  253.719907390187
        sqrt(x) =  2792.8497990403994
        log(x) =  15.86963557371028
        sqrt fois log =  44321.50852288113
        sqrt fois log fois log =  703366.1883352177

7810010   pi(x) =  527792
        Li(x) =  528037.828659172
        diff  245.82865917217
        sqrt(x) =  2794.639511636519
        log(x) =  15.87091680222478
        sqrt fois log =  44353.49118139328
        sqrt fois log fois log =  703930.5684281032

7820010   pi(x) =  528424
        Li(x) =  528667.886578097
        diff  243.886578096775
        sqrt(x) =  2796.4280788176907
        log(x) =  15.872196391293055
        sqrt fois log =  44385.45566112072
        sqrt fois log fois log =  704494.6691703382

7830010   pi(x) =  529047
        Li(x) =  529297.893737353
        diff  250.893737352919
        sqrt(x) =  2798.2155027802987
        log(x) =  15.873474345105379
        sqrt fois log =  44417.40199545922
        sqrt fois log fois log =  705058.4910511544
```

```
7840010   pi(x) =  529688
       Li(x) =  529927.85020993
       diff  239.850209930097
       sqrt(x) =  2800.0017857137163
       log(x) =  15.87475066783598
       sqrt fois log =  44449.33021770076
       sqrt fois log fois log =  705622.0345583071

7850010   pi(x) =  530334
       Li(x) =  530557.756068619
       diff  223.756068619434
       sqrt(x) =  2801.7869298003375
       log(x) =  15.87602536364313
       sqrt fois log =  44481.240361033975
       sqrt fois log fois log =  706185.3001780818

7860010   pi(x) =  530964
       Li(x) =  531187.611386014
       diff  223.611386014149
       sqrt(x) =  2803.5709372156075
       log(x) =  15.87729843666921
       sqrt fois log =  44513.1324585446
       sqrt fois log fois log =  706748.2883952997

7870010   pi(x) =  531593
       Li(x) =  531817.41623451
       diff  224.416234510252
       sqrt(x) =  2805.353810128056
       log(x) =  15.87856989104081
       sqrt fois log =  44545.00654321597
       sqrt fois log fois log =  707310.9996933249

7880010   pi(x) =  532240
       Li(x) =  532447.170686308
       diff  207.170686307945
       sqrt(x) =  2807.1355506993245
       log(x) =  15.87983973086879
       sqrt fois log =  44576.862647929374
       sqrt fois log fois log =  707873.4345540698

7890010   pi(x) =  532880
       Li(x) =  533076.874813412
       diff  196.87481341185
       sqrt(x) =  2808.9161610842
       log(x) =  15.881107960248377
       sqrt fois log =  44608.70080546461
       sqrt fois log fois log =  708435.5934580021

7900010   pi(x) =  533508
       Li(x) =  533706.528687632
       diff  198.528687631828
       sqrt(x) =  2810.6956434306435
       log(x) =  15.882374583259233
       sqrt fois log =  44640.52104850031
       sqrt fois log fois log =  708997.4768841501

7910010   pi(x) =  534138
       Li(x) =  534336.132380584
       diff  198.132380584022
       sqrt(x) =  2812.473999879821
       log(x) =  15.883639603965541
       sqrt fois log =  44672.3234096145
       sqrt fois log fois log =  709559.0853101099
```

```
7920010   pi(x) =  534752
        Li(x) =  534965.685963691
        diff  213.685963691445
        sqrt(x) =  2814.2512325661332
        log(x) =  15.884903026416074
        sqrt fois log =  44704.107921284936
        sqrt fois log fois log =  710120.4192120499

7930010   pi(x) =  535386
        Li(x) =  535595.189508185
        diff  209.189508184791
        sqrt(x) =  2816.0273436172456
        log(x) =  15.886164854644283
        sqrt fois log =  44735.87461588959
        sqrt fois log fois log =  710681.4790647185

7940010   pi(x) =  536013
        Li(x) =  536224.643085103
        diff  211.643085103016
        sqrt(x) =  2817.802335154118
        log(x) =  15.88742509266837
        sqrt fois log =  44767.62352570706
        sqrt fois log fois log =  711242.2653414492

7950010   pi(x) =  536653
        Li(x) =  536854.046765295
        diff  201.046765294624
        sqrt(x) =  2819.5762092910345
        log(x) =  15.88868374449136
        sqrt fois log =  44799.35468291703
        sqrt fois log fois log =  711802.7785141666

7960010   pi(x) =  537258
        Li(x) =  537483.400619418
        diff  225.400619417662
        sqrt(x) =  2821.3489681356327
        log(x) =  15.889940814101184
        sqrt fois log =  44831.06811960065
        sqrt fois log fois log =  712363.0190533928

7970010   pi(x) =  537890
        Li(x) =  538112.704717941
        diff  222.704717941
        sqrt(x) =  2823.1206137889326
        log(x) =  15.891196305470755
        sqrt fois log =  44862.763867741014
        sqrt fois log fois log =  712922.9874282529

7980010   pi(x) =  538528
        Li(x) =  538741.959131145
        diff  213.959131145035
        sqrt(x) =  2824.8911483453658
        log(x) =  15.892450222558038
        sqrt fois log =  44894.44195922354
        sqrt fois log fois log =  713482.684106481

7990010   pi(x) =  539163
        Li(x) =  539371.163929122
        diff  208.163929122267
        sqrt(x) =  2826.6605738928047
        log(x) =  15.89370256930613
        sqrt fois log =  44926.10242583641
        sqrt fois log fois log =  714042.1095544265
```

```
8000010   pi(x) =  539778
       Li(x) =  540000.319181778
       diff  222.319181778003
       sqrt(x) =  2828.4288925125907
       log(x) =  15.894953349643329
       sqrt fois log =  44957.74529927097
       sqrt fois log fois log =  714601.2642370588

8010010   pi(x) =  540414
       Li(x) =  540629.424958831
       diff  215.424958831398
       sqrt(x) =  2830.196106279563
       log(x) =  15.896202567483213
       sqrt fois log =  44989.37061112218
       sqrt fois log fois log =  715160.1486179742

8020010   pi(x) =  541025
       Li(x) =  541258.481329816
       diff  233.481329815811
       sqrt(x) =  2831.9622172620875
       log(x) =  15.897450226724713
       sqrt fois log =  45020.978392888996
       sqrt fois log fois log =  715718.7631594015

8030010   pi(x) =  541654
       Li(x) =  541887.48836408
       diff  233.488364079734
       sqrt(x) =  2833.7272275220844
       log(x) =  15.898696331252182
       sqrt fois log =  45052.568675974784
       sqrt fois log fois log =  716277.1083222072

8040010   pi(x) =  542259
       Li(x) =  542516.446130788
       diff  257.446130787604
       sqrt(x) =  2835.4911391150563
       log(x) =  15.89994088493547
       sqrt fois log =  45084.14149168773
       sqrt fois log fois log =  716835.1845659014

8050010   pi(x) =  542899
       Li(x) =  543145.35469892
       diff  246.35469892004
       sqrt(x) =  2837.253954090116
       log(x) =  15.90118389163
       sqrt fois log =  45115.69687124128
       sqrt fois log fois log =  717392.9923486437

8060010   pi(x) =  543549
       Li(x) =  543774.214137275
       diff  225.21413727547
       sqrt(x) =  2839.015674490016
       log(x) =  15.902425355176831
       sqrt fois log =  45147.23484575448
       sqrt fois log fois log =  717950.532127249

8070010   pi(x) =  544176
       Li(x) =  544403.02451447
       diff  227.0245144699
       sqrt(x) =  2840.7763023511725
       log(x) =  15.903665279402738
       sqrt fois log =  45178.755446252435
       sqrt fois log fois log =  718507.8043571922
```

```
8080010   pi(x) =  544799
        Li(x) =  545031.785898938
        diff  232.78589893796
        sqrt(x) =  2842.5358397036966
        log(x) =  15.904903668120275
        sqrt fois log =  45210.25870366667
        sqrt fois log fois log =  719064.8094926146

8090010   pi(x) =  545417
        Li(x) =  545660.498358934
        diff  243.498358933837
        sqrt(x) =  2844.29428857142
        log(x) =  15.906140525127853
        sqrt fois log =  45241.74464883556
        sqrt fois log fois log =  719621.5479863295

8100010   pi(x) =  546024
        Li(x) =  546289.161962532
        diff  265.161962531856
        sqrt(x) =  2846.0516509719214
        log(x) =  15.907375854209807
        sqrt fois log =  45273.2133125047
        sqrt fois log fois log =  720178.0202898273

8110010   pi(x) =  546644
        Li(x) =  546917.776777627
        diff  273.776777626947
        sqrt(x) =  2847.8079289165553
        log(x) =  15.908609659136458
        sqrt fois log =  45304.664725327304
        sqrt fois log fois log =  720734.2268532807

8120010   pi(x) =  547276
        Li(x) =  547546.342871935
        diff  270.342871935456
        sqrt(x) =  2849.563124410477
        log(x) =  15.909841943664196
        sqrt fois log =  45336.098917864605
        sqrt fois log fois log =  721290.1681255512

8130010   pi(x) =  547928
        Li(x) =  548174.860312996
        diff  246.860312996083
        sqrt(x) =  2851.317239452671
        log(x) =  15.911072711535537
        sqrt fois log =  45367.51592058623
        sqrt fois log fois log =  721845.8445541937

8140010   pi(x) =  548530
        Li(x) =  548803.32916817
        diff  273.329168170225
        sqrt(x) =  2853.070276035976
        log(x) =  15.912301966479196
        sqrt fois log =  45398.9157638706
        sqrt fois log fois log =  722401.2565854617

8150010   pi(x) =  549150
        Li(x) =  549431.749504643
        diff  281.74950464291
        sqrt(x) =  2854.8222361471126
        log(x) =  15.913529712210158
        sqrt fois log =  45430.29847800532
        sqrt fois log fois log =  722956.4046643137
```

```
8160010   pi(x) =  549798
        Li(x) =  550060.121389423
        diff  262.121389423264
        sqrt(x) =  2856.573121766709
        log(x) =  15.914755952429735
        sqrt fois log =  45461.66409318752
        sqrt fois log fois log =  723511.2892344173

8170010   pi(x) =  550430
        Li(x) =  550688.444889345
        diff  258.444889345439
        sqrt(x) =  2858.3229348693267
        log(x) =  15.915980690825645
        sqrt fois log =  45493.01263952429
        sqrt fois log fois log =  724065.9107381557

8180010   pi(x) =  551053
        Li(x) =  551316.720071069
        diff  263.720071068965
        sqrt(x) =  2860.071677423487
        log(x) =  15.91720393107207
        sqrt fois log =  45524.344147033014
        sqrt fois log fois log =  724620.2696166317

8190010   pi(x) =  551701
        Li(x) =  551944.94700108
        diff  243.947001079679
        sqrt(x) =  2861.819351391698
        log(x) =  15.918425676829727
        sqrt fois log =  45555.6586456418
        sqrt fois log fois log =  725174.3663096747

8200010   pi(x) =  552320
        Li(x) =  552573.12574569
        diff  253.125745690311
        sqrt(x) =  2863.5659587304776
        log(x) =  15.919645931745933
        sqrt fois log =  45586.95616518979
        sqrt fois log fois log =  725728.2012558439

8210010   pi(x) =  552957
        Li(x) =  553201.256371041
        diff  244.256371041061
        sqrt(x) =  2865.311501390381
        log(x) =  15.920864699454667
        sqrt fois log =  45618.23673542757
        sqrt fois log fois log =  726281.7748924348

8220010   pi(x) =  553587
        Li(x) =  553829.3389431
        diff  242.338943100418
        sqrt(x) =  2867.0559813160257
        log(x) =  15.922081983576636
        sqrt fois log =  45649.50038601753
        sqrt fois log fois log =  726835.0876554843

8230010   pi(x) =  554211
        Li(x) =  554457.373527666
        diff  246.373527665855
        sqrt(x) =  2868.799400446117
        log(x) =  15.923297787719344
        sqrt fois log =  45680.74714653424
        sqrt fois log fois log =  727388.1399797753
```

```
8240010   pi(x) =  554848
        Li(x) =  555085.360190364
        diff  237.360190364067
        sqrt(x) =  2870.541760713472
        log(x) =  15.924512115477151
        sqrt fois log =  45711.977046464795
        sqrt fois log fois log =  727940.9322988421

8250010   pi(x) =  555479
        Li(x) =  555713.298996652
        diff  234.298996652011
        sqrt(x) =  2872.2830640450466
        log(x) =  15.925724970431341
        sqrt fois log =  45743.19011520924
        sqrt fois log fois log =  728493.4650449759

8260010   pi(x) =  556098
        Li(x) =  556341.190011818
        diff  243.190011817729
        sqrt(x) =  2874.023312361958
        log(x) =  15.92693635615018
        sqrt fois log =  45774.38638208083
        sqrt fois log fois log =  729045.7386492289

8270010   pi(x) =  556716
        Li(x) =  556969.03330098
        diff  253.033300980343
        sqrt(x) =  2875.7625075795113
        log(x) =  15.928146276188986
        sqrt fois log =  45805.56587630649
        sqrt fois log fois log =  729597.7535414206

8280010   pi(x) =  557344
        Li(x) =  557596.828929091
        diff  252.828929091105
        sqrt(x) =  2877.5006516072244
        log(x) =  15.929354734090182
        sqrt fois log =  45836.72862702712
        sqrt fois log fois log =  730149.5101501415

8290010   pi(x) =  557976
        Li(x) =  558224.576960934
        diff  248.576960934326
        sqrt(x) =  2879.237746348849
        log(x) =  15.930561733383367
        sqrt fois log =  45867.874663297946
        sqrt fois log fois log =  730701.0089027587

8300010   pi(x) =  558598
        Li(x) =  558852.277461127
        diff  254.277461127378
        sqrt(x) =  2880.9737937024
        log(x) =  15.931767277585378
        sqrt fois log =  45899.0040140889
        sqrt fois log fois log =  731252.2502254215

8310010   pi(x) =  559229
        Li(x) =  559479.930494122
        diff  250.930494121742
        sqrt(x) =  2882.708795560176
        log(x) =  15.932971370200342
        sqrt fois log =  45930.11670828499
        sqrt fois log fois log =  731803.2345430652
```

8320010   pi(x) = 559875
Li(x) = 560107.536124203
diff 232.536124203354
sqrt(x) = 2884.442753808784
log(x) = 15.934174014719746
sqrt fois log = 45961.21277468659
sqrt fois log fois log = 732353.9622794163

8330010   pi(x) = 560492
Li(x) = 560735.094415494
diff 243.094415493542
sqrt(x) = 2886.175670329164
log(x) = 15.935375214622496
sqrt fois log = 45992.292242009826
sqrt fois log fois log = 732904.433856998

8340010   pi(x) = 561109
Li(x) = 561362.605431949
diff 253.605431949487
sqrt(x) = 2887.9075469966137
log(x) = 15.936574973374977
sqrt fois log = 46023.35513888695
sqrt fois log fois log = 733454.6496971345

8350010   pi(x) = 561766
Li(x) = 561990.069237365
diff 224.069237364922
sqrt(x) = 2889.63838568081
log(x) = 15.937773294431112
sqrt fois log = 46054.401493866644
sqrt fois log fois log = 734004.6102199561

8360010   pi(x) = 562393
Li(x) = 562617.48589537
diff 224.485895370366
sqrt(x) = 2891.3681882458345
log(x) = 15.938970181232417
sqrt fois log = 46085.43133541435
sqrt fois log fois log = 734554.3158444035

8370010   pi(x) = 563000
Li(x) = 563244.855469434
diff 244.855469434406
sqrt(x) = 2893.096956550195
log(x) = 15.940165637208075
sqrt fois log = 46116.444691912686
sqrt fois log fois log = 735103.7669882333

8380010   pi(x) = 563623
Li(x) = 563872.178022864
diff 249.178022863693
sqrt(x) = 2894.82469244685
log(x) = 15.941359665774977
sqrt fois log = 46147.44159166166
sqrt fois log fois log = 735652.9640680219

8390010   pi(x) = 564258
Li(x) = 564499.453618804
diff 241.453618803993
sqrt(x) = 2896.551397783233
log(x) = 15.942552270337792
sqrt fois log = 46178.42206287919
sqrt fois log fois log = 736201.9074991713

```
8400010   pi(x) =  564877
        Li(x) =  565126.68232024
        diff  249.682320240303
        sqrt(x) =  2898.277074401273
        log(x) =  15.943743454289024
        sqrt fois log =  46209.386133701235
        sqrt fois log fois log =  736750.597695913

8410010   pi(x) =  565495
        Li(x) =  565753.864189998
        diff  258.864189998014
        sqrt(x) =  2900.0017241374185
        log(x) =  15.944933221009066
        sqrt fois log =  46240.333832182296
        sqrt fois log fois log =  737299.0350713129

8420010   pi(x) =  566136
        Li(x) =  566380.999290743
        diff  244.999290743144
        sqrt(x) =  2901.725348822662
        log(x) =  15.946121573866261
        sqrt fois log =  46271.265186295655
        sqrt fois log fois log =  737847.2200372759

8430010   pi(x) =  566746
        Li(x) =  567008.087684983
        diff  262.087684982922
        sqrt(x) =  2903.44795028256
        log(x) =  15.947308516216955
        sqrt fois log =  46302.180223933734
        sqrt fois log fois log =  738395.1530045507

8440010   pi(x) =  567365
        Li(x) =  567635.129435067
        diff  270.129435066599
        sqrt(x) =  2905.169530337257
        log(x) =  15.94849405140556
        sqrt fois log =  46333.078972908435
        sqrt fois log fois log =  738942.8343827341

8450010   pi(x) =  567968
        Li(x) =  568262.124603186
        diff  294.124603185919
        sqrt(x) =  2906.890090801508
        log(x) =  15.94967818276461
        sqrt fois log =  46363.96146095145
        sqrt fois log fois log =  739490.2645802764

8460010   pi(x) =  568607
        Li(x) =  568889.073251376
        diff  282.073251375579
        sqrt(x) =  2908.6096334846998
        log(x) =  15.950860913614804
        sqrt fois log =  46394.82771571458
        sqrt fois log fois log =  740037.4440044845

8470010   pi(x) =  569218
        Li(x) =  569515.975441514
        diff  297.975441513932
        sqrt(x) =  2910.3281601908743
        log(x) =  15.952042247265084
        sqrt fois log =  46425.67776477009
        sqrt fois log fois log =  740584.3730615276
```

```
8480010   pi(x) =  569852
        Li(x) =  570142.831235324
        diff  290.8312353238
        sqrt(x) =  2912.0456727187507
        log(x) =  15.953222187012674
        sqrt fois log =  46456.51163561102
        sqrt fois log fois log =  741131.0521564422

8490010   pi(x) =  570491
        Li(x) =  570769.640694372
        diff  278.640694372356
        sqrt(x) =  2913.7621728617455
        log(x) =  15.954400736143137
        sqrt fois log =  46487.32935565146
        sqrt fois log fois log =  741677.4816931342

8500010   pi(x) =  571120
        Li(x) =  571396.403880073
        diff  276.403880072641
        sqrt(x) =  2915.4776624079973
        log(x) =  15.955577897930441
        sqrt fois log =  46518.13095222695
        sqrt fois log fois log =  742223.6620743863

8510010   pi(x) =  571760
        Li(x) =  572023.120853683
        diff  263.120853683446
        sqrt(x) =  2917.192143140386
        log(x) =  15.956753675636998
        sqrt fois log =  46548.91645259473
        sqrt fois log fois log =  742769.5937018604

8520010   pi(x) =  572391
        Li(x) =  572649.79167631
        diff  258.791676309891
        sqrt(x) =  2918.905616836557
        log(x) =  15.95792807251373
        sqrt fois log =  46579.68588393409
        sqrt fois log fois log =  743315.2769761033

8530010   pi(x) =  573031
        Li(x) =  573276.416408904
        diff  245.416408904479
        sqrt(x) =  2920.6180852689386
        log(x) =  15.959101091800116
        sqrt fois log =  46610.43927334668
        sqrt fois log fois log =  743860.71229655

8540010   pi(x) =  573655
        Li(x) =  573902.995112267
        diff  247.995112267206
        sqrt(x) =  2922.3295502047677
        log(x) =  15.960272736724255
        sqrt fois log =  46641.17664785681
        sqrt fois log fois log =  744405.900061529

8550010   pi(x) =  574276
        Li(x) =  574529.527847046
        diff  253.527847046265
        sqrt(x) =  2924.040013406109
        log(x) =  15.961443010502903
        sqrt fois log =  46671.89803441176
        sqrt fois log fois log =  744950.8406682657
```

```
8560010   pi(x) =  574920
        Li(x) =  575156.014673739
        diff  236.014673738624
        sqrt(x) =  2925.7494766298773
        log(x) =  15.962611916341542
        sqrt fois log =  46702.60345988211
        sqrt fois log fois log =  745495.5345128878

8570010   pi(x) =  575537
        Li(x) =  575782.455652691
        diff  245.455652690609
        sqrt(x) =  2927.4579416278552
        log(x) =  15.963779457434425
        sqrt fois log =  46733.29295106202
        sqrt fois log fois log =  746039.9819904289

8580010   pi(x) =  576191
        Li(x) =  576408.850844098
        diff  217.850844098488
        sqrt(x) =  2929.1654101467198
        log(x) =  15.96494563696463
        sqrt fois log =  46763.966534669584
        sqrt fois log fois log =  746584.1834948332

8590010   pi(x) =  576816
        Li(x) =  577035.200308009
        diff  219.200308008585
        sqrt(x) =  2930.8718839280573
        log(x) =  15.966110458104115
        sqrt fois log =  46794.62423734707
        sqrt fois log fois log =  747128.1394189593

8600010   pi(x) =  577439
        Li(x) =  577661.504104319
        diff  222.504104318679
        sqrt(x) =  2932.5773647083893
        log(x) =  15.967273924013758
        sqrt fois log =  46825.26608566125
        sqrt fois log fois log =  747671.8501545847

8610010   pi(x) =  578082
        Li(x) =  578287.762292778
        diff  205.76229277777
        sqrt(x) =  2934.2818542191885
        log(x) =  15.968436037843425
        sqrt fois log =  46855.89210610372
        sqrt fois log fois log =  748215.3160924099

8620010   pi(x) =  578707
        Li(x) =  578913.974932987
        diff  206.974932986894
        sqrt(x) =  2935.985354186904
        log(x) =  15.96959680273201
        sqrt fois log =  46886.50232509118
        sqrt fois log fois log =  748758.5376220631

8630010   pi(x) =  579330
        Li(x) =  579540.1420844
        diff  210.142084399704
        sqrt(x) =  2937.687866332977
        log(x) =  15.970756221807491
        sqrt fois log =  46917.09676896577
        sqrt fois log fois log =  749301.5151321042
```

```
8640010   pi(x) =  579965
       Li(x) =  580166.263806323
       diff  201.263806323055
       sqrt(x) =  2939.389392373865
       log(x) =  15.971914298186976
       sqrt fois log =  46947.67546399526
       sqrt fois log fois log =  749844.2490100279

8650010   pi(x) =  580567
       Li(x) =  580792.340157917
       diff  225.340157917468
       sqrt(x) =  2941.0899340210594
       log(x) =  15.973071034976758
       sqrt fois log =  46978.23843637349
       sqrt fois log fois log =  750386.7396422692

8660010   pi(x) =  581216
       Li(x) =  581418.371198197
       diff  202.371198197361
       sqrt(x) =  2942.789492981107
       log(x) =  15.974226435272362
       sqrt fois log =  47008.785712220546
       sqrt fois log fois log =  750928.9874142072

8670010   pi(x) =  581846
       Li(x) =  582044.356986032
       diff  198.356986032333
       sqrt(x) =  2944.4880709556287
       log(x) =  15.975380502158597
       sqrt fois log =  47039.31731758313
       sqrt fois log fois log =  751470.9927101687

8680010   pi(x) =  582437
       Li(x) =  582670.297580147
       diff  233.297580146696
       sqrt(x) =  2946.1856696413415
       log(x) =  15.976533238709601
       sqrt fois log =  47069.833278434795
       sqrt fois log fois log =  752012.7559134328

8690010   pi(x) =  583086
       Li(x) =  583296.193039121
       diff  210.19303912099
       sqrt(x) =  2947.882290730076
       log(x) =  15.977684647988898
       sqrt fois log =  47100.33362067628
       sqrt fois log fois log =  752554.2774062348

8700010   pi(x) =  583716
       Li(x) =  583922.043421392
       diff  206.043421391863
       sqrt(x) =  2949.577935908797
       log(x) =  15.978834733049439
       sqrt fois log =  47130.818370135756
       sqrt fois log fois log =  753095.5575697698

8710010   pi(x) =  584337
       Li(x) =  584547.848785253
       diff  210.848785252543
       sqrt(x) =  2951.272606859624
       log(x) =  15.979983496933652
       sqrt fois log =  47161.28755256915
       sqrt fois log fois log =  753636.5967841975
```

```
8720010   pi(x) =  584984
        Li(x) =  585173.609188854
        diff  189.609188853763
        sqrt(x) =  2952.9663052598485
        log(x) =  15.981130942673495
        sqrt fois log =  47191.74119366039
        sqrt fois log fois log =  754177.3954286454

8730010   pi(x) =  585613
        Li(x) =  585799.324690204
        diff  186.324690204347
        sqrt(x) =  2954.6590327819554
        log(x) =  15.9822770732905
        sqrt fois log =  47222.17931902173
        sqrt fois log fois log =  754717.9538812138

8740010   pi(x) =  586238
        Li(x) =  586424.995347171
        diff  186.995347170974
        sqrt(x) =  2956.3507910936414
        log(x) =  15.983421891795823
        sqrt fois log =  47252.601954194004
        sqrt fois log fois log =  755258.2725189786

8750010   pi(x) =  586850
        Li(x) =  587050.621217479
        diff  200.621217479464
        sqrt(x) =  2958.0415818578344
        log(x) =  15.984565401190286
        sqrt fois log =  47283.009124646924
        sqrt fois log fois log =  755798.3517179958

8760010   pi(x) =  587486
        Li(x) =  587676.202358715
        diff  190.202358714771
        sqrt(x) =  2959.7314067327125
        log(x) =  15.985707604464434
        sqrt fois log =  47313.400855779335
        sqrt fois log fois log =  756338.1918533058

8770010   pi(x) =  588141
        Li(x) =  588301.738828322
        diff  160.738828322035
        sqrt(x) =  2961.420267371722
        log(x) =  15.986848504598571
        sqrt fois log =  47343.77717291951
        sqrt fois log fois log =  756877.7932989362

8780010   pi(x) =  588739
        Li(x) =  588927.230683607
        diff  188.230683606584
        sqrt(x) =  2963.1081654235977
        log(x) =  15.987988104562815
        sqrt fois log =  47374.13810132543
        sqrt fois log fois log =  757417.156427907

8790010   pi(x) =  589398
        Li(x) =  589552.677981734
        diff  154.677981734392
        sqrt(x) =  2964.7951025323823
        log(x) =  15.98912640731714
        sqrt fois log =  47404.48366618504
        sqrt fois log fois log =  757956.2816122333
```

8800010 pi(x) = 590007
Li(x) = 590178.080779733
diff 171.08077973302
sqrt(x) = 2966.4810803374426
log(x) = 15.990263415811425
sqrt fois log = 47434.81389261656
sqrt fois log fois log = 758495.1692229301

8810010 pi(x) = 590627
Li(x) = 590803.439134492
diff 176.439134491957
sqrt(x) = 2968.166100473489
log(x) = 15.991399132985498
sqrt fois log = 47465.128805668704
sqrt fois log fois log = 759033.8196300154

8820010 pi(x) = 591237
Li(x) = 591428.753102763
diff 191.753102762741
sqrt(x) = 2969.8501645705965
log(x) = 15.992533561769179
sqrt fois log = 47495.42843032098
sqrt fois log fois log = 759572.2332025144

8830010 pi(x) = 591879
Li(x) = 592054.02274116
diff 175.022741160006
sqrt(x) = 2971.533274254219
log(x) = 15.993666705082333
sqrt fois log = 47525.712791483995
sqrt fois log fois log = 760110.4103084631

8840010 pi(x) = 592485
Li(x) = 592679.248106162
diff 194.248106161598
sqrt(x) = 2973.2154311452105
log(x) = 15.994798565834905
sqrt fois log = 47555.981913999625
sqrt fois log fois log = 760648.3513149119

8850010 pi(x) = 593114
Li(x) = 593304.429254109
diff 190.429254109156
sqrt(x) = 2974.896636859842
log(x) = 15.995929146926978
sqrt fois log = 47586.23582264139
sqrt fois log fois log = 761186.0565879301

8860010 pi(x) = 593720
Li(x) = 593929.566241208
diff 209.566241208464
sqrt(x) = 2976.576893009821
log(x) = 15.997058451248797
sqrt fois log = 47616.47454211464
sqrt fois log fois log = 761723.5264926084

8870010 pi(x) = 594335
Li(x) = 594554.65912353
diff 219.659123530379
sqrt(x) = 2978.2562012023077
log(x) = 15.998186481680843
sqrt fois log = 47646.6980970569
sqrt fois log fois log = 762260.761393064

8880010 pi(x) = 594974
Li(x) = 595179.707957011
diff 205.707957010716
sqrt(x) = 2979.9345630399334
log(x) = 15.999313241093844
sqrt fois log = 47676.906512038004
sqrt fois log fois log = 762797.7616524431

8890010 pi(x) = 595588
Li(x) = 595804.712797451
diff 216.712797451182
sqrt(x) = 2981.6119801208206
log(x) = 16.000438732348847
sqrt fois log = 47707.09981156052
sqrt fois log fois log = 763334.5276329253

8900010 pi(x) = 596222
Li(x) = 596429.673700519
diff 207.673700519488
sqrt(x) = 2983.2884540385967
log(x) = 16.001562958297242
sqrt fois log = 47737.27802005986
sqrt fois log fois log = 763871.059695727

8910010 pi(x) = 596830
Li(x) = 597054.59072175
diff 224.590721750283
sqrt(x) = 2984.9639863824154
log(x) = 16.002685921780817
sqrt fois log = 47767.44116190462
sqrt fois log fois log = 764407.3582011046

8920010 pi(x) = 597476
Li(x) = 597679.463916545
diff 203.463916545035
sqrt(x) = 2986.638578736972
log(x) = 16.003807625631797
sqrt fois log = 47797.58926139686
sqrt fois log fois log = 764943.4235083596

8930010 pi(x) = 598114
Li(x) = 598304.293340173
diff 190.293340173084
sqrt(x) = 2988.312232682522
log(x) = 16.004928072672882
sqrt fois log = 47827.72234277227
sqrt fois log fois log = 765479.25597584

8940010 pi(x) = 598742
Li(x) = 598929.079047772
diff 187.079047771636
sqrt(x) = 2989.984949794898
log(x) = 16.006047265717303
sqrt fois log = 47857.840430200515
sqrt fois log fois log = 766014.855960946

8950010 pi(x) = 599356
Li(x) = 599553.821094346
diff 197.821094346466
sqrt(x) = 2991.6567316455275
log(x) = 16.00716520756885
sqrt fois log = 47887.94354778543
sqrt fois log fois log = 766550.2238201321

```
8960010   pi(x) =  599970
        Li(x) =  600178.519534772
        diff  208.519534772495
        sqrt(x) =  2993.327579801449
        log(x) =  16.00828190102192
        sqrt fois log =  47918.03171956528
        sqrt fois log fois log =  767085.3599089113

8970010   pi(x) =  600584
        Li(x) =  600803.174423794
        diff  219.174423793796
        sqrt(x) =  2994.9974958253306
        log(x) =  16.009397348861558
        sqrt fois log =  47948.10496951305
        sqrt fois log fois log =  767620.264581858

8980010   pi(x) =  601205
        Li(x) =  601427.785816025
        diff  222.78581602464
        sqrt(x) =  2996.6664812754857
        log(x) =  16.01051155386351
        sqrt fois log =  47978.16332153667
        sqrt fois log fois log =  768154.9381926133

8990010   pi(x) =  601855
        Li(x) =  602052.353765949
        diff  197.353765949374
        sqrt(x) =  2998.3345377058913
        log(x) =  16.011624518794235
        sqrt fois log =  48008.20679947923
        sqrt fois log fois log =  768689.3810938857

9000010   pi(x) =  602489
        Li(x) =  602676.878327923
        diff  187.878327923478
        sqrt(x) =  3000.0016666662036
        log(x) =  16.012736246410988
        sqrt fois log =  48038.235427119296
        sqrt fois log fois log =  769223.5936374575

9010010   pi(x) =  603074
        Li(x) =  603301.359556173
        diff  227.359556173324
        sqrt(x) =  3001.6678697017765
        log(x) =  16.01384673946182
        sqrt fois log =  48068.249228171095
        sqrt fois log fois log =  769757.5761741858

9020010   pi(x) =  603688
        Li(x) =  603925.797504797
        diff  237.797504797229
        sqrt(x) =  3003.3331483536754
        log(x) =  16.014956000685643
        sqrt fois log =  48098.2482262848
        sqrt fois log fois log =  770291.3290540074

9030010   pi(x) =  604302
        Li(x) =  604550.192227766
        diff  248.192227765685
        sqrt(x) =  3004.997504158697
        log(x) =  16.016064032812267
        sqrt fois log =  48128.23244504674
        sqrt fois log fois log =  770824.8526259415
```

```
9040010   pi(x) =  604920
        Li(x) =  605174.543778922
        diff  254.543778921594
        sqrt(x) =  3006.6609386493847
        log(x) =  16.01717083856244
        sqrt fois log =  48158.201907979696
        sqrt fois log fois log =  771358.1472380944

9050010   pi(x) =  605556
        Li(x) =  605798.852211981
        diff  242.85221198108
        sqrt(x) =  3008.323453354044
        log(x) =  16.018276420647876
        sqrt fois log =  48188.15663854307
        sqrt fois log fois log =  771891.2132376608

9060010   pi(x) =  606160
        Li(x) =  606423.117580534
        diff  263.11758053361
        sqrt(x) =  3009.9850497967595
        log(x) =  16.01938078177131
        sqrt fois log =  48218.096660133175
        sqrt fois log fois log =  772424.0509709287

9070010   pi(x) =  606792
        Li(x) =  607047.339938043
        diff  255.339938042685
        sqrt(x) =  3011.645729497412
        log(x) =  16.020483924626543
        sqrt fois log =  48248.021996083466
        sqrt fois log fois log =  772956.6607832831

9080010   pi(x) =  607402
        Li(x) =  607671.519337846
        diff  269.519337845966
        sqrt(x) =  3013.305493971695
        log(x) =  16.021585851898454
        sqrt fois log =  48277.93266966479
        sqrt fois log fois log =  773489.0430192077

9090010   pi(x) =  608059
        Li(x) =  608295.655833156
        diff  236.655833156081
        sqrt(x) =  3014.9643447311278
        log(x) =  16.02268656626307
        sqrt fois log =  48307.82870408558
        sqrt fois log fois log =  774021.1980222894

9100010   pi(x) =  608673
        Li(x) =  608919.749477061
        diff  246.749477060861
        sqrt(x) =  3016.6222832830763
        log(x) =  16.023786070387573
        sqrt fois log =  48337.71012249211
        sqrt fois log fois log =  774553.1261352213

9110010   pi(x) =  609299
        Li(x) =  609543.800322524
        diff  244.80032252369
        sqrt(x) =  3018.279311130764
        log(x) =  16.02488436693038
        sqrt fois log =  48367.57694796878
        sqrt fois log fois log =  775084.827699807
```

```
9120010   pi(x) =  609906
        Li(x) =  610167.808422384
        diff  261.808422384202
        sqrt(x) =  3019.9354297732925
        log(x) =  16.025981458541143
        sqrt fois log =  48397.42920353826
        sqrt fois log fois log =  775616.3030569619

9130010   pi(x) =  610516
        Li(x) =  610791.773829358
        diff  275.773829358164
        sqrt(x) =  3021.590640705653
        log(x) =  16.027077347860804
        sqrt fois log =  48427.26691216179
        sqrt fois log fois log =  776147.5525467172

9140010   pi(x) =  611161
        Li(x) =  611415.696596039
        diff  254.696596038644
        sqrt(x) =  3023.2449454187467
        log(x) =  16.02817203752164
        sqrt fois log =  48457.09009673939
        sqrt fois log fois log =  776678.5765082249

9150010   pi(x) =  611788
        Li(x) =  612039.576774896
        diff  251.576774896006
        sqrt(x) =  3024.8983453993956
        log(x) =  16.02926553014728
        sqrt fois log =  48486.898780110074
        sqrt fois log fois log =  777209.3752797587

9160010   pi(x) =  612397
        Li(x) =  612663.414418278
        diff  266.414418278262
        sqrt(x) =  3026.5508421303616
        log(x) =  16.030357828352773
        sqrt fois log =  48516.69298505212
        sqrt fois log fois log =  777739.9491987184

9170010   pi(x) =  613025
        Li(x) =  613287.209578412
        diff  262.209578411537
        sqrt(x) =  3028.2024370903605
        log(x) =  16.031448934744596
        sqrt fois log =  48546.47273428325
        sqrt fois log fois log =  778270.2986016327

9180010   pi(x) =  613664
        Li(x) =  613910.962307401
        diff  246.962307400652
        sqrt(x) =  3029.8531317540787
        log(x) =  16.032538851920698
        sqrt fois log =  48576.238050460866
        sqrt fois log fois log =  778800.4238241623

9190010   pi(x) =  614291
        Li(x) =  614534.67265723
        diff  243.672657229588
        sqrt(x) =  3031.502927592187
        log(x) =  16.033627582470558
        sqrt fois log =  48605.98895618234
        sqrt fois log fois log =  779330.3252011045
```

```
9200010   pi(x) =  614917
        Li(x) =  615158.340679762
        diff  241.340679761604
        sqrt(x) =  3033.1518260713556
        log(x) =  16.0347151289752
        sqrt fois log =  48635.72547398512
        sqrt fois log fois log =  779860.0030663938

9210010   pi(x) =  615525
        Li(x) =  615781.96642674
        diff  256.966426739818
        sqrt(x) =  3034.799828654272
        log(x) =  16.03580149400723
        sqrt fois log =  48665.447626347064
        sqrt fois log fois log =  780389.457753107

9220010   pi(x) =  616162
        Li(x) =  616405.549949788
        diff  243.549949787557
        sqrt(x) =  3036.4469367996535
        log(x) =  16.036886680130888
        sqrt fois log =  48695.155435686596
        sqrt fois log fois log =  780918.6895934656

9230010   pi(x) =  616808
        Li(x) =  617029.091300409
        diff  221.091300408822
        sqrt(x) =  3038.093151962263
        log(x) =  16.037970689902068
        sqrt fois log =  48724.84892436297
        sqrt fois log fois log =  781447.6989188395

9240010   pi(x) =  617435
        Li(x) =  617652.590529989
        diff  217.590529988869
        sqrt(x) =  3039.738475592925
        log(x) =  16.039053525868365
        sqrt fois log =  48754.52811467643
        sqrt fois log fois log =  781976.4860597494

9250010   pi(x) =  618058
        Li(x) =  618276.047689794
        diff  218.047689794097
        sqrt(x) =  3041.3829091385387
        log(x) =  16.040135190569103
        sqrt fois log =  48784.19302886851
        sqrt fois log fois log =  782505.0513458697

9260010   pi(x) =  618692
        Li(x) =  618899.462830973
        diff  207.462830972974
        sqrt(x) =  3043.026454042094
        log(x) =  16.041215686535384
        sqrt fois log =  48813.843689122186
        sqrt fois log fois log =  783033.3951060331

9270010   pi(x) =  619304
        Li(x) =  619522.836004556
        diff  218.836004556157
        sqrt(x) =  3044.6691117426867
        log(x) =  16.042295016290108
        sqrt fois log =  48843.48011756213
        sqrt fois log fois log =  783561.517668232
```

9280010 pi(x) = 619930
Li(x) = 620146.167261457
diff 216.167261457071
sqrt(x) = 3046.310883675532
log(x) = 16.04337318234801
sqrt fois log = 48873.102336254895
sqrt fois log fois log = 784089.4193596216

9290010 pi(x) = 620544
Li(x) = 620769.456652472
diff 225.456652472145
sqrt(x) = 3047.95177127198
log(x) = 16.044450187215705
sqrt fois log = 48902.71036720916
sqrt fois log fois log = 784617.1005065244

9300010 pi(x) = 621179
Li(x) = 621392.704228281
diff 213.70422828116
sqrt(x) = 3049.59177595953
log(x) = 16.045526033391724
sqrt fois log = 48932.30423237594
sqrt fois log fois log = 785144.5614344322

9310010 pi(x) = 621799
Li(x) = 622015.910039448
diff 216.910039448063
sqrt(x) = 3051.2308991618447
log(x) = 16.046600723366527
sqrt fois log = 48961.88395364876
sqrt fois log fois log = 785671.8024680081

9320010 pi(x) = 622417
Li(x) = 622639.074136421
diff 222.074136420502
sqrt(x) = 3052.8691422987654
log(x) = 16.04767425962257
sqrt fois log = 48991.44955286393
sqrt fois log fois log = 786198.8239310923

9330010 pi(x) = 623036
Li(x) = 623262.196569531
diff 226.196569531341
sqrt(x) = 3054.506506786325
log(x) = 16.048746644634313
sqrt fois log = 49021.00105180071
sqrt fois log fois log = 786725.6261467019

9340010 pi(x) = 623665
Li(x) = 623885.277388998
diff 220.277388998074
sqrt(x) = 3056.142994036765
log(x) = 16.049817880868265
sqrt fois log = 49050.53847218154
sqrt fois log fois log = 787252.2094370361

9350010 pi(x) = 624298
Li(x) = 624508.316644924
diff 210.316644923761
sqrt(x) = 3057.7786054585445
log(x) = 16.050887970783016
sqrt fois log = 49080.06183567222
sqrt fois log fois log = 787778.5741234778

9360010   pi(x) = 624927
Li(x) = 625131.314387297
diff 204.314387297258
sqrt(x) = 3059.4133424563606
log(x) = 16.051956916829273
sqrt fois log = 49109.571163882145
sqrt fois log fois log = 788304.7205265973

9370010   pi(x) = 625553
Li(x) = 625754.270665993
diff 201.270665993332
sqrt(x) = 3061.0472064311584
log(x) = 16.053024721449894
sqrt fois log = 49139.066478364526
sqrt fois log fois log = 788830.6489661555

9380010   pi(x) = 626161
Li(x) = 626377.185530774
diff 216.18553077383
sqrt(x) = 3062.680198780147
log(x) = 16.05409138707992
sqrt fois log = 49168.54780061658
sqrt fois log fois log = 789356.3597611061

9390010   pi(x) = 626788
Li(x) = 627000.059031287
diff 212.059031286975
sqrt(x) = 3064.312320896811
log(x) = 16.055156916146604
sqrt fois log = 49198.015152079686
sqrt fois log fois log = 789881.8532295976

9400010   pi(x) = 627401
Li(x) = 627622.891217069
diff 221.891217068769
sqrt(x) = 3065.943574170927
log(x) = 16.056221311069454
sqrt fois log = 49227.46855413969
sqrt fois log fois log = 790407.1296889791

9410010   pi(x) = 628011
Li(x) = 628245.682137542
diff 234.682137542404
sqrt(x) = 3067.573959988577
log(x) = 16.057284574260255
sqrt fois log = 49256.90802812702
sqrt fois log fois log = 790932.1894558

9420010   pi(x) = 628643
Li(x) = 628868.43184202
diff 225.431842019549
sqrt(x) = 3069.2034797321603
log(x) = 16.058346708123107
sqrt fois log = 49286.33359531692
sqrt fois log fois log = 791457.0328458147

9430010   pi(x) = 629250
Li(x) = 629491.1403797
diff 241.140379700111
sqrt(x) = 3070.8321347804085
log(x) = 16.059407715054466
sqrt fois log = 49315.745276929665
sqrt fois log fois log = 791981.6601739852

```
9440010   pi(x) =  629858
       Li(x) =  630113.807799673
       diff  255.807799672941
       sqrt(x) =  3072.4599265083993
       log(x) =  16.060467597443157
       sqrt fois log =  49345.14309413073
       sqrt fois log fois log =  792506.0717544827

9450010   pi(x) =  630495
       Li(x) =  630736.434150916
       diff  241.434150915826
       sqrt(x) =  3074.0868562875708
       log(x) =  16.061526357670424
       sqrt fois log =  49374.52706803103
       sqrt fois log fois log =  793030.2679006921

9460010   pi(x) =  631091
       Li(x) =  631359.019482296
       diff  268.019482296193
       sqrt(x) =  3075.712925485732
       log(x) =  16.062583998109954
       sqrt fois log =  49403.89721968707
       sqrt fois log fois log =  793554.2489252143

9470010   pi(x) =  631722
       Li(x) =  631981.563842572
       diff  259.563842571573
       sqrt(x) =  3077.338135467079
       log(x) =  16.063640521127912
       sqrt fois log =  49433.25357010119
       sqrt fois log fois log =  794078.0151398685

9480010   pi(x) =  632343
       Li(x) =  632604.06728039
       diff  261.067280389601
       sqrt(x) =  3078.962487592208
       log(x) =  16.06469592908297
       sqrt fois log =  49462.59614022172
       sqrt fois log fois log =  794601.5668556947

9490010   pi(x) =  632968
       Li(x) =  633226.529844288
       diff  258.529844288365
       sqrt(x) =  3080.585983218128
       log(x) =  16.065750224326337
       sqrt fois log =  49491.92495094321
       sqrt fois log fois log =  795124.9043829581

9500010   pi(x) =  633578
       Li(x) =  633848.951582697
       diff  270.95158269722
       sqrt(x) =  3082.2086236982727
       log(x) =  16.066803409201793
       sqrt fois log =  49521.24002310658
       sqrt fois log fois log =  795648.028031149

9510010   pi(x) =  634217
       Li(x) =  634471.332543937
       diff  254.332543936791
       sqrt(x) =  3083.8304103825167
       log(x) =  16.06785548604573
       sqrt fois log =  49550.54137749937
       sqrt fois log fois log =  796170.9381089892
```

```
9520010   pi(x) =  634828
        Li(x) =  635093.672776219
        diff  265.672776219435
        sqrt(x) =  3085.451344617186
        log(x) =  16.068906457187165
        sqrt fois log =  49579.82903485592
        sqrt fois log fois log =  796693.6349244319

9530010   pi(x) =  635441
        Li(x) =  635715.972327649
        diff  274.972327649477
        sqrt(x) =  3087.0714277450725
        log(x) =  16.06995632494778
        sqrt fois log =  49609.103015857494
        sqrt fois log fois log =  797216.1187846651

9540010   pi(x) =  636073
        Li(x) =  636338.231246224
        diff  265.23124622379
        sqrt(x) =  3088.6906611054465
        log(x) =  16.07100509164195
        sqrt fois log =  49638.36334113257
        sqrt fois log fois log =  797738.3899961148

9550010   pi(x) =  636699
        Li(x) =  636960.449579832
        diff  261.449579832028
        sqrt(x) =  3090.3090460340695
        log(x) =  16.072052759576785
        sqrt fois log =  49667.61003125697
        sqrt fois log fois log =  798260.4488644471

9560010   pi(x) =  637334
        Li(x) =  637582.627376257
        diff  248.62737625686
        sqrt(x) =  3091.926583863207
        log(x) =  16.07309933105214
        sqrt fois log =  49696.843106754044
        sqrt fois log fois log =  798782.2956945717

9570010   pi(x) =  637940
        Li(x) =  638204.764683174
        diff  264.764683174435
        sqrt(x) =  3093.5432759216415
        log(x) =  16.07414480836067
        sqrt fois log =  49726.062588094916
        sqrt fois log fois log =  799303.9307906437

9580010   pi(x) =  638573
        Li(x) =  638826.861548155
        diff  253.861548154731
        sqrt(x) =  3095.159123534685
        log(x) =  16.075189193787836
        sqrt fois log =  49755.2684956986
        sqrt fois log fois log =  799825.3544560665

9590010   pi(x) =  639231
        Li(x) =  639448.918018662
        diff  217.918018662254
        sqrt(x) =  3096.774128024193
        log(x) =  16.076232489611947
        sqrt fois log =  49784.460849932235
        sqrt fois log fois log =  800346.5669934946
```

```
9600010   pi(x) =  639851
       Li(x) =  640070.934142055
       diff  219.934142055456
       sqrt(x) =  3098.388290708574
       log(x) =  16.07727469810419
       sqrt fois log =  49813.63967111125
       sqrt fois log fois log =  800867.5687048361

9610010   pi(x) =  640461
       Li(x) =  640692.909965588
       diff  231.909965588013
       sqrt(x) =  3100.0016129028063
       log(x) =  16.078315821528662
       sqrt fois log =  49842.80497949956
       sqrt fois log fois log =  801388.3598912554

9620010   pi(x) =  641085
       Li(x) =  641314.845536409
       diff  229.845536408713
       sqrt(x) =  3101.6140959184463
       log(x) =  16.07935586214239
       sqrt fois log =  49871.956795309736
       sqrt fois log fois log =  801908.9408531755

9630010   pi(x) =  641712
       Li(x) =  641936.740901562
       diff  224.740901562036
       sqrt(x) =  3103.2257410636435
       log(x) =  16.08039482219537
       sqrt fois log =  49901.095138703204
       sqrt fois log fois log =  802429.3118902815

9640010   pi(x) =  642321
       Li(x) =  642558.596107988
       diff  237.596107988153
       sqrt(x) =  3104.836549643153
       log(x) =  16.081432703930588
       sqrt fois log =  49930.220029790406
       sqrt fois log fois log =  802949.4733015216

9650010   pi(x) =  642962
       Li(x) =  643180.411202524
       diff  218.411202523508
       sqrt(x) =  3106.4465229583466
       log(x) =  16.08246950958406
       sqrt fois log =  49959.33148863103
       sqrt fois log fois log =  803469.4253851115

9660010   pi(x) =  643576
       Li(x) =  643802.186231901
       diff  226.186231901171
       sqrt(x) =  3108.0556623072243
       log(x) =  16.083505241384852
       sqrt fois log =  49988.429535234114
       sqrt fois log fois log =  803989.1684385352

9670010   pi(x) =  644218
       Li(x) =  644423.921242751
       diff  205.921242751065
       sqrt(x) =  3109.6639689844305
       log(x) =  16.084539901555107
       sqrt fois log =  50017.5141895583
       sqrt fois log fois log =  804508.7027585492
```

```
9680010   pi(x) =  644836
       Li(x) =  645045.6162816
       diff  209.616281600436
       sqrt(x) =  3111.2714442812603
       log(x) =  16.08557349231008
       sqrt fois log =  50046.585471511935
       sqrt fois log fois log =  805028.0286411832

9690010   pi(x) =  645451
       Li(x) =  645667.271394874
       diff  216.271394873969
       sqrt(x) =  3112.8780894856773
       log(x) =  16.08660601585816
       sqrt fois log =  50075.64340095335
       sqrt fois log fois log =  805547.1463817441

9700010   pi(x) =  646055
       Li(x) =  646288.886628894
       diff  233.886628894485
       sqrt(x) =  3114.4839058823213
       log(x) =  16.087637474400914
       sqrt fois log =  50104.68799769096
       sqrt fois log fois log =  806066.056274819

9710010   pi(x) =  646677
       Li(x) =  646910.462029883
       diff  233.462029882707
       sqrt(x) =  3116.0888947525227
       log(x) =  16.088667870133094
       sqrt fois log =  50133.719281483456
       sqrt fois log fois log =  806584.7586142748

9720010   pi(x) =  647275
       Li(x) =  647531.997643958
       diff  256.997643958079
       sqrt(x) =  3117.6930573743143
       log(x) =  16.089697205242675
       sqrt fois log =  50162.737272039994
       sqrt fois log fois log =  807103.2536932646

9730010   pi(x) =  647921
       Li(x) =  648153.493517139
       diff  232.493517138995
       sqrt(x) =  3119.2963950224416
       log(x) =  16.090725481910887
       sqrt fois log =  50191.74198902037
       sqrt fois log fois log =  807621.5418042267

9740010   pi(x) =  648549
       Li(x) =  648774.949695343
       diff  225.949695342919
       sqrt(x) =  3120.898908968376
       log(x) =  16.091752702312235
       sqrt fois log =  50220.733452035165
       sqrt fois log fois log =  808139.6232388894

9750010   pi(x) =  649176
       Li(x) =  649396.366224387
       diff  220.366224387079
       sqrt(x) =  3122.5006004803267
       log(x) =  16.09277886861453
       sqrt fois log =  50249.71168064598
       sqrt fois log fois log =  808657.4982882724
```

```
9760010   pi(x) =  649793
        Li(x) =  650017.743149988
        diff  224.743149988353
        sqrt(x) =  3124.101470823251
        log(x) =  16.093803982978915
        sqrt fois log =  50278.676694365524
        sqrt fois log fois log =  809175.1672426892

9770010   pi(x) =  650392
        Li(x) =  650639.080517764
        diff  247.080517763738
        sqrt(x) =  3125.7015212588676
        log(x) =  16.094828047559893
        sqrt fois log =  50307.62851265785
        sqrt fois log fois log =  809692.6303917493

9780010   pi(x) =  651005
        Li(x) =  651260.378373231
        diff  255.37837323104
        sqrt(x) =  3127.3007530456675
        log(x) =  16.095851064505364
        sqrt fois log =  50336.56715493854
        sqrt fois log fois log =  810209.8880243632

9790010   pi(x) =  651625
        Li(x) =  651881.636761809
        diff  256.636761808651
        sqrt(x) =  3128.8991674389254
        log(x) =  16.09687303595663
        sqrt fois log =  50365.49264057479
        sqrt fois log fois log =  810726.9404287405

9800010   pi(x) =  652267
        Li(x) =  652502.855728816
        diff  235.855728816125
        sqrt(x) =  3130.4967656907106
        log(x) =  16.097893964048442
        sqrt fois log =  50394.40498888566
        sqrt fois log fois log =  811243.7878923952

9810010   pi(x) =  652892
        Li(x) =  653124.035319474
        diff  232.035319474409
        sqrt(x) =  3132.0935490499
        log(x) =  16.098913850909017
        sqrt fois log =  50423.30421914222
        sqrt fois log fois log =  811760.4307021478

9820010   pi(x) =  653519
        Li(x) =  653745.175578906
        diff  226.175578906434
        sqrt(x) =  3133.689518762189
        log(x) =  16.09993269866007
        sqrt fois log =  50452.190350567704
        sqrt fois log fois log =  812276.869144127

9830010   pi(x) =  654142
        Li(x) =  654366.276552137
        diff  224.276552137104
        sqrt(x) =  3135.2846760701013
        log(x) =  16.10095050941683
        sqrt fois log =  50481.06340233768
        sqrt fois log fois log =  812793.1035037722
```

```
9840010   pi(x) =  654752
        Li(x) =  654987.338284094
        diff  235.338284093654
        sqrt(x) =  3136.879022213002
        log(x) =  16.101967285288083
        sqrt fois log =  50509.923393580226
        sqrt fois log fois log =  813309.134065836

9850010   pi(x) =  655356
        Li(x) =  655608.360819606
        diff  252.36081960611
        sqrt(x) =  3138.4725584271087
        log(x) =  16.102983028376183
        sqrt fois log =  50538.77034337611
        sqrt fois log fois log =  813824.9611143871

9860010   pi(x) =  655972
        Li(x) =  656229.344203407
        diff  257.344203407411
        sqrt(x) =  3140.065285945501
        log(x) =  16.103997740777086
        sqrt fois log =  50567.6042707589
        sqrt fois log fois log =  814340.584932811

9870010   pi(x) =  656592
        Li(x) =  656850.288480134
        diff  258.288480133982
        sqrt(x) =  3141.6572059981336
        log(x) =  16.105011424580375
        sqrt fois log =  50596.4251947152
        sqrt fois log fois log =  814856.0058038147

9880010   pi(x) =  657203
        Li(x) =  657471.193694326
        diff  268.19369432563
        sqrt(x) =  3143.248319811847
        log(x) =  16.106024081869286
        sqrt fois log =  50625.23313418478
        sqrt fois log fois log =  815371.224009427

9890010   pi(x) =  657822
        Li(x) =  658092.059890426
        diff  270.059890426463
        sqrt(x) =  3144.8386286103773
        log(x) =  16.10703571472073
        sqrt fois log =  50654.02810806071
        sqrt fois log fois log =  815886.2398310017

9900010   pi(x) =  658445
        Li(x) =  658712.887112784
        diff  267.887112784432
        sqrt(x) =  3146.4281336143686
        log(x) =  16.10804632520532
        sqrt fois log =  50682.81013518956
        sqrt fois log fois log =  816401.0535492192

9910010   pi(x) =  659057
        Li(x) =  659333.675405652
        diff  276.675405652379
        sqrt(x) =  3148.016836041383
        log(x) =  16.109055915387398
        sqrt fois log =  50711.579234371566
        sqrt fois log fois log =  816915.6654440899
```

```
9920010   pi(x) =  659669
       Li(x) =  659954.424813188
       diff  285.424813187681
       sqrt(x) =  3149.6047371059117
       log(x) =  16.110064487325065
       sqrt fois log =  50740.33542436075
       sqrt fois log fois log =  817430.0757949561

9930010   pi(x) =  660286
       Li(x) =  660575.135379453
       diff  289.135379453073
       sqrt(x) =  3151.1918380193865
       log(x) =  16.111072043070195
       sqrt fois log =  50769.07872386512
       sqrt fois log fois log =  817944.2848804931

9940010   pi(x) =  660918
       Li(x) =  661195.807148417
       diff  277.807148416759
       sqrt(x) =  3152.7781399901896
       log(x) =  16.112078584668467
       sqrt fois log =  50797.80915154682
       sqrt fois log fois log =  818458.2929787134

9950010   pi(x) =  661520
       Li(x) =  661816.440163953
       diff  296.440163952531
       sqrt(x) =  3154.363644223665
       log(x) =  16.113084114159395
       sqrt fois log =  50826.526726022275
       sqrt fois log fois log =  818972.1003669674

9960010   pi(x) =  662138
       Li(x) =  662437.03446984
       diff  299.03446984035
       sqrt(x) =  3155.9483519221285
       log(x) =  16.11408863357634
       sqrt fois log =  50855.23146586236
       sqrt fois log fois log =  819485.7073219464

9970010   pi(x) =  662761
       Li(x) =  663057.590109766
       diff  296.590109766461
       sqrt(x) =  3157.5322642848796
       log(x) =  16.115092144946544
       sqrt fois log =  50883.92338959254
       sqrt fois log fois log =  819999.1141196844

9980010   pi(x) =  663368
       Li(x) =  663678.107127324
       diff  310.107127323747
       sqrt(x) =  3159.115382508211
       log(x) =  16.116094650291153
       sqrt fois log =  50912.60251569307
       sqrt fois log fois log =  820512.321035561

9990010   pi(x) =  663965
       Li(x) =  664298.585566012
       diff  333.585566011956
       sqrt(x) =  3160.6977077854185
       log(x) =  16.117096151625237
       sqrt fois log =  50941.26886259908
       sqrt fois log fois log =  821025.3283443021
```

27.18219757080078 s.

Extraits d'une table ronde écoutable ici https://www.youtube.com/watch?v=d08lHGeIlJY

Oui alors d'abord, si vous voulez, il y a une spécificité des mathématiques par rapport aux autres disciplines et je pense que je dois d'abord en parler : c'est que, pour un mathématicien, la chose de loin la plus précieuse et je vais expliquer pourquoi, c'est le temps. Et la manière dont le CNRS m'a aidé, si vous voulez, quand j'étais à l'École Normale, en fait, j'avais refusé de passer l'agrégation parce que je savais, j'avais envie de faire de la recherche, et je n'avais pas du tout envie de retourner dans un esprit de bachotage, qui avait été l'esprit de préparation à l'entrée de l'École Normale, etc., c'était une époque bénie, c'était le début des années 70 ; donc en fait, j'ai été pris tout de suite comme stagiaire au CNRS et j'ai eu, si vous voulez, cinq ans extraordinaires dans lesquels j'ai eu tout le temps qu'il fallait pour réfléchir, pour travailler, etc., sur, justement, les travaux qui après m'ont valu la médaille Fields. Et en 75, je suis allé faire ma coopération dans un pays sous-développé, qui était à Kingston, au Canada anglais. J'avais obtenu si vous voulez une aide de certains amis, qui m'avaient envoyé là-bas dans une université, qui a été un temps très, très profitable aussi au niveau du travail et heureusement parce que c'était soi-disant mon service militaire mais bon, c'était un moyen extraordinaire pour passer à travers. Et à ce moment-là, j'ai commis une erreur, j'ai commis une erreur qui a été que j'ai appris qu'on m'offrait un poste de prof à Paris et je me suis laissé tenter, étant loin je me suis dit : “oh, j'ai assez fait de recherche, etc.”, j'ai accepté ce poste. Quand je suis revenu en France, donc, j'ai quitté le CNRS, j'ai démissionné du CNRS tout de suite, je suis rentré en france, et quand je suis rentré en france, j'ai commencé mon travail de prof, et je me suis aperçu à ce moment-là de ce que mon temps était devenu. Avant, quand je travaillais au CNRS, mon temps était un temps qui était continu, qui était continu, je pouvais réfléchir toute la journée. Bien sûr, quand on réfléchit à un problème de mathématiques, on n'a pas besoin de... on n'a même pas besoin de papier, de crayon, on a... on peut partir faire un tour à pied, on réfléchit au problème. Ce dont on a besoin, c'est de savoir que pendant trois heures, pendant cinq heures, on ne sera pas interrompu. Quand j'étais à l'université, quand je travaillais à l'université, je savais que j'avais par exemple une heure et demie pour réfléchir. Je commençais, je commençais à réfléchir, etc., mon cerveau se chauffait, et se mettait à disposition du problème que je regardais, etc.. Et puis quand arrivait un quart d'heure avant le cours, je me disais “non il faut que j'interrompe, que j'arrête.”. Mon temps, si vous connaissez les mathématiques, mon temps s'était transformé en ce qu'on appelle un ensemble de Cantor, c'est-à-dire que je n'avais plus, si vous voulez, d'intervalle suffisamment long continu pour réfléchir. Et ça, c'est le miracle du CNRS, le miracle qui permet à des jeunes chercheurs de s'immerger complètement dans un problème, dans un problème de mathématiques, par exemple, et par cette immersion, si vous voulez, par cette espèce de... je ne sais pas, moi, de travail, si vous voulez, de pénétration qui se produit, un jour, effectivement, moi, ça s'était produit dans les années 70, je revenais d'avoir accompagné mon épouse à son lycée, j'étais en voiture, je conduisais une petite voiture, j'étais arrêté à un feu rouge et à un moment donné, j'ai eu effectivement une illumination. Et cette illumination, elle était telle que mon cerveau était complètement certain du résultat, je n'avais pas besoin de le vérifier, je n'avais pas besoin de papier, de crayon, etc., c'était éclairé complètement en sachant que bon, il y avait quelque chose d'extraordinaire qui était là. Donc, quand je suis revenu à Paris, après mon service militaire, donc ma coopération, en fait, j'ai réalisé très vite que j'avais fait une terrible erreur et qu'en fait, il aurait mieux valu que je devienne postier ou que je fasse n'importe quel autre métier que le métier que j'avais à ce moment-là, qui faisait qu'il m'était impossible d'avoir un temps suffisamment long pour réfléchir ; à ce moment-là, j'ai re-posé ma candidature au CNRS, ça se vérifie, je veux dire, un an après avoir accepté le poste à Paris, j'ai re-posé ma candidature au CNRS parce que je me suis dit "mais j'ai fait une énorme erreur". J'ai re-posé ma candidature pendant quatre ans consécutifs, au CNRS, sans être accepté, mais le CNRS m'a donné la médaille d'argent, et m'a donné plus tard, en 2004, la médaille d'or. A ce moment-là, on voyait bien qu'ils n'étaient pas trop contents de ne pas pouvoir me reprendre mais ils ne pouvaient pas, bon, je veux dire. Et puis finalement, au début des années 80, j'ai été repris par le CNRS et ça a à nouveau été une période de créativité absolument incroyable, incomparable avec le temps que j'avais quand j'étais à l'université, pour exactement cette raison-là, exactement cette raison-là.

Entre temps, donc, j'avais quand même perçu qu'il y avait pour un chercheur au CNRS, quelque chose qui ne collait pas complètement : ce qui ne collait pas complètement, c'était que le travail de chercheur en maths est un travail où il n'y a pas un labo, où il n'y a pas en général, bon il faut dire que si on veut vraiment faire une percée, il faut être seul, et donc c'est un travail qui, au niveau ~~2~~ des contacts humains, est très frustrant. C'est à dire qu'en fait, la plupart du temps, on n'a pas d'illumination, je veux dire, je me souviens de l'histoire de ~~de~~ Valéry qui avait demandé à Einstein si Einstein avait un petit carnet dans lequel il pouvait noter ses grandes idées. Et Einstein lui avait répondu "j'ai eu deux grandes idées dans ma vie". Donc, je veux dire, c'est bien évident que la plupart du temps, un chercheur en mathématiques passe son temps à être frustré, c'est à dire, on ne comprend pas quelque chose, on cherche à comprendre, en fait, le vrai travail, on ne fait pas des maths parce qu'on veut avoir plaisir en faire, non, on ne fait pas des maths parce qu'on veut gagner de l'argent, non, on fait des maths parce qu'on cherche à comprendre. Donc la plupart du temps, on cherche à comprendre, c'est difficile, en attendant, on passe un temps extraordinaire, si vous voulez, à prendre des exemples, à chercher, etc. Le but de la manip, bien sûr, c'est de comprendre, mais c'est aussi de créer des concepts, parce qu'en faisant cela, on crée des concepts. Donc je m'étais aperçu quand même de quelque chose, qui était un peu une lacune, à l'époque, du CNRS, c'était qu'un chercheur en math était très isolé, et qu'en fait, il n'avait pas, si vous voulez, la possibilité, l'occasion donnée de transmettre son savoir. Et ce qui fait que lorsque le Collège de France m'a proposé, en 1984, de devenir professeur au Collège, j'ai trouvé, là, au Collège de France, si vous voulez, une combinaison qui était vraiment idéale, au sens où on laissait aux professeurs tout le temps qu'il faut pour chercher, mais il y avait une dose homéopathique, je dirais, d'enseignement c'est à dire que chaque année, on a un enseignement à faire, et je pense que depuis, si vous voulez, le CNRS s'est amendé dans cette direction, c'est-à-dire qu'on a facilité, beaucoup, les transitions entre le CNRS et l'université, qui permettent justement de combler ce vide, c'est-à-dire de transmettre le savoir. C'est quand même quelque chose d'essentiel, Nicole Le Douarin en a parlé, c'est quand même essentiel si vous voulez, pour un chercheur, de ne pas rester complètement isolé dans sa bulle, et de pouvoir transmettre son savoir. D'ailleurs, ce qui est évident, c'est qu'au moment où l'on transmet son savoir, au moment où l'on fait l'effort de le transmettre, on fait des progrès aussi. C'est à dire, on s'aperçoit qu'on n'avait pas bien compris quelque chose, simplement parce qu'on fait des cours là-dessus. Donc mon expérience bien sûr pour le CNRS, je lui dois tout tout ce que j'ai trouvé dans ma carrière scientifique, mais je suis arrivé à un moment béni, qui était le début des années 70, il y avait eu ce doublement de crédit du CNRS au début des années 60, et bon, je veux dire, malheureusement ce n'est plus le cas, parce que j'ai vu, si vous voulez, avec l'exemple de pas mal d'élèves que j'ai eus, la difficulté actuelle qu'il y a à rentrer au CNRS est maintenant beaucoup plus difficile.

[...]

Non, si vous voulez, je pense qu'il y a une erreur au moins dans mon domaine, dans le domaine des mathématiques, on ne peut pas généraliser, mais le fait d'avoir copié le système anglo-saxon qui est le système d'avoir un Grant de la NSF et qui est de faire des demandes de projets, etc., c'est désastreux pour les mathématiques pour la raison suivante : je crois qu'il y a une comparaison qui est assez frappante qui dit "les mathématiciens sont des fermions, les physiciens sont des bosons.". Alors pour les gens qui ne connaissent pas, ça veut dire, vous savez, que les fermions, c'est comme ça qu'on dévoile le tableau périodique des éléments, ils ont la propriété qu'ils ne peuvent pas occuper le même état . Donc, qu'est-ce que ça veut dire, ça veut dire qu'en général, les mathématiciens choisissent une petite case, et ils se mettent là-dedans, et ils travaillent seuls, contrairement aux physiciens qui en général, bon ça peut, bien sûr, il y a souvent en physique des modes, qui font qu'il ya un très grand nombre de physiciens théoriciens dont je connais les capacités, qui s'agglutinent sur un sujet. Alors, quelle est la difficulté quand on imite le système anglo-saxon ? C'est qu'en fait, lorsqu'on fait ces demandes de projets, etc., qu'est-ce qui va se passer ? Il va y avoir un effet grégaire, c'est à dire qu'en fait, on va créer des féodalités. Il va y avoir un certain nombre de sujets qui vont se développer au détriment des autres, et pour la raison que, finalement, ce sont les gens de ces sujets-là qui vont être nommés dans les commissions adéquates, et qui vont ne faire que recruter les gens de leurs propres sujets. Ça s'est produit de manière complètement évidente aux États-Unis, en mathématiques. Et en France, on échappait à ce défaut, on échappait vraiment à ce défaut, en Europe aussi, en général. Et malheureusement, quand on a imité, quand on a cherché à imiter ce système anglo-saxon avec les ANR en particulier, on est tombé dans le panneau, c'est à dire que cette liberté qu'il y avait, cette possibilité si vous voulez aux chercheurs de travailler sur un sujet qui est vraiment original, et qui ne correspond pas du tout à l'une de ces féodalités, a disparu. Et ça, au niveau du CNRS, c'est très très, très désastreux pour les mathématiques, au sens où si vous voulez que moi je vois bien ce dont on a besoin, pour les mathématiques, je ne parle que de ce sujet-là. Ce dont on a besoin, c'est... je connais un très grand nombre de jeunes chercheurs talentueux, talentueux, et qui maintenant passent leur temps à écrire des propositions de recherche, et donc on sait très bien qu'en fait, ce qu'ils écrivent, c'est bidon parce que quand on fait de la recherche, ce qu'on va trouver, on ne peut pas le dire avant, ce qu'on va trouver, on va chercher sur un sujet, puis on va trouver quelque chose qui ne correspondait pas du tout à ce qu'on a dit au départ. Donc ils écrivent, ils passent leur temps à écrire ça, ils passent leur temps à chercher un poste, d'une année sur l'autre, etc. au lieu que... de mon temps, on m'avait donné, je ne sais pas, cinq ans, cinq ans tranquilles au CNRS, j'étais pas je n'étais pas permanent, pas du tout, j'étais Stagiaire, après j'avais été Chargé, donc à cette époque, c'était avant les années 81, où on a titularisé les chercheurs, mais on pouvait prendre des chercheurs, pour une période limitée, ils étaient contractuels, ils n'étaient pas titulaires pour le reste de leur vie. Donc on n'avait pas cette difficulté infinie à les choisir, en sachant que pour tout le reste de leur vie, ils allaient continuer à trouver, c'était impossible. Mais par contre, on donnait à tous ces gens-là la possibilité de se réaliser. Parmi eux, il y en avait qui n'y arrivaient pas, mais bon ben, il y en avait qui y arrivaient. Mais si vous voulez, c'est un système qui fonctionnait merveilleusement mieux, que le système actuel dans lequel on crée ces féodalités et ces féodalités, qu'est ce qu'elles font, elles ne font que s'auto-reproduire et souvent de manière stérile, au bout d'un moment.

Tentative pour remplacer le logarithme intégrale par l'exponentielle intégrale adéquate dans la formule de Riemann du calcul de $\pi(x)$ (Denise Vella-Chemla, 28.02.2025)

Dans une conférence hier à l'IHP, Alain Connes a expliqué que certaines formules (notamment dans le livre de Edwards) étaient à modifier, pour le calcul de la fonction $\pi(x)$ qui fournit le nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné x.
J'ai essayé de programmer cela, sans succès, je me suis forcément trompée ici ou là. Le programme a un comportement particulier : l'erreur baisse régulièrement entre deux carrés de nombres premiers, puis elle remonte, puis redécroît jusqu'au double de premier suivant.
J'ai utilisé cette formule trouvée dans l'article de Dittrich[1].

Le programme utilise en lieu et place du calcul des logarithmes intégrales pour les x^ρ l'exponentielle intégrale, disponible dans le package python `mpmaths`.

```
import time
import numpy as np
import cmath
import math
from math import log,isqrt
import mpmath
from mpmath import ei,li
import scipy
from scipy.integrate import quad

class Premiers():
  def __init__(self,n):
    premier = np.full(n,True)
    premier[:2] = False
    for p in range(2,math.isqrt(n)+1):
      if premier[p]:
        premier[p*p::p] = False
    self.__premiers = np.nonzero(premier)[0]
  def compte(self,x):
    return np.searchsorted(self.__premiers,x,side='right')

def f(t):
    return(1/((t-1)*t*(t+1)*log(t)))

def integraleaajouter(x):
    return(quad(f,2,np.inf)[0])

def expoi(x):
    fic = open("zeros1000",'r')
    zeros = fic.readlines()
    zeros = map(float,zeros)
    sommedesEi = 0
    for zz in zeros:
        sommedesEi = sommedesEi+ei((0.5+zz*1j)*log(x))+ei((0.5-zz*1j)*log(x))
```

[1]

```
    fic.close()
    return(sommedesEi)

tic = time.time()
P = Premiers(1001)
for x in range(2,1001):
    a = P.compte([x])
    print('pix(',x,') calcul par pgm --> ',int(a))
    formuleR = li(x)-expoi(x)+log(0.5)+integraleaajouter(x)
    print('pix(',x,') calcul par formule --> ',formuleR.real)
    erreur = (int(formuleR.real)-a)/a
    print('erreur entre valeur reelle et valeur par formuleR :',erreur[0],'\n')
tac = time.time()
print('resultat obtenu en ',tac-tic,' s.')

```

Son résultat jusqu'à 1000 est ci-dessous :
Rappelons le programme qui faisait usage de la fonction `li` proposée par Riemann (en soustrayant seulement *li* pour la racine carrée et en oubliant toutes les autres racines (cubiques, etc) comme Riemann le proposait) :

```


```

Son résultat jusqu'à 1000 est ci-dessous :

Les nombres comme fonctions[1]

Yuri I. Manin

Institut Max Planck pour les mathématiques, Bonn, Allemagne

Résumé. Dans ce survol, je discute de la théorie de A. Buium des "équations différentielles dans la direction p–adique" ([Bu05]) et de ses inter-relations avec la "géométrie sur le corps à un élément", sur la base de différentes approches des modèles p–adiques en physique théorique (cf. [VlVoZe94], [ACG13]).

Introduction

Une des plus belles (voire *la* plus belle) des formules mathématiques est l'identité d'Euler

$$e^{\pi i} = -1. \tag{0.1}$$

Elle lie quatre nombres $\pi = 3,1415912\ldots$, $e = 2,71828\ldots$, $i = \sqrt{-1}$, et -1 lui-même, et a une très forte saveur physique étant la base du principe universel des "amplitudes de probabilités d'interférence" en mécanique quantique et en théorie des champs quantique. Le "-1" du côté droit de (0.1) montre comment deux états quantiques de phases opposées peuvent s'annuler l'un l'autre après superposition.

D'un autre côté, de ces quatre nombres $\pi, e, i, -1$, *seul* π ressemble à quelque chose de similaire à une "constante physique" au sens où il peut être (et a été) mesuré avec une certaine approximation.

De plus, les noms traditionnels des classes respectives de nombres, que nous avons tendance de nos jours à percevoir comme des termes mathématiques introduits par des définitions dans les cours de calcul, – *irrationels, transcendants, imaginaires, négatifs,* – ont transmis au cours de l'histoire la perplexité primordiale de l'esprit rationnel, qui découvre ces nombres mais reste réticent à les accepter.

On peut rappeler qu'au moment de leur découverte, ces nombres avaient des sources très différentes de justification : π dans la géométrie euclidienne (qui décrit essentiellement la cinématique des solides dans le vide gravitationnel), -1 dans le commerce ("notion de somme restant dûe"), e dans les débuts de l'informatique (l'implémentation de Napier de la découverte qu'un précalcul spécifique peut faciliter les tâches de tous les jours associées à la multiplication), i dans les débuts de l'histoire des équations polynomiales.

Quand on m'a demandé de donner un exposé au Workshop sur les méthodes p–adiques de modélisation des systèmes complexes, j'ai décidé de présenter d'abord un environnement p–adique de π et e.

Il est probable que la formule "arithmétique" la plus ancienne dans laquelle π intervient soit due à Euler (comme (0.1)):

$$\frac{\pi^2}{6} = \prod_p (1 - p^{-2})^{-1}. \tag{0.2}$$

Pourtant, elle fait intervenir *tous* les nombres premiers p simultanément, et en fait, elle peut être mieux comprise comme un fait de la géométrie *adélique*. En tant que telle, elle ressemble à une généralisation de la formule produit simplette $\prod_v |a|_v = 1$ valide pour tout $a \in \mathbf{Q}^*$, où v parcourt toutes les valuations de $\mathbf{Q}$, les valuations p–adiques et la valuation archimédienne. Pour être plus

[1] Basé sur des exposés à l'*International Workshop on p–adic methods for modelling of complex systems*, Bielefeld, du 15 au 19 Avril 2013, et aux *Journées Arithmétiques*, à Grenoble, du 2 au 5 juin 2013.

Traduction de la note https://arxiv.org/pdf/1312.5160.pdf, Denise Vella-Chemla, juillet 2023.

précis, (0.2) exprime le fait que la mesure naturelle adélique de $\mathrm{SL}(2, A_{\mathbf{Q}})/\mathrm{SL}(2, \mathbf{Q})$ est égale à 1. Pour plus de détails, voir [Ma89], où il était suggéré que la physique quantique fondamentale pouvait être reliée à la théorie des nombres via cette philosophie adélique, *"la démocratie de toutes les valuations"*, et que l'usage exclusif des nombres réels et des nombres complexes dans nos formalismes standards est une affaire de tradition, que nous essayons maintenant de surpasser en remplaçant "la première parmi les égales" valuation archimédienne par une valuation arbitraire non archimédienne.

Maintenant voyons e. Ici, comme le découvreur des nombres p–adiques Kurt Hensel lui-même le remarquait, on a un candidat pour e^p dans chaque corps p–adique, puisque les séries (archimédiennes) pour e^p convergent également p–adiquement :

$$e^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!}. \tag{0.3}$$

Puisque la racine de degré p du côté droit de (0.3) comprise comme un nombre p–adique engendre une extension de $\mathbf{Q}_p$ de degré p, il peut n'y avoir aucun nombre algébrique avec de tels composants locaux.

Cet argument semble, d'une manière alléchante, proche d'une preuve de la transcendance de e, bien que, bien sûr, il n'en soit pas un. D'un autre côté, je ne connais aucune formule adélique faisant intervenir e d'une manière semblable à celle dont (0.2) fait intervenir π.

Dans le présent survol, je procède à une discussion consistant en trois parties principales.

A. Je décrirai une classe de nombres (incluant les nombres transcendants) pertinents pour la théorie quantique des champs au sens où ils définissent les coefficients de séries perturbatives pour les intégrales de chemin de Feynman. Ces nombres sont appelés périodes (numériques), ils ont été introduits et étudiés dans [KoZa01].

Grossièrement, les périodes numériques sont des valeurs en des points algébriques de certaines *fonctions transcendantes multi–valuées*, naturellement définies sur plusieurs espaces modulaires, et également appelées traditionnellement périodes de fonctions.

Ces périodes de fonctions satisfont des équations différentielles de type Picard–Fuchs, et de telles équations fournissent les outils principaux pour les étudier.

Dans la seconde partie de ce survol, je me concentrerai sur le programme suivant :

B. Pour un nombre premier p, des périodes numériques aussi peuvent être considérées comme des solutions d'"équations différentielles dans la direction p–adique".

La machinerie complète de telles équations différentielles a été suggérée et développée par Alexandru Buium, cf. sa monographie [Bu05], et je la rappellerai. J'utilise l'expression "les nombres comme des fonctions" pour nommer cette analogie.

Alexandru Buium a montré de façon convaincante que l'analogie correcte pour la dérivation p-adique est (une généralisation naturelle du) quotient de Fermat $\delta_p(a) := (a - a^p)/p$ initialement défini pour $a \in \mathbf{Z}$. De façon inattendue, cette idée formelle a de riches conséquences : Buium était capable de construire des analogues des espaces jets classiques "dans la direction p–adique", avec une théorie des fonctions de ces espaces jets, contenant une quantité incroyable de constructions classiques nécessitant traditionnellement du calcul.

Ces périodes numériques qui étaient déjà traitées par Buium incluent les périodes des variétés abéliennes sur les corps de nombres (ou même p-adiques). (Mais le lecteur devrait être attentif au fait que, en l'absence d'uniformisation, cette dernière assertion seulement décrit très grossièrement un dessin assez compliqué ; voir pour plus de détails le texte principal).

C. Pour les équations différentielles de Buium, "les constantes dans la direction p–adique" s'avèrent être les racines de l'unité et zéro : les représentants de Teichmüller des classes résiduelles modulo p.

Jusqu'à récemment, la géométrie algébrique sur de telles constantes était motivée par des connaissances très différentes : pour un survol plus détaillé, voir [Ma95], [Ma08]. Elle est connue comme la "théorie du corps $\mathbf{F}_1$".

Brièvement, ce dernier champ de recherche se focalise sur le but suivant : pour faire une analogie entre, disons, $\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$ (ou le spectre d'anneaux d'entiers algébriques) d'un côté, et les courbes algébriques de l'autre, si élaborée et précise qu'on puisse utiliser une version de la technique d'André Weil, Alexander Grothendieck et Pierre Deligne pour approcher la conjecture de Riemann pour la fonction zeta de Riemann et les fonctions arithmétiques similaires.

Un pont solide entre la $\mathbf{F}_1$–géométrie et les équations différentielles arithmétiques a été construit par James Borger : cf. [Bor11a,b], [Bor09], [BorBu09]. Pour le dire brièvement, pour définir la dérivée p–adique δ_p des éléments d'un anneau commutatif, on a besoin d'un *ascenseur* de l'application de Frobenius, c'est-à-dire d'un endomorphisme $a \mapsto F(a)$, tel que $F(a) \equiv a^p \,(\mathrm{mod}\, p)$. Borger a remarqué qu'un système très naturel de tels ascenseurs pour tous les p simultanément est codé par la *psi–structure* comme on l'appelle, ou par une légère modification, la *lambda–structure,* et il a alors suggéré de considérer une structure comme *une donnée de descente sur* $\mathrm{Spec}\,A$ *vers* $\mathbf{F}_1$. Une notion reliée de "coordonnée cyclotomique" dans $\mathbf{F}_1$ a été suggérée indépendamment dans [Ma08]. En particulier, $a \in A$ est une coordonnée cyclotomique (selon un nombre premier p) si $F(a) = a^p$. Je reviendrai à ces idées dans la dernière partie de ce survol.

Finalement, je mentionnerai qu'il existe une théorie profonde très bien développée des "périodes p–adiques" pour les variétés algébriques définie sur les corps p–adiques qui a remplacé l'intégration classique des formes différentielles sur les cycles topologiques avec une comparaison avec les théories de cohomologie de de Rham et étale : voir [Fa88] et une récente contribution et un bref survol [Be11]. Les périodes dans ce paradigme appartiennent à un très grand champ de Fontaine B_{dR}. L'approche des périodes par la géométrie p-adique de Buium que nous décrivons dans ce survol a une saveur très différente. Il serait certainement important de trouver des connexions entre ces deux théories.

1. Périodes

1.1. Périodes numériques. M. Kontsevich et D. Zagier ont introduit un important sous-anneau $P \subset \mathbf{C}$ contenant tous les nombres algébriques et de nombreux nombres importants en physique (voir [KoZa01]).

1.1.1. Définition. *$\alpha \in P$ si et seulement si les parties réelle et imaginaire de α sont des valeurs d'intégrales absolument convergentes de fonctions dans $\mathbf{Q}(x_1, \dots, x_n)$ sur des séquences dans $\mathbf{R}^n$ données par des inégalités polynomiales avec coefficients dans $\mathbf{Q}$.*

1.1.2. Exemples.

a) Tous les nombres algébriques sont des périodes.

b) $\pi = \int\int_{x^2+y^2\leq 1} dxdy.$

c) $\Gamma\,(p/q)^q \in P.$

Il n'est pas difficile de prouver que les périodes forment un sous-anneau de $\mathbf{C}$. Les intégrales de Feynman (d'une certaine classe) sont des périodes. Mais on ne sait toujours pas si π^{-1}, e, ou la constante d'Euler γ sont des périodes (probablement pas). Il y a une connexion forte entre les périodes et les motifs de Grothendieck (voir [KoZa01]), et $2\pi i$ correspond au motif de Tate. Puisque dans le formalisme motivique, on inverse formellement le motif de Tate, il est également utile d'étendre l'anneau de période par $(2\pi i)^{-1}$.

d) Les ζ–valeurs multiples (Euler)

$$\zeta(n_1, ..., n_m) = \sum_{0<k_1<...<k_m} \frac{1}{k_1^{n_1} ... k_m^{n_m}}\,, \qquad n_i \geq 1, n_m > 1\,. \tag{1.1}$$

sont des périodes.

Pour le voir, on reproduit la formule intégrale de Leibniz et de Kontsevich pour elles.

Soit $n_1, \dots, n_m$ des entiers positifs comme dans (1.1). Posons $n := n_1 + \cdots + n_m$, et $\underline{\varepsilon} := (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_i = 0$ ou 1, et $\varepsilon_i = 1$ précisément quand $i \in \{1, n_1 + 1, n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + \cdots + n_{m-1} + 1\}$. De plus, posons

$$\omega(\underline{\varepsilon}) := \frac{dt_1}{t_1 - \varepsilon_1} \wedge ... \wedge \frac{dt_n}{t_n - \varepsilon_n}$$

et

$$\Delta_n^0 := \{(t_1^0, \dots, t_n^0) \in \mathbf{R}^n \quad | \quad 0 < t_1^0 < \cdots < t_n^0 < 1\}$$

Alors on a

$$\zeta(n_1, \dots, n_m) = \zeta(\underline{\varepsilon}) = (-1)^m \int_{\Delta_n^0} \omega(\underline{\varepsilon}).$$

Pour de plus amples détails, voir [GoMa04], où les motifs mixtes associés à ces périodes ont été identifiés : ils sont construits en utilisant les espaces modulaires $\overline{M}_{0,n}$ et leurs stratifications canoniques.

1.2. Fonctions–périodes. Parfois on peut introduire des paramètres dans la description des éléments de P esquissée ci-dessus et ainsi passer à l'étude des périodes comme des fonctions. À cette fin, il est d'abord pratique de réécrire la définition d'une façon plus appropriée dans le paradigme géométrico–algébrique, comme cela a déjà été fait dans [KoZa01], sec. 4.1.

Considérons un quadruplet (V, D, ω, γ). Ici, V est une variété algébrique de dimension pure n, munie du diviseur D avec croisements normaux, n–forme ω régulière en dehors de D, et une classe d'homologie $\gamma \in H_n(V(\mathbf{C}), D(\mathbf{C}); \mathbf{Q})$. De plus, (V, D, ω) doit être définie sur $\mathbf{Q}$, et l'intégrale $\int_\gamma \omega$ doit converger. Alors l'ensemble de telles intégrales coïncide avec l'anneau de périodes P défini ci-dessus.

La façon de relativiser cette définition est maintenant claire, en remplaçant V par un morphisme relativement lisse $f : V \to S$ défini sur $\mathbf{Q}$, muni d'une S–famille appropriée de donnéees (D, ω, γ) ayant les propriétés nécessaires dans le sens de la fibre.

Alors on obtient des fonctions intéressantes, généralement transcendantes sur la base S, et éventuellement sur les espaces / piles modulaires, et ces fonctions satisfont les (versions des) équations classiques de Picard–Fuchs.

1.2.1. Exemple 1. Soit S la droite affine avec t–coordonnée, et les points $t = 0, 1$ effacés. Sur elle, on a la famille E des courbes elliptiques E_t, qui sont des fermetures projectives de la courbe affine $E_t : Y^2 = X(X-1)(X-t)$.

Voici l'équation différentielle linéaire pour les périodes de la 1–forme relative sur la base dX/Y le long des 1–cycles fermés dans le sens de la fibre de E_t:

$$L_t\omega := 4t(1-t)\frac{d^2\omega}{dt^2} + 4(1-2t)\frac{d\omega}{dt} - \omega = 0. \tag{1.2}$$

Exemple 2. L'équation différentielle non linéaire pour les périodes de dX/Y sur les 1–cycles relatifs avec bornes aux sections $P := (X(t), Y(t))$ d'ordre fini :

$$\mu(P) = 0, \tag{1.3}$$

où

$$\mu(P) := \frac{Y(t)}{2(X(t)-t)^2} - \frac{d}{dt}\left[2t(t-1)\,\frac{X'(t)}{Y(t)}\right] + 2t(t-1)X'(t)\,\frac{Y'(t)}{Y(t)^2}. \tag{1.4}$$

Notons que μ, défini par (1.3) et étendu à la fonction sur l'ensemble des L–points de la fibre générique E_t avec des valeurs dans n'importe quelle extension différentielle L de $\mathbf{Q}(t)$ est "un caractère différentiel" :

$$\mu(P+Q) = \mu(P) + \mu(Q) \tag{1.5}$$

Pour expliquer (et prouver) ces résultats, il suffit de noter que

$$\mu(P) = L_t \int_\infty^P dX/Y$$

parce que

$$L_t(dX/Y) = d\frac{Y}{(X-t)^2}.$$

1.3. Intégrales de Feynman perturbatives. Ici je décrirai brièvement l'origine heuristique de l'ensemble des périodes numériques (et des fonctions–périodes) indexées par des graphes étiquetés pertinent pour la théorie quantique des champs, suivant [Ma09], sec. 1. Pour une étude plus précise de (certaines) intégrales apparaissant de cette façon, voir [MüWZa12] et [W13].

Une intégrale de chemin de Feynman est une expression heuristique de la forme

$$\frac{\int_P e^{S(\varphi)} D(\varphi)}{\int_P e^{S_0(\varphi)} D(\varphi)} \tag{1.6}$$

ou, plus généralement, une expression heuristique similaire pour *les fonctions de corrélation.*

Ici le domaine d'intégration P représente un espace fonctionnel de *corps classiques* φ sur une *variété d'espace-temps* M. L'espace-temps peut être muni d'une mesure de Minkowski ou euclidienne. Dans les modèles de gravité quantique, la mesure est un de ces corps. Les corps peuvent être des corps de fonctions scalaires, de tenseurs de différents rangs, de sections de fibrés vectoriels, de relations.

$S : P \to \mathbf{C}$ est une fonctionnelle d'*action classique* : généralement $S(\varphi)$ s'exprime comme une intégrale sur M d'une densité locale sur M qu'on appelle le *lagrangien.* Dans notre notation (1.6) $S(\varphi) = -\int_M L(\varphi(x))dx$. la densité du lagrangien peut dépendre de dérivés, inclut des distributions, etc.

Habituellement $S(\varphi)$ est représentée comme la somme d'une *partie quadratique* $S_0(\varphi)$ (le lagrangien des corps libres) et de termes restants qui sont interprétés comme des interactions et sont traités de façon perturbative.

Finalement, la mesure d'intégration $D(\varphi)$ et l'intégrale elle-même $\int_P$ devraient être simplement considérées comme une partie de l'expression totale (1.6) exprimant l'idée d'une "sommation des amplitudes de probabilités quantiques sur toutes les trajectoires classiques".

Pour expliquer l'apparence et la combinatoire des graphes de Feynman, considérons un modèle jouet, dans lequel P est remplacée par un espace réel de dimension finie. On le munit d'une base indexée par un ensemble fini de "couleurs" A, et d'une mesure euclidienne g codée par le tenseur symétrique (g^{ab}), $a, b \in A$. On pose $(g^{ab}) = (g_{ab})^{-1}$.

L'action fonctionnelle $S(\varphi)$ sera une série formelle en coordonnées linéaires sur P, (φ^a), de la forme

$$S(\varphi) = S_0(\varphi) + S_1(\varphi), \quad S_0(\varphi) := -\frac{1}{2}\sum_{a,b} g_{ab}\varphi^a\varphi^b,$$

$$S_1(\varphi) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{a_1,\ldots,a_k \in A} C_{a_1,\ldots,a_k}\varphi^{a_1}\ldots\varphi^{a_k} \tag{1.7}$$

où les $(C_{a_1,\ldots,a_n})$ sont certains tenseurs symétriques. Si ces tenseurs s'évanouissent pour tous les rangs suffisamment grands n, $S(\varphi)$ devient un polynôme et peut être considéré comme une fonction authentique sur P. Ci-dessous, on traitera (g_{ab}) et $(C_{a_1,\ldots,a_n})$ comme des variables formelles indépendantes, "des coordonnées formelles sur l'espace des théories".

Maintenant, on peut exprimer la version jouet de (1.6) comme une série sur des (classes d'isomorphismes de) graphes.

Ici, un graphe τ consiste en deux ensembles finis, les arêtes E_τ et les sommets V_τ, et l'application d'incidence envoyant E_τ vers l'ensemble des paires non ordonnées de sommets. Chaque sommet est supposé être incident à au moins une arête. Il y a un *graphe vide.*

La formule pour (1.6) incluant un ou plusieurs paramètres formels λ ("constante de Planck") ressemble à la formule suivante :

$$\frac{\int_P e^{\lambda^{-1}S(\varphi)}D(\varphi)}{\int_P e^{\lambda^{-1}S_0(\varphi)}D(\varphi)} = \sum_{\tau\in\Gamma} \frac{\lambda^{-\chi(\tau)}}{|\,\tau|}\, w(\tau) \tag{1.8}$$

Du côté droit de (1.8), la sommation est prise sur (les représentants de) toutes les classes d'isomorphismes de tous les graphes finis τ. Le poids $w(\tau)$ d'un tel graphe est déterminé par la fonctionnelle d'action (1.2) comme suit :

$$w(\tau) := \sum_{u\colon F_\tau\to A} \prod_{e\in E_\tau} g^{u(\partial e)} \prod_{v\in V_\tau} C_{u(F_\tau(v))}\,. \tag{1.9}$$

Ici F_τ est l'ensemble des drapeaux, ou "demi-arêtes" de τ. Chaque arête e consiste en une paire de drapeaux dénotée par ∂e, et chaque sommet v détermine l'ensemble des drapeaux qui lui est incident, dénoté $F_\tau(v)$. Finalement, $\chi(\tau)$ est la caractéristique d'Euler de τ.

Le passage du côté gauche de (1.8) au côté droit est par définition le résultat d'une intégration terme à terme de la série formelle qui peut être obtenue à partir de la série de Taylor de l'exposant dans l'intégrande. Concrètement

$$\int_P e^{\lambda^{-1}S(\varphi)}D(\varphi) = \int_P e^{\lambda^{-1}S_0(\varphi)}\left(1+\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\lambda^{-N}S_1(\varphi)^N}{N!}\right)\prod_a d\varphi^a \ := $$

$$\int_P e^{\lambda^{-1}S_0(\varphi)}\prod_a d\varphi^a \ +$$

$$\sum_{N=1}^{\infty}\frac{\lambda^{-N}}{N!}\sum_{k_1,\dots,k_N=1}^{\infty}\frac{1}{k_1!\dots k_N!}\sum_{a_j^{(i)}\in A, 1\le j\le k_i}\prod_{i=1}^{N}C_{a_1^{(i)},\dots,a_{k_i}^{(i)}}\int_P e^{\lambda^{-1}S_0(\varphi)}\prod_{i,j}\varphi^{a_j^{(i)}}\prod_a d\varphi^a \,. \tag{1.10}$$

Cette définition a du sens si le côté droit de (1.10) est compris comme une série formelle d'un nombre infini de variables pondérées indépendantes $C_{a_1,\dots,a_k}$, le poids de $C_{a_1,\dots,a_k}$ étant k. En fait, les intégrales gaussiennes dans les coefficients convergent uniformément, et on peut utiliser ce qu'on appelle le lemme de Wick.

La dernière remarque est que les *périodes* apparaissant dans les modèles concrets des théories quantiques des champs sont des *poids (1.9)*, dans lesquels la *sommation* sur les applications $u : F_\tau \to A$ est remplacé par l'*intégration* sur certaines variables continues comme les positions / momenta /couleurs des particules se déplaçant le long des arêtes de graphes respectifs de Feynman : cf. [W13], [MüWZa12] et les références qu'ils fournissent.

2. Équations différentielles arithmétiques

2.1. Analogies entre les nombres p–adiques et les séries formelles. En combinant les leçons des exemples précédents, on suggère maintenant que pour voir les "propriétés p–adiques" des périodes numériques des nombres transcendants importants pour la physique, on essaie de concevoir une théorie des "dérivations dans la direction p–adique" et que l'on interprète les périodes numériques comme les solutions d'équations différentielles dans la direction p–adique.

Ci-dessous, on présente les bases d'une telle théorie due à A. Buium. On commence avec la table d'analogies suivante. Du côté des séries formelles, on considère des anneaux de la forme $k[[t]]$ où k est un corps de caractéristique zéro. Du côté p–adique, on considère l'extension non ramifiée maximale R de $\mathbf{Z}_p$.

Séries formelles	p-adique
$\sum a_i t^i \in k[[t]] =: L$	$\sum \varepsilon_i p^i \in R := \mathbf{Z}_p^{un}$
Corps de constantes : $a_i \in k$	Monoïde : $\varepsilon_\mathrm{i} \in \mu_\infty \cup \{0\}$ (*représentants de Teichmüller*)
Dérivation : d/dt	$\delta_p(*) := \frac{\Phi(*)-*^p}{p}$ ($\Phi :=$ *ascenseur de Frobenius*)
Opérateurs différentiels polynomiaux(OPD) :	OPD p-adique :
$D \in L[T_0, T_1, \dots, T_n]$	$D_p \in \overline{R[T_0, T_1, \dots, T_n]}$ *complétion* (p-*adique* !)

Action de OPD[2] : $f \mapsto D(f, f', \dots f^{(n)})$ or $D_p(f, \delta_p f, \dots, \delta_p^n f)$

L'ascenseur de Frobenius $\Phi: R \to R$ qui intervient dans la définition de la dérivée p–adique δ_p est donné explicitement comme $\Phi(\sum \varepsilon_i p^i) := \sum \varepsilon_i^p p^i$.

2.2. Exemples et applications. Ici on donne des exemples d'opérateurs différentiels p–adiques intéressants.

2.2.1. Exemple 1 : *dérivée logarithmique p–adique.* C'est un analogue de l'application

$$\mathbf{G}_m(L) \to \mathbf{G}_a(L): \quad f \mapsto f'/f \tag{2.1}$$

où un point $x \in \mathbf{G}_m(L)$ est représenté par la valeur $f \in L^*$ en x d'un caractère algébrique fixé t de $\mathbf{G_m}$ tel que $\mathbf{G_m} = \mathrm{Spec}\,[t, t^{-1}]$. De façon similaire, sa version p–adique est le caractère différentiel

$$\mathbf{G}_m(R) \to \mathbf{G}_a(R):$$

$$a \mapsto \delta_p a \cdot a^{-p} - \frac{p}{2}(\delta_p a \cdot a^{-p})^2 + \frac{p^2}{3}(\delta_p a \cdot a^{-p})^3 - \dots \tag{2.2}$$

Exemple 2 : *Symbole de réciprocité quadratique :*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!} (\delta_p a)^k a^{-pk}\right).$$

Exemple 3 : *Un analogue p–adique du caractère différentiel μ du groupe de sections d'une courbe elliptique générique :*

$$\mu(P) = (4t(1-t)\frac{d^2}{dt^2} + 4(1-2t)\frac{d}{dt} - 1)\int_{\infty}^{P} \frac{dX}{Y}$$

comme un opérateur différentiel p–adique non linéaire agissant sur les coordonnées de P.

De tels analogues ont été construits dans [Bu95] également pour des variétés abéliennes de dimension arbitraire et appelés caractères δ_p–différentiels $\psi(P)$. Plus précisément, soit E une courbe elliptique sur R. Alors il existe une application différentielle additive $\psi: E(R) \to R^+$ d'ordre 2 (comme dans le cas géométrique) ou 1 (comme pour $\mathbf{G}_m$).

Un caractère d'ordre 2 existe si E a une bonne réduction et n'est pas l'élévation canonique de sa réduction dans le sens de Serre–Tate : cf. une discussion supplémentaire dans la section 4.4 ci-dessous.

Un caractère d'ordre 1 existe si soit E a une bonne réduction ordinaire et est l'élévation canonique, soit E a une mauvaise réduction multiplicative.

En utilisant ces caractères multiplicatifs, A. Buium et l'auteur du présent article ont construit dans [BuMa13] des *"équations de Painlevé VI avec temps p–adique."*

2.3. Formalisme général des p–dérivations. Dans l'algèbre commutative, étant donné un anneau A et un A–module N, *une dérivation de A avec valeurs dans N* est une application additive $\partial: A \to N$ telle que $\partial(ab) = b\partial a + a\partial b$. De façon équivalente, l'application $A \to A \times N: a \mapsto (a, \partial a)$ est un homomorphisme d'anneaux, où $A \times N$ est muni de la structure d'anneau commutatif avec addition composant par composant, et hérite de la multiplication de A sur $A \times \{0\}$ et a $\{0\} \times N$ comme idéal de carré zéro.

De façon similaire, en géométrie arithmétique, Buium définit *une p–dérivation de A avec valeurs dans une A–algèbre B, $f : A \to B$,* comme une application $\delta_p : A \to B$ telle que l'application $A \to B \times B : a \mapsto (f(a), \delta_p(a))$ est un homomorphisme d'anneaux $A \to W_2(B)$ où $W_2(B)$ est l'anneau des vecteurs de Witt p–typiques de longueur 2. Ici, les vecteurs de Witt de la forme $(0, b)$ forment l'idéal de carré zéro seulement si $pB = \{0\}$.

En rendant cette définition explicite, on obtient $\delta_p(1) = 0$, et la version suivante des formules d'additivité et de Leibniz :

$$\delta_p(x + y) = \delta_p(x) + \delta_p(y) + C_p(x, y), \tag{2.3}$$

$$\delta_p(xy) = f(x)^p \cdot \delta_p(y) + f(y)^p \cdot \delta_p(x) + p \cdot \delta_p(x) \cdot \delta_p(y), \tag{2.4}$$

où

$$C_p(X, Y) := \frac{X^p + Y^p - (X + Y)^p}{p} \in \mathbf{Z}[X, Y]. \tag{2.5}$$

En particulier, cela implique que pour toute p–dérivation $\delta_p : A \to B$, l'application respective $\phi_p : A \to B$ définie par $\phi_p(a) := f(a)^p + p\delta_p(a)$ est un homomorphisme d'anneaux satisfaisant $\phi_p(x) \equiv f(x)^p \pmod p$, c'est-à-dire un "ascenseur de l'application de Frobenius appliquée à f".

Inversement, en ayant un tel ascenseur du Frobenius, on peut reconstruire de manière unique la dérivation respective δ_p *sous la condition que B n'ait pas de p–torsion :*

$$\delta_p(a) := \frac{\phi_p(a) - f(a)^p}{p}$$

en généralisant la définition donnée en 2.1 pour $A = B = R$ et le morphisme identique.

En travaillant avec les p–dérivations $A \to A$ par rapport à l'application identité $A \to A$ et en conservant p fixé, on peut appeler (A, δ) un δ–anneau. Les morphismes de δ–anneaux sont des morphismes d'algèbre compatibles avec leurs p–dérivations.

2.4. p–jets espaces. Soit A une R–algèbre. *Un séquence de prolongement* pour A consiste en une famille de R–algèbres p–adiquement complètes $A^i, i \geq 0$, où $A^0 = A\widehat{\ }$ est la complétion p–adique de A, et d'applications $\varphi_i, \delta_i : A^i \to A^{i+1}$ satisfaisant les conditions suivantes :

a) les φ_i sont des homomorphismes d'anneaux, chaque δ_i est une p–dérivation par rapport à φ_i, compatible avec δ sur R.

b) $\delta_i \circ \varphi_{i-1} = \varphi_i \circ \delta_{i-1}$ pour tout $i \geq 1$.

Les séquences de prolongements forment une catégorie avec morphismes triviaux, homomorphismes d'anneaux $f_i : A^i \to B^i$ commutant avec φ_i et δ_i, et dans leur sous-catégorie avec A^0 fixé *il existe un élément initial, défini à isomorphisme unique près* (cf. [Bu05], Chapitre 3). On peut l'appeler la séquence universelle de prolongement.

Dans le langage géométrique, si $X = \operatorname{Spec} A$, le spectre formel du $i^{\text{ième}}$ anneau A^i dans la séquence de prolongement universelle est dénoté par $J^i(X)$ et on le désigne comme *le $i^{\text{ième}}$ p–jet espace de X*. Inversement, $A^i = O(J^i(X))$, l'anneau des fonctions globales.

Les morphismes géométriques (des schémas formels sur $\mathbf{Z}$) correspondant à ϕ_i sont dénotés par $\phi^i : J^i(X) \to J^0(X) =: X\widehat{\ }$(complétion p–adique formelle de X).

Cette construction est compatible avec la localisation de telle façon qu'elle peut être appliquée à des schémas non nécessairement affines : cf. [Bu05], Chapitre 3.

3. Version du calcul de Buium arithmétiquement global et lambda–anneaux

3.1. Introduction. Les nombres p–adiques ont été considérés dans la sec. 2 ci-dessus comme des analogues des fonctions formelles / germes locaux des fonctions à une variable.

Dans cette section, on discute de la question suivante : existe-t-il une version (plus) globale des "fonctions arithmétiques", éléments d'un anneau A, admettant des dérivations p–adiques δ_p par rapport à plusieurs, éventuellement tous les nombres premiers p ?

Un exemple évident est $\mathbf{Z}$:

$$\delta_p(m) = \frac{m - m^p}{p}.$$

Généralement, on a besoin d'"ascenseurs des Frobenii" : de tels endomorphismes d'anneaux $\Phi_p : A \to A$ tels que $\Phi(a) \equiv a^p \,(\mathrm{mod\,p})$. Alors on peut poser

$$\delta_p(a) = \frac{\Phi_p(a) - a^p}{p}.$$

Un cadre général pour un système cohérent de tels ascenseurs est donné par la définition suivante :

3.2. Définition. *Un système de psi–opérations sur un anneau commutatif unitaire A est une famille d'endomorphismes d'anneaux $\psi^k : A \to A$, $k \geq 1$, tels que :*

$$\psi^1 = id_A, \quad \psi^k\psi^r = \psi^{kr},$$

$$\psi^p x \equiv x^p \,(\mathrm{mod}\, pA) \quad \text{pour tout premier } p.$$

Une autre structure importante est introduite par la définition suivante :

3.3. Définition. *Un système de lambda–opérations sur un anneau commutatif unitaire A est une famille d'endomorphismes de groupes additifs $\lambda^k : A \to A$, $k \geq 0$, tels que*

$$\lambda^0(x) = 1, \ \lambda^1 = id_A,$$

$$\lambda^n(x+y) = \sum_{i+j=n} \lambda^i(x)\lambda^j(y).$$

Ces structures sont liées de la façon suivante :

3.4. Proposition.

(a) Si A n'a pas de torsion additive, alors n'importe quel système de psi–opérations définit un système unique de lambda–opérations satisfaisant les relations de compatibilité :

$$(-1)^{k+1}k\lambda^k(x) = \sum_{i+j=k,\, j\geq 1} (-1)^{j+1}\lambda^i(x)\psi^j(x).$$

(b) Généralement, n'importe quel système de lambda–opérations définit un unique système de psi–opérations satisfaisant les mêmes relations de compatibilité.

Brièvement, un tel anneau, avec les psi et les lambda est appelé *un lambda–anneau.*

3.5. Exemple : un anneau de Grothendieck.

Soit $R =$ un anneau commutatif unitaire.

Dénotons par $A = A_R$ le K_0–groupe de Grothendieck de la catégorie additive, constitué de paires (P, φ), où P est un R–module projectif de type fini, $\varphi : P \to P$ un endomorphisme. Dénotons par $[(P, \varphi)] \in A$ la classe des (P, φ).

La structure d'anneau sur A est induite par le produit tensoriel : $[(P, \varphi)][(Q, \psi)] := [(P \otimes Q, \varphi \otimes \psi]$.

Les lambda–opérations sur A sont définies par $\lambda^k [(P, \varphi)] := [(\Lambda^k P, \Lambda^n \varphi)]$.

3.6. Exemple : le grand anneau de Witt $W(R)$.

À nouveau, appelons $R =$ un anneau commutatif unitaire.

Définissons le groupe additif de $W(R)$ comme *le groupe multiplicatif* $1 + TR[[T]]$.

La multiplication $*$ dans $W(R)$ est définie sur les éléments $(1 - at)$ par $(1 - aT) * (1 - bT) := 1 - abT$, et alors étendue à la totalité de l'ensemble $W(R)$ par distributivité, par continuité dans la topologie (T)–adique, et par fonctorialité dans R.

De façon similaire, les lambda–opérations dans $W(R)$ sont définies par $\lambda^k (1 - aT) := 0$ pour $k \geq 2$, et alors étendues par formules d'addition (Déf. 3.3) et par continuité.

4. Racines de l'unité comme constantes : Géométries sur des "corps de caractéristique 1"

4.1. Histoire initiale. Dans l'article [T57], J. Tits a remarqué que certains invariants numériques de base reliés à la géométrie des groupes classiques sur les corps finis $\mathbf{F}_q$ ont des valeurs bien définies pour $q = 1$, et ces valeurs admettent des interprétations combinatoires suggestives.

Par exemple, si $q = p^k$, p un nombre premier, $k \geq 1$, alors

$$\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{F}_q) = \frac{(\mathbf{A}^n(\mathbf{F}_q) \setminus \{0\})}{\mathbf{G}_m(\mathbf{F}_q)} = \frac{q^n - 1}{q - 1} =: [n]_q,$$

$$Gr\,(n, j)(\mathbf{F}_q) = \{\mathbf{P}^j(\mathbf{F}_q) \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{F}_q)\} =: \binom{n}{j}_q,$$

et les valeurs pour $q = 1$ du côté droit sont les cardinaux des ensembles

$$\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{F}_1) := \text{un ensemble fini } P \text{ de cardinal } n,$$

$$Gr\,(n, j)(\mathbf{F}_1) := \text{l'ensemble des sous-ensembles de } P \text{ de cardinal } j.$$

Tits a suggéré un programme : trouver le sens de la géométrie algébrique sur *"un corps de caractéristique un"* de telle façon que la "géométrie projective" ci-dessus devienne un cas particulier de la géométrie des groupes de Chevalley et de leurs espaces homogènes.

La première implémentation du programme de Tits a été réalisée seulement en 2008 par A. Connes et C. Consani, cf. [CC11], d'après le travail fondateur de C. Soulé [So04]. Pourtant, ils ont eu besoin de $\mathbf{F}_{1^2}$ comme corps de définition.

Plus tôt, dans un manuscrit non publié [KaS], M. Kapranov et A. Smirnov avaient introduit des corps $\mathbf{F}_{1^n}$ existant de leur propre chef.

Ils ont défini $\mathbf{F}_{1^n}$ comme le monoïde $\{0\} \cup \mu_n$, où μ_n est l'ensemble des racines de l'unité d'ordre n. De plus, ils ont défini un espace vectoriel sur $\mathbf{F}_{1^n}$ comme ensemble pointé $(V, 0)$ avec une action de μ_n libre sur $V \setminus \{0\}$. Le groupe $\mathrm{GL}(V)$, par définition, est constitué des permutations de V compatibles avec l'action de μ_n. Kapranov et Smirnov ont défini l'application déterminant : $GL(V) \to \mu_n$ et ont démontré une belle formule pour le symbole résidu de puissance.

Notamment, si $q = p^k \equiv 1 \pmod n$ et μ_n est plongé dans $\mathbf{F}_q^*$, $\mathbf{F}_q$ devient un espace vectoriel sur $\mathbf{F}_{1^n}$, et le symbole de résidu de puissances

$$\left(\frac{a}{\mathbf{F}_q}\right)_n := a^{\frac{q-1}{n}} \in \mu_n$$

est *le déterminant de la multiplication par* a dans la $\mathbf{F}_{1^n}$–géométrie.

Cf. également [Sm92], [Sm94].

Comme on l'a mentionné en sec. 2, les constantes par rapport à la dérivation de Buium δ_p dans $R := \mathbf{Z}_p^{un}$ sont les racines de l'unité (de degré premier à p) complétées par 0.

Par conséquent, dans le contexte de la géométrie différentielle "dans la direction p–adique", un projet indépendant de géométrie algébrique "sur les racines de l'unité", ou "en caractéristique 2", ou bien "sur les corps $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_{1^n}, \mathbf{F}_{1^\infty}$" acquiert une nouvelle motivation. De plus, il s'enrichit de nouvelles connaissances : alors qu'en première instance, les schémas en caractéristique 1 ont été construits en collant des "spectres de monoïdes commutatifs", maintenant, on peut les concevoir comme des $\mathbf{Z}$–schémas munis d'une lambda–structure considérée comme une donnée descendante : voir [Bor11a,b], [Bor09]. Voici un bref survol de la philosophie de Borger qui montre que ses schémas forment un habitat naturel également pour les géométries p–adiques différentielles.

4.2. Philosophie de Borger. La catégorie des $\mathbf{F}_1$–schémas affines Aff_1 peut être définie comme la catégorie opposée des anneaux munis de lambda–structures, (A, Λ_A), et des morphismes compatibles. Le foncteur d'oubli de la catégorie usuelle des schémas affines $\mathrm{Aff}_1 \to \mathrm{Aff}$: $(A, \Lambda) \mapsto A$ est interprété comme le foncteur de l'extension de base $* \mapsto * \otimes_{\mathbf{F}_1} \mathbf{Z}$.

Ainsi, une lambda–structure sur un anneau A est *une donnée de descente sur* $\mathrm{Spec}\, A$ vers $\mathbf{F}_1$.

En particulier, $W(\mathbf{Z})$ doit être considéré comme (une complétion de ?) $\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{F}_1} \mathbf{Z}$.

Plus généralement, en utilisant la théorie générale des topos, Borger globalise cette construction, en construisant une *géométrie algébrique de λ–schémas,* naturelle, à laquelle on devrait penser comme à une *géométrie algébrique sur* $\mathbf{F}_1$ montée (lifted).

Exactement comme la totalité de la géométrie algébrique habituelle est contenue dans le gros topos étale de $\mathbf{Z}$, la géométrie λ–algébrique est contenue dans un gros topos, auquel on devrait penser comme à un gros topos étale sur $\mathbf{F}_1$. Il y a une application de topoi du gros topos étale vers le gros topos sur $\mathbf{F}_1$.

Les schémas de type fini sur $\mathbf{F}_1$ (en ce sens, comme dans la plupart des autres approches) sont *des objets très rigides, combinatoires.* Ce sont principalement les quotients de variétés toriques par des relations d'équivalence toriques.

Les schémas de type non fini sur $\mathbf{F}_1$ sont plus intéressants. Le grosse cohomologie de de Rham–Witt de X "est" la cohomologie de de Rham de X "vue comme un $\mathbf{F}_1$–schéma". Elle devrait contenir l'information complète du motif de X et est probablement une théorie de cohomologie de Weil universelle concrète.

La restriction de Weil aux scalaires de $\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{F}_1$ existe et est une version arithmétiquement globale de l'espace p–jet de Buium.

En conclusion, mentionnons quelques défis restant.

4.3. Facteurs d'Euler à l'infini et $\mathbf{F}_1$–géométrie. Dans [Ma95], je suggérais qu'il devrait exister une catégorie de $\mathbf{F}_1$–motifs visibles à travers le point $q = 1$ de comptage des $\mathbf{F}_1$–schémas. Des prédictions à propos d'un tel point de comptage ont été justifiées dans la géométrie de Soulé, cf. [So04]. En particulier, les zétas des puissances non négatives du "motif de Lefschetz (dual de Tate)" $\mathbf{L}$ doivent être :

$$Z(\mathbf{L}^{\times n}, s) = \frac{s+n}{2\pi}.$$

Cela fournit un *pont conjectural entre la* $\mathbf{F}_1$*–géométrie* et la géométrie de Spec $\mathbf{Z}$ à l'infini archimédien, c'est-à-dire la *géométrie d'Arakelov* : un Γ–facteur de zetas classiques, par exemple,

$$\Gamma_{\mathbf{C}}(s) := [(2\pi)^{-s}\Gamma(s)]^{-1} = \prod_{n\geq 0} \frac{s+n}{2\pi}$$

(produit régulier) ressemble à $\mathbf{F}_1$–zeta de l'espace projectif dualisé de dimension infinie sur $\mathbf{F}_1$.

Pourtant, ce phénomène reste une observation isolée, et le premier archimédien reste encore "le premier parmi les égaux", brisant la symétrie de toutes les valuations.

4.4. D'autres géométries "sous Spec $\mathbf{Z}$". En géométrie algébrique traditionnelle, le rôle spécial de Spec $\mathbf{Z}$ est relié au fait que c'est l'objet terminal de la catégorie des schémas. Puisqu'il est très loin d'être un "objet comme un point", il semble naturel d'imaginer que Spec $\mathbf{F}_1$, étant "réellement comme un point", le remplacera. Pourtant, la croyance que dans une géométrie algébrique étendue, il y aurait nécessairement un objet terminal est infondée. Déjà dans la catégorie la plus simple des piles de Deligne–Mumford sur un corps k, en admettant des quotients par rapport à l'action triviale de n'importe quel groupe fini G, il n'y a pas d'objet terminal, parce qu'on a des morphismes non triviaux Spec $k \to$ Spec k/G.

Cela a amené plusieurs auteurs à contempler des géométries plus générales, s'étalant "sous Spec $\mathbf{Z}$" mais non nécessairement à la base de l'abîme insondable : cf. le projet de Toën–Vaquié [TV05].

Par exemple, dans le cadre de Borger–Buium, on peut considérer les schémas pour lesquels les ascenseurs de Frobenius sont seulement donnés pour des sous-ensembles de l'ensemble des nombres premiers, éventuellement pour un seul premier p, comme dans les ascenseurs canoniques de Serre–Tate de variétés abéliennes en caractéristique p : cf. [Katz81].

Plus précisément, pour le cas le plus simple des courbes elliptiques, dénoté par M, la complétion p–adique de la pile modulaire des courbes elliptiques sans locus super-singulier. On peut définir l'ascenseur de Frobenius sur cette pile : il envoie une courbe elliptique vers son quotient par le sous-groupe canonique. Ce dernier est défini comme l'unique schéma fermé de sous-groupes dont le dual de Cartier est l'ascenseur étale vers $\mathbf{Z}_p$ du dual de Cartier du noyau de Frobenius sur la fibre p. Cet endomorphisme élève également vers un endomorphisme naturel de la courbe elliptique universelle. Ainsi, James Borger suggère de dire que M "fait descendre vers le F_1 p–typique", et on peut dire la même chose à propos de la courbe elliptique universelle sur lui. Les courbes elliptiques p–adiques avec ascenseur de Frobenius sont appelées ascenseurs canoniques.

Notons que si on remplace la direction p–adique par la direction fonctionnelle, on pourrait parler simplement de familles de courbes elliptiques avec invariants de constantes absolues. Mais les invariants absolus p–adiques des ascenseurs canoniques ne sont en aucun cas des "constantes" au sens naïf, dont il a été question dans la sec. 2, c'est-à-dire que ce ne sont pas des représentants de Teichmüller : cf. un article récent de Finotti, "Coordinates of the j–invariant of the canonical lifting", posté à l'adresse http://www.math.utk.edu/ finotti/, et [Er13].

Une meilleure compréhension de la divergence représenterait un défi intéressant pour la géométrie différentielle p–adique.

Remerciements. Ma collaboration avec A. Buium sur [BuMa13] m'a grandement aidé à concevoir le présent survol. J. Borger m'a généreusement expliqué quelques-unes de ses constructions et motivations. Igor Volovich a stimulé l'écriture finale en m'invitant à donner un exposé au Workshop international sur les méthodes p-adiques pour modéliser les systèmes complexes, à Bielefeld, du 15 au 19 avril 2013. Je leur suis reconnaissant à tous.

Références

[ACG13] A. Abdessalam, A. Chandra, G. Guadagni. *Rigorous quantum field theory functional integrals over the p–adics I: anomalous dimensions.* arXiv:1302.5971

[Be11] A. Beilinson. *p–adic periods and derived De Rham cohomology.* Journ. AMS, vol. 25, no. 3 (2012), 319–327. arXiv:1102.1294

[Bor09] J. Borger. *Lambda–rings and the field with one element.* arXiv:0906.3146

[BorBu09] J. Borger, A. Buium. *Differential forms on arithmetic jet spaces.* Selecta Math. (N.S.) 17 (2011), no. 2, 301–335. arXiv:0908.2512

[Bor11a] J. Borger. *The basic geometry of Witt vectors, I: The affine case.* Algebra Number Theory 5 (2011), no. 2, 231–285.

[Bor11b] J. Borger. *basic geometry of Witt vectors. II: Spaces.* Math. Ann. 351 (2011), no. 4, 877–933.

[Bu95] A. Buium. *Differential characters of Abelian varieties over p–adic fields.* Inv. Math., vol. 122 (1995), 309–340.

[Bu05] A. Buium. *Arithmetic Differential Equations.* AMS Math Surveys and Monographs, vol. 118, 2005.

[BuMa13] A. Buium, Y. Manin. *Arithmetic Differential Equations of Painlevé VI Type.* arXiv:1307.3841

[CC11] A. Connes, C. Consani. *On the notion of geometry over* $\mathbf{F}_1$. J. Algebraic Geom. 20 (2011), no. 3, 525–557.

[CCMa08] A. Connes, C. Consani, M. Marcolli. *Fun with* F_1. J. Number Theory 129 (2009), no. 6, 1532–1561. math.AG/0806.2401

[De04] A. Deitmar. *Schemes over* F_1. In: Number Fields and Function Fields – Two Parallel Worlds. Ed. by G. van der Geer, B. Moonen, R. Schoof. Progr. in Math, vol. 239, 2005. math.NT/0404185

[Er13] A. Erdogan. *A universal formula for the* j*–invariant of the canonical lifting.* arXiv:1211.1152

[GoMa04] A. Goncharov, Yu. Manin. *Multiple zeta–motives and moduli spaces* $\overline{M}_{0,n}$. Compos. Math. 140:1 (2004), 1–14. math.AG/0204102

[Fa88] G. Faltings. *p–adic Hodge theory.* J. Amer. Math. Soc., 1(1988), 255–288.

[KaS] M. Kapranov, A. Smirnov. *Cohomology determinants and reciprocity laws: number field case.* Manuscrit non publié, 15 pp.

[Katz81] Katz, N. *Serre–Tate local moduli.* Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78), pp. 138–202, Lecture Notes in Math., 868, Springer, Berlin-New York, 1981.

[KoZa01] M. Kontsevich, D. Zagier. *Periods.* In: Mathematics unlimited—2001 and beyond, 771–808, Springer, Berlin, 2001.

[LeBr13] L. Le Bruyn. *Absolute geometry and the Habiro topology.* arXiv:1304.6532

[Ma89] Yu. Manin. *Reflections on arithmetical physics.* In: Conformal Invariance and string theory (Poiana Brasov, 1987), Academic Press, Boston, MA, 1989, 293–303. Reimprimé dans "Mathematics as Metaphor", Essais choisis par Yu. I. Manin, AMS 2007, pp. 149–155.

[Ma95] Yu. Manin. *Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa).* Astérisque 228:4 (1995), 121–163.

[Ma08] Yu. Manin. *Cyclotomy and analytic geometry over* $\mathbf{F}_1$. In: Quanta of Maths. Conference in honour of Alain Connes. Clay Math. Proceedings, vol. 11 (2010), 385–408. Preprint math.AG/0809.2716.

[Ma09] Yu. Manin. *Renormalization and computation I: motivation and background.* In: Proceedings OPERADS 2009, eds. J. Loday and B. Vallette, Séminaires et Congrès 26, Soc. Math. de France, 2012, pp. 181–223. Preprint math.QA/0904.4921

[MüWZa12] S. Müller–Stach, S. Weinzierl, R. Zayadeh. *Picard–Fuchs equations for Feynman integrals.* arXiv:1212.4389

[Sm92] A. L. Smirnov. *Hurwitz inequalities for number fields. (Russian).* Algebra i Analiz 4 (1992), no. 2, 186–209; traduction dans St. Petersburg Math. J. 4 (1993), no. 2, 357–375.

[Sm94] A. L. Smirnov. *Absolute determinants and Hilbert symbols.* Preprint MPI 94/72, Bonn, 1994.

[So04] C. Soulé. *Les variétés sur le corps à un élément.* Mosc. Math. J. 4:1 (2004), 217–244.

[Ti57] J. Tits. *Sur les analogues algébriques des groupes semi–simples complexes.* Colloque d'algèbre supérieure, Centre Belge de Recherches Mathématiques, Établissement Ceuterick, Louvain, 1957, 261–289.

[TV05] B. Toën, M. Vaquié. *Au–dessous de* Spec $\mathbf{Z}$*.* J. K-Theory 3 (2009), no. 3, 437–500. math.AG/0509684

[VlVoZe94] V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov. *p–adic analysis and mathematical physics.* Series on Soviet and East European Math., 1. World Scientific, River Edge, NJ, 1994.

[W13] S. Weinzierl. *Periods and Hodge structures in perturbative quantum field theory.* arXiv:1302.0670 [hep–th]

Facteurs de zeta locaux et géométries sous $\mathbf{Z}$

Yuri I. Manin

Institut Max–Planck pour les mathématiques, Bonn, Allemagne

Résumé. La première partie de cette note montre que le polynôme de période impaire de chaque forme propre cuspide de Hecke pour le groupe modulaire complet produit via la transformation de Rodriguez–Villegas ([Ro–V]) un polynôme satisfaisant l'équation fonctionnelle de type zeta et ayant des zéros non triviaux seulement sur la ligne médiane de la bande critique. La seconde partie discute de la lambda–structure de Chebyshev de l'anneau de polynômes comme donnée de descente de Borger vers $\mathbf{F}_1$ et suggère ainsi son rôle dans la relation possible du $\Gamma_{\mathbf{R}}$–facteur à la "géométrie réelle sur $\mathbf{F}_1$" (cf. également [CoCons2]).

Introduction

Dans son influent exposé [Se], Jean–Pierre Serre a énoncé des conjectures précises à propos de la structure des facteurs locaux des fonctions zeta des variétés algébriques sur les anneaux arithmétiques. En particulier, il a défini les facteurs locaux aux complétions complexe, resp. réelle, archimédienne de la base comme des combinaisons multiplicatives de fonctions gamma faisant intervenir les nombres de Hodge. (Bien sûr, les facteurs locaux aux nombres premiers finis depuis Weil et Grothendieck ont été traités en fonction des représentations de Galois sur la cohomologie comme des polynômes caractéristiques de Frobenii.)

Dans mes exposés de séminaire [Ma1] dédiés à la géométrie et à l'arithmétique sur le mythique "corps à un élément $\mathbf{F}_1$" de Jacques Tits, j'ai suggéré l'existence de fonctions zetas locales respectives "en caractéristique un" et remarqué que le gamma–facteur de Riemann au nombre premier infini ressemble à un facteur local en caractéristique un d'un espace projectif de dimension infinie $\mathbf{P}^{\infty}_{\mathbf{F}_1}$ adéquatement régularisé.

Plus précisément, dans [Ma1] j'ai défini la fonction zeta de $\mathbf{P}^k_{F_1}$ comme

$$(2\pi)^{-(k+1)}s(s-1)\dots(s-k). \tag{0.1}$$

D'un autre côté, Deninger ([De]) a representé le Γ–facteur de base à l'infini arithmétique (complexe) comme le déterminant infini de l'application de Frobenius complexe et un produit régularisé

$$\Gamma_{\mathbf{C}}(s)^{-1} := \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} = \prod_{n\geq 0} \frac{s+n}{2\pi}. \tag{0.2}$$

En comparant (0.1) à (0.2), j'ai suggéré que ce gamma–facteur, avec changement de signe de s, pourrait être imaginé comme la fonction zeta d'un espace projectif de dimension infinie sur $\mathbf{F}_1$. Je ne discuterai pas du problème d'une interprétation similaire du gamma–facteur réel.

Après 1992, il y a eu un corpus croissant de définitions et d'études sur les $\mathbf{F}_1$–géométries, cf. des survols et une bibliographie complète dans [Lo2], [Ma2]. En particulier, Ch. Soulé dans [So] a posé sur des bases solides mes heuristiques à propos des facteurs zeta locaux sur $\mathbf{F}_1$. En particulier, les facteurs naturels des fonctions zeta des $\mathbf{F}_1$–schémas se sont avérés être des polynômes en s, satisfaisant une équation fonctionnelle exprimant leur symétrie par rapport à une application $s \mapsto c - s$. Dans le texte principal, j'utiliserai pour de tels polynômes le terme générique "zeta polynômes", en complétant leur description par la contrainte que les zéros non triviaux doivent être sur une droite verticale au milieu de la bande critique, cf. Théorème 1.3 ci-dessous.

Pour d'autres connaissances à propos de $\mathbf{F}_1$, voir [KaS], [CoCons1] et la description du travail de A. Smirnov dans [LeBr], et à propos du programme de Deninger, voir [CoCons2].

Pourtant, les ponts entre les caractéristiques zéro et un, et en particulier les $\mathbf{P}^{\infty}_{\mathbf{F}_1}$–heuristiques à propos de (0.2) restent encore insaisissables à un degré considérable.

Dans cette courte note, je contribue à porter de nouveaux coups à ce mystère.

Dans la section 1, je montre que toute forme cuspide f pour PGL$(2, \mathbf{Z})$ qui est forme propre pour tous les opérateurs de Hecke, au-delà des habituels p–facteurs de sa transformation de Mellin, produit un polynôme de plus qui ressemble à un "facteur zeta local en caractéristique un". Ce polynôme est obtenu à partir du polynôme de période impaire de f de la même manière formelle que le polynôme de Hilbert d'une algèbre graduée est produit à partir de sa série de Poincaré, voir [Ro–V]. Les formules (1.7) et (1.8) ci-dessous suggèrent que ce formalisme peut aussi bien être considéré comme la version discrète de la transformation de Mellin.

Pour des analogies avec les fonctions zetas et l'interprétation géométrique de cette dernière, voir aussi [Go].

Dans la section 2, je suggère comment un gamma–pont souhaité entre les caractéristiques zéro et un pourrait prendre en compte le fait que dans l'image de Serre, les gamma–facteurs correspondant aux nombres premiers arithmétiques infinis réel et complexe sont différents. À cette fin, je fais appel à l'identification de J. Borger des lambda–structures sur les schémas avec données de descente vers $\mathbf{F}_1$ ([Bo], [LeBr]), et à l'idée que les anneaux de Habiro sont des ascenseurs vers $\mathbf{Z}$ des "anneaux de fonctions analytiques" en caractéristique un suggérés dans [Ma2]. Alors il s'avère que deux lambda–structures différentes sur l'anneau polynomial, la structure torique et la structure de Chebyshev, reflètent fidèlement la différence entre les géométries analytiques complexe et réelle en caractéristique un.

Notons que les lambda–structures apparaissent naturellement dans différents contextes, reliés aux fonctions zeta : voir par exemple [CoCons2], [Na] et [Ra]. Il serait intéressant d'inclure la philosophie de Borger dans ces contextes également.

1. Zeta polynômes des formes cuspides

1.1. Polynômes périodes et fonctions périodes. Ici on considère des formes modulaires par rapport à PSL$(2, \mathbf{Z})$, k est un poids positif pair ; $w := k-2$; S_k dénote l'espace des formes cuspides, M_k est l'espace des formes modulaires de poids k.

Les polynômes périodes pour les formes cuspides sont définis par :

$$r_f(z) := \int_0^{i\infty} f(\tau)(\tau - z)^{k-2} d\tau, \quad r_f^{\pm}(z) := \frac{r_f(z) \pm r_f(-z)}{2}.$$

La formule suivante plus générale est valide également pour les séries de Eisenstein : si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi ins} \in M_k$, définissons son *intégrale de Eichler* par

$$E_f(z) := \int_z^{i\infty} (f(\tau) - a_0)(\tau - z)^{k-2} d\tau = -\frac{(k-2)!}{(2\pi i)^{k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{k-1}} e^{2\pi nz}$$

et alors définissons sa *fonction période* par

$$r_f(z) := E_f(z) - z^{k-2} E_f(-1/z)), \quad r_f^{\pm}(z) := \frac{r_f(z) \pm r_f(-z)}{2}.$$

Si f n'est pas de forme cuspide, alors $r_f(z) \in z^{-1}\mathbf{C}[z]$.

1.2. Espaces de fonction périodes. Si $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z})$, $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, l'action à droite $|_w$ de g sur l'espace V_w des polynômes r de degré $\leq w$ est définie par

$$(r|_w g)(z) := (cz+d)^w r(g(z)).$$

Soit $S(z) = -1/z$, $U(z) = 1 - 1/z$ et

$$Y_w := \{\, r \in V_w \mid \quad r|_w(1+S) = r|_w(1+U+U^2) = 0 \,\}. \tag{1.1}$$

Pour $f \in S_k$, on a $r_f(z) \in Y_w$. $Y_w^{\pm}$ représente les sous-espaces respectifs des polynômes pairs/impairs. Il est bien connu (Eichler–Shimura) que l'application $r^- : f \mapsto r_f^-(z)$ définit un isomorphisme $S_k \to Y_w^-$, alors que r^+ définit un plongement de codimension un $S_k \to Y_w^+$.
Récemment, il a été démontré ([ConFaIm]) que si $f \in S_k$ est une forme propre de Hecke, alors

$$U_f(z) := \frac{r_f^-(z)}{z(z^2-4)(z^2-1/4)(z^2-1)^2} \tag{1.2}$$

est un polynôme sans zéro réel dont les zéros complexes sont tous sur le cercle unité.

Clairement, son degré est $e := w - 10$.

1.3. Théorème. *Fixons un entier $d > e = w - 10$ et posons*

$$P_f(z) := \frac{U_f(z)}{(1-z)^d.} \tag{1.3}$$

Il existe un polynôme $H_f(x) \in \mathbf{C}[x]$ de degré $d-1$ tel que

$$P_f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} H_f(n) z^n$$

pour $|z| < 1$. Son polynôme satisfait l'équation fonctionnelle

$$H_f(x) = (-1)^{d-1} H(-d+e-x) \tag{1.4}$$

et il s'évanouit en $x = -1, \ldots, -d+e+1$. Tous ses zéros restant sont sur la droite verticale $\mathrm{Re}\, x = -(d-e-1)/2$.

Preuve. Ceci est une application directe de la proposition dans la section 3 de [Ro–V] (due en forme plus générale à Popoviciu), et de ses corollaires. Une condition pour l'applicabilité de cette proposition est assurée par le théorème à propos des zéros de (1.2) dans [CoFaIm]. On a seulement à vérifier l'équation fonctionnelle (9) à partir de cette proposition, i. e. l'identité

$$P_f(1/z) = (-1)^d z^{d-e} P_f(z). \tag{1.5}$$

En réécrivant (1.5) comme

$$\frac{U_f(1/z)}{(1-1/z)^d} = (-1)^d z^{d-e} \frac{U_f(z)}{(1-z)^d}$$

on voit qu'elle est équivalente à

$$U_f(1/z) = z^{-e} U_f(z)$$

c'est-à-dire que, au vu de (1.2),

$$\frac{r_f^-(1/z)}{z^{-1}(z^{-2}-4)(z^{-2}-1/4)(z^{-2}-1)^2} = z^{10-w} \frac{r_f^-(z)}{z(z^2-4)(z^2-1/4)(z^2-1)^2}. \tag{1.6}$$

Maintenant, à partir de $r\,|_w(1+S) = 0$ il s'ensuit que $r_f^-(1/z) = -r_f^-(-1/z) = z^{-w} r_f^-(z)$. En insérant cela dans (1.6), on obtient finalement (1.5).

1.4. Remarques. a) Dans [ER], il a été démontré que tous les zéros du polynôme de période complète d'une forme cuspide sont sur le cercle unité. Similairement, tous les zéros de $zr_f(z)$ pour les séries de Eisenstein Hecke sont sur le cercle unité.

Pourtant, j'ai été incapable d'adapter ces cas dans le cadre de la construction de Rodriguez–Villegas, parce que l'analogue de l'équation fonctionnelle (1.5) échoue apparemment pour le polynôme de période complète.

b) J'utilise les mots "polynômes zeta" pour les polynômes en une variable satisfaisant une version de l'équation fonctionnelle telle que (1.4) et "l'hypothèse de Riemann". Dans [Ro–V], il a été en particulier démontré que les polynômes de Hilbert de certains anneaux valués sont des polynômes zeta. Golyshev ([Go]) a considéré les anneaux de fonctions homogènes sur des variétés de Fano et de Calabi–Yau par rapport à des plongements anticanoniques ou projectifs relatifs et ils ont trouvé des corrélations géométriques intéressantes à ces résultats.

De plus, en comparant la formule

$$H_f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma P_f(z) z^{-(n+1)} dz \tag{1.7}$$

(où γ est un petit contour autour de zéro) avec la transformation de Mellin

$$Z_f(s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^{i\infty} f(z) \left(\frac{z}{i}\right)^{s-1} d\left(\frac{z}{i}\right) \tag{1.8}$$

on voit une analogie formelle considérable : moralement, H_f est la "transformation de Mellin discrète de P_f".

En particulier, l'argument n de H_f correspond à l'argument classique $-s$: cela est consistant avec les observations dans [Ro–V] et [Go].

Pourtant, trouver un espace géométrique approprié dans lequel vivent les polynômes zeta H_f associés aux formes cuspides de Hecke nécessite apparemment le royaume des "géométries sous $\mathbf{Z}$". Le problème est que dans la plupart des versions des $\mathbf{F}_1$–géométries, ces zeta polynômes qui apparaissent comme des fonctions zeta de motifs sur $\mathbf{F}_{1^n}$ ont seulement des zéros entiers : cf. e. g. [Lo1]. Au contraire, notre H_f semble venir de certains motifs non–Tate et des objets géométriques au-dessous de $\mathbf{Z}$ mais non au-dessus de $\mathbf{F}_1$. J'attends que naissent des niveaux en-dessous de $\mathbf{Z}$ auxquels des piles modulaires comme $\overline{M}_{1,n}$ pourraient être descendues.

c) Notons finalement que les polynômes périodes apparaissent également dans les études de l'action de Galois sur le groupoïde de Grothendieck–Teichmüller : voir [Sch], [Hai] et [Po] et les références qui y sont fournies à propos de leur rôle dans les réalisations de Hodge. On peut deviner que le rôle particulier des polynômes périodes des formes propres de Hecke deviendra plus clair à la lumière du paradigme étale.

2. Lambda–anneaux de Habiro

2.1. Anneaux de Habiro. L'anneau de Habiro H d'une variable sur $\mathbf{Z}$ est défini comme la limite projective des anneaux quotient $\mathbf{Z}[q]/(f(q))$ où $f(q)$ parcourt l'ensemble multiplicatif des monômes dont les racines sont des racines de l'unité. Cet anneau a été introduit et étudié dans [Hab], et dans [Ma2] il a été suggéré de le considérer comme "*l'anneau des fonctions analytiques sur* $\mathbf{G}_m$ *remonté à partir de* $\mathbf{F}_1$." En fait, $\mathbf{Z}[q]$ est naturellement plongé dans la complétion de Habiro H, et q devient inversible, de telle façon que H peut aussi être défini comme une complétion de $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$. On peut étendre cette définition au cas de plusieurs variables inversisbles qui est celui des fonctions sur les tores.

2.2. Lambda–anneaux. J. Borger a développé dans [Bo] l'idée d'interpréter les lambda–structures de Grothendieck sur les schémas comme des données de descente générale vers $\mathbf{F}_1$. Il est donc naturel de s'attendre à ce que l'anneau de Habiro admette une lambda–structure naturelle.

Ici, on ne traitera que le cas des anneaux commutatifs A plats sur $\mathbf{Z}$ auquel cas une lambda–structure peut simplement être considérée comme un système d'ascenseurs de Frobenii commutants : les homomorphismes d'anneaux $\psi^p : A \to A$ pour tout nombre premier p tel que $\psi^p(x) \equiv x^p \pmod{pA}$ pour tout $x \in A$ et $\psi^{p_1}\psi^{p_2} = \psi^{p_2}\psi^{p_1}$. En particulier, on peut définir $\psi^k : A \to A$ pour tous les entiers positifs k par multiplicativité.

La lambda–structure la plus naturelle sur $\mathbf{Z}[q]$ et $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ est déterminée par $\psi^k(q) = q^k$, et puisqu'elle est compatible avec la limite projective sur le système de polynômes cyclotomiques dans q, elle est héritée par l'anneau de Habiro. On appellera cette structure *la structure torique*.

Pourtant, l'anneau polynomial $\mathbf{Z}[r]$ admet une lambda–structure de plus, découverte par Clauwens ([Cl]). Dans cette structure,

$$\psi^k(r) := T_k(r)$$

où T_k est le $k^{\text{ième}}$ polynôme de Chebyshev. Notre prochain résultat décrit un sous-anneau $H_0 \subset H$ qui peut être muni d'une lambda–structure de Chebyshev.

2.3. Proposition. *(i) Considérons dans l'anneau de Habiro H le sous-anneau H_0 défini comme la complétion du sous-anneau polynomial $\mathbf{Z}[r]$, où*

$$r := 1 + q + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cdot (1-q)\dots(1-q^n). \tag{2.1}$$

Ce sous-anneau est invariant par rapport à la lambda–structure standard ψ^k, ce qui induit sur ce sous-anneau, par rapport à la coordonnée r, la lambda–structure de Chebyshev.

(ii) H_0 est strictement plus petit que H.

Preuve. (i) Dans H, on a une expression convergente pour q^{-1} (voir [Hab], Prop. 7.1):

$$q^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cdot (1-q)\dots(1-q^n)$$

Par conséquent $r = q + q^{-1}$. De plus, en utilisant une des définitions des polynômes de Chebyshev, on voit que

$$\psi^k(r) = q^k + q^{-k} = T_k(q + q^{-1}) = T_k(r).$$

(ii) Pour voir que H_0 est strictement plus petit que H, on peut utiliser le résultat suivant dû à Habiro. Tout élément de H détermine une fonction sur l'ensemble des racines de l'unité μ_∞ avec valeurs dans $\mathbf{Z}[\mu_\infty]$, et l'application résultante

$$H \to (\mu_\infty, \mathbf{Z}[\mu_\infty])$$

est un plongement (voir [Hab]). L'élément q correspond à l'application tautologique $\mu_\infty \to \mathbf{Z}[\mu_\infty]$. Alors tous les éléments de $\mathbf{Z}[r]$ deviennent des fonctions invariantes selon l'involution $\zeta \to \zeta^{-1}$ de μ_∞ et leurs valeurs sont également invariantes. Cette propriété reste vérifiée après complétion. Par conséquent $q \notin H_0$.

Notons que pour tout plongement complexe de μ_∞ et tout $\eta \in \mu_\infty$, $\eta + \eta^{-1}$ est réel. C'est pour cette raison que nous faisons référence à cette géométrie comme à la "géométrie analytique réelle sur $\mathbf{F}_1$."

Références

[Bo] J. Borger. *Λ–rings and the field with one element.* arXiv:0906.3146.

[Cl] F. J. B. J. Clauwens. *Commuting polynomials and λ–ring structures on $\mathbf{Z}[x]$.* J. Pure Appl. Algebra, 95(3), 1994, 261–269.

[CoCons1] A. Connes, C. Consani. *Schemes over $\mathbf{F}_1$ and zeta functions.* Compos. Math. 146, no. 6, 2010, 1383–1415.

[CoCons2] A. Connes, C. Consani. *Cyclic homology, Serre's local factors and the λ–operations.* arXiv:1211.4239.

[ConFaIm] J. B. Conrey, D. W. Farmer, Ö. Imamoglu. *The nontrivial zeros of period polynomials lie on the unit circle.* Int. Math. Res. Not. , no. 20, 2013, 4758–4771. arXiv:1201.2322.

[De] C. Deninger. *On the Γ–factors attached to motives.* Inv. Math. 104, 1991, 245–261.

[ER] A. El–Guindy, W. Raji. *Unimodularity of zeros of period polynomials of Hecke eigenforms.* Bull. Lond. Math. Soc. 46, 2014, 528–536.

[Go] V. Golyshev. *The canonical strip, I.* arXiv:0903.2076

[Hab] K. Habiro. *Cyclotomic completions of polynomial rings.* Publ. RIMS, Kyoto Univ., 40, 2004, 1127–1146.

[Hai] R. Hain. *The Hodge–de Rham theory of modular groups.* arXiv:1403.6443

[KaS]. M. Kapranov, A. Smirnov. *Cohomology determinants and reciprocity laws: number field case.* Manuscrit non publié, 1996, 15 pp.

[LeBr] L. Le Bruyn. *Absolute geometry and Habiro topology.* arXiv:1304.6532

[Lo1] O. Lorscheid. *Functional equations for zeta functions of* $\mathbf{F}_1$*–schemes.* C. R. Ac Sci. Paris, 348 (21–22), 2010, 1143–1146. arXiv 1010.1754

[Lo2] O. Lorscheid. *A blueprinted view on* $\mathbf{F}_1$*–geometry.* arXiv:1301.0083

[Ma1] Yu. Manin. *Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa).* In: Columbia University Number Theory Seminar (1992), Astérisque 228, 1995, 121–164.

[Ma2] Yu. Manin. *Cyclotomy and analytic geometry over* F_1. In: Quanta of Maths. Conférence en l'honneur de Alain Connes. Clay Math. Proceedings, vol. 11, 2010, 385–408. Preprint math.AG/0809.2716. 28 pp.

[Na] N. Naumann. *Algebraic independence in the Grothendieck ring of varieties.* Trans. AMS, 359(4): 1652–1683 (electronic), 2007.

[Po] A. Pollack. *Relations between derivations arising from modular forms.* http://dukespace.lib.duke.edu/dspace/handle/10161/1281

[Ra] N. Ramachandran. *Zeta functions, Grothendieck groups, and the Witt ring.* arXiv:1407.1813

[Ro–V] F. Rodriguez–Villegas. *On the zeros of certain polynomials.* Proc. AMS, Vol. 130, No 8, 2002, 2251–2254.

[Se] J.-P. Serre. *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures).* Séminaire Delange–Pisot–Poitou 11, 1969–1970, exp. 19, 1–15.

[Sch] L. Schneps. *On the Poisson bracket on the free Lie algebra in two generators.* J. Lie Theory 16, no. 1, 2006, 19–37.

[So] Ch. Soulé. *Les variétés sur le corps à un élément.* Mosc. Math. J., 4(1), 2004, 217–244.

Riemann-Roch pour l'anneau $\mathbb{Z}$

Alain Connes, Caterina Consani

Résumé : On montre que le fait de travailler sur la base absolue $\mathbb{S}$ (la version catégorique du spectre de la sphère) au lieu de $\mathbb{S}[\pm 1]$ améliore notre formule de Riemann-Roch précédente pour $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$. La formule rend égales la caractéristique d'Euler (de valeur entière) du diviseur d'Arakelov et la somme du degré du diviseur (en utilisant les logarithmes en base 2) et du nombre 1, confirmant ainsi notre compréhension de l'anneau $\mathbb{Z}$ comme un anneau de polynômes en une variable sur la base absolue $\mathbb{S}$, notamment $\mathbb{S}[X], 1+1 = X + X^2$.

1. Introduction

Dans [3], on a prouvé une formule de Riemann-Roch pour $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$ s'appliquant à toute extension sphérique $\mathbb{S}[\pm 1] := \mathbb{S}[\mu_{2,+}]$ de la base absolue $\mathbb{S}$. La preuve de ce résultat est basée sur le fait de voir l'anneau $\mathbb{Z}$ comme un anneau de polynômes[1] avec des coefficients dans $\mathbb{S}[\pm 1]$ et le générateur $3 \in \mathbb{Z}$. Dans le présent article, on montre qu'en travaillant sur la base absolue $\mathbb{S}$ elle-même, on obtient la formule suivante de Riemann-Roch.

Théorème 1.1. *Soit D un diviseur d'Arakelov sur $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$. Alors*[2]

$$\dim_{\mathbb{S}} H^0(D) - \dim_{\mathbb{S}} H^1(D) = \left\lceil \deg_2 D \right\rceil' + 1. \tag{1.1}$$

Ici $\lceil x \rceil'$ dénote la fonction continue à droite qui coïncide avec la fonction plafond(x) pour $x > 0$ non entier, et avec $-$plafond$(-x)$ pour $x < 0$ non entier (voir la Figure 1).

La preuve de (1.1) suit les mêmes lignes que celles de la preuve de la formule de Riemann-Roch dans [3], et voit $\mathbb{Z}$ comme un anneau de polynômes[3] sur $\mathbb{S}$ de générateur -2. Cela améliore considérablement ce résultat précédent comme suit :

1. Le terme $\mathbf{1}_L$ faisant intervenir l'ensemble exceptionnel L dans la formule précédente est maintenant éliminé.

2. La formule (1.1) présente une analogie parfaite avec la formule de Riemann-Roch vérifiée par les courbes de genre 0.

3. Le diviseur canonique $K = -2\{2\}$ est de degré entier $\deg_2(K) = -2$.

Quand on travaille sur la base absolue $\mathbb{S}$, on est amené à une notion très naturelle de $\mathbb{S}$-module associé à un diviseur d'Arakelov comme expliqué dans la Section 2.

Recherche financée par la Fondation Simons.

AC : Collège de France, Paris, France.
IHÉS, Bures-sur-Yvette, France
CC : Département de mathématiques, Université Johns Hopkins, Baltimore, USA

Référence : https://arxiv.org/pdf/2306.00456.pdf .

[1] Plus précisément tout entier peut être mis sous la forme $P(X)$ où P est un polynôme à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et $X = 3$, la présentation est donnée par $1 + 1 = X - 1$

[2] On utilise la notation $\deg_2 := \deg / \log 2$

[3] Tout entier peut être mis de manière unique sous la forme $P(X)$ où P est un polynôme à coefficients dans $\{0, 1\}$ et $X = -2$, la présentation est $1 + 1 = X + X^2$

2. Travailler sur la base absolue $\mathbb{S}$

On dénote par $\Gamma^{\rm op}$ l'opposée de la catégorie de Segal (voir [4] chap. 2 et [1]), elle a un objet k_+ pour chaque entier $k > 0$, l'ensemble pointé $\{*, 1, \ldots, k\}$, et les morphismes sont des morphismes d'ensembles pointés. Les foncteurs covariants $\Gamma^{\rm op} \longrightarrow \mathfrak{Sets}_*$ et leurs transformations naturelles déterminent la catégorie $\Gamma\mathfrak{Sets}_*$ des Γ-sets (aussi appelés $\mathbb{S}$-modules). Quand on travaille sur l'algèbre monoïdale sphérique $\mathbb{S}[\pm 1]$ du monoïde multiplicatif (pointé) $\{\pm 1\}$, le $\mathbb{S}[\pm 1]$-module naturel associé à une norme sur un groupe abélien A est ($k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\|HA\|_\lambda(k_+) := \{a \in A^k \mid \sum |a_j| \leq \lambda\}. \tag{2.1}$$

La formule ci-dessus s'applique en la place archimédienne, pour les sous-groupes $A \subset \mathbb{R}$ et avec $|\cdot|$ dénotant la valeur absolue euclidienne. Si $\mathbb{S}[\pm 1]$ est remplacé par la base $\mathbb{S}$, il y a une définition plus basique d'un $\mathbb{S}$-module associé à un sous-ensemble arbitraire $X \subset A$ contenant $0 \in A$.

Lemme 2.1. *Soit A un monoïde abélien avec $0 \in A$. Soit $X \subset A$ un sous-ensemble de A contenant 0. La condition suivante définit un sous-foncteur du $\mathbb{S}$-module HA*

$$(HA)_X(k_+) := \{a \in A^k \mid \textstyle\sum_Z a_j \in X, \ \forall Z \subset k_+\} \subset X^k. \tag{2.2}$$

Preuve : Par construction $(HA)_X(k_+)$ est un sous-ensemble de $HA(k_+)$ contenant le point de $a_j = 0$, $\forall j$. Soit $\phi : k_+ \to m_+$ une application préservant le point de base $*$, on montrera que $\phi_*((HA)_X(k_+)) \subset (HA)_X(m_+)$. Soit $a \in (HA)_X(k_+)$. Pour tout $\ell \in m_+$, $\ell \neq *$, on a

$$\phi_*(a)(\ell) = \sum_{\phi^{-1}(\ell)} a_j = \sum_{Z_\ell} a_j, \qquad Z_\ell := \phi^{-1}(\ell).$$

Il découle de (2.2) que $\phi_*(a)(\ell) \in X$ pour tout ℓ et ceci pour tout sous-ensemble pointé $Z' \subset m_+$

$$\sum_{\ell \in Z'} \phi_*(a)(\ell) = \sum_Z a_j \in X, \qquad Z = \cup_{\ell \in Z'} Z_\ell.$$

Cela prouve que $\phi_*((HA)_X(k_+)) \subset (HA)_X(m_+)$. ∎

La proposition suivante montre que pour $X = [-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$ un intervalle symétrique, le $\mathbb{S}$-module $(H\mathbb{R})_X$ est un module sur la $\mathbb{S}$-algèbre $\|H\mathbb{R}\|_1$.

Proposition 2.2. *Soit $\lambda > 0$, $X = [-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$ un intervalle symétrique et $(H\mathbb{R})_X$ comme dans (2.2). Alors*

$$(H\mathbb{R})_X(k_+) = \{a \in \mathbb{R}^k \mid \textstyle\sum_{a_j > 0} a_j \leq \lambda, \ \sum_{a_j < 0}(-a_j) \leq \lambda\} \tag{2.3}$$

De plus, l'action de modules de la $\mathbb{S}$-algèbre $H\mathbb{R}$ sur elle-même par multiplication induit une action de la $\mathbb{S}$-algèbre $\|H\mathbb{R}\|_1$ sur le module $(H\mathbb{R})_X$.

Preuve : La condition (2.3) est remplie par tous les éléments de $(H\mathbb{R})_X(k_+)$ puisqu'elle fait intervenir des sommes sur les sous-ensembles de k_+. Inversement si $a \in \mathbb{R}^k$ vérifie (2.3), soit $Z \subset k_+$, appelons

$$Z_+ := \{j \in Z \mid a_j > 0\}, \quad Z_- := \{j \in Z \mid a_j < 0\}$$

On a $0 \leq \sum_{Z_+} a_j \leq \lambda$, $0 \geq \sum_{Z_-} a_j \geq -\lambda$ et par conséquent $-\lambda \leq \sum_Z a_j \leq \lambda$.

Pour prouver la seconde assertion, soit $Y = k_+, Y' = k'_+$ des ensembles finiment pointés et considérons l'application donnée par le produit

$$m : \|H\mathbb{R}\|_1(Y) \wedge (H\mathbb{R})_X(Y') \to (H\mathbb{R})(Y \wedge Y')$$

Elle associe à $(\alpha_i) \in \|H\mathbb{R}\|_1(Y)$, $\sum |\alpha_i| \leq 1$ et $(a_j) \in (H\mathbb{R})_X(Y')$ la double indexation $b := (b_{i,j})$, $b_{i,j} = \alpha_i a_j$ et on a besoin de montrer que $b \in (H\mathbb{R})_X(Y \wedge Y')$. Soit

$$Y_+ = \{i \in Y \mid \alpha_i > 0\},\ Y_- = \{i \in Y \mid \alpha_i < 0\},\ Y'_+ = \{j \in Y' \mid a_j > 0\},\ Y'_- = \{j \in Y' \mid a_j < 0\}$$

Par la règle des signes, les couples (i,j) pour lesquels $b_{i,j} > 0$ forment l'union $Y_+ \times Y'_+ \cup Y_- \times Y'_-$ de telle façon qu'on obtient

$$\sum_{b_{i,j}>0} b_{i,j} = \sum_{Y_+ \times Y'_+} \alpha_i a_j + \sum_{Y_- \times Y'_-} (-\alpha_i)(-a_j) = \sum_{Y_+} \alpha_i \sum_{Y'_+} a_j + \sum_{Y_-} (-\alpha_i) \sum_{Y'_-} (-a_j) \leq \lambda$$

en utilisant (2.3) pour les sommes sur les a_j ainsi que l'inégalité $\sum_{Y_+} \alpha_i + \sum_{Y_-}(-\alpha_i) \leq 1$ (puisque $\sum |\alpha_i| \leq 1$). On traite de manière similaire la somme sur les $b_{i,j}$ négatifs. $\square$

En général, soit $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(k_+, 1_+)$ avec $\sigma(\ell) = 1\ \forall \ell \neq *$ et $\delta(j,k) \in \mathrm{Hom}_{\Gamma^{\mathrm{op}}}(k_+, 1_+)$, $\delta(j,k)(\ell) := 1$ si $\ell = j$, $\delta(j,k)(\ell) := *$ if $\ell \neq j$.

Étant donné un $\mathbb{S}$-module $\mathcal{F}$ et des éléments $x, x_j \in (1_+)$, $j = 1, \ldots, k$, on écrit

(2.4) $$x = \sum_j x_j \iff \exists z \in (k_+) \text{ s.t. } (\sigma)(z) = x,\ (\delta(j,k))(z) = x_j,\ \forall j.$$

Une relation de tolérance $\mathcal{R}$ sur un ensemble X est une relation réflexive et symétrique sur X. De façon équivalente, $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble $\mathcal{R} \subset X \times X$ qui est symétrique et qui contient la diagonale. On dénotera par $\mathcal{T}$ la catégorie des relations de tolérance $(X, \mathcal{R})$. Les morphismes dans $\mathcal{T}$ sont définis par

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}((X, \mathcal{R}), (X', \mathcal{R}')) := \{\phi : X \to X',\ \phi(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}'\}.$$

On dénote par $\mathcal{T}_*$ la catégorie pointée sous l'objet $\{*\}$ munie de la relation triviale. Un $\mathbb{S}$-module tolérant est un foncteur covariant pointé $\Gamma^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{T}_*$ ([3]). On rappelle ci-dessous la définition de leur dimension.

Définition 2.1 [3] Soit $(E, \mathcal{R})$ un $\mathbb{S}$-module tolérant. Un sous-ensemble $F \subset E(1_+)$ engendre $E(1_+)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites

1. $\forall x, y \in F$, $x \neq y \implies (x, y) \notin \mathcal{R}$
2. Pour tout $x \in E(1_+)$, il existe $\alpha_j \in \{0, 1\}$, $j \in F$ et $y \in E(1_+)$ tel que $y = \sum_F \alpha_j j \in E(1_+)$ au sens de (2.4), et $(x, y) \in \mathcal{R}$.

La dimension $\dim_{\mathbb{S}}(E, \mathcal{R})$ est définie comme la cardinalité minimale d'un ensemble générateur F.

3. Dimension de H^0 sur $\mathbb{S}$

Soit $m \in \mathbb{N}$, et $I_m = [-m, m] \cap \mathbb{Z}$. Le prochain lemme découle de (2.4) et de la définition 2.1.

Lemme 3.1. *La dimension* $\dim_{\mathbb{S}}((\mathbb{Z})_{I_m})$ *est la plus petite cardinalité d'un sous-ensemble* $G \subset I_m$ *tel que pour tout* $j \in I_m$*, il existe un sous-ensemble* $Z \subset G$ *avec* $\sum_Z i = j$ *et* $\sum_{Z'} i \in I_m$ *pour tout* $Z' \subset Z$.

Le nombre d'éléments de I_m est $2m+1$ et le nombre de sous-ensembles de G is $2^{\#G}$, par conséquent, on a les inégalités de base

(3.1) $$\#G \geq \log_2(2m+1) > \log_2(2m), \qquad \dim_{\mathbb{S}}((\mathbb{Z})_{I_m}) \geq \lceil \log_2(m) \rceil + 1.$$

Ici $x \mapsto \lceil x \rceil$ dénote la fonction plafond qui associe à x le plus petit entier $> x$. Pour $m = 1$ on a besoin de deux éléments générateurs $\{-1, 1\}$, alors que pour $m = 2$ on choisit les trois éléments $\{-2, 1, 2\}$. Pour $m = 3$ on prend les trois éléments $\{-3, 1, 2\}$ alors que pour $m = 4$, on prend les 4 éléments $\{-3, -1, 1, 3\}$.

En général, on utilise le résultat suivant.

Lemme 3.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I := [-a, a] \subset \mathbb{Z}$, où $2^{n-1} \leq a < 2^n$.*

(*i*) *Si $n > 4$, il existe n éléments distincts $\alpha_j \in (0, a)$ tels que $\sum \alpha_j = a$ et tels que tout élément $z \in [0, a]$ peut s'écrire comme une somme partielle $z = \sum_Z \alpha_j$.*

(*ii*) *Le nombre minimal de $\mathbb{S}$-générateurs de $(H\mathbb{Z})_I$ est $n + 1$.*

Preuve :

(*i*) On a $\sum_0^{n-1} 2^j = 2^n - 1 \geq a$ et $\sigma := \sum_0^{n-2} 2^j = 2^{n-1} - 1 < a$. L'idée est d'adjoindre à l'ensemble $T := \{2^j \mid 0 \leq j \leq n-2\}$, dont la cardinalité est $n-1$ et dont la somme est $\sigma < a$, un autre élément $a - \sigma$ de telle façon que la somme complète soit a. Le premier essai consiste à prendre $F = T \cup \{a - \sigma\}$. Supposons d'abord que $a - \sigma \notin T$. Les sommes partielles obtenues à partir de F sont l'union de l'intervalle $[0, \sigma]$ et de l'intervalle $[a - \sigma, a]$ et ces deux intervalles couvrent $[0, a]$, puisque $a - \sigma + \sigma = a$ alors que $a - \sigma \leq \sigma + 1$. Si $a - \sigma \in T$, on a pour un certain $k \geq 0$ que $a = \sigma + 2^k$. Pour éviter la répétition, on adopte les règles suivantes pour $2^{n-1} \leq a < 2^n$

1. Si $a = 2^{n-1}$, on pose $F := \{2^j \mid 0 \leq j \leq n-3\} \cup \{2^{n-2} - 2\} \cup \{3\}$
2. Si $a \neq 2^{n-1}$ et $a - \sigma \in T$, on pose $F := \{2^j \mid 0 \leq j \leq n-3\} \cup \{2^{n-2} - 1\} \cup \{a - \sigma + 1\}$
3. Si $a \neq 2^{n-1}$ et $a - \sigma \notin T$, on pose $F := T \cup \{a - \sigma\}$

Puisque par hypothèse $n > 4$, on a $2^{n-2} - 2 > 2^{n-3}$, donc dans le cas 1, on obtient $\#F = n$ et la somme des éléments de F est $a = 2^{n-1}$. Les sommes partielles des éléments de $\{2^j \mid 0 \leq j \leq n-3\}$ couvrent l'intervalle $J = [0, 2^{n-2} - 1]$. En ajoutant $2^{n-2} - 2$ aux éléments de J, on obtient l'intervalle $J + 2^{n-2} - 2 = [2^{n-2} - 2, 2^{n-1} - 3]$ dont l'union avec J est $[0, 2^{n-1} - 3]$, alors en mettant l'élément $3 \in F$, on voit que les sommes partielles couvrent $[0, a]$.

Dans le cas 2, on obtient de façon similaire $\#F = n$ puisque $a - \sigma + 1 \notin T$ et la somme des éléments de F est $\sigma + a - \sigma = a$. Les sommes partielles d'éléments de $\{2^j \mid 0 \leq j \leq n-3\}$ couvrent l'intervalle $J = [0, 2^{n-2} - 1]$ et en utilisant $2^{n-2} - 1$ ajouté aux éléments de J, on obtient l'intervalle $J + 2^{n-2} - 1 = [2^{n-2} - 1, 2^{n-1} - 2]$ dont l'union avec J est $J' = [0, 2^{n-1} - 2] = [0, \sigma - 1]$. En ajoutant $a - \sigma + 1$ à J', on obtient l'intervalle $J" = [a - \sigma + 1, a]$. Puisque $a - \sigma \in T$, on a $a - \sigma \leq 2^{n-2}$, par conséquent $a - \sigma + 1 \leq \sigma - 1$, de telle façon que le plus petit élément de $J"$ appartient à J' et $J' \cup J" = [0, a]$.

Dans le cas 3, les sommes partielles d'éléments de F couvrent $[0, a]$ comme expliqué ci-dessus.

(*ii*) Soit k le nombre minimal de $\mathbb{S}$-générateurs de $(H\mathbb{Z})_I$. Par (3.1), on a $k \geq n + 1$. Il reste à montrer qu'il existe un ensemble générateur de cardinalité $n+1$. On suppose d'abord que $n > 4$ et par conséquent, par (*i*), appelons $\alpha_j \in (0, a)$ les n éléments distincts vérifiant (*i*). Soit $F = \{-a\} \cup \{\alpha_j\} \subset [-a, a]$. Par construction $\#F = n + 1$. Pour montrer que F est un ensemble $\mathbb{S}$-générateur de $(H\mathbb{Z})_I$, on a besoin de vérifier les conditions du lemme 3.1. Par construction, la somme des éléments positifs de F est a et la somme de ses éléments négatifs est $-a$ par conséquent, toute somme partielle d'éléments de F appartient à $I = [-a, a]$. De plus, les sommes partielles des éléments positifs de F couvrent l'intervalle $[0, a]$ par (i), et en utilisant l'élément $-a$, on couvre $I = [-a, a]$.

Pour $n \leq 4$, on a $a \leq 15$ et on peut faire la liste des ensembles générateurs de cardinalité $n+1$ comme suit

$$\{-1,1\}, \{-3,1,2\}, \{-6,1,2,3\}, \{-7,1,2,4\}, \{-10,1,2,3,4\}, \{-11,1,2,3,5\}$$
$$\{-12,1,2,3,6\}, \{-13,1,2,3,7\}, \{-14,1,2,4,7\}, \{-15,1,2,4,8\}$$

Ces ensembles sont du même type que ceux construits pour $n > 4$; pour les autres valeurs, on a

$$\{-3,-1,1,3\}, \{-4,-1,2,3\}, \{-7,-1,1,2,5\}, \{-8,-1,1,3,5\}.$$

La valeur $a = 2$ nécessite 3 générateurs $\{-2, 1, 2\}$ et c'est la seule pour laquelle l'ensemble F des générateurs ne peut pas être choisi de telle façon que la somme de ses éléments positifs soit a et que la somme de ses éléments négatifs soit $-a$. On vérifie néanmoins que tous les éléments peuvent être obtenus comme une somme admissible. $\square$

Théorème 3.3. *Soit D un diviseur d'Arakelov sur $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$. Si $\deg(D) \geq 0$, on a*

$$\dim_{\mathbb{S}} H^0(D) = \left\lceil \deg_2 D \right\rceil + 1. \tag{3.2}$$

Preuve : On peut supposer que $D = \delta\{\infty\}$ où $\delta = \deg(D) > 0$. On a $H^0(D) = (H\mathbb{Z})_I$ où $I = [-e^\delta, e^\delta]$, en utilisant la relation classique entre le degré du diviseur et le sous-ensemble compact associé dans les adèles[4]. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tel que $2^{n-1} \leq e^\delta < 2^n$. La partie entière a de e^δ vérifie $2^{n-1} \leq a < 2^n$ et on a $H^0(D) = (H\mathbb{Z})_{[-a,a]}$. Par conséquent, par le lemme 3.2, on obtient $\dim_{\mathbb{S}} H^0(D) = n+1$. Par définition $\deg_2 D := \deg D / \log 2$. Les conditions $2^{n-1} \leq e^\delta < 2^n$ signifient que $n - 1 \leq \deg_2 D < n$ et montrent que le plus petit entier $> \deg_2 D$ est égal à n, ce qui prouve (3.2). $\square$

4. Dimension de H^1 sur $\mathbb{S}$

On définit la suite d'entiers suivante :

$$j(n) := \tfrac{1}{3}(-2)^n - \tfrac{1}{2}(-1)^n + \tfrac{1}{6} \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Les premières valeurs de $j(n)$ sont alors : $0, 1, -2, 5, -10, 21, -42, 85, -170, 341, -682, 1365, -2730, \ldots$

Lemme 4.1. *Soit $G(n) = \{(-2)^j \mid 0 \leq j < n\}$. L'application σ de l'ensemble des sous-ensembles de $G(n)$ vers $\mathbb{Z}$ définie par $\sigma(Z) := \sum_Z j$ est en bijection avec l'intervalle $\Delta(n) := [j(k), j(k)+2^n-1]$ où $k = k(n) := 2E(n/2) + 1$, ($E(x) =$ la partie entière de x).*

Preuve : L'application σ est injective et couvre un intervalle $[a, b]$. La borne inférieure a est la somme des puissances $a = \sum_{0 \leq \ell < \frac{n-1}{2}} (-2)^{2\ell+1}$ et la borne supérieure est la somme des puissances $b = \sum_{0 \leq \ell < \frac{n}{2}} (-2)^{2\ell}$. On liste des premiers intervalles comme suit

$$\Delta(1) = [0,1], \quad \Delta(2) = [-2,1], \quad \Delta(3) = [-2,5], \quad \Delta(4) = [-10,5], \quad \Delta(4) = [-10,21], \ldots$$ $\square$

On renvoie le lecteur à [3], Appendice A, B, pour l'interprétation de $H^1(D)$ en termes du $\mathbb{S}$-module tolérant $(U(1), d)_\lambda$, $\lambda = e^{\deg D}$. Au niveau 1, la relation de tolérance sur le groupe abélien $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est donnée par la condition $d(x, y) \leq \lambda$.

Proposition 4.2. *Soit $U(1)$ le groupe abélien $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la métrique canonique d de longueur* 1.

[4] Notons que $e^{\deg D} = 2^{\deg_2(D)}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $U(1)_\lambda$ le $\mathbb{S}$-module tolérant $(U(1), d)_\lambda$. Alors

$$\dim_{\mathbb{S}} U(1)_\lambda = \begin{cases} m & \text{if } 2^{-m-1} \leq \lambda < 2^{-m}, \\ 0 & \text{if } \lambda \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Preuve : Pour $\lambda \geq \frac{1}{2}$, tout élément de $U(1)_\lambda = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, d)_\lambda$ est à distance $\leq \lambda$ de 0, par conséquent on peut prendre $F = \varnothing$ comme ensemble générateur puisque, par convention, $\sum_\varnothing = 0$. Ainsi $\dim_{\mathbb{S}} U(1)_\lambda = 0$. Ensuite, on suppose $\lambda < \frac{1}{2}$. Soit $F \subset U(1)$ un ensemble générateur et posons $k = \#F$. On voit facilement qu'il y a au plus 2^k éléments de la forme $\sum_F \alpha_j j$, $\alpha_j \in \{0, 1\}$. Les sous-ensembles $\{x \in U(1) \mid d(x, \sum_F \alpha_j j) \leq \lambda\}$ couvrent $U(1)$, et puisque chacun d'eux à comme mesure 2λ, on obtient l'inégalité $2\lambda \cdot 2^k \geq 1$. Ainsi $k \geq \frac{-\log\lambda - \log 2}{\log 2}$. Quand $\frac{-\log\lambda - \log 2}{\log 2} = m$ est un entier, on a $\lambda = 2^{-m-1}$. Posons $F(m) = \{(-2)^{-j} \mid 1 \leq j \leq m\}$. La distance minimale entre deux éléments de $F(m)$ est la distance entre 2^{-m+1} et -2^{-m} qui est égale à $3 \cdot 2^{-m} = 6\lambda$. Montrons que $F(m)$ est un ensemble générateur. Par le lemme 4.1, tout entier q dans l'intervalle $\Delta(m)$ peut s'écrire comme $q = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (-2)^i$, avec $\alpha_i \in \{0, 1\}$. On obtient alors

$$q \cdot (-2)^{-m} = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (-2)^{i-m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{m-j} (-2)^{-j}.$$

Soit $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, faire monter y à un élément x de l'intervalle $(-2)^{-m}[j(k(m)), j(k(m)) + 2^m)$ qui est connexe de longueur 1 et est un domaine fondamental pour l'action de $\mathbb{Z}$ par translation. Alors il existe un entier $q \in \Delta(m)$ tel que $|(-2)^m x - q| \leq \frac{1}{2}$. Par conséquent, $d(x, q \cdot (-2)^{-m}) \leq 2^{-m-1} = \lambda$. Cela prouve que $F(m)$ est un ensemble générateur (voir la définition 2.1) et on en déduit que $\dim_{\mathbb{S}} U(1)_\lambda = m$. Supposons maintenant que $\frac{-\log\lambda - \log 2}{\log 2} \in (m, m+1)$, où m est un entier, i.e. que $\lambda \in (2^{-m-2}, 2^{-m-1})$. Pour tout ensemble générateur F de cardinalité k, on a $k \geq \frac{-\log\lambda - \log 2}{\log 2} > m$ de telle façon que $k \geq m + 1$. Le sous-ensemble $F(m+1) = \{(-2)^{-j} \mid 1 \leq j \leq m+1\}$ remplit la première condition de la définition 2.1 puisque la distance minimale entre deux éléments de $F(m+1)$ est $3 \cdot 2^{-m-1}$ qui est plus grand que $\lambda < 2^{-m-1}$. Comme montré ci-dessus, le sous-ensemble $F(m+1)$ est générateur pour $\lambda = 2^{-m-2}$ et a fortiori pour $\lambda > 2^{-m-2}$. Ainsi on obtient $\dim_{\mathbb{S}} U(1)_\lambda = m + 1$ et (4.2) est démontré. ☐

5. Formule de Riemann-Roch

On peut maintenant formuler le résultat principal de cet article

Théorème 5.1. *Soit D un diviseur d'Arakelov sur $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$. Alors*

$$\dim_{\mathbb{S}} H^0(D) - \dim_{\mathbb{S}} H^1(D) = \left\lceil \deg_2 D \right\rceil' + 1 \tag{5.1}$$

où $\lceil x \rceil'$ est la fonction continue à droite qui coïncide avec plafond(x) pour $x > 0$ non entier et avec $-$plafond$(-x)$ pour $x < 0$ non entier (voir Figure 1).

Preuve : Pour $\deg_2 D \geq 0$, on a $\lambda = e^{\deg D} \geq 1$ et par conséquent par (4.2), on obtient $\dim_{\mathbb{S}} H^1(D) = 0$, de telle façon que (5.1) découle du théorème 3.3. Pour $\deg_2 D < 0$, on a $\dim_{\mathbb{S}} H^0(D) = 0$ puisque l'ensemble vide est un ensemble générateur. Pour $\deg_2 D \in [-m-1, -m)$ où $m \in \mathbb{N}$, on a, par (4.2), $\dim_{\mathbb{S}} H^1(D) = m$. Par conséquent, le côté gauche de (5.1) is $-m$ alors que le côté droit est égal à

$$\left\lceil \deg_2 D \right\rceil' + 1 = -m$$

par définition de la fonction $\lceil x \rceil'$ comme fonction continue à droite qui coïncide avec plafond(x) pour $x > 0$ non entier et avec $-$plafond$(-x)$ pour $x < 0$ non entier. ☐

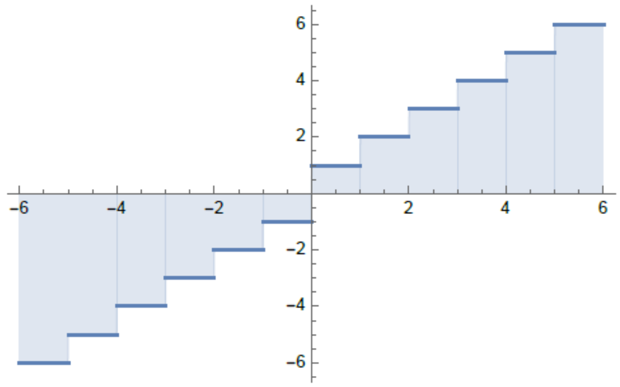


FIG 1 : Graphique de $\dim_{\mathbb{S}} H^0(D) - \dim_{\mathbb{S}} H^1(D) - 1$ comme une fonction de $\deg_2 D$

Remerciements. La seconde auteure est en partie financée par la subvention de la fondation Simons n° 691493.

Bibliographie

[1] A. Connes, C. Consani, *Absolute algebra and Segal's Gamma sets*, J. Number Theory 162 (2016), 518–551.

[2] A. Connes, C. Consani, *On Absolute Algebraic Geometry, the affine case*, Advances in Mathematics, 390, Paper No. 107909 (2021), 44 pp.

[3] A. Connes, C. Consani, *Riemann-Roch for* $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$. À paraître dans le Bulletin des Sciences Mathématiques.

[4] B. Dundas, T. Goodwillie, R. McCarthy, *The local structure of algebraic K-theory.* Algebra and Applications, 18. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2013.

[5] A. Weil *Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques*, Oeuvres scientifiques/Collected papers I. 1926–1951. Springer, Heidelberg, 2014.

Sur la métaphysique de F_1

Alain Connes, Caterina Consani*

À la mémoire de Yuri Ivanovich Manin.

Résumé : Dans le présent article, dédié à Yuri Manin, nous interrogeons la notion générale d'anneaux de $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$–polynômes et nous relions ce concept à la notion connue de systèmes de numération. Le théorème de Riemann-Roch pour l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers que nous avons obtenu récemment utilise le fait de comprendre $\mathbb{Z}$ comme un anneau de polynômes $\mathbb{S}[X]$ en une variable sur la base absolue $\mathbb{S}$, où $1 + 1 = X + X^2$. La base absolue $\mathbb{S}$ (la version catégorique du spectre de la sphère) s'avère ainsi être un sérieux candidat pour l'incarnation du mystérieux $\mathbb{F}_1$.

1 Introduction

> Les mathématiciens du XVI^e siècle avaient coutume de parler de la "métaphysique du calcul infinitésimal", de la "métaphysique de la théorie des équations". Ils entendaient par là un ensemble d'analogies vagues, difficilement saisissables et difficilement formulables, qui néanmoins leur semblaient jouer un rôle important à un moment donné dans la recherche et la découverte mathématiques. (A. Weil, De la métaphysique aux mathématiques, 1960, [33])

Yuri Manin, à la mémoire de qui cet article est dédié, a reconnu le premier dans [23] l'importance de développer une théorie des "coefficients absolus" en géométrie arithmétique, indépendamment des idées précédentes de R. Steinberg [30] et J. Tits [31] dans le contexte des groupes de Chevalley. En arithmétique, pour les corps de nombres, le but est de fournir la contrepartie géométrique de la construction qu'A. Weil a utilisée dans sa preuve de l'hypothèse de Riemann pour les corps de fonctions. La recherche d'une analogie proche entre les corps de nombres et les corps de fonctions des courbes en caractéristique positive a amené Manin à postuler l'existence du point absolu "Spec $\mathbb{F}_1$," sur lequel on pouvait appliquer la stratégie de Weil à l'étude de la fonction zeta de Riemann. Pour le schéma algébrique Spec $\mathbb{Z}$, on pourrait alors utiliser le spectre du produit tensoriel "$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$" comme un substitut du produit d'une courbe par elle-même sur (le spectre d') un corps fini.
Manin plaidait toujours pour la fécondité des interactions entre les différentes approches d'un problème mathématique. Dans les Sections 2 et 3, on discutera de deux telles occurrences inattendues, en fait deux piliers de notre travail commun lors des 15 dernières années. La section 2 traite de la courbe hypothétique [1] **C** que nous proposons comme entité géométrique absolue. La section 3 concerne plutôt les coefficients absolus. Le but de cet article est de sponsoriser $\mathbb{S}$ le spectre de la sphère comme forme combinatoire de base, la forme combinatoire la plus basique du spectre de la sphère, et une $\mathbb{S}$-algèbre, comme candidat le plus naturel pour les coefficients absolus (alias $\mathbb{F}_1$). Nous prétendons que cette algèbre est le "corps" absolu des constantes sur lequel $\mathbb{Z}$ devient un anneau de polynômes d'une variable. Ce point de vue est

*Partiellement financée par la subvention n° 691493 de la Fondation Simons.
Traduction de l'article https://arxiv.org/pdf/2307.06748.pdf, Denise Vella-Chemla, juillet 2023.

1. On utilisera dans la suite de ce document la lettre **C** pour la désigner.

soutenu par le théorème de Riemann-Roch pour l'anneau $\mathbb{Z}$ récemment démontré dans [14], dont la formule montre que le genre de $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$ est zéro. Dans un précédent résultat sur le même sujet [13], les entiers étaient considérés comme des polynômes sur $\mathbb{S}[\pm 1]$ avec générateur $X = 3$. Ce fait est basé sur un système de numération équilibré ternaire [2] qui fournit une représentation signée équilibrée des entiers comme sommes finies de puissances de la "variable" $X = 3$ avec coefficients dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$ sous-tendant le monoïde pointé multiplicatif $\mu_{2,+}$ des racines quadratiques de l'unité. La nouvelle version du théorème de Riemann-Roch pour l'anneau $\mathbb{Z}$ dans [14] simplifie une version précédente [13] et elle réconcilie également la formule (et notre compréhension de ce sujet) avec le point de vue de la théorie des nombres classique. En effet, dans l'analogie entre les corps de nombres et les courbes sur les corps finis, le corps $\mathbb{Q}$ est de genre zéro [32] et il est désigné comme le seul corps contenu dans n'importe quel corps de nombres. Le fait de voir $\mathbb{Z}$ comme un anneau de polynômes sur la base absolue $\mathbb{S}$ sélectionne le générateur $X = -2$. Le fait clé est que tout entier peut être exprimé de manière unique comme somme de puissances de -2 [20].
Les cas particuliers de générateurs ci-dessus X pour les anneaux sur les $\mathbb{S}$-algèbres sphériques finies justifient une étude systématique et étendue des anneaux de $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$–polynômes. Dans la section 5, on introduit la notion générale d'anneaux de $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$–polynômes en une et plusieurs variables. Soit $n > 0$ un entier, μ_n le groupe multiplicatif des racines n-ièmes de l'unité de 1 et $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$ la $\mathbb{S}$-algèbre sphérique du monoïde (pointé) $\mu_{n,+} = \mu_n \cup \{0\}$. On rappelle que les morphismes de $\mathbb{S}$-algèbres $\mathbb{S}[\mu_{n,+}] \to HR$ (R étant un anneau) correspondent bijectivement aux homomorphismes de groupes $\iota : \mu_n \to R^\times$ [11]. Soit $\mathcal{P}(\mu_n)$ le sous-ensemble de l'ensemble $\left(\mu_n \cup \{0\}\right)^{\mathbb{N}}$ des séquences avec seulement un nombre fini de termes non nuls. Par définition, un élément $X \in R$ est un $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-générateur si et seulement si l'application d'évaluation $\sigma : \mathcal{P}(\mu_n) \to R$, $\sigma((\alpha_j)) = \sum_j \iota(\alpha_j) X^j$ est bijective. La proposition 5.8 montre que la paire (R, X) d'un anneau de $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$–polynômes en une variable est spécifiée de manière unique, à isomorphisme près, par l'application $h : \mu_n \to \mathcal{P}(\mu_n)$, qui, en retour, est uniquement définie par l'égalité $\sigma(h(\xi)) = \iota(\xi) + 1$. Dans la section 6, on donne plusieurs exemples d'anneaux de $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$–polynômes basés sur certains systèmes de numération connus. Nous renvoyons à [2] pour un survol des systèmes de numération et pour des références fournies, mais nous ne prétendons pas à l'exhaustivité. Conceptuellement, les exemples d'anneaux de $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-polynômes discutés dans cet article fournissent un pont explicite entre les mondes p-adique et complexe. Au niveau géométrique, les anneaux de polynômes sont naturellement reliés à la droite projective $\mathbb{P}^1$, et l'évaluation en les points 0 et ∞ de $\mathbb{P}^1$ amène, après complétion, le raffinement suivant (la ligne du dessous) d'un diagramme classique (la ligne du dessus). Dans la ligne du dessus, K est le corps des fractions de l'anneau de Witt p-typique de la fermeture algébrique de $\mathbb{F}_q$ ($q = p^\ell$) et $\overline{K}$ est sa clôture algébrique.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\overline{\mathbb{F}}_q & \overset{\pi}{\twoheadleftarrow} & W(\overline{\mathbb{F}}_q) & \hookrightarrow & \overline{K} & \supset & \overline{\mathbb{Q}} & \subset & \mathbb{C} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \parallel \\
\mathbb{F}_q & \overset{\pi}{\twoheadleftarrow} & W(\mathbb{F}_q) & \hookrightarrow & W(\mathbb{F}_q)[\eta] & \hookleftarrow & R[X^{-1}] & \hookrightarrow & \mathbb{C}
\end{array}$$

Dans la ligne du dessous, X est un $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-générateur de l'anneau R où $n + 1 = q$. $R[X^{-1}]$ est l'anneau des polynômes de Laurent ; l'application vers $\mathbb{C}$ est l'inclusion de $R[X^{-1}]$ dans $\mathbb{C}$ par spécialisation de X, obtenue en résolvant les équations $\sigma(h(\xi)) = \iota(\xi) + 1$, $\xi \in \mu_n$, et en utilisant le plongement canonique $\mu_{n,+} \subset \mathbb{C}$. L'application de $R[X^{-1}]$ vers l'extension finie $W(\mathbb{F}_q)[\eta]$ est obtenue à partir de l'inclusion canonique de R dans la limite projective $\varprojlim R_n$ (voir la proposition 5.8).
La théorie générale des anneaux de $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-polynômes, avec le rôle de la base absolue $\mathbb{S}$ dans la formulation du théorème de Riemann-Roch [14], suggère le raffinement suivant de la définition du site arithmétique.

2. Une occurrence plus ancienne d'un tel système de numération peut être trouvée dans le livre de 1544 "Arithmetica integra" de Michael Stifel.

Originellement, cet espace était défini par la paire du topos arithmétique $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ et de la structure de faisceau donnée par l'action du Frobenius de $\mathbb{N}^\times$ sur le semi-anneau tropical $\mathbb{Z}_{\max}$ [9]. Le rôle du corps de constantes est ici joué par le semi-corps booléen $\mathbb{B}$. Le développement de cet article suggère de façon évidente de remplacer la structure de faisceau $\mathbb{Z}_{\max}$ par le faisceau des $\mathbb{S}$-algèbres obtenues à partir de l'action du Frobenius $X \mapsto X^n$ de $\mathbb{N}^\times$ sur l'algèbre sphérique $\mathbb{S}[X]$. Cette nouvelle version du site arithmétique fournit simultanément une base naturelle à la fois au niveau des coefficients et au niveau géométrique. Le topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ est l'incarnation géométrique des λ-opérations dans la théorie des λ-anneaux [3] dans le contexte de la géométrie sur $\mathbb{F}_1$. Nous espérons que par une compréhension adéquate de la "fermeture algébrique" $\overline{\mathbb{F}}_1$ des coefficients absolus, on pourrait relier l'espace des points du site $\mathbb{S}$-arithmétique sur $\overline{\mathbb{F}}_1$ aux (points de la) courbe **C** dont la structure est rappelée dans la section 2.
Finalement, ces résultats amènent également à la question ouverte et intéressante de la classification des anneaux de $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$–polynômes en plusieurs variables qui poursuit l'assertion intuitive de Yuri Manin [23] :

> *La question centrale à laquelle nous répondons peut être énoncée de façon provocante comme suit : si les nombres sont semblables à des polynômes en une variable sur un corps fini, quel est l'analogue des polynômes à plusieurs variables ? Ou, en termes plus géométriques, existe-t-il une catégorie dans laquelle on peut définir "des puissances absolues de Descartes"* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \times \cdots \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ *?*

2 Incarnation adélique et topossique de C

Une première connexion entre le point de vue de Manin sur $\mathbb{F}_1$ et un sujet semblant non relié à celui-ci a lieu comme sous-produit des relations entre la perspective de C. Soulé sur les variétés sur $\mathbb{F}_1$ (nommé "réalisme critique" dans [24]) – motivé par [23] (*cf.* §1.5) – et le travail du premier auteur [5] sur la formule de trace en géométrie non-commutative et les zéros de la fonction zeta de Riemann. Dans [29], Soulé a introduit la fonction de zeta suivante d'une variété X sur $\mathbb{F}_1$

$$\zeta_X(s) := \lim_{q\to 1} Z(X, q^{-s})(q-1)^{N(1)}, \qquad s \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

en utilisant la fonction de comptage *polynomiale* $N(x) \in \mathbb{Z}[x]$ associée à X et la série exponentielle de Hasse-Weil

$$Z(X,T) := \exp\left(\sum_{r\geq 1} N(q^r)\frac{T^r}{r}\right). \tag{2.2}$$

Tous les exemples de variétés considérées dans *op.cit.* sont rationnelles. Par conséquent, l'existence d'une courbe sous-jacente **C** reliée, d'une façon similaire, à la fonction zeta de Riemann est subordonnée au fait de trouver une fonction $N(q)$ (hautement non polynomiale !) qui produise, à travers l'utilisation de (2.1), la fonction de Riemann complète $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. Ceci est un problème non trivial puisque, classiquement, $N(1)$ dans la formule ci-dessus représente la caractéristique d'Euler de l'espace géométrique. Donc on peut être amené à s'attendre [3] à ce que puisque pour la fonction zeta de Riemann, on devrait avoir $N(1) = -\infty$, l'utilisation de (2.1) devrait être exclue, et avec elle également l'attente que $N(q) \geq 0$ pour $q \in (1, \infty)$. Il y a, en fait, un moyen naturel de passer outre ce problème en appliquant la dérivée logarithmique aux deux côtés de (2.1) et en observant alors que le côté droit détermine les sommes de Riemann d'une intégrale [7, 8]. De cette manière, au lieu de (2.1), on considère l'équation :

3. Le nombre de zéros de $\zeta_{\mathbb{Q}}$ est infini, et il en est donc de même de la (mystérieuse) cohomologie $H^1(\mathbf{C})$.

$\dfrac{\partial_s \zeta_N(s)}{\zeta_N(s)} = -\displaystyle\int_1^\infty N(u)\, u^{-s} d^*u$, où $d^*u := du/u$. Cette formule intégrale produit la formule suivante pour le but recherché d'obtenir la fonction de comptage $N(q)$ associée à $\mathbf{C}$:

$$\frac{\partial_s \zeta_{\mathbb{Q}}(s)}{\zeta_{\mathbb{Q}}(s)} = -\int_1^\infty N(u)\, u^{-s} d^*u. \tag{2.3}$$

L'équation ci-dessus admet une solution qui a du sens exprimable en fonction de la *distribution*

$$N(u) = \frac{d}{du}\varphi(u) + \kappa(u), \qquad \varphi(u) := \sum_{n<u} n\,\Lambda(n), \tag{2.4}$$

où $\kappa(u)$ est la distribution qui apparaît dans la formule explicite de Riemann-Weil

$$\int_1^\infty \kappa(u) f(u) d^*u = \int_1^\infty \frac{u^2 f(u) - f(1)}{u^2-1} d^*u + c f(1)\,, \qquad c = \frac{1}{2}(\log \pi + \gamma).$$

On montre que la distribution $N(u)$ est positive sur $(1,\infty)$, et quand on l'écrit en fonction des zéros non triviaux $\rho \in Z$ de la fonction zeta de Riemann, elle est donnée, en parfaite analogie avec sa contrepartie vérifiée dans le cas des corps de fonctions par

$$N(u) = u - \frac{d}{du}\left(\sum_{\rho\in Z} \mathrm{ordre}(\rho)\frac{u^{\rho+1}}{\rho+1}\right) + 1, \tag{2.5}$$

où la dérivée est prise au sens des distributions. La valeur en $u=1$ du terme $\omega(u) = \displaystyle\sum_{\rho\in Z} \mathrm{ordre}(\rho)\frac{u^{\rho+1}}{\rho+1}$ est donnée par $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\gamma}{2} + \dfrac{\log 4\pi}{2} - \dfrac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)}$.

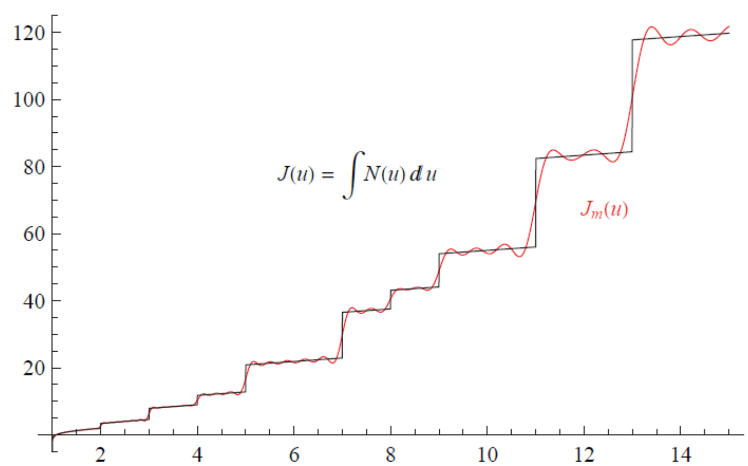


FIG. 1 : Graphe de la primitive $J(u)$ de la distribution de comptage $N(u)$. On a $J(u) \to -\infty$ quand $u \to 1$. Le graphique ondulant est l'approximation de $J(u)$ obtenue en utilisant l'ensemble symétrique Z_m des $2m$ premiers zéros pour calculer la somme $J_m(u) = \frac{u^2}{2} - \sum_{Z_m} \mathrm{ordre}(\rho)\frac{u^{\rho+1}}{\rho+1} + u$.

La tension entre la positivité de la distribution $N(q)$ pour $q > 1$, et l'attente que sa valeur $N(1)$ doive être $N(1) = -\infty$ est résolue en implémentant la théorie des distributions. En effet, même si $N(u)$ est *finie* comme une distribution, quand on la regarde comme une fonction, sa valeur en $q = 1$ est formellement donnée par

$$N(1) = 2 - \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\omega(1+\epsilon) - \omega(1)}{\epsilon} \sim -\frac{1}{2} E \log E, \qquad E = \frac{1}{\epsilon}$$

et ainsi, elle est égale à $-\infty$, et ce fait reflète, quand $\epsilon \to 0$, la densité des zéros de la fonction zeta.

On souligne que le rôle des formules analytiques explicites de Riemann-Weil dans le processus de dépasser la difficulté initiale par une solution définie par une distribution positive $N(q)$, relie directement le point de vue original (en géométrie classique) avec la formule de trace dans [5], fournissant ainsi une première description géométrique pour les points de **C** en fonction du double quotient

$$X_{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} / \hat{\mathbb{Z}}^\times \tag{2.6}$$

de l'espace des classes d'adèles des rationnels par le sous-groupe compact maximal $\hat{\mathbb{Z}}^\times$ du groupe des classes d'idèles. L'ingrédient clé principal dans cette construction est la fonction de mise à l'échelle de $\mathbb{R}_+^\times$ qui fournit [4] la distribution de comptage ci-dessus $N(u)$, $u \in [1, \infty)$, qui détermine, en retour, la fonction zeta de Riemann complète via une procédure de limitation lorsque $q \to 1$, opérée sur la formule de the Hasse-Weil. La géométrie non-commutative joue un rôle crucial dans ce développement principalement en implémentant l'espace non-commutatif $X_{\mathbb{Q}}$ qui survient naturellement comme le dual du BC-système [4].

Pour atteindre une compréhension géométrique plus classique de l'espace des classes d'adèles $X_{\mathbb{Q}}$ avec son action de mise à l'échelle, en analogie avec l'action de l'automorphisme de Frobenius sur les points de la courbe sur la fermeture algébrique d'un corps de base, il faut pousser plus loin la recherche d'interactions inaattendues... Cette compréhension géométrique vient en fait de l'interaction entre trois théories a priori non liées :

1. la géométrie non-commutative,
2. les topoi de Grothendieck
3. la géométrie tropicale.

Le point de départ naturel est le topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$, défini dans [9] comme le topos de Grothendieck de pré-faisceaux dual du monoïde multiplicatif $\mathbb{N}^\times$ des entiers positifs non nuls. Cet espace est en fait l'incarnation géométrique des $\mathbb{N}^\times$-actions sur les ensembles. Ces actions arrivent souvent en instances globales des endomorphismes de Frobenius : pour les λ-anneaux, elles étaient défendues dans [3] dans le contexte des variétés sur $\mathbb{F}_1$ (dans l'interprétation de Manin, elles sont dites “futuristes”, [24]). Les λ-anneaux spéciaux R ([1] Proposition 5.2), appartiennent naturellement au topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ puisque les opérations de Adams ψ_n changent R en un faisceau d'anneaux sur le topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$.
À un niveau algébrique très basique, un exemple fondamental d'action de Frobenius de $\mathbb{N}^\times$ est fourni par la théorie des semi-anneaux (*i.e.* quand on met de côté l'existence d'inverses additifs dans les anneaux). Pour un semi-anneau [5] R de “caractéristique un” (c'est-à-dire idempotent : *i.e.* tel que $1 + 1 = 1$), l'application $x \mapsto x^n = \mathrm{Fr}_n(x)$ est un endomorphisme injectif [17], pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\times$. Ainsi, on obtient une action canonique du semi-groupe $\mathbb{N}^\times$ sur tout tel R. Pour cette raison, il est naturel de travailler avec le topos

4. Pour supprimer le terme logarithmique divergent de la formule de trace [5], on a besoin de supprimer de $X_{\mathbb{Q}}$ l'orbite de l'adèle unité 1, *i.e.* ou de manière équivalente de soustraire la représentation régulière de $\mathbb{R}_+^\times$ comme dans [25].
5. Un semi-corps est un semi-anneau dont les éléments non nuls forment un groupe pour la multiplication.

$\widehat{\mathbb{N}^\times}$ muni d'une action de $\mathbb{N}^\times$. De plus, on sait également qu'il y a un unique semi-corps [6] $\mathbb{Z}_{\max}$ dont le groupe multiplicatif est cyclique infini et il est de caractéristique un. Ces faits étant donnés, il est naturel d'introduire l'espace suivant

Définition 2.7 ([9])**.** Le site arithmétique $\mathscr{A} = (\widehat{\mathbb{N}^\times}, \mathcal{O})$ est le topos $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ muni du *faisceau structurel* $\mathcal{O} := \mathbb{Z}_{\max}$, vu comme un semi-anneau dans le topos *et* avec l'action de $\mathbb{N}^\times$ par les endomorphismes de Frobenius.

Le semi-corps $\mathbb{Z}_{\max}$ et son compagnon $\mathbb{R}_+^{\max}$ (dont le groupe multiplicatif est $\mathbb{R}_+^*$), sont des objets familiers en géométrie tropicale où le maximum remplace l'addition usuelle.
En implémentant une généralisation évidente dans les topos semi-annelés de la compréhension d'un point de géométrie algébrique, on obtient le résultat suivant qui détermine un pont reliant la géométrie non-commutative à la théorie des topos (de Grothendieck)

Théorème 2.8 ([9])**.** *L'ensemble des points du site arithmétique $\mathscr{A}$ sur $\mathbb{R}_+^{\max}$ est canoniquement isomorphe à $X_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q} / \hat{\mathbb{Z}}^\times$. L'action des automorphismes de Frobenius Fr_λ de $\mathbb{R}_+^{\max}$ sur ces points correspond à l'action du groupe des classes d'idèles sur $X_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_\mathbb{Q} / \hat{\mathbb{Z}}^\times$.*

Ce théorème amène une lumière nouvelle sur une intuition géométrique de la courbe **C**, en particulier, il montre l'espace non-commutatif $X_\mathbb{Q}$ comme l'ensemble des points de **C** sur le semi-corps $\mathbb{R}_+^{\max}$, avec l'action de mise à l'échelle comprise comme l'action du groupe de Galois $\mathrm{Aut}_\mathbb{B}(\mathbb{R}_+^{\max})$ de $\mathbb{R}_+^{\max}$ sur le semi-corps booléen [7] $\mathbb{B}$. Cela suggère également que $\mathbb{R}_+^{\max}$ devrait intervenir dans la construction de la "fermeture algébrique" de $\mathbb{F}_1$, et que le cœur combinatoire sous-tendant **C** est dénombrable puisqu'à la fois $\mathbb{N}^\times$ et $\mathbb{Z}_{\max}$ le sont. On trouve assez remarquable qu'alors que le site arithmétique est un objet combinatoire de nature dénombrable, il vienne néanmoins muni d'un semi-groupe à un paramètre de "correspondances" qui peut être vu comme des congruences sur le carré de ce site [9].

L'ensemble dénombrable de places de $\mathbb{Q}$ (les points de la compactification d'Arakelov $\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}$), est l'analogue visible (classiquement) de l'ensemble des orbites de l'automorphisme de Frobenius dans le cas des corps de fonctions. On obtient une meilleure vision des points de **C** en considérant les orbites périodiques C_p (paramétrées par les nombres premiers p) lorsqu'elles ont lieu parmi les points du site arithmétique $\mathscr{A}$ sur $\mathbb{R}_+^{\max}$. On montre que les points de C_p forment un cercle dont les éléments sont les sous-groupes de rang un du groupe multiplicatif de $\mathbb{R}_+^{\max}$ de la forme

$$H_\mu := \{\mu^{\frac{n}{p^k}} \mid n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}. \tag{2.9}$$

Ce sous-groupe est inchangé si on remplace μ par μ^p, et l'action de Frobenius de $\mathrm{Aut}_\mathbb{B}(\mathbb{R}_+^{\max}) = \mathbb{R}_+^*$, $\mu \mapsto \mu^\lambda$, induit l'action transitive du groupe quotient $\mathbb{R}_+^*/p^\mathbb{Z}$. La longueur de cette orbite périodique est $\log p$, et leur collection complète joue un rôle clé dans l'interprétation des formules explicites de Riemann-Weil comme une formule de trace dans [5]. De plus, chaque C_p hérite, comme un sous-espace du site de mise à l'échelle (obtenu à partir du site arithmétique par extension des scalaires), d'une structure de faisceau (de caractéristique un) qui transforme toute orbite périodique en l'analogue d'une courbe elliptique classique [10]. De cette manière, on peut encore appliquer plusieurs outils clés de la géométrie algébrique, comme les fonctions rationnelles, les diviseurs, etc. Une nouvelle caractéristique surprenante de cette géométrie

6. Comme monoïde multiplicatif, $\mathbb{Z}_{\max}$ est obtenu en adjoignant l'élément zéro $-\infty$ au groupe cyclique infini $\mathbb{Z}$ alors que l'opération qui joue le rôle d'addition dans le semi-corps est $(x, y) \mapsto \max(x, y)$.

7. $\mathbb{B} := \{0, 1\}$ avec $1 + 1 = 1$.

d'une orbite périodique est que le degré d'un diviseur est un nombre réel. Pour tout diviseur D dans C_p, il y a un problème de Riemann-Roch correspondant avec pour espace des solutions $H^0(D)$. La dimension continue [8] $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(H^0(D))$ de ce $\mathbb{R}_+^{\max}$-module est définie par la limite

$$\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(H^0(D)) := \lim_{n\to\infty} p^{-n}\mathrm{dim}_{\mathrm{top}}(H^0(D)^{p^n}) \tag{2.10}$$

où $H^0(D)^{p^n}$ est une filtration définie naturellement et où $\mathrm{dim}_{\mathrm{top}}(\mathcal{E})$ dénote la dimension topologique d'un $\mathbb{R}_+^{\max}$-module $\mathcal{E}$. La formule de Riemann-Roch suivante est vérifiée

Théorème 2.11 ([10])**.** (i) *Soit* $D \in \mathrm{Div}(C_p)$ *un diviseur avec* $\deg(D) \geq 0$. *Alors la limite dans* (2.10) *converge et on a*

$$Dim_{\mathbb{R}}(H^0(D)) = \deg(D).$$

(ii) *La formule de Riemann-Roch suivante est vérifiée*

$$Dim_{\mathbb{R}}(H^0(D)) - Dim_{\mathbb{R}}(H^0(-D)) = \deg(D) \qquad \forall D \in \mathrm{Div}(C_p).$$

Au vu de ces résultats et du rôle clé joué par le semi-corps booléen $\mathbb{B}$ parmi les structures algébriques idempotentes [9], on peut (à tort) être amené à penser à $\mathbb{B}$ comme à l'incarnation naturelle de $\mathbb{F}_1$. Pourtant, cela ne peut être le cas pour la raison évidente que [10] :

L'anneau $\mathbb{Z}$ n'est pas une algèbre sur $\mathbb{B}$.

3 Coefficients absolus, spectres et $\mathbb{S}$.

Le fait indéniable ci-dessus nous a amenés, une fois encore, à comparer les idées de Manin sur $\mathbb{F}_1$ avec un autre sujet a priori non relié : c'est le monde des spectres de la théorie de l'homotopie. Les spectres topologiques généralisent grandement les théories de la cohomologie ; des invariants très importants en topologie algébrique, comme la cohomologie ordinaire et la K-théorie, peuvent être reformulés en fonction des spectres, ce qui fournit un traitement unifié pour les "coefficients généralisés". Une découverte fondamentale dans le contexte topologique est que les "spectres d'anneaux" généralisent les anneaux, et en particulier, le "spectre de la sphère" $\underline{\mathbb{S}}$ devient plus basique que l'anneau $\mathbb{Z}$, parce que ce dernier peut être vu comme une algèbre sur le premier. Cette théorie des "nouveaux anneaux courageux" s'est avérée être le cadre correct pour l'homologie cyclique ; en particulier, la théorie des Γ-espaces est connue pour fournir un modèle fonctionnel de spectres connectifs [15]. On travaille habituellement au niveau homotopique, et donc il est crucial de traiter les complexes de Kan pour obtenir une structure modélisante correcte. Pourtant, pour tirer un complet avantage de cette théorie pour le développement des idées de Manin sur $\mathbb{F}_1$ en théorie des nombres, nous pensons que les Γ-espaces devraient être vus dans leur forme la plus basique, notamment comme des objets simpliciaux dans la catégorie des Γ-ensembles, de telle façon que la théorie de l'homotopie puisse jouer le rôle de l'algèbre homologique correspondant à l'"algèbre absolue" sur le Γ-anneau de base $\mathbb{S}$ [11]. Ce Γ-anneau est le point de départ catégorique dans la construction du spectre de la sphère $\underline{\mathbb{S}}$, avec le foncteur naturel des Γ-espaces vers les spectres, et c'est exactement cette nature combinatoire de base qui le rend plus proche de ce que l'on recherche pour $\mathbb{F}_1$. La catégorie $\Gamma\mathfrak{Sets}_*$ des Γ-ensembles pointés (par exemple les $\mathbb{S}$-modules $\mathfrak{Mod}(\mathbb{S})$) peut être directement décrite comme suit. On

8. En analogie avec les dimensions continues de von Neumann de la théorie des facteurs de type II.
9. $\mathbb{B}$ est, en particulier, le seul semi-corps qui ne soit pas un corps *cf.* [17].
10. Les algèbres sur $\mathbb{B}$ sont de caractéristique un.

commence avec la petite catégorie Γ^{op} comme catégorie complète des ensembles finis pointés dont les objets sont les ensembles finis pointés [11] $k_+ := \{0, \ldots, k\}$, pour $k \geq 0$. En particulier, 0_+ est à la fois initial et terminal dans Γ^{op}, faisant de Γ^{op} une *catégorie pointée*. Un Γ-ensemble est défini comme un foncteur (covariant) $\Gamma^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathfrak{Sets}_*$ entre les catégories pointées et les morphismes dans cette catégorie sont des transformations naturelles. On dénote par $\mathbb{S} : \Gamma^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathfrak{Sets}_*$ le foncteur d'inclusion. Le hom foncteur interne est défini par

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{S}}(M, N) := \{k_+ \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(M, N(k_+ \wedge -))\}.$$

Cette formule définit de manière unique le smash produit des Γ-ensembles en appliquant l'adjonction

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{S}}(M_1 \wedge M_2, N) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{S}}(M_1, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{S}}(M_2, N)).$$

La construction de base des $\mathbb{S}$-modules associe à un monoïde abélien A un élément zéro, le foncteur d'Eilenberg-MacLane $M = HA$

$$HA(k_+) = A^k, \qquad Hf : HA(k_+) \to HA(n_+),$$

$$Hf(m)(j) := \sum_{f(\ell)=j} m_\ell,$$

où $m = (m_1, \ldots, m_k) \in HA(k_+)$, et l'élément nul de A donne un sens à la somme vide. Une $\mathbb{S}$-algèbre $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{S}$-module $\mathcal{A} : \Gamma^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathfrak{Sets}_*$ muni d'une multiplication associative $\mu : \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ et d'une unité $1 : \mathbb{S} \to \mathcal{A}$.
Un semi-anneau ordinaire R donne naissance à la $\mathbb{S}$-algèbre HR, et le plongement correspondant des catégories est pleinement fidèle de telle façon qu'aucune information n'est perdue. Par contraste, la $\mathbb{S}$-algèbre de base $\mathbb{S}$ sous-tend maintenant HR pour tout semi-anneau R.

Étant donné un monoïde multiplicatif M avec un élément $0 \in M$ tel que $0 \times x = x \times 0 = 0$ pour tout $x \in M$, on définit la $\mathbb{S}$-algèbre sphérique $\mathbb{S}[M]$ qui associe à l'ensemble pointé X le smash produit $X \wedge M$, où le point de base de M est $0 \in M$. On identifie $\mathbb{S}[M][1_+] = 1_+ \wedge M$ à M en envoyant le point de base de $1_+ \wedge M$ sur $0 \in M$, et $a \wedge m$ où $a \in 1_+ \setminus \{*\}$ et $m \in M \setminus \{0\}$ sur m. Pour éviter toute confusion, on écrit $2_+ = \{*, a, b\}$. Outre le point de base, les éléments de $\mathbb{S}[M][2_+] = 2_+ \wedge M$ sont donnés par paires de la forme (a, m) ou (b, m) où $m \in M \setminus \{0\}$. On a trois applications naturellement pointées $f : 2_+ \to 1_+$, qui sont

$$\phi(a) = a, \ \phi(b) = *, \ \ \psi(a) = *, \ \psi(b) = a, \ \ \rho(a) = \rho(b) = a.$$

Appelons $m \in M \setminus \{0\}$ et considérons la paire $z = (b, m) \in \mathbb{S}[M][2_+]$. On a $\phi_*(z) = * = 0$ et $\psi_*(z) = m$. De plus, on a $\rho_*(z) = m$. Cela signifie que pour l'addition partiellement définie dans $\mathbb{S}[M][1_+] = M$, on a $0 + m = m$ pour tout $m \in M$.

Ainsi, à la fois les anneaux ordinaires et les monoïdes s'adaptent pleinement fidèlement et naturellement [11] (proposition 3.5), dans la catégorie des $\mathbb{S}$-algèbres amenant un argument fort pour voir $\mathbb{S}$ comme la candidate naturelle pour $\mathbb{F}_1$. Néanmoins, on a besoin de tester cette idée de différentes manières. Par exemple, on voit *op.cit.* que le carré tensoriel de $H\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}$ n'est pas isomorphe à $H\mathbb{Z}$, et ce résultat fournit plus de base à l'intuition originale de Manin dans [23]. On peut aussi se demander quelles avancées ce point de vue peut produire pour comprendre l'anneau $\mathbb{Z}$ et son spectre algébrique $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$. Nous allons maintenant nous tourner vers une discussion détaillée de ce sujet.

11. où 0 est le point de base.

Soit $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$ la compactification d'Arakelov de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ obtenue en ajoutant la place archimédienne au symbole associé ∞. Alors, le nouveau point de vue décrit ci-dessus fournit une extension naturelle de la structure classique de faisceau de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ à la compactification d'Arakelov. Les points cruciaux concernant la quête de la courbe $\mathbf{C}$ sont au nombre de deux : premièrement, cette structure de faisceaux étendue $\mathcal{O}$ est encore un sous-faisceau du faisceau constant $\mathbb{Q}$; le second point intéressant est que les sections globales de $\mathcal{O}$ forment une extension d'algèbre finie de $\mathbb{S}$. Cette extension est identifiable à l'extension par les deux racines de l'unité à l'intérieur de $\mathbb{Q}$ que nous avons utilisée dans [6] dans le processus destiné à montrer que les groupes de Chevalley sont des variétés sur $\mathbb{F}_{1^2}$ au sens de Soulé [12]. La condition qui restreint les éléments de $H\mathbb{Q}$ à la place archimédienne est simple à formuler quand on voit le foncteur $H\mathbb{Q}$ comme assignant à un ensemble fini pointé F les diviseurs $\mathbb{Q}$-valués sur F. La restriction est alors établie en écrivant que la somme des valeurs absolues des nombres rationnels impliqués est ≤ 1. On vérifie que cette condition est stable par push-forwards et produits et que par conséquent, elle définit une sous-$\mathbb{S}$-algèbre de $H\mathbb{Q}$. Cette sous-$\mathbb{S}$-algèbre, définie en utilisant une norme s'applique également dans le contexte des adèles d'un corps global et nous permet de transposer l'approche due à A. Weil du théorème de Riemann-Roch pour les corps de fonctions au corps de nombres $\mathbb{Q}$ [13].
Un diviseur D sur $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$ définit un *sous-ensemble* compact $K = \prod K_v \subset \mathbb{A}_\mathbb{Q}$ de l'anneau localement compact des adèles. Quand p est un nombre premier non archimédien, chaque $K_p \subset \mathbb{Q}_p$ est un sous-groupe additif, par contraste, le sous-ensemble compact $K_\infty \subset \mathbb{R}$ est juste un intervalle symétrique dont le manque de structure additive empêche d'utiliser la construction originale de Weil faisant intervenir l'application d'addition $\psi : \mathbb{Q} \times K \to \mathbb{A}_\mathbb{Q}$. D'un autre côté, on note aussi rapidement que ψ conserve sa signification dans le contexte des $\mathbb{S}$-modules, donnant naissance à un complexe court. En utilisant la correspondance de Dold-Kan dans le contexte des $\mathbb{S}$-algèbres, on introduit alors un Γ-espace $H(D)$ qui code l'information homologique du diviseur D et dépend seulement de la classe d'équivalence linéaire de D (*i.e.* la classe du diviseur est inchangée selon l'action multiplicative de $\mathbb{Q}^\times$ sur $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$). Comme sous-produit, on obtient une formule de Riemann-Roch pour les diviseurs d'Arakelov sur $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$ d'une nature entièrement nouvelle qui repose sur l'introduction de trois nouvelles notions clés : la dimension (entière), les cohomologies $(H^0(D), H^1(D))$ (attachées à un diviseur D), et la dualité de Serre. Plus précisément, la formule de Riemann-Roch rend égales la caractéristique d'Euler de valeur entière avec une modification simple de l'expression habituelle (*i.e.* le degré du diviseur plus log 2).

Théorème 3.1 ([13])**.** *Soit D un diviseur d'Arakelov sur $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$. Alors*

$$\dim_{\mathbb{S}[\pm 1]} H^0(D) - \dim_{\mathbb{S}[\pm 1]} H^1(D) = \left\lceil \deg_3 D + \log_3 2 \right\rceil - \mathbf{1}_L. \tag{3.2}$$

Ici, $\lceil x \rceil$ dénote la fonction impaire sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec la fonction plafond sur les réels positifs et $\mathbf{1}_L$ est la fonction caractéristique d'un ensemble exceptionnel [13] *de mesure de Lebesgue finie.*

Dans (3.2), le logarithme népérien traditionnellement utilisé pour définir le degré d'un diviseur $D = \sum_j a_j\{p_j\} + a\{\infty\}$ en géométrie d'Arakelov, est remplacé par le logarithme en base 3. Cette modification est équivalente à une division par log 3 i.e. $\deg_3(D) := \deg(D)/\log 3$, $\log_3 2 = \log 2/\log 3$.
Le nombre 3 apparaît de manière inattendue dans le calcul de la dimension de la cohomologie des $\mathbb{S}[\pm 1]$-modules en déterminant leur nombre minimal de générateurs linéaires. Pour $\dim_{\mathbb{S}[\pm 1]} H^0(D)$, on trouve que

12. Un autre argument convaincant en faveur des $\mathbb{S}$-algèbres est que la catégorie ad-hoc que nous avions introduite dans [7] pour simplifier la définition de Soulé des variétés sur $\mathbb{F}_1$, est naturellement (voir [12]) une sous-catégorie complète de la catégorie des $\mathbb{S}$-algèbres.

13. $L \subset \mathbb{R}$ est l'union, pour $k \geq 0$, des intervalles $\deg(D) \in \left(\log \frac{3^k}{2}, \log \frac{3^k+1}{2}\right)$.

la façon la plus économique d'écrire les éléments d'un intervalle symétrique $\mathbb{Z} \cap K_\infty$ implique d'écrire les entiers comme des polynômes de la forme

$$\sum_{j\geq 0} \alpha_j\, 3^j, \quad \alpha_j \in \{-1, 0, 1\}. \tag{3.3}$$

De façon similaire, dans le cas de $\dim_{\mathbb{S}[\pm 1]} H^1(D)$, on trouve que la meilleure façon d'approximer les éléments du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est d'utiliser des polynômes de Laurent de la forme

$$\sum_{j<0} \alpha_j\, 3^j, \quad \alpha_j \in \{-1, 0, 1\}. \tag{3.4}$$

L'élément clé ici est que l'addition [14] des polynômes $P(X) = \sum_{j\geq 0} \alpha_j\, X^j,\ \ \alpha_j \in \{-1, 0, 1\}$ avec coefficients dans $\mathbb{S}[\pm 1]$ est identique à l'addition de vecteurs de Witt (tronqués) pour le corps fini $\mathbb{F}_3$. On trouve que l'addition $P + Q$ de deux polynômes de degré $\leq n$ donnent un polynôme de degré $\leq n + 1$, et que la seule règle qui ne soit pas évidente que l'on doive imposer est la somme : $1 + 1 := X - 1$. Conceptuellement, le point fondamental est que l'image de l'ascenseur de Teichmüller pour $\mathbb{F}_3$ est à l'intérieur de $\mathbb{Z}$. En même temps, les vecteurs de Witt avec seulement un nombre fini de composants non nuls forment un sous-anneau de l'anneau de Witt, et son sous-anneau est $\mathbb{Z}$!

4 L'anneau des entiers comme anneau de polynômes

Il y a une autre manière de représenter les entiers comme polynômes d'une variable, et dans cette description, les "coefficients" appartiennent à la base absolue $\mathbb{S}$. Cette représentation est connue comme la représentation *négabinaire* des nombres

$$n = \sum \alpha_j\, (-2)^j, \quad \alpha_j \in \{0, 1\}. \tag{4.1}$$

Le nombre $X = -2$ est remarquablement unique, rendant la représentation d'un entier n possible comme polynôme $P(X)$ à coefficients $\alpha_j \in \{0, 1\}$. En suivant les mêmes étapes qui nous ont amenés au théorème 3.1, mais en travaillant maintenant sur la base absolue $\mathbb{S}$, on obtient la version suivante nouvelle et simplifiée de la formule de Riemann-Roch qui fait intervenir maintenant le logarithme en base 2.

Théorème 4.2 ([14])**.** *Soit D un diviseur d'Arakelov sur $\overline{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}$. Alors*

$$\dim_{\mathbb{S}} H^0(D) - \dim_{\mathbb{S}} H^1(D) = \left\lceil \deg_2 D \right\rceil' + 1 \tag{4.3}$$

où $\lceil x \rceil'$ est la fonction continue à droite qui coïncide avec plafond(x) pour $x > 0$ non entier et avec $-$plafond$(-x)$ pour $x < 0$ non entier.

Cette version du théorème de Riemann-Roch améliore le théorème 3.1 pour les raisons suivantes :

1. Le terme $\mathbf{1}_L$ faisant intervenir l'ensemble exceptionnel L dans l'assertion originale (voir [13]) a maintenant disparu de la formule.
2. La formule (4.3) est maintenant en parfaite analogie avec le théorème de Riemann-Roch pour les courbes de genre 0.

14. une fois que l'addition est définie, le produit suit en utilisant uniquement $X^j\, X^k = X^{j+k}$

3. Le diviseur canonique $K = -2\{2\}$ a un degré entier $\deg_2(K) = -2$.

Le théorème 4.2 correspond maintenant exactement avec le texte trilingue suggéré par A. Weil, qui soutient l'analogie entre la théorie transcendantale de Riemann des fonctions algébriques d'une variable dans la première colonne, la géométrie algébrique sur les courbes sur des corps finis dans la colonne du milieu et la théorie des corps de nombres algébriques dans la troisième colonne. En effet, selon Weil

> *Mais on peut, je crois, en donner une idée imagée en disant que le mathématicien qui étudie ces problèmes, a l'impression de déchiffrer une inscription trilingue. Dans la première colonne se trouve la théorie riemannienne des fonctions algébriques au sens classique. La troisième colonne c'est la théorie arithmétique des nombres algébriques. La colonne du milieu est celle dont la découverte est la plus récente : elle contient la théorie des fonctions algébriques sur un corps de Galois. Ces textes sont l'unique source de nos connaissances sur les langues dans lesquels ils sont écrits ; de chaque colonne, nous n'avons bien entendu que des fragments ; la plus complète et celle que nous lisons le mieux, encore à présent, c'est la première. Nous savons qu'il y a de grandes différences de sens d'une colonne à l'autre, mais rien ne nous en avertit à l'avance. À l'usage, on se fait des bouts de dictionnaire, qui permettent de passer assez souvent d'une colonne à la colonne voisine.*

Dans la vision de Weil, il y a, dans la colonne du milieu (celle des corps de fonctions), une compréhension géométrique de la fonction zeta comme fonction génératrice du nombre de points de la courbe sur les extensions du corps des constantes. Dans la section 2, on traduit dans ce dictionnaire la formule de Hasse-Weil, en amenant à la première rencontre de "la courbe" **C** et l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur **C**, analogue à l'action de Galois. Le théorème 4.2 indique que le rôle du corps des constantes est joué par l'anneau de coefficients absolus $\mathbb{S}$. Puisque le semi-corps booléen $\mathbb{B}$ peut être vu comme une $\mathbb{S}$-algèbre, cette traduction suggère de faire descendre les structures du site arithmétique et du site de mise à l'échelle dont il a été question dans la section 2 de $\mathbb{B}$ à $\mathbb{S}$.

5 Anneaux de $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-polynômes

Soit $n > 0$ un entier, μ_n le groupe multiplicatif des racines n-ièmes de 1 et $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$ la $\mathbb{S}$-algèbre sphérique du monoïde (pointé) $\mu_{n,+} = \mu_n \cup \{0\}$. On rappelle que les morphismes de $\mathbb{S}$-algèbres $\mathbb{S}[\mu_{n,+}] \to HR$ correspondent (bijectivement) aux homomorphismes de groupes $\iota : \mu_n \to R^\times$ [11]. Dans cette section, on introduit la notion d'anneaux de $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-polynômes en une (Définition 5.1) et plusieurs variables (Remarque 5.2) qui peut jouer un rôle clé dans la recherche des "puissances absolues de Descartes" parmi les anneaux ordinaires. On montre que la paire (R, X) d'un anneau R et d'un $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-générateur de R est caractérisée de manière unique, à isomorphisme près, par l'application de μ_n vers les polynômes à coefficients dans le monoïde pointé $\mu_{n,+}$, qui code l'addition de 1 en éléments de μ_n.

Définition 5.1. Soit R un anneau, $\iota : \mu_n \to R^\times$ un homomorphisme injectif de groupes. Un élément $X \in R$ est un $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-générateur de R si et seulement si tout élément $z \in R$ peut s'écrire de manière unique comme un polynôme $z = \sum_j \iota(\alpha_j)\, X^j$ à coefficients $\alpha_j \in \mu_n \cup \{0\}$.

Remarque 5.2. Plus généralement, un ensemble fini $\{X_i \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$, $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-engendre R si et seulement si tout élément $z \in R$ peut s'écrire de manière unique comme un polynôme $z = \sum_j \iota(\alpha_j)\, X^j$ à coefficients $\alpha_j \in \mu_n \cup \{0\}$, où j est un multi-index $j = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathbb{N}^k$, et $X^j := \prod X_i^{j_i}$.

Soit $\mathcal{P}(\mu_n)$ le sous-ensemble de l'ensemble $\left(\mu_n \cup \{0\}\right)^{\mathbb{N}}$ de séquences avec seulement un nombre fini de termes non nuls. Soit $X \in R$, alors l'application $\sigma : \mathcal{P}(\mu_n) \to R$, donnée par

$$\sigma((\alpha_j)) := \sum_j \iota(\alpha_j)\, X^j \tag{5.3}$$

est bien définie puisque pour $\alpha = (\alpha_j) \in \mathcal{P}(\mu_n)$ la somme $\sum_j \iota(\alpha_j)\, X^j$ définit un élément de R. Il découle de la définition 5.1 que si X est un $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-générateur, l'application σ est une bijection entre $\mathcal{P}(\mu_n)$ et R.

L'exemple le plus simple d'un $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-générateur, avec $n+1$ une puissance de nombre premier q, est fourni par l'exemple suivant :

Exemple 5.4. l'anneau $R = \mathbb{F}_q[X]$ des polynômes sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ a la variable X comme $\mathbb{F}_q^{\times}$-générateur.

La proposition montre que la m-ième racine du $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-générateur X d'un anneau R est un $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-générateur de l'extension de la R-algèbre $R[Y]/(Y^m - X)$, cela fournissant par conséquent une multitude d'exemples.

Proposition 5.5. *Soit R un anneau, $\iota : \mu_n \to R^{\times}$ étant un homomorphisme injectif de groupes, $X \in R$ un $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-générateur de R et $m \in \mathbb{N}$ un entier positif. Alors $Y \in R[Y]/(Y^m - X)$ est un $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-générateur de $R[Y]/(Y^m - X)$.*

Démonstration. Tout élément z de $R[Y]/(Y^m - X)$ peut s'écrire de manière unique comme $z = \sum_{j=0}^{m-1} a_j Y^j$, avec $a_j \in R$ écrit de manière unique comme $a_j = \sum_{j,k} \iota(\alpha_{j,k})\, X^k$ où $\alpha_{j,k} \in \mu_n \cup \{0\}$. Puisque $Y^m = X$, on obtient l'unique décomposition finie

$$z = \sum_{j,k} \iota(\alpha_{j,k}) Y^{j+mk}, \qquad \alpha_{j,k} \in \mu_n \cup \{0\}.$$

$\square$

L'exemple suivant est une généralisation évidente du fait que 3 est un $\mathbb{S}[\pm 1] = \mathbb{S}[\mu_{2,+}]$-générateur de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers.

Exemple 5.6. Soit $m \in \mathbb{N}$ un entier positif, et $\epsilon = \pm 1$. Alors $X = (3\epsilon)^{1/m}$ est un $\mathbb{S}[\pm 1]$-générateur du sous-anneau $R = \mathbb{Z}[X]$ du corps de nombres $\mathbb{Q}((3\epsilon)^{1/m})$.
En effet, le polynôme $X^m - 3\epsilon$ est irréductible, donc tout élément $z \in R$ peut être écrit de manière unique comme une somme

$$z = \sum_{j=0}^{m-1} a_j X^j, \qquad a_j \in \mathbb{Z}.$$

En retour, tout a_j peut s'écrire de manière unique comme $a_j = \sum_{j,k} \alpha_{j,k}\, (3\epsilon)^k$, où $\alpha_{j,k} \in \{-1, 0, 1\}$. Puisque $3\epsilon = X^m$, on obtient la décomposition unique

$$z = \sum_{j,k} \alpha_{j,k} X^{j+mk}, \qquad \alpha_{j,k} \in \{-1, 0, 1\}.$$

Un cas intéressant est celui de $m = 2$ et $\epsilon = -1$ puisqu'alors, l'anneau $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ est un ordre de l'anneau des entiers du corps imaginaire quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Notons que dans l'exemple 5.6, l'addition est spécifiée par une égalité de la forme suivante

$$1+1=P(X), \qquad P(X)=\sum_j \alpha_j\, X^j, \qquad \alpha_j \in \{-1,0,1\}, \tag{5.7}$$

avec $P(X)=\epsilon\, X^m-1$. Une présentation algébrique simple de la forme (5.7) est vérifiée quand on travaille sur $\mu_{n,+}$ pour $n=1,2$.

Le résultat suivant établit l'unicité d'une présentation polynomiale similaire dans le cas général.

Proposition 5.8. *Soit R un anneau, $\iota : \mu_n \to R^\times$ un homomorphisme injectif de groupes, $X \in R$ un $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$-générateur de R. Pour une décomposition polynomiale $z=\sum_j \iota(\alpha_j)\, X^j \in R$, soit* $\deg(z)$ *le plus petit entier m tel que $\alpha_j=0$ pour tout $j>m$. Alors, on a le résultat suivant*

> *(i) Soit $m \in \mathbb{N}$, et $J_m=\langle X^m\rangle \subset R$ l'idéal engendré par X^m. Tout élément $z \in R$ admet une unique décomposition additive $z=a+b$ où* $\deg(a)<m$ *et $b \in J_m$.*
>
> *(ii) Le quotient $R_m := R/J_m$ est un anneau fini dont les éléments s'écrivent de manière unique comme $\sum_{j=0}^{m-1} \iota(\alpha_j)\, X^j$, avec $\alpha_j \in \mu_{n,+}=\mu_n \cup \{0\}$.*
>
> *(iii) Le quotient $R_1 := R/J_1$ est un corps fini avec $n+1$ éléments et $\iota : \mu_{n,+} \to R$ est une section multiplicative de l'application quotient $R \to R_1$.*
>
> *(iv) L'homomorphisme canonique d'anneaux $\pi : R \to \varprojlim R_m$ est injectif.*
>
> *(v) La paire (R,X) est spécifiée de manière unique, à isomorphisme près, par l'application $h : \mu_n \to \mathcal{P}(\mu_n)$ qui est définie de manière unique par l'égalité $\sigma(h(\xi))=\iota(\xi)+1$.*

Démonstration. (i) Soit $z=\sum_j \iota(\alpha_j)\, X^j$. En écrivant z comme

$$z=\sum_{j=0}^{m-1} \iota(\alpha_j)\, X^j+\sum_{j=m}^{\deg(z)} \iota(\alpha_j)\, X^j=a+X^m c \tag{5.9}$$

on obtient la décomposition requise avec $b=X^m\, c$. L'unicité d'une telle décomposition découle alors de l'unicité de la décomposition comme dans la définition 5.1.
(ii) découle de (i). En particulier, on vérifie aisément que R_m a pour cardinalité $\#(R_m)=(n+1)^m$.
(iii) Par construction, l'application $\iota : \mu_{n,+} \to R$ est une section multiplicative de l'application quotient $R \to R_1$. Il découle de cela que les éléments non nuls de R_1 forment le groupe multiplicatif μ_n de telle façon que R_1 est un corps à $n+1$ éléments.
(iv) Les composants de $z=\sum_j \iota(\alpha_j)\, X^j \in R$ sont déterminés de manière unique par $\pi(x)$.
(v) Soit (R',X') une seconde paire correspondant à la même application $h : \mu_n \to \mathcal{P}(\mu_n)$. Soit $\rho : R \to R'$ l'application bijective définie par

$$\rho\Big(\sum_j \iota(\alpha_j)\, X^j\Big) := \sum_j \iota'(\alpha_j)\, X'^j, \qquad \alpha_j \in \mu_n \cup \{0\}.$$

On a par construction

$$\deg(a)<m \implies \rho(a+X^m b)=\rho(a)+(X')^m \rho(b), \qquad \forall b. \tag{5.10}$$

En particulier, on a également $\rho(J_m)=J'_m$ pour tout m. Par conséquent, ρ induit une bijection $\rho_m : R_m \to R'_m$. Par (iii), pour montrer que ρ est un homomorphisme d'anneaux, il suffit de vérifier que chaque ρ_m est un

homomorphisme d'anneaux.
Pour montrer que ρ_m est additif, il suffit de montrer qu'on peut calculer tous les termes d'une somme

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j X^j + \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j X^j = \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j X^j \tag{5.11}$$

en utilisant seulement l'application $h : \mu_n \to \mathcal{P}(\mu_n)$. Pour faire cela, on détermine d'abord une application F de l'ensemble des k-tuples d'éléments de $\mu_{n,+}$ vers l'ensemble des paires (x, Z) où $x \in \mu_{n,+}$ et où Z est un $(k-1)$-tuple d'éléments de $\mathcal{P}(\mu_n)$. L'application h détermine de manière unique une application symétrique

$$H : \mu_{n,+} \times \mu_{n,+} \to \mu_{n,+} \times \mathcal{P}(\mu_n), \quad H(\xi, \eta) = (\xi + \eta, 0) \ \text{ si } \ \xi\,\eta = 0$$
$$H(\xi, \eta) = (H_0(\xi, \eta), P(\xi, \eta)), \quad H_0(\xi, \eta) + X\,P(\xi, \eta) = \eta\, h(\xi\,\eta^{-1}) \text{ si } \ \eta \neq 0 \tag{5.12}$$

Pour définir F, on procède par induction sur k. Pour $k = 1$, on pose $F(x) = x$. Pour $k = 2$, on pose $F_2 = H$. On dénote les deux composantes de $F_k : \mu_{n,+}^{k-1} \times \mu_{n,+} \to \mu_{n,+} \times \mathcal{P}(\mu_n)^{k-1}$ par $F_k^{(1)}$ et $F_k^{(2)}$. Pour passer de $k-1$ à k, on pose

$$F_k^{(1)}(\alpha, \eta) := (H_0(F_{k-1}^{(1)}(\alpha), \eta), \quad F_k^{(2)}(\alpha, \eta) := (F_{k-1}^{(2)}(\alpha), P(F_{k-1}^{(1)}(\alpha), \eta))$$

où dans la dernière expression, on concatène le polynôme $P(F_{k-1}^{(1)}(\alpha), \eta)$ à la liste $F_{k-1}^{(2)}(\alpha)$, en obtenant ainsi une liste de $k-1$ polynômes.
Pour calculer les composants γ_j de la somme (5.11), on construit par induction sur k, deux listes. La première $R(k)$ est la liste des coefficients déjà calculés et c'est la seule liste donnée par $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1})$. La seconde $C(k)$, (appelée la retenue), est la liste des polynômes à coefficients dans $\mu_{n,+}$ et elle est codée comme la liste de leurs coefficients. Chaque telle liste ℓ de coefficients a $m-k$ termes, tous dans $\mu_{n,+}$. On dénote par $f(\ell) \in \mu_{n,+}$ le premier terme de la liste ℓ et par $t(\ell)$ la liste obtenue en éliminant le premier élément de la liste ℓ, elle a $m-k-1$ termes. L'étape pour obtenir $R(k+1), C(k+1)$ à partir de $\alpha, \beta, R(k), C(k)$ est

$$R(k+1) := F^{(1)}(\alpha_k, \beta_k, (f(\ell))_{\ell \in C(k)})$$

et

$$C(k+1) := (t(\ell))_{\ell \in C(k)}, F^{(2)}(\alpha_k, \beta_k, (f(\ell))_{\ell \in C(k)})$$

quand on remplace chaque élément de $F^{(2)}(\alpha_k, \beta_k, (f(\ell))_{\ell \in C(k)})$ par la liste de ses $m-k$ premiers coefficients. Plus concrètement, on obtient d'abord $\gamma_0 = F_2^{(1)}(\alpha_0, \beta_0)$ où la retenue supérieure fournit le polynôme $P(\alpha_0, \beta_0) = F_2^{(2)}(\alpha_0, \beta_0)$. Ainsi $R(1) = (\gamma_0)$, $C(1)$ a un élément qui est la liste des $m-1$ premiers coefficients de $P(\alpha_0, \beta_0)$. On coupe alors les éléments α, β et on considère la somme

$$\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j X^j + \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j X^j + X\,P(\alpha_0, \beta_0) \tag{5.13}$$

Tous les termes dans (5.13) sont divisibles par X et on peut utiliser F_3 pour calculer la somme des trois termes α_1, β_1, p_0 où p_0 est le terme constant de $P(\alpha_0, \beta_0)$. Cette opération livre le prochain terme

$$\gamma_1 = F_3^{(1)}(\alpha_1, \beta_1, p_0)$$

de (5.11), et adjoint les deux polynômes de la liste $F_3^{(2)}(\alpha_1, \beta_1, p_0)$ à la liste des retenues constituée du seul polynôme $P(\alpha_0, \beta_0)$ avec son premier terme p_0 effacé. La liste des retenues est constituée maintenant de trois termes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. On utilise alors F_5 pour calculer la somme des 5 termes : α_2, β_2 et des trois termes $f(\ell_1), f(\ell_2), f(\ell_3)$ de la retenue. Cela ajoute 4 termes à la liste de retenues qui a maintenant 7 termes, dont les trois premiers ont été coupés en effaçant leur terme le plus bas. Après k telles opérations, la retenue a $2^k - 1$ éléments et on procède comme suit. On utilise F_{2^k+1} pour calculer la somme des $2^k + 1$ termes donnée par α_k, β_k ensemble avec les termes $f(\ell)$ de la liste des retenues. Cette opération fournit γ_k et adjoint 2^k termes à la liste de retenues qui est constituée maintenant de $2^{k+1} - 1$ termes. Ce processus s'arrête quand $k = m$ et $R(m)$ fournit les formules universelles pour les termes γ_j, $0 \le j \le m-1$ en utilisant seulement α, β et l'application h.

Le fait que les coefficients γ_j puissent être calculés en utilisant seulement α, β et l'application h prouve que ρ est additive puisqu'on peut utiliser la même formule pour calculer $\alpha + \beta$ dans R_m et $\rho_m(\alpha) + \rho_m(\beta)$ dans R'_m. La multiplicativité de ρ découle par bilinéarité de $\rho(\alpha X^n \times \beta X^m) = \rho(\alpha X^n)\rho(\beta X^m)$. Cela montre que $\rho : R \to R'$ est un isomorphisme d'anneaux et par construction, on a $\rho(X) = X'$. □

Définition 5.14. L'application

$$h : \mu_n \to \mathcal{P}(\mu_n), \qquad \sigma(h(\xi)) = \iota(\xi) + 1 \tag{5.15}$$

qui caractérise la paire (R, X) (par la proposition 5.8) est appelé la *clé* de la paire (R, X).

Corollaire 5.16. *Soit n tel qu'il existe un anneau de polynômes à un générateur sur $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$, alors $n+1$ est une puissance de nombre premier.*

Démonstration. Cela découle de la proposition 5.8 (iii). □

Remarque 5.17. La preuve de la proposition 5.8 (v) est établie de telle façon que l'on puisse, en la suivant, écrire un programme d'ordinateur qui pourrait être utilisé pour tester la structure additive de l'anneau R_m. Il sera pertinent dans la section 6 de déterminer dans les divers exemples les anneaux R_m.
L'application $h : \mu_n \to \mathcal{P}(\mu_n)$ de (5.15) détermine l'addition $H : \mu_{n,+} \times \mu_{n,+} \to \mu_{n,+} \times \mathcal{P}(\mu_n)$, (5.12), de paires d'éléments de $\mu_{n,+}$ en utilisant la compatibilité avec la multiplication par des éléments de μ_n.
La proposition 5.8 montre qu'une paire (R, X), où X est un $\mathbb{S}[\pm 1]$-générateur de R, *i.e.* $n = 2$, est caractérisée de manière unique par le polynôme $P(X)$ comme dans (5.7). Le polynôme $P(X) = -1$ produit la paire $(\mathbb{F}_3[X], X)$, alors que $P(X) = X - 1$ détermine la paire $(\mathbb{Z}, 3)$.
Quand $n = 2$, le terme constant du polynôme $P(X)$ dans (5.7) est nécessairement égal à -1. En effet, si le terme constant était 0 ou 1, cela contredirait l'unicité de la décomposition de la définition 5.1 par l'égalité $1 = P(X) - 1$. Cela montre également que $R_1 = \mathbb{F}_3$.

Remarque 5.18. Il n'est pas vrai qu'un choix aléatoire de polynôme avec coefficients dans $\mathbb{S}[\pm 1]$ et coefficient constant -1 correspond à une paire. Il y a un cas simple avec $P(X) = -1 + X + X^2$. En effet, dans les lignes ci-après, on montre que 5 n'est représenté par aucun polynôme. Avec cette règle, on a $1 + 1 + 1 + 1 = 1 + X + X^2$. Ajouter 1 aux deux côtés donne

$$\begin{aligned} &1+1+1+1+1 = -1 + X + X^2 + X + X^2 = -1 + X(-1 + X + X^2) + X^2(-1 + X + \\ &+ X^2) = -1 - X + X^3 + X^3 + X^4 = -1 - X + X^3(-1 + X + X^2) + X^4 = \\ &= -1 - X - X^3 + X^4 + X^4 + X^5. \end{aligned}$$

Alors, quand on travaille dans R_n (*i.e.* modulo X^n), le nombre 5 est représenté par

$$5 = -1 - X - X^3 - X^4 - X^5 - \cdots - X^{n-1} \in R_n$$

et cette expression est de degré $n-1$ pour tout n et ainsi, elle ne correspond pas à une somme finie de puissances de X.

6 Exemples

Dans cette section, on fournit des exemples d'anneaux de polynômes (R, X) à un générateur X sur $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$ où R est de caractéristique zéro. L'anneau R est plongé comme sous-anneau de $\mathbb{C}$ en résolvant pour $X \in \mathbb{C}$ les équations $\sigma(h(\xi)) = \iota(\xi) + 1$, $\xi \in \mu_n$, en utilisant l'intégration canonique $\mu_{n,+} \subset \mathbb{C}$. La limite projective $\varprojlim R_n$ est, dans ces exemples, une extension finie de l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$. Alors qu'on peut utiliser l'axiome du choix pour montrer l'existence d'un plongement du corps p-adique $\mathbb{Q}_p$ dans le corps des nombres complexes, de tels plongements ont le statut de chimères. En effet, la continuité des caractères mesurables des groupes compacts appliquée au groupe additif $\mathbb{Z}_p$ montre qu'un plongement du corps p-adique $\mathbb{Q}_p$ dans le corps des nombres complexes est automatiquement non mesurable. D'un autre côté, les exemples suivants montreront que les anneaux de polynômes (R, X) à un générateur X sur $\mathbb{S}[\mu_{n,+}]$ fournissent des instances d'interactions explicites des corps p-adiques (et de leurs extensions finies) avec les nombres complexes. Ces interactions sont données par paires de plongements avec domaines denses

$$\mathbb{F}_q \overset{\pi}{\twoheadleftarrow} W(\mathbb{F}_q) \hookrightarrow W(\mathbb{F}_q)[\eta] \hookleftarrow R[X^{-1}] \hookrightarrow \mathbb{C}$$

de l'anneau des polynômes de Laurent $R[X^{-1}]$. Le plongement gauche dans le diagramme ci-dessus est dans une extension algébrique finie $W(\mathbb{F}_q)[\eta]$ de l'anneau de Witt $W(\mathbb{F}_q)$. L'anneau des fractions de l'anneau $W(\mathbb{F}_q)[\eta]$ est une extension finie du corps p-adique. La plupart de ces exemples viennent de systèmes de numération connus et ont leur origine dans la recherche de manières optimales de coder les nombres [20]. Dans chaque cas, le quotient $R_1 = R/(XR)$ est le corps fini $\mathbb{F}_q$, $q = n+1$, et l'isomorphisme entre semi-groupes multiplicatifs $j : \mathbb{F}_q \sim \mu_{n,+} \subset \mathbb{C}$ sert de guide, en utilisant l'addition dans le corps fini $\mathbb{F}_q$, pour les termes de degré 0 dans la construction de l'application h. Notons que le choix de j pour $\overline{\mathbb{F}}_q$ joue un rôle clé dans la construction par Quillen [27] de la relation entre la K-théorie algébrique de $\mathbb{F}_q$ et les opérations de Adams.

6.1 Anneaux de polynômes à un générateur sur $\mathbb{S} = \mathbb{S}[\mu_{1,+}]$

Quand on travaille sur $\mathbb{S} = \mathbb{S}[\mu_{1,+}]$, il n'y a pas d'annulation puisqu'il n'y a pas de signe moins. Ainsi, à partir des deux éléments non nuls x, y, l'égalité $x + y = 0$ peut seulement être vérifiée dans la limite projective $\varprojlim R_m$. On calcule cette limite projective dans les prochains exemples.

6.1.1 L'anneau polynomial $(\mathbb{Z}, -2)$

L'anneau $\mathbb{Z}$ admet le générateur $X = -2$ sur $\mathbb{S}$. La clé est donnée par $1 + 1 = P(X) = X + X^2$. Les valeurs des polynômes de degré n, en $X = -2$ sont reportées pour les premières valeurs de n dans la table suivante

n	$\{p(-2) : \deg p = n\}$
0	$[0, 1] \cap \mathbb{Z}$
1	$[-2, -1] \cap \mathbb{Z}$
2	$[2, 5] \cap \mathbb{Z}$
3	$[-10, -3] \cap \mathbb{Z}$
4	$[6, 21] \cap \mathbb{Z}$
5	$[-42, -11] \cap \mathbb{Z}$
6	$[22, 85] \cap \mathbb{Z}$

Voyons, par exemple, le calcul de $1 + 1 + X$. On obtient

$$1 + 1 + X = X + X^2 + X = X(1 + 1 + X)$$

et en itérant cette étape, on obtient que $1 + 1 + X \in J_m = \langle X^m \rangle R$, $\forall m$. Cela montre que $1 + 1 + X = 0$ dans $\varprojlim R_m$. Ensuite, on relie le degré du polynôme $p(X)$ à la valeur absolue de l'entier $p(-2)$. Posons

$$j(n) := \frac{1}{3}(-2)^n - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{6} \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Le degré n d'un polynôme $p(X)$ à coefficients dans $\{0, 1\}$ spécifie le signe de l'entier $p(-2)$ comme étant $(-1)^n$ et fournit des limites inférieure et supérieure sur le module $|p(-2)|$ comme suit

$$|j(n-1)| < |p(-2)| \leq |j(n+1)|.$$

Étant donné un entier $m \in \mathbb{Z}$, la première inégalité fournit la limite suivante, sur le degré du polynôme p tel que $p(-2) = m$

$$\deg(p) \leq \log_2(3|m| + 2) + 1.$$

La limite projective $\varprojlim R_m$ est ici l'anneau $\mathbb{Z}_2$ des entiers 2-adiques, et les éléments de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_2$ sont caractérisés par le fait que leur séquence de chiffres est éventuellement constante.

Ensuite, voyons les corps quadratiques pour lesquels l'étude des systèmes de numération dans [18, 19] fournit une liste exhaustive d'exemples. On déduit aisément de *op.cit.* ce qui suit

Proposition 6.2. *Les corps quadratiques K dont l'anneau des entiers admet un $\mathbb{S}$-générateur sont*

- $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ *avec le générateur* $X = -1 + \sqrt{-1}$ *de l'anneau* $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ *des entiers de* K.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ *avec le générateur* $X = \sqrt{-2}$ *de l'anneau* $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ *des entiers de* K.
- $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ *avec le générateur* $X = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{-7}\right)$ *de l'anneau des entiers de* K.

Démonstration. La norme $N(\alpha)$ d'un $\mathbb{S}$-générateur est égale à 2, par conséquent, l'ensemble $N_0(\alpha) := \{0, \ldots, N(\alpha) - 1\}$ définissant un système de numération canonique au sens de [18, 19] est $\{0, 1\}$ et le résultat découle du théorème 1 de [19] dans le cas complexe et de la première phrase de [18] dans le cas réel. $\square$

6.1.2 L'anneau de polynômes $(\mathbb{Z}[i], -1+i)$

Ici, on considère l'anneau $R = \mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss (parfois appelés binarions ; voir [22]) avec $X = -1+i$ comme $\mathbb{S}[\mu_{1,+}] = \mathbb{S}$-générateur. En effet, tout entier de Gauss peut s'écrire de manière unique comme une somme finie de puissances de X ([16, 28] et Figure 2). On a l'égalité $1+1 = P(X) = X^2 + X^3$, qui nous permet de calculer la somme de toute paire de polynômes à coefficients dans $\{0,1\}$.

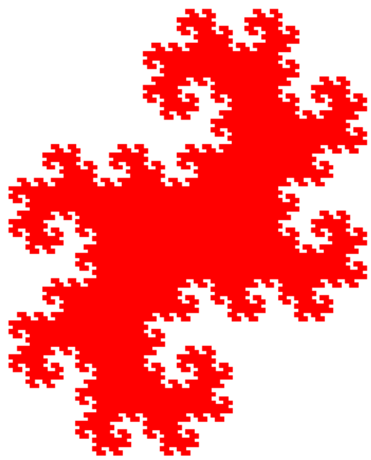


FIG. 2 : Entiers de Gauss comme $\mathbb{S}$-polynômes de degré ≤ 12

Proposition 6.3. *Soit $R = \mathbb{Z}[i]$, $X = -1+i$.*
(i) L'idéal de $R = \mathbb{Z}[i]$ engendré par X^2 est le même que l'idéal engendré par 2.
(ii) L'anneau R_m pour $m = 2k$ est $\mathbb{Z}/(2^k\mathbb{Z})[X]$ où $X^2 = -2-2X$.
(iii) L'anneau R_m pour $m = 2k+1$ est $\mathbb{Z}/(2^{k+1}\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}/(2^k\mathbb{Z})\, X$ où $X^2 = -2-2X$.
(iv) La limite projective $\varprojlim R_m$ est l'anneau $\mathbb{Z}_2[i] \sim \mathbb{Z}_2[X]$ où $X^2 = -2-2X$.

Démonstration. (i) L'élément $U = (1+X) \in R$ est une unité puisque $U^4 = 1$ et on a

$$X^2 = -2-2X \in 2R, \quad 2 = -(1+X)^{-1}X^2 \in X^2R$$

(ii) Par (i), l'idéal $X^{2k}R$ est égal à 2^kR. On a $R = \mathbb{Z}[i]$ et $R/(2^kR) = \mathbb{Z}/(2^k\mathbb{Z})[i] = \mathbb{Z}/(2^k\mathbb{Z})[X]$ avec $X^2 = -2-2X$, ainsi on obtient (ii).
(iii) Posons $m = 2k+1$. Tout élément de R est de la forme $z = a + bX$ où $a, b \in \mathbb{Z}$. Dans R, on a $2^{k+1} \in X^{2k+2}R \subset J_m$ et $2^kX \in X^{2k+1}R = J_m$. Ainsi l'homomorphisme $\mathbb{Z}[X] \to R_m$ induit un homomorphisme surjectif de $\mathbb{Z}/(2^{k+1}\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}/(2^k\mathbb{Z})\, X$ vers R_m. Il est bijectif puisque les cardinaux sont égaux.
(iv) L'extension $\mathbb{Q}_2[i]$ est totalement ramifiée d'indice $e = 2$ (voir [28], 4.2). Le polynôme X^2+2X+2 est un polynôme de Eisenstein qui définit $\mathbb{Q}_2[i]$ comme son corps de séparation. La valuation de X est la moitié de la valuation de 2. $\square$

6.1.3 L'anneau de polynômes $\left(\mathbb{Z}[\sqrt{-2}], \sqrt{-2}\right)$

L'élément $X := \sqrt{-2}$ est un $\mathbb{S}[\mu_{1,+}] = \mathbb{S}$-générateur de l'anneau des entiers $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$. Cela découle directement de §6.1.1 et de la proposition 5.5. La clé est fournie par le polynôme $P(X) = X^4 + X^2$. Un analogue évident de la proposition 6.3 est vérifié.

6.1.4 L'anneau de polynômes $\left(\mathcal{O}(\mathbb{Q}(\sqrt{-7})), \frac{1}{2}(1+\sqrt{-7})\right)$

L'élément $X := \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-7}\right)$ est un $\mathbb{S}[\mu_{1,+}] = \mathbb{S}$-générateur de l'anneau $\mathcal{O}(\mathbb{Q}(\sqrt{-7}))$ d'entiers du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. La clé est donnée par le polynôme $P(X) = X^3 + X$. Soit F le domaine fondamental de $\mathcal{O}(\mathbb{Q}(\sqrt{-7}))$ donné par le parallélogramme de sommets $0, 1, X, X+1$. La figure 3 montre le voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ obtenu comme l'union des translations $F + p(X)$ par les polynômes $p(X)$ de degré ≤ 11.

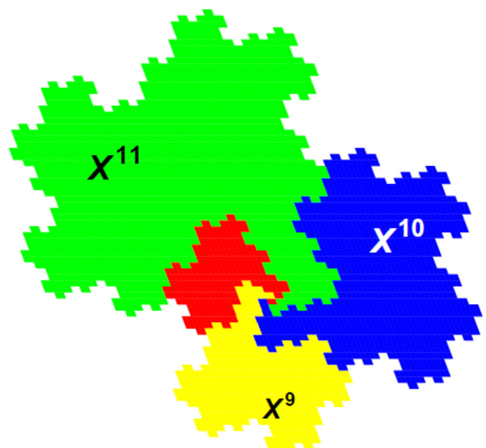


FIG. 3 : Polynômes de degré ≤ 11 pour $X = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-7}\right)$

Proposition 6.4. *Soit $R = \mathcal{O}(\mathbb{Q}(\sqrt{-7}))$, $X = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-7}\right)$.*
(i) *L'anneau R_m est $\mathbb{Z}/(2^m\mathbb{Z})$.*
(ii) *La limite projective $\varprojlim R_m$ est l'anneau $\mathbb{Z}_2$.*
(iii) *L'élément $X \in \varprojlim R_m = \mathbb{Z}_2$ est la seule solution divisible par 2 dans l'anneau $\mathbb{Z}_2$ pour l'équation $2 + X + X^2 = 0$.*

Démonstration. La clé est donnée par $P(X) = X^3 + X$ et on a $P(X) - 2 = (X-1)\left(X^2 + X + 2\right)$. Par le lemme de Hensel, l'équation $2 + X + X^2 = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{Z}_2$ de la forme $\alpha = 1 + 2\epsilon$ et une solution unique de la forme $\beta = 2(1 + 2\epsilon')$. En fait, on a $\alpha\beta = 2$ et $\alpha + \beta = -1$. L'homomorphisme $\rho : \mathbb{Z}[\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-7}\right)] \to \mathbb{Z}_2$ donné par $\rho\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-7}\right)\right) = \beta$ est bien défini puisque β est une solution de l'équation $2 + X + X^2 = 0$. De plus, β est le produit de 2 par une unité de $\mathbb{Z}_2$ (mais cela échoue dans $R = \mathcal{O}(\mathbb{Q}(\sqrt{-7}))$). La projection X_m de β dans $\mathbb{Z}_2/(2^m\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}/(2^m\mathbb{Z})$ respecte la contrainte $P(X_m) = 2$ et X_m est le produit de 2 par une unité. Ainsi, les idéaux engendrés par les puissances de X_m sont les mêmes que ceux engendrés par les puissances de 2. Cela prouve les trois assertions (i), (ii), (iii). □

6.2 Anneaux de polynômes à un générateur sur $\mathbb{S}[\pm 1]$

6.2.1 L'anneau de polynômes $(\mathbb{Z}, 3)$

Le cas du $\mathbb{S}[\pm 1]$-générateur $3 \in \mathbb{Z}$ est particulièrement pertinent parce que, comme cela a été montré dans [13], l'addition coïncide avec celle des vecteurs de Witt dans $W(\mathbb{F}_3) = \mathbb{Z}_3$.

Proposition 6.5. *Soit $R = \mathbb{Z}$, $X = 3$ est un $\mathbb{S}[\pm 1]$-générateur de R. La clé est $P(X) = -1 + X$.*
(i) L'anneau R_m est $\mathbb{Z}/(3^m\mathbb{Z})$.
(ii) La limite projective $\varprojlim R_m$ est l'anneau $W(\mathbb{F}_3) = \mathbb{Z}_3$.
(iii) L'ensemble des vecteurs de Witt avec seulement un nombre fini de composants non nuls forme un sous-anneau de $W(\mathbb{F}_3)$ isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Pour organiser les prochains exemples, on donne la liste des extensions des corps quadratiques imaginaires de $\mathbb{Q}$ engendrées par les anneaux de $\mathbb{S}[\pm 1]$-polynômes en une variable.

Proposition 6.6. *Les corps quadratiques imaginaires K engendrés par les anneaux de $\mathbb{S}[\pm 1]$-polynômes en une variable sont*

- $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ *avec générateur $X = 1 + \sqrt{-2}$ de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ des entiers de K.*
- $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ *avec générateur $X = \sqrt{-3}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ (domaine qui n'est pas à factorisation unique).*
- $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ *avec générateur $X = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-11})$ de l'anneau des entiers de K.*

Démonstration. Soit $P(X) = -1 + \sum_{j=1}^{n-1} a(j)X^j + \epsilon X^n$, $\epsilon \in \{\pm 1\}$, $a(j) \in \{-1, 0, 1\}$, la retenue amenant à une extension quadratique imaginaire. Les racines du polynôme $P(X) - 2$ sont des entiers algébriques, et on suppose que l'un d'entre eux, disons α, est imaginaire quadratique. Soit $q(x) = x^2 - bx + c$ son polynôme minimal. Il a des coefficients entiers de telle façon que $b, c \in \mathbb{Z}$, et par définition, il divise $P(X) - 2$. Le coefficient constant c doit être égal à 3. En effet, il divise le coefficient constant -3 de $P(X) - 2$ et puisque $b^2 - 4c < 0$ il est positif. Il ne peut pas être égal à 1 parce que dans ce cas, on obtiendrait $b \in \{-1, 0, 1\}$, et $\alpha \in \{i, j, -j\}$ ce qui contredit l'injectivité de l'application σ. Pour $c = 3$, les valeurs possibles de b sont $b = 0$ qui donne la solution $\alpha = \sqrt{-3}$, $b = \pm 1$ qui donne les solutions $\alpha = \frac{1}{2}\left(\pm 1 \pm i\sqrt{11}\right)$, $b = \pm 2$ qui donne les solutions $\alpha = \pm 1 \pm i\sqrt{2}$, et finalement $b = \pm 3$. On va maintenant montrer que ce dernier choix qui donne $\alpha = \frac{1}{2}\left(\pm 3 \pm i\sqrt{3}\right)$ ne donne pas de solution. Pour prouver cela, il suffit de montrer que le polynôme $3 + 3X + X^2$ ne peut diviser un polynôme $P(X) - 2$ avec P de la forme ci-dessus. On suppose par conséquent une égalité de la forme

$$(3 + 3X + X^2)\left(\sum_{j=0}^{n-2} b(j)X^j\right) = -3 + \sum_{j=1}^{n-1} a(j)X^j + \epsilon X^n,\ \epsilon \in \{\pm 1\},\ a(j) \in \{-1, 0, 1\}$$

Puisque les coefficients de $P - 2$ sont entiers et puisque le coefficient principal de $3 + 3X + X^2$ est 1, les coefficients $b(j)$ sont des entiers. On obtient $b(0) = -1$, $3b(1) - 3 = a(1)$, mais $a(1) \in \{-1, 0, 1\}$ et ainsi, en travaillant modulo 3, on obtient $a(1) = 0$ et par conséquent $b(1) = 1$. En considérant le coefficient de X^2, on obtient $3b(1) + 3b(2) - 1 = a(2)$ qui donne $a(2) = -1$ et $b(2) = -b(1) = -1$. On peut maintenant procéder par induction pour montrer que $b(j) = (-1)^{j+1}$. En effet, le coefficient of X^j est $b(j - 2) + 3b(j - 1) + 3b(j) = a(j)$ et si on sait que $b(j - 2) = (-1)^{j-1}$ et $b(j - 1) = (-1)^j$, on obtient $a(j) = b(j - 2)$ et $3b(j - 1) + 3b(j) = 0$ de telle façon que $b(j) = (-1)^{j+1}$. Cela fonctionne pour $j \leq n - 2$. Le coefficient de X^{n-1} est $b(n - 3) + 3b(n - 2) = a(n - 1)$ et cela aboutit à une contradiction puisqu'on obtient $a(n - 1) = b(n - 3)$ (en travaillant modulo 3) ce qui contredit le fait que $b(n - 2) \neq 0$. □

6.2.2 L'anneau de polynômes $(\mathcal{O}(\mathbb{Q}[\sqrt{-11}]), \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-11}\right))$

Cette section est destinée à fournir une preuve détaillée de ce que $X := \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-11}\right)$ est un $\mathbb{S}[\pm 1]$-générateur de l'anneau des entiers du corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. La raison pour laquelle les détails de la preuve sont fournis est que nous souhaitons insister sur le fait que dans un tel cas, et contrairement au cas où l'on travaille sur $\mathbb{S}$, on peut explicitement contrôler les annulations dans les calculs.

Proposition 6.7. *Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers du corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$.*
(i) $X := \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-11}\right)$ est un $\mathbb{S}[\pm 1]$-générateur de $\mathcal{O}$. La clé de $(\mathcal{O}, X)$ est $P(X) = -1 + X - X^2$.
(ii) La limite projective $\varprojlim R_m$ est l'anneau $W(\mathbb{F}_3) = \mathbb{Z}_3$.

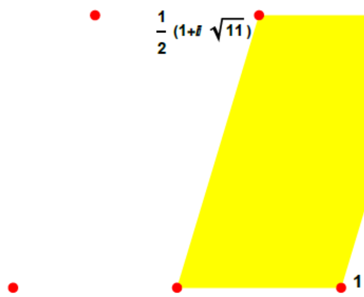
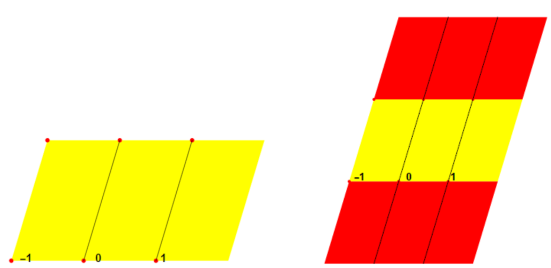


FIG. 4 : Domaine fondamental du réseau $\mathcal{O}$

La preuve nécessite un lemme préliminaire. On rappelle d'abord quelques résultats classiques concernant l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ du corps quadratique imaginaire $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Le discriminant de K est $d = -11$. Ainsi, comme $-11 \sim 1$ modulo 4, le réseau $\mathcal{O}$ est $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}X$ où $X := \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{-11}\right)$. Par construction on a

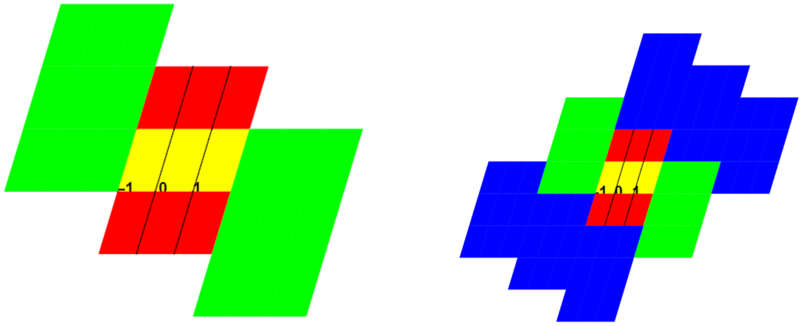
$$1 + 1 = P(X), \qquad P(X) = -1 + X - X^2. \tag{6.8}$$

On veut montrer que tout élément $z \in \mathcal{O}$ peut s'écrire de manière unique comme un polynôme $z = \sum_j \alpha_j X^j$, avec $\alpha_j \in \{-1, 0, 1\}$. La figure 5 montre le translaté du domaine fondamental du réseau, alors que les figures suivantes fournissent une esquisse de quelques étapes du processus de représentation des éléments de $\mathcal{O}$ en fonction des polynômes de degré $\leq n$, montrant ceux décrits par des polynômes de degré $= n$ avec une nouvelle couleur.



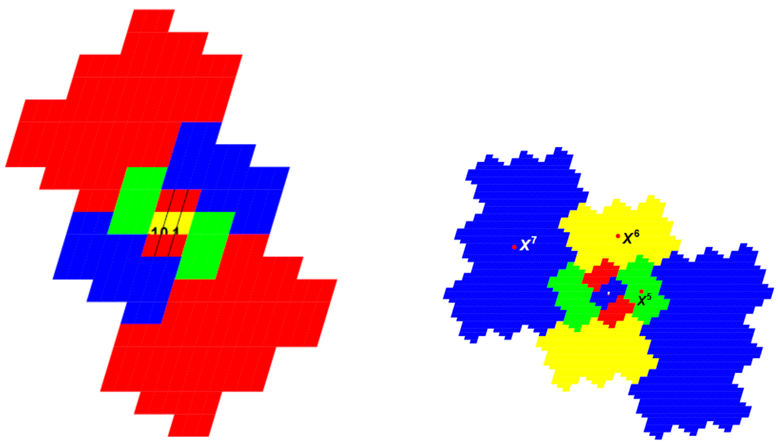
Première étape, polynômes de degré 0 Seconde étape, polynômes de degré ≤ 1

FIG. 5 : Les deux premières étapes



Etape 3, polyn. de deg. ≤ 2 Etape 4, polyn. de deg. ≤ 3

FIG. 6 : Les troisième et quatrième étapes



Etape 5, polyn. de deg. ≤ 4 Etape 8, polyn. de deg. ≤ 7

FIG. 7 : Les cinquième et huitième étapes

En comparant les figures 5 (gauche et droite), 6 (gauche et droite), 7 (gauche et droite), on remarque que la translation $z \mapsto z+1$ n'augmente pas le degré du polynôme de plus de 2 unités. Le prochain lemme fournit une preuve formelle de ce fait.

Lemme 6.9. *Let* $z = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j X^j \in \mathcal{O}$, $\alpha_j \in \{-1, 0, 1\}$. *Alors il existe des coefficients* $\beta_j \in \{-1, 0, 1\}$, *avec* $0 \leq j \leq n+2$, *tels que* $z+1 = \sum_{j=0}^{n+2} \beta_j X^j$.

Démonstration. On procède par induction sur l'entier n. Pour $n = 0$, le résultat découle de (6.8). Supposons que le résultat est prouvé jusqu'à $n-1$, alors il existe des coefficients $\gamma_j \in \{-1, 0, 1\}$ tels que

$$z = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j\right) + \alpha_n X^n \implies z+1 = \left(\sum_{j=0}^{n+1} \gamma_j X^j\right) + \alpha_n X^n.$$

Considérons une somme telle que $\gamma_n X^n + \gamma_{n+1} X^{n+1} + \alpha_n X^n$ et exprimons-la sans aller au-delà de X^{n+2}. Si $\gamma_{n+1} = 0$, cela découle à nouveau de (6.8). On peut alors supposer que $\gamma_{n+1} = \pm 1$ et également qu'à la fois γ_n et α_n sont non nuls et égaux puisque sinon, la somme $\gamma_n X^n + \alpha_n X^n$ aurait un degré d'au plus n. Le seul cas à exclure alors est quand γ_n, α_n, et γ_{n+1} sont tous égaux (et non nuls), puisque seulement dans ce cas, on obtient un terme en X^{n+3} à partir de la somme

$$X^n + X^n + X^{n+1} = X^n(1 + 1 + X) = X^n(-1 + X + X - X^2) =$$
$$= X^n(-1 - X + X^2 - X^2 - X^3) = -X^n - X^{n+1} - X^{n+3}.$$

Pour exclure ce cas, on ajoute à l'hypothèse d'induction la condition que si le dernier terme β_{n+2} du polynôme de degré $n + 2$ représentant $z + 1$ est non nul, alors le terme β_{n+1} est nul ou du signe opposé. Cette condition est remplie pour $n = 0$, et si on la suppose pour $n - 1$, elle est aussi vérifiée pour n. En effet, les seuls cas quand $\beta_{n+2} \neq 0$ ont lieu soit lorsque $\gamma_{n+1} = 0$, auquel cas β_{n+1} et β_{n+2} ont des signes opposés, soit quand $\gamma_{n+1} = \epsilon = \pm 1$ auquel cas $\gamma_n = \alpha_n = -\epsilon$, ce qui donne

$$\gamma_n X^n + \gamma_{n+1} X^{n+1} + \alpha_n X^n = -\epsilon X^n(1 + 1 - X) = \epsilon X^n + \epsilon X^{n+2},$$

impliquant que $\beta_{n+1} = 0$ dans ce cas. Ainsi l'hypothèse d'induction est encore vérifiée pour n, et cela conclut la preuve. ☐

Démonstration. (de la proposition 6.7) Le lemme 6.9 est vérifié pour la loi abstraite d'addition définie en utilisant (6.8) sur la limite projective de R_n. La preuve montre que les éléments de cette limite projective, qui ont seulement un nombre fini de coordonnées non nulles, sont stables par addition de 1. En utilisant (5.10), il s'ensuit qu'ils sont également stables par addition de n'importe quel monôme et par conséquent qu'ils forment un groupe additif A. Par conséquent, il reste à montrer que l'application $\rho : A \to \mathbb{C}$ définie par

$$\rho\Big(\sum_j \alpha_j X^j\Big) := \sum_j \alpha_j z^j, \qquad z = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{-11}\right)$$

est injective. Soit $\sum_j \alpha_j X^j \in \ker \rho$, alors $\sum_j \alpha_j z^j = 0$ et donc, z vérifie l'équation $E(z) = 0$ à coefficients entiers dont le coefficient principal est 1 et le terme constant est ± 1. Le polynôme E est ainsi un multiple du polynôme minimal $z^2 - z + 3$ de l'extension de corps. Le polynôme quotient a des coefficients entiers ; ainsi, on obtient une contradiction en utilisant le produit de termes constants. ☐

6.2.3 L'anneau de polynômes $\left(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}], \sqrt{-3}\right)$

L'élément $X := \sqrt{-3}$ est un $\mathbb{S}[\mu_{2,+}] = \mathbb{S}[\pm 1]$-générateur de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ et ce dernier est un ordre maximal dans l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Cela découle directement de §6.1.1 et la proposition 5.5. La clé est donnée par le polynôme $P(X) = -1 - X^2$. Un analogue évident de la proposition 6.3 est vérifié.

6.2.4 L'anneau de polynômes $\left(\mathcal{O}(\mathbb{Q}(\sqrt{-2})), 1 + \sqrt{-2}\right)$

On obtient de façon similaire que $P(X) = -1 - X + X^2 - X^3$ est la clé associée au $\mathbb{S}[\pm 1]$-générateur $1 + \sqrt{-2}$ de l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$

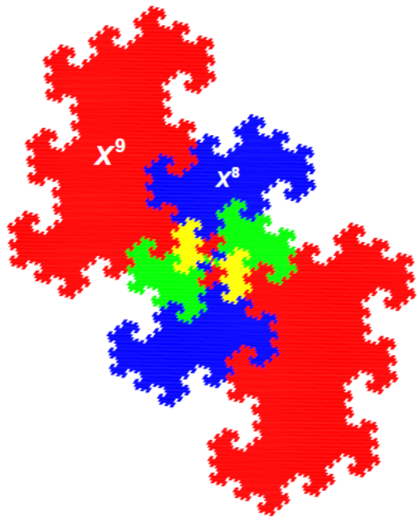


FIG. 8 : Polynômes de degré ≤ 9 pour $X = 1 + i\sqrt{2}$

Proposition 6.10. *Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers du corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.*
(i) *$X := 1 + \sqrt{-2}$ est un $\mathbb{S}[\pm 1]$-générateur de $\mathcal{O}$. La clé de $(\mathcal{O}, X)$ est $P(X) = -1 - X + X^2 - X^3$.*
(ii) *La limite projective $\varprojlim R_m$ est l'anneau $W(\mathbb{F}_3) = \mathbb{Z}_3$.*

La figure 8 reproduit le motif obtenu en fournissant en entrée les polynômes de degré ≤ 9. Dans ce cas, l'analogue du lemme 6.9 est vérifié avec la borne $n + 3$ plutôt qu'$n + 2$.

6.3 Anneaux de polynômes à un générateur sur $\mathbb{S}[\mu_{3,+}]$

Dans le prochain exemple, le corps R_1 est le corps fini $\mathbb{F}_4$. On dénote par $\mu_{3,+} \subset \mathbb{C}$ les solutions de $x(x^3 - 1) = 0$, $j = \exp(2\pi i/3)$ et $\mathbb{Z}(j) \subset \mathbb{Q}(j)$ l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(j)$.

Proposition 6.11. (i) *Le nombre $-2 \in \mathbb{Z}(j)$ est un $\mathbb{S}[\mu_{3,+}]$-générateur de l'anneau $R = \mathbb{Z}(j)$.*
(ii) *La clé est donnée par*

$$h(1) = X + X^2, \;\; h(j) = j^2 X + j^2, \;\; h(j^2) = jX + j$$

(iii) *Le corps R_1 est le corps fini $\mathbb{F}_4$.*
(iv) *La limite projective $\varprojlim R_m$ est l'anneau de Witt $W(\mathbb{F}_4)$ et l'anneau R_m est le quotient de $W(\mathbb{F}_4)$ par $2^m W(\mathbb{F}_4)$.*

Démonstration. Appelons $J = 2\mathbb{Z}(j) \subset \mathbb{Z}(j)$, alors J^n est l'idéal engendré par X^n où $X = -2$. Appelons $\sigma : \mathcal{P}(\mu_3) \to R = \mathbb{Z}(j)$ l'application définie par (5.3). Pour chaque n, la composition $\pi_n \circ \sigma$, à partir du sous-ensemble $\mathcal{P}^{n-1}(\mu_3) \subset \mathcal{P}(\mu_3)$ formé des polynômes de degré $< n$ vers l'anneau quotient $R_n = R/J^n$, est surjective et par conséquent injective puisque les cardinaux de la source et de la cible sont égaux. Il s'ensuit que l'application $\sigma : \mathcal{P}(\mu_3) \to R = \mathbb{Z}(j)$ est injective. Pour montrer qu'elle est surjective, on utilise la méthode générale faisant intervenir la limite des sous-ensembles

$$Z_n := (-2)^{-n} \left(\sigma(\mathcal{P}^n(\mu_3) + F)\right) \subset \mathbb{C}$$

où F est le domaine fondamental pour $\mathbb{Z}(j)$. On observe que le passage de n à $n + 1$ affecte seulement Z_n sur sa frontière et que Z_n contient un disque ouvert centré en 0.

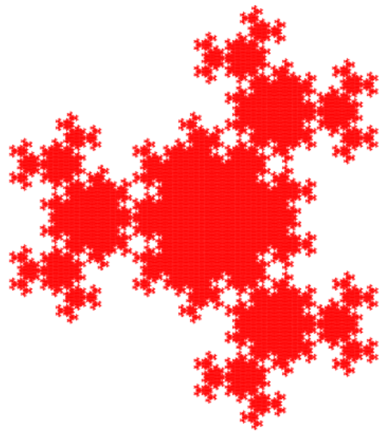


FIG. 9 : Polynômes de degré ≤ 7 pour $X = -2$

6.4 Les anneaux de polynômes à un générateur sur $\mathbb{S}[\mu_{4,+}]$

Proposition 6.12. (i) *Le nombre* $X = 1 + 2i$ *est un* $\mathbb{S}[\mu_{4,+}]$*-générateur de l'anneau* $R = \mathbb{Z}(i)$.
(ii) *La clé est donnée par* $h(0) = 1$ *et*

$$h(1) = i - i\,X, \quad h(i) = -i + X, \quad h(-i) = -1 - i\,X$$

(iii) *Le corps* R_1 *est le corps fini* $\mathbb{F}_5$.
(iv) *La limite projective* $\varprojlim R_m$ *est l'anneau de Witt* $W(\mathbb{F}_5) = \mathbb{Z}_5$ *et l'anneau* R_m *est le quotient de* $W(\mathbb{F}_5)$ *par* $5^m\, W(\mathbb{F}_5)$.

Démonstration. Dans le corps p-adique $\mathbb{Z}_5$, il existe une unique racine carrée de -1 égal à 2 modulo 5 (voir [28], §6.7). Soit $\rho : \mathbb{Z}(i) \to \mathbb{Z}_5$ l'unique morphisme tel que, modulo 5, on a $\rho(i) = 2$. Alors $\rho(X) = 5u$ où u est une unité dans $\mathbb{Z}_5$. Le morphisme ρ restreint à $\mu_{4,+} = \{0, 1, i, -1, -i\}$ donne une section multiplicative de l'application quotient $R \to R/XR$. On a $\mathbb{Z}_5/\rho(X)^m\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5^m\mathbb{Z}$ et le morphisme ρ induit un isomorphisme $R_m \simeq \mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5^m\mathbb{Z}$. Les assertions (iii) et (iv) en découlent, ainsi que l'injectivité de l'application $\sigma : \mathcal{P}(\mu_4) \to R = \mathbb{Z}(i)$. On peut prouver la surjectivité de σ comme pour la proposition 6.11 en utilisant la Figure 10. Les assertions (i) et (ii) s'ensuivent. $\square$

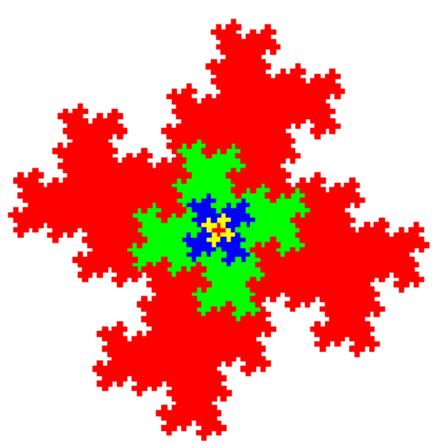


FIG. 10 : Polynômes de degré ≤ 4 pour $X = 1 + 2i$

6.5 Les anneaux de polynômes à un générateur sur $\mathbb{S}[\mu_{6,+}]$

Proposition 6.13. (i) *Le nombre* $X = 2 - j$ *est un* $\mathbb{S}[\mu_{6,+}]$*-générateur de l'anneau* $R = \mathbb{Z}(j)$.
(ii) *La clé est donnée par* $h(j) = j + 1$, $h(j^2) = j^2 + 1$, $h(0) = 1$ *et*

$$h(1) = X + j, \quad h(-j^2) = -j^2\, X + j^2, \quad h(-j) = -1 + X$$

(iii) *Le corps* R_1 *est le corps fini* $\mathbb{F}_7$.
(iv) *La limite projective* $\varprojlim R_m$ *est l'anneau de Witt* $W(\mathbb{F}_7) = \mathbb{Z}_7$ *et l'anneau* R_m *est le quotient de* $W(\mathbb{F}_7)$ *par* $7^m\, W(\mathbb{F}_7)$.

La preuve peut se déduire de [28], §4.6.

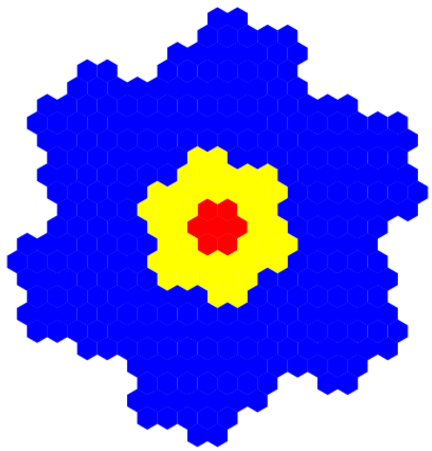


FIG. 11 : Polynômes de degré ≤ 2 pour $X = \frac{5}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Références

[1] M. F. Atiyah, D.O Tall, *Group representations, λ-rings and the J-homomorphism*. Topology **8** (1969) 253–297. 2

[2] G. Barat, V. Berthé, P. Liardet, J. Thuswaldner, *Dynamical directions in numeration*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), no. 7, 1987–2092. 1

[3] J. Borger, *Λ-rings and the field with one element*, arXiv :0906.3146 1, 2

[4] J.B. Bost, A. Connes, *Hecke algebras, Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory*, Selecta Math. (New Series) **1** (1995) no.3, 411–457. 2

[5] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*. Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), no. 1, 29–106. 2, 2, 4, 2

[6] A. Connes, C. Consani *On the notion of geometry over* $\mathbb{F}_1$, Journal of Algebraic Geometry **20** no. 3 (2011), 525–557. 3

[7] A. Connes, C. Consani, *Schemes over* $\mathbb{F}_1$ *and zeta functions*, Compositio Mathematica **146** (6), (2010) 1383–1415. 2, 12

[8] A. Connes, C. Consani, *From monoids to hyperstructures : in search of an absolute arithmetic*, dans Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis, de Gruyter (2010), 147–198. 2

[9] A. Connes, C. Consani, *Geometry of the Arithmetic Site*. Adv. Math. **291** (2016), 274–329. 1, 2, 2.7, 2.8, 2

[10] A. Connes, C. Consani, *Geometry of the Scaling Site*, Selecta Math. (N.S.) **23** (2017), no. 3, 1803–1850. 2, 2.11

[11] A. Connes, C. Consani, *Absolute algebra and Segal's Gamma sets*, J. Number Theory **162** (2016), 518–551. 1, 3, 5

[12] A. Connes, C. Consani, *On Absolute Algebraic Geometry, the affine case*, Advances in Mathematics, **390**, article no. 107909 (2021). 12

[13] A. Connes, C. Consani, *Riemann-Roch for* $\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$. Bulletin des Sciences Mathématiques **187** (2023). 1, 3, 3.1, 1, 6.2.1

[14] A. Connes, C. Consani, *Riemann-Roch for the ring* $\mathbb{Z}$. Comptes Rendus Mathématiques (à paraître) (2023) 1, 4.2

[15] B. Dundas, T. Goodwillie, R. McCarthy, *The local structure of algebraic K-theory*. Algebra and Applications, 18. Springer-Verlag London, Ltd., London, (2013). 3

[16] W. Gilbert, *Radix representation of quadratic fields*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **83**, 264–274, (1981). 6.1.2

[17] J. Golan, *Semi-rings and their applications*, Version mise à jour et augmentée de The theory of semi-rings, with applications to mathematics and theoretical computer science *Longman Sci. Tech.*, Harlow, 1992. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1999). 2, 9

[18] I. Katai, B. Kovacs, *Kanonische Zahlensysteme in der Theorie der quadratischen algebraischen Zahlen*. Acta Sci. Math. (Szeged) **42** (1980), no. 1-2, 99–107. 6.1.1, 6.1.1

[19] I. Katai, B. Kovacs, *Canonical number systems in imaginary quadratic fields*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **37** (1981), nos. 1–3, 159–164. 6.1.1, 6.1.1

[20] D. Knuth, *The art of computer programming*. Vol. 2 : Seminumerical algorithms. Troisième édition, Addison-Wesley, (1998). 1, 6

[21] S. Lang, *Algebraic Number Theory*. Addison Wesley, (1970).

[22] https://en.wikipedia.org/wiki/Complex-base_system 6.1.2

[23] Yu.I. Manin, *Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa)*. Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992). Astérisque No. 228 (1995), 4, 121–163. 1, 2, 3

[24] Yu.I. Manin, *Cyclotomy and Analytic Geometry over* F_1. Quanta of maths, 385–408, Clay Math. Proc., **11**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2010). 2, 2

[25] R. Meyer, *On a representation of the idele class group related to primes and zeros of L-functions*. Duke Math. J. **127** (2005), N.3, 519–595. 4

[26] J. Neukirch, *Algebraic number theory*. Traduit de la version originale en allemand de 1992 et avec une note de Norbert Schappacher. Avec un avant-propos de G. Harder. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 322. Springer-Verlag, Berlin, (1999).

[27] D. Quillen, *On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field*. Ann. of Math. (2) **96** (1972), 552–586. 6

[28] A. Robert, *A course in p-adic analysis*. Graduate Texts in Mathematics, **198**, Springer-Verlag, New York, 2000. 6.1.2, 6.1.2, 6.4, 6.5

[29] C. Soulé, *Les variétés sur le corps à un élément*. Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 1, 217–244. 2

[30] R. Steinberg, *A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field*, Transactions of the AMS, **71**, no. 2 (1951), pp. 274–282. 1

[31] J. Tits, *Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes*. Colloque d'algèbre supérieure, Bruxelles 19–22 décembre 1956, Centre Belge de Recherches Mathématiques Établissements Ceuterick, Louvain ; Librairie Gauthier-Villars, Paris (1957), 261–289. 1

[32] A. Weil *Sur l'analogie entre les corps de nombres algébriques et les corps de fonctions algébriques*, Œuvres scientifiques / Collected papers I. 1926–1951. Springer, Heidelberg, (2014). 1

[33] A. Weil *De la métaphysique aux mathématiques*, Oeuvres scientifiques / Collected papers II. 1951–1964. Springer, Heidelberg, (2014). 1

[34] A. Weil *Basic number theory*. Réimpression de la seconde édition (1973). Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, (1995).

[35] http://solbakkn.com/math/triadic-nums.htm

Alain Connes
Collège de France
3 Rue d'Ulm
F-75005 Paris, France
IHES
35 Rte de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette, France
Email : alain@connes.org

Caterina Consani
Département de Mathématiques
Université Johns Hopkins
3400 N Charles Street
Baltimore MD 21218, USA
Email : cconsan1@jhu.edu

AUTOUR DU THÉORÈME DE WILSON

ALAIN CONNES

Résumé : On étudie la série $s(n,x)$ qui est la somme pour k de 1 à n des carrés des sinus du produit $x\Gamma(k)/k$, où x est une variable. Par le théorème de Wilson, on montre que la partie entière de $s(n,x)$ pour $x=\pi/2$ est le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n et on obtient une formule similaire pour x un multiple rationnel de π. On montre que pour presque tout x au sens de la mesure de Lebesgue, $s(n,x)$ est équivalent à $n/2$ quand n tend vers l'infini, alors que pour presque tout x au sens de la mesure de Baire, $1/2$ est un point limite du ratio de $s(n,x)$ sur le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

1 Introduction

Soit $\Pi(n)$ le nombre de nombres premiers $p \leq n$. Une légère amélioration d'une formule[1] de Willans [4] donne une formule simple pour $\Pi(n)$ comme partie entière de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{\pi\Gamma(k)}{2k}\right) \tag{1}$$

Quand on essaie de calculer naïvement le côté droit, on trouve que le calcul nécessite une précision croissante de la valeur numérique de π dont les 2500 premières décimales sont nécessaires pour calculer $\Pi(n)$ pour n de l'ordre du millier. F. Villegas a suggéré de remplacer π par une variable et d'analyser la dépendance à x dans la série ci-dessus. Ainsi pour $n>1$ un entier et $x \in \mathbb{R}$, soit

$$s(n,x) := \sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{x\Gamma(k)}{k}\right) \tag{2}$$

Nous montrerons ci-dessous que la dépendance à $x \in \mathbb{R}$ est assez intéressante dans la mesure où, à cause de la nature lacunaire de la séquence $\dfrac{\Gamma(k)}{k}$, les termes de la somme (1) sont principalement des variables aléatoires indépendantes quand on les considère plus adéquatement comme des fonctions d'une compactification presque périodique G de $\mathbb{R}$. Cela donne, par la preuve de la loi forte des grands nombres, que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ au sens de la mesure de Lebesgue, on a quand

Traduction de l'article https://arxiv.org/pdf/1809.02832.pdf, Denise Vella-Chemla, août 2023.

[1] FIGURE 1 : La formule de Willans.

Then $$H(x) = \frac{\sin^2 \pi \dfrac{\{(x-1)!\}^2}{x}}{\sin^2 \dfrac{\pi}{x}} \begin{cases} =1 \text{ for } x \text{ prime,} \\ =0 \text{ for } x \text{ composite.} \end{cases}$$

It follows that

$$\pi(m) = \sum_{x=2}^{m} H(x) \quad \text{for } m = 2, 3, \ldots$$

$n \to \infty$ que $s(n,x) \sim \frac{n}{2}$. Le fait intéressant est que pour l'autre notion naturelle de nombre réel "générique", notamment celle fournie par la théorie de Baire des intersections dénombrables denses des ensembles ouverts, c'est un comportement totalement différent de la série $s(n,x)$ qui est générique : on montre dans le théorème 4.1 que pour un $x \in \mathbb{R}$ générique, on obtient que les quotients $\frac{s(n,x)}{\Pi(n)}$ deviennent arbitrairement proches de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ est un point limite de la série

$$\frac{1}{2} \in \lim_{n\to\infty} \frac{s(n,x)}{\Pi(n)}.$$

De façon générique, cette série aura aussi l'∞ comme point limite et elle oscillera sauvagement. Mais pour les multiples rationnels de π, la série $s(n,x)$ se comporte comme le produit de $\Pi(n)$ par le nombre rationnel[2] $\frac{1}{2} - \frac{\mu(b)}{2\phi(b)}$ qui ne dépend que du dénominateur $b > 1$ de la fraction irréductible $x = \frac{a}{b}\pi$ comme multiple de π (voir la proposition 3).

2 $\Pi(n)$ et somme de carrés de sinus

On commence avec la variante suivante des formules de Willans [4].

Proposition 2.1. *Soit $n > 1$ un entier, alors $\Pi(n)$ est la partie entière de $s\left(n, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Preuve. Pour $k > 4$ composé le quotient $(k-1)!/k$ est un entier pair. Alors dans ce cas, on a

$$\sin^2\left(\frac{\pi\Gamma(k)}{2k}\right) = 0.$$

Pour $k = p > 2$ premier, le reste de $(p-1)!$ modulo $2p$ est $p-1$ par le théorème de Wilson et la parité de $p-1$. Donc pour $p > 2$ premier,

$$\sin^2\left(\frac{\pi\Gamma(p)}{2p}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi(p-1)}{2p}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2p}\right).$$

On a

$$1 \geq \cos^2(x) \geq 1 - x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il découle de cela que $\delta(n) = s\left(n, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi(n)$ est une fonction décroissante de $n > 4$ et que pour $m > n$,

$$\delta(n) - \delta(m) = \sum_{p \text{ premier}, n<p\leq m} \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2p}\right)\right) \leq \frac{\pi^2}{4} \sum_{n<p\leq m} \frac{1}{p^2}$$

La série $\sum \frac{1}{p^2}$ est convergente et on a la limite $\frac{\pi^2}{4}\sum_{p>50}\frac{1}{p^2} < 0.0498448$ pour la somme (plus grande) sur les entiers, alors que $s\left(50, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi(50) \sim 0.539005$. Il en découle que

$$s\left(n, \frac{\pi}{2}\right) \in [\Pi(n) + 0.5 - 0.05), \Pi(n) + 0.6] \subset [\Pi(n), \Pi(n) + 1)$$

[2] μ est la fonction de Möbius et ϕ la fonction indicatrice d'Euler.

pour tout $n > 50$, et (voir figure 2) $s\left(n, \frac{\pi}{2}\right) \in [\Pi(n), \Pi(n) + 1)$ pour tout $n > 1$ qui donne le résultat requis. $\square$

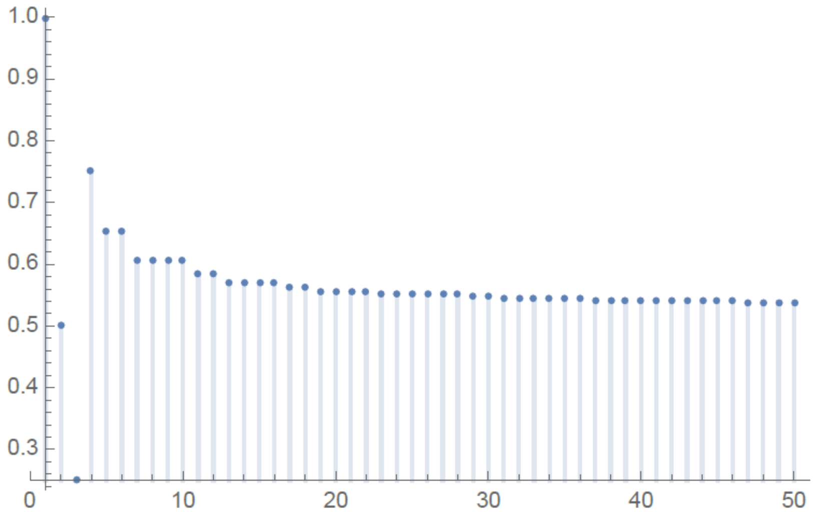


FIGURE 2 : *Graphe de* $s\left(n, \frac{\pi}{2}\right) - \Pi(n)$ *pour* $1 < n \leq 50$.

Le terme général $\sin^2\left(\frac{x\Gamma(k)}{k}\right)$ de (2) dépend de la connaissance de x à un ϵ près de l'ordre de

$$dx \simeq \left(\frac{k}{e}\right)^{-k+2}$$

Ainsi par exemple, pour obtenir la précision requise autour de $k = 945$ on a besoin des 2400 premières décimales de π.

3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481
117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 249 141 273 724 587 006
606 315 588 174 881 520 920 962 829 254 091 715 364 367 892 590 360 011 330 530 548 820 466 521 384 146 951 941 511 609 433 057 270 365 759 591 953 092 186 117 381 932 611 793 105 118 548 074 462 379 962 749
567 351 885 752 724 891 227 938 183 011 949 129 833 673 362 440 656 643 086 021 394 946 395 224 737 190 702 179 860 943 702 770 539 217 176 293 176 752 384 674 818 467 669 405 132 000 568 127 145 263 560 827
785 771 342 757 789 609 173 637 178 721 468 440 901 224 953 430 146 549 585 371 050 792 279 689 258 923 542 019 956 112 129 021 960 864 034 418 159 813 629 774 771 309 960 518 707 211 349 999 998 372 978 049
951 059 731 732 816 096 318 595 024 459 455 346 908 302 642 522 308 253 344 685 035 261 931 188 171 010 003 137 838 752 886 587 533 208 381 420 617 177 669 147 303 598 253 490 428 755 468 731 159 562 863 882
353 787 593 751 957 781 857 780 532 171 226 806 613 001 927 876 611 195 909 216 420 198 938 095 257 201 065 485 863 278 865 936 153 381 827 968 230 301 952 035 301 852 968 995 773 622 599 413 891 249 721 775
283 479 131 515 574 857 242 454 150 695 950 829 533 116 861 727 855 889 075 098 381 754 637 464 939 319 255 060 400 927 701 671 139 009 848 824 012 858 361 603 563 707 660 104 710 181 942 955 596 198 946 767
837 449 448 255 379 774 726 847 104 047 534 646 208 046 684 259 069 491 293 313 677 028 989 152 104 752 162 056 966 024 058 038 150 193 511 253 382 430 035 587 640 247 496 473 263 914 199 272 604 269 922 796
782 354 781 636 009 341 721 641 219 924 586 315 030 286 182 974 555 706 749 838 505 494 588 586 926 995 690 927 210 797 509 302 955 321 165 344 987 202 755 960 236 480 665 499 119 881 834 797 753 566 369 807
426 542 527 862 551 818 417 574 672 890 977 772 793 800 081 647 060 016 145 249 192 173 217 214 772 350 141 441 973 568 548 161 361 157 352 552 133 475 741 849 468 438 523 323 907 394 143 334 547 762 416 862
518 983 569 485 562 099 219 222 184 272 550 254 256 887 671 790 494 601 653 466 804 988 627 232 791 786 085 784 383 827 967 976 681 454 100 953 883 786 360 950 680 064 225 125 205 117 392 984 896 084 128 488
626 945 604 241 965 285 022 210 661 186 306 744 278 622 039 194 945 047 123 713 786 960 956 364 371 917 287 467 764 657 573 962 413 890 865 832 645 995 813 390 478 027 590 099 465 764 078 951 269 468 398 352
595 709 825 822 620 522 489 407 726 719 478 268 482 601 476 990 902 640 136 394 437 455 305 068 203 496 252 451 749 399 651 431 429 809 190 659 250 937 221 696 461 515 709 858 387 410 597 885 959 772 975 498
930 161 753 928 468 138 268 683 868 942 774 155 991 855 925 245 953 959 431 049 972 524 680 845 987 273 644 695 848 653 836 736 222 626 099 124 608 051 243 884 390 451 244 136 549 762 780 797 715 691 435 997
700 129 616 089 441 694 868 555 848 406 353 422 072 225 828 488 648 158 456 028 50

FIGURE 3 : 2400 *décimales de* π.

3 Multiples rationnels de π

On investigue le comportement de la série $s(n, x)$ quand x est un multiple rationnel de π. On note $x := \frac{a\pi}{b}$ où a et b sont premiers entre eux. Pour k suffisamment grand, le terme $\Gamma(k)/k$ est divisible par b au sens où la valuation p-adique de $\Gamma(k)/k$ est plus grande que celle de b pour tous les diviseurs premiers de b. On peut voir cela en utilisant la formule de Legendre pour la valuation p-adique qui donne

$$v_p(\Gamma(k)/k) \geq \sum_{\ell \geq 1} \left\lfloor (k-1)/p^\ell \right\rfloor - \left\lfloor \log_p(k) \right\rfloor$$

Puisque les facteurs premiers de b sont fixés, il existe $k_0 < \infty$ tel que $\Gamma(k)/k$ est divisible par b (au sens ci-dessus) pour tout $k > k_0$. Ainsi, si $k > k_0$ n'est pas premier, le produit $\dfrac{x\Gamma(k)}{k}$ est un multiple entier de π et $\sin^2\left(\dfrac{x\Gamma(k)}{k}\right) = 0$. Quand $k > k_0$ est un nombre premier, l'entier $c = \dfrac{\Gamma(k)}{b}$ est tel que $bc = -1$ modulo k par le théorème de Wilson. On obtient dans ce cas

$$\sin^2\left(\frac{x\Gamma(k)}{k}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi a\Gamma(k)}{bk}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi ac}{k}\right)$$

et le côté droit dépend seulement du reste de a et de c modulo k. Puisque b et k sont premiers entre eux, il existe $u \in \{1, \ldots b-1\}$ qui est l'inverse de k modulo b. Ainsi appelons $m \in \mathbb{N}$ tel que $ku - 1 = bm$. On a alors $bm = -1$ modulo k et il en découle que $m = c$ modulo k. Cela donne

$$\sin^2\left(\frac{\pi ac}{k}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi am}{k}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi a(ku-1)}{bk}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi au}{b}\right) + \sin\left(\frac{a\pi}{bk}\right)\sin\left(\frac{a\pi}{bk} - \frac{2au\pi}{b}\right)$$

Par conséquent, puisque

$$\left|\sin\left(\frac{a\pi}{bk}\right)\sin\left(\frac{a\pi}{bk} - \frac{2au\pi}{b}\right)\right| \leq \left|\sin\left(\frac{a\pi}{bk}\right)\right| = 0(1/k)$$

le comportement asymptotique de $s(n,x)$ ne dépend que des restes des nombres premiers modulo b, à un terme de l'ordre de $\log\log n$ dû à $\sum 1/k$ sur les nombres premiers inférieurs à n. Ainsi, par le théorème de Dirichlet, dans la forme forte due à La Vallée Poussin (voir [2], V §7), on obtient la

Proposition 2. *Soit x un multiple rationnel de π, $x = \dfrac{\pi a}{b}$ avec a, b premiers entre eux, $b > 1$, alors*

$$s(n,x) \sim \frac{\Pi(n)}{\phi(b)} \sum_{v \in (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*} \sin^2\left(\frac{\pi v}{b}\right) = \Pi(n)\left(\frac{1}{2} - \frac{\mu(b)}{2\phi(b)}\right) \tag{3}$$

Preuve. Il reste à montrer la seconde égalité dans (3). Cela découle de $\sin^2(v) = \dfrac{1-\cos(2v)}{2}$ et du fait que la somme des racines primitives de l'unité d'ordre b est la fonction de Möbius $\mu(b)$. □

4 Comportement générique de $s(n,x)$

Cela suggère d'investiguer le comportement général de la série (2). Il est donné par le résultat suivant qui montre que presque partout en théorie de la mesure (pour la mesure de Lebesgue) le comportement est gaussien et $s(n,x) \simeq \dfrac{n}{2}$. Mais généralement au niveau topologique ce qui signifie sur une intersection dénombrable dense d'ensembles ouverts, la somme grossit beaucoup plus lentement et se comporte comme $\dfrac{\Pi(n)}{2}$ au sens faible où $\dfrac{1}{2}$ est un point limite de la série $\dfrac{s(n,x)}{\Pi(n)}$.

En fait, il oscille sauvagement puisque ∞ est également un point limite de cette série. Notons que les deux comportements sont exclusifs l'un de l'autre mais ceci n'est pas contradictoire.

Théorème 4.1. *(i) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ la série $s(n,x)$ de (2) a le comportement gaussien*

$$s(n,x) \simeq \frac{n}{2}$$

(ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$ générique (sur une intersection dénombrable dense d'ensembles ouverts) on a

$$\frac{1}{2} \in \lim_{n\to\infty} \frac{s(n,x)}{\Pi(n)}$$

Preuve. (i) Soit G la limite projective des groupes compacts $G_n := \mathbb{R}/n\mathbb{Z}$ selon les morphismes naturels

$$\gamma_{n,m} : G_m \to G_n, \qquad \gamma_{n,m}(x + m\mathbb{Z}) = x + n\mathbb{Z}, \qquad \forall n|m. \tag{4}$$

On a un isomorphisme naturel, avec $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ les adèles du corps global $\mathbb{Q}$,

$$G = \varprojlim(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{R})/\mathbb{Z} = (\widehat{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R})/\mathbb{Z} = \mathbb{A}_\mathbb{Q}/(\mathbb{Q},+).$$

Le dual de Pontrjagin de G s'identifie au groupe additif discret $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels en associant à $r \in \mathbb{Q}$ le caractère α_r de G spécifié par sa restriction au sous-groupe dense $\mathbb{R}$, domaine de l'homomorphisme $\mathbb{R} \ni t \mapsto a(t) = (0,t) \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}/(\mathbb{Q},+)$ des adèles avec composant 0 non-archimédien

$$\alpha_r(a(t)) := e^{2\pi i r t}.$$

Ensuite, en utilisant $1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$ on obtient avec $r = \dfrac{\Gamma(k)}{k} \in \mathbb{Q}$ l'égalité

$$\sin^2\left(\frac{x\Gamma(k)}{k}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha_r\left(\frac{x}{\pi}\right) - \frac{1}{4}\alpha_{-r}\left(\frac{x}{\pi}\right). \tag{5}$$

Par conséquent, avec la fonction de base définie sur G par

$$X(x) := -\frac{1}{4}\alpha_1(x) - \frac{1}{4}\alpha_{-1}(x),$$

on obtient que le terme général de la somme $s(n,x)$ est simplement $\dfrac{1}{2} + X_k\left(\dfrac{x}{\pi}\right)$ où

$$X_k(x) := X(r(k)x), \quad r(k) := \frac{\Gamma(k)}{k} \in \mathbb{Q}^\times$$

La multiplication par les éléments de $\mathbb{Q}^\times$ définit les automorphismes de G. On a la relation d'orthogonalité des caractères qui implique, puisque les rationnels $\dfrac{\Gamma(k)}{k}$ sont distincts, ils forment (pour $k > 1$) une suite strictement croissante (dont les premiers éléments sont $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{24}{5}\right\}$) que les variables aléatoires X_k sur l'espace de probabilité G équipé avec sa mesure de Haar normalisée, sont équidistribués et essentiellement indépendants, dans la mesure où,

$$\int_G X_k(x) X_\ell(x) dx = 0 \ \ \forall k \neq \ell$$

et où l'on contrôle le 4-ième moment comme suit

$$\int_G \Big| \sum_1^n X_k(x) \Big|^4 dx \leq C n^2 \tag{6}$$

puisque $|\sum_1^n X_k(x)|^4 = \sum_{1 \leq k_j \leq n} X_{k_1}(x) X_{k_2}(x) X_{k_3}(x) X_{k_4}(x)$ et le nombre de solutions de l'équation

$$\pm r(k_1) \pm r(k_2) \pm r(k_3) \pm r(k_4) = 0, \quad k_j \in \{1, \ldots, n\} \tag{7}$$

est de l'ordre de n^2 du fait de la nature lacunaire de ([3]) de la suite $r(k)$. En effet, pour $k > 4$ on a $r(k+1) > 3r(k)$ et (7) est possible seulement si le plus grand des k_j apparaît au moins deux fois (et avec des signes opposés) et les k_j restant sont égaux, ce qui donne n^2 comme limite du nombre de solutions.
Donc on a, pour tout $\epsilon > 0$ que

$$\int_G \Big| \frac{1}{n} \sum_1^n X_k(x) \Big|^4 \leq C/n^2, \quad \Big| \{ x \in G \mid \Big| \frac{1}{n} \sum_1^n X_k(x) \Big| > \epsilon \} \Big| \leq C/n^2 \epsilon^{-4}$$

et le lemme de Borel-Cantelli s'applique et montre que le sous-ensemble $E \subset G$ défini par

$$E := \{ x \in G \mid \frac{1}{n} \sum_1^n X_k(x) \to 0 \}$$

est de mesure 1. Puisque $\mathbb{R} \subset G$ est de mesure 0 on ne peut encore obtenir (i) mais cela découlera de l'invariance de E selon la translation par le sous-groupe $\widehat{\mathbb{Z}} \subset G$. Pour voir cela, on utilise l'égalité pour k composé

$$X_k(x+u) = X_k(x) \forall u \in \widehat{\mathbb{Z}} \tag{8}$$

qui découle du caractère entier de $\dfrac{\Gamma(k)}{k}$ et de la périodicité du cosinus :

$$\cos \frac{2\pi(x+1)\Gamma(k)}{k} = \cos \frac{2\pi x \Gamma(k)}{k}$$

Ainsi, on obtient la même égalité pour la fermeture $\widehat{\mathbb{Z}} \subset G$. Il suit de cela que

$$\Big| \frac{1}{n} \sum_1^n X_k(x+u) - \frac{1}{n} \sum_1^n X_k(x) \Big| \leq \frac{\Pi(n)}{n} \forall u \in \widehat{\mathbb{Z}}$$

et cela suffit à démontrer que E est invariant par la translation par le sous-groupe $\widehat{\mathbb{Z}} \subset G$. L'image de $x \in G$ dans le quotient $G/\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ suffit ainsi à décider si $x \in E$ et il en découle que presque tous les éléments de $\mathbb{R} \subset G$ sont dans E. Finalement, le comportement gaussien découle des résultats de [3] sur les séries trigonométriques lacunaires.
(ii) Quand $x \in \pi\mathbb{Q}$ est un multiple rationnel de π on applique la proposition 3. Pour $b \to \infty$ on a l'équidistribution

$$\frac{1}{\phi(b)} \sum_{v \in (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*} \sin^2 \left(\frac{\pi v}{b} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\mu(b)}{2\phi(b)} \to \frac{1}{2}.$$

Cela montre que, pour $\epsilon > 0$, l'intersection dénombrable suivante d'ensembles ouverts est dense dans $\mathbb{R}$

$$W(\epsilon) := \cap_m \cup_{n\geq m} \{x \in \mathbb{R} \mid s(n,x) \in ((1-\epsilon)\Pi(n)/2, (1+\epsilon)\Pi(n)/2)\}$$

et pour $x \in W(\epsilon)$ on a $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2s(n,x)}{\Pi(n)} \cap [1-\epsilon, 1+\epsilon] \neq \varnothing$ qui donne la conclusion requise après avoir fait l'intersection des $W(\epsilon)$ pour $\epsilon = \dfrac{1}{a}$, $a \to \infty$ qui donne toujours une intersection dénombrable dense d'ensembles ouverts par le théorème de Baire [2]. $\square$

Références

[1] R. Baire. *Sur les fonctions de variables réelles.* Ann. di Mat., 3:1–123, (1899).

[2] K. Prachar, *Primzahlverteilung.* (German) Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, (1957). x+415 pp.

[3] R. Salem, A. Zygmund, *On Lacunary Trigonometric Series.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America Vol. 33, No. 11 (Nov. 15, 1947), pp. 333–338.

[4] C. P. Willans, *On formulae for the nth prime number.* Math. Gaz. 48 (1964) 413–415.

Non-commutativité et Physique : un survol non technique

Ali H. Chamseddine[1,4], Alain Connes[2,3] et Walter D. van Suijlekom[5]

[1]Département de Physique, Université américaine de Beyrouth, Liban
[2]Collège de France, 3 rue d'Ulm, F75005, Paris, France
[3]I.H.E.S. F-91440 Bures-sur-Yvette, France
[4]Université Ludwig Maximilian, Theresienstrasse 37, 80333, Munich, Germany
[5]Institut pour les Mathématiques, l'Astrophysique et la Physique des particules, Université Radboud de Nimègue, Heyendaalseweg 135, 6525 AJ Nimègue, Pays-Bas.

chams@aub.edu.lb, alain@connes.org, waltervs@math.ru.nl

Résumé

Nous présentons un survol des applications de la géométrie non-commutative à la physique. Nous nous focalisons sur les idées conceptuelles, plutôt que sur les problèmes techniques sous-jacents. En partant historiquement des relations de Heisenberg, nous expliquerons comment, en général, la non-commutativité entraîne l'évolution canonique temporelle, alors qu'elle permet en même temps la coexistence de variables discrètes et continues. L'approche spectrale de la géométrie est alors expliquée pour englober deux ingrédients naturels : l'élément de distance et l'algèbre. La relation entre les deux est dictée par les relations de Heisenberg citées plus haut, à partir desquelles à la fois la géométrie de spin et la théorie de jauge non-abélienne émergent. Notre exposé indique quelques-unes des applications en Physique, incluant l'unification au-delà du modèle standard, l'importance de la dimension 4, la seconde quantification et l'entropie.

1 Introduction

Notre contribution à ce volume sur « la non-noncommutativité et la physique » décrira le rôle-clef de la transition de l'algèbre commutative à l'algèbre non-commutative à partir de la découverte par Heisenberg de la mécanique matricielle. La raison conceptuelle de la puissance de cette transition est que le codage par l'algèbre non-commutative retient davantage d'information

Référence : article arxiv https://arxiv.org/pdf/2207.10901.pdf version du 25.07.2022 au matin, traduction Denise Vella-Chemla, juillet 2022.

que sa contrepartie commutative. On est en fait très habitué à ce fait lorsqu'on écrit des mots. On écrit en respectant l'ordre des lettres et cela nous permet de coder l'information d'une manière très efficace. Passer au commutatif consiste à ignorer l'ordre des lettres et rend équivalents des mots dont les ensembles de lettres sont identiques comme cela est le cas pour les anagrammes. La nuance entre le non-commutatif et le commutatif est la même que dans le jeu de scrabble où un même ensemble de lettres peut permettre de composer des mots assez différents. D'une façon suggestive, on peut voir la quantification comme l'acte de monter de l'ombre commutative (semi-classique) au monde réel non-commutatif. Dans la Section 2, on expliquera dans quel sens les espaces non-commutatifs sont dynamiques et possèdent une évolution temporelle canonique.

Ce fait est à la source de la géométrie non-commutative, laissant le cas statique à la géométrie ordinaire. Dans la Section 3, on expliquera comment la non-commutativité des variables réelles est la clef de la coexistence des variables discrètes et continues. Elles coexistent dans le calcul quantifié qui permet un traitement parfait des variables infinitésimales et permet la coexistence du discret et du continu précisément par la non-commutativité des acteurs (les opérateurs) à cette étape.

L'irruption décrite ci-dessus de la non-commutativité en physique a eu un fort impact sur les mathématiques qui a amené à une reconstruction de la géométrie dans le formalisme de l'espace de Hilbert de la mécanique quantique.

Coder la géométrie dans ce formalisme a deux ingrédients, l'élément de longueur ds dont l'incarnation comme propagateur de Dirac est décrite dans la Section 4, et l'algèbre des coordonnées quand à nouveau, la non-commutativité entre en ligne de compte et, comme expliqué dans la Section 5 permet de coder même les espaces ordinaires à un prix moindre que ne le permet l'algèbre commutative.

Nous avons compris quelle est la quantité minimale de non-commutativité nécessaire pour obtenir des 4-variétés de spins, et cela amène à notre extension de Pati-Salam du modèle standard. Le rôle particulier de la dimension 4 est décrit dans la Section 6. Les théories de jauge non-abéliennes sont les témoins de la faible quantité de non-commutativité qui est nécessaire dans le codage des 4-variétés.

Le principe d'action qui amène à l'action gravitationnelle d'Einstein-Hilbert couplée avec l'extension ci-dessus du modèle standard est le principe d'action spectrale. Il acquiert la signification d'une entropie lorsqu'on travaille au second niveau de quantification, et nous terminerons ce court article dans la Section 7 en expliquant le rôle potentiel de la seconde quantification pour le paradigme spectral de la géométrie.

Remerciements

Le travail de A. H. C est financé en partie par la subvention de la Fondation pour la Science Nationale n° Phys-1912998 et le Centre Arnold Sommerfeld de l'Université LMU de Munich.

2 La non-commutativité engendre le temps

On peut tracer l'irruption de la non-commutativité en physique comme remontant à cette nuit de juin 1925 quand, aux alentours de trois heures du matin, W. Heisenberg alors qu'il travaillait seul dans l'île d'Helgoland en mer du Nord, découvrit la mécanique matricielle et la non-commutativité de l'espace des phases des systèmes mécaniques microscopiques. Jusqu'à ce jour, toutes les manipulations des quantités observables étaient effectuées en algèbre commutative et la découverte que les observables fondamentales comme la position et le moment n'obéissaient pas aux lois commutatives élémentaires de calcul est un tournant, qui est également à l'origine de la théorie mathématique de la géométrie non-commutative. En effet, au niveau mathématique, cela a montré l'importance en géométrie des espaces dans lesquels les coordonnées ne commutent pas. Après la formulation de la découverte d'Heisenberg par la mécanique matricielle par Born et Jordan dans leur article de 1925, von Neumann reformula la mécanique quantique en utilisant des opérateurs de l'espace de Hilbert et il alla beaucoup plus loin avec Murray en identifiant les « sous-systèmes » d'un système quantique comme des « factorisations » de l'espace de Hilbert sous-jacent $\mathcal{H}$. Ils découvrirent des factorisations inattendues qui ne correspondaient pas à des décompositions en produit tensoriel $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ et ils développèrent la théorie des facteurs qu'ils classifièrent en trois types. Le type I correspond aux facteurs M associés à des décompositions en produit tensoriel ordinaire $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ et de tels facteurs sont constitués par ces opérateurs de la forme $T \otimes 1$. Les facteurs de type II sont ceux qui possèdent une trace et les facteurs de type III sont ceux qui ne sont ni du type I ni du type II. La théorie de Tomita-Takesaki [39] a étendu aux facteurs la correspondance qui existe dans le cas du type I ou dans le cas du type II en utilisant la trace, entre l'état de Boltzmann-Gibbs ϕ et l'évolution d'Heisenberg σ_t des observables, exprimés ensemble en fonction du hamiltonien H

$$\phi(A) = \mathrm{Tr}(A \exp(-\beta H))/\mathrm{Tr}(\exp(-\beta H)) \to \sigma_t^{\phi}(A) = \exp(itH) a \exp(-itH).$$

Le point de départ de la classification des facteurs et la réduction du type III au type II a été la découverte dans [20] que l'évolution $\sigma_t^{\phi} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ est en fait indépendante du choix de l'état (normal fidèle) ϕ sur le facteur $\mathcal{M}$ à condition qu'on divise le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ des automorphismes du facteur $\mathcal{M}$ par les automorphismes α qui existent comme conséquence triviale de la non-commutativité, i.e. ceux de la forme suivante, pour un certain unitaire $U \in \mathcal{M}$,

$$\alpha(A) = UAU^*, \forall A \in \mathcal{M}$$

De tels automorphismes sont dits « intérieurs » et ils forment un sous-groupe normal $\mathrm{Int}(\mathcal{M}) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ du groupe des automorphismes de $\mathcal{M}$. Cela a montré que les facteurs $\mathcal{M}$ admettent une évolution temporelle canonique [20,22] *i.e.* un homomorphisme canonique

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \mathrm{Out}(\mathcal{M}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{M})/\mathrm{Int}(\mathcal{M})$$

en montrant que la classe d'automorphisme modulaire $\sigma_t^{\varphi} \in \mathrm{Out}(\mathcal{M})$ ne dépend pas du choix de l'état normal fidèle φ. L'unicité ci-dessus de la classe d'automorphisme modulaire [20] a drastiquement changé le statut des deux invariants qui avaient été introduits précédemment dans [18,19] en les rendant calculables. Le noyau de δ, $T(M) = \mathrm{Ker}\delta$ forme un sous-groupe de $\mathbb{R}$, les *périodes* de M, et de nombreux sous-groupes non triviaux non fermés apparaissent de cette manière. L'invariant fondamental des facteurs est le *spectre modulaire* $S(M)$ de [18]. Son intersection $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_+^*$, [27], et cela a donné la subdivision du type III en types $\mathrm{III}_\lambda \iff S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \lambda^{Z}$. De ce fait, on a montré que la classification des facteurs de type III_λ, $\lambda \in [0,1)$ se réduisait à celle du type II et des automorphismes

$$M = N \rtimes_\theta \mathbb{Z}, \ \ N \textbf{ type } \mathrm{II}_\infty, \ \theta \in \mathrm{Aut}(N)$$

Dans le cas III_λ, $\lambda \in (0,1)$, N est un facteur et l'automorphisme $\theta \in \mathrm{Aut}(N)$ est de module λ *i.e.* il met à l'échelle la trace par le facteur λ. Dans le cas III_0, N a un centre non trivial et, en utilisant la restriction de θ au centre, cela a donné un invariant très riche, un flot, qui a été utilisé en 1972 [21] pour montrer l'existence du facteur hyperfini non ITPFI. Seul le cas III_1 restait ouvert dans [22] et il fut résolu plus tard par Takesaki [38] en utilisant le produit croisé par $\mathbb{R}_+^*$.

3 Variables discrètes et continues

L'une des caractéristiques vraiment nouvelle et totalement inattendue de la mécanique quantique est le fait que les résultats d'expériences microscopiques ne peuvent pas être reproduits. Même si vous ne considérez qu'une expérience à une seule fente et que vous envoyez des électrons ou des photons sur cette petite fente fine d'une taille comparable à la longueur d'onde des particules, la position exacte où la particule atterrit sur une cible de l'autre côté de la fente est quelque chose qui ne peut être reproduit.

FIGURE 1 – élément de longueur

Ce que l'on peut prédire, c'est la probabilité que la particule arrive quelque part mais le fait qu'elle arrive à un endroit fixé, par les principes de la mécanique quantique, ne peut être reproduit. Cela signifie qu'il y a un hasard fondamental qui est inhérent à la physique quantique et qui a le pouvoir de produire des nombres réellement tirés au hasard. C'est donc devenu l'option préférée des applications scientifiques nécessitant le hasard (Figure 1). Du côté mathématique des choses, il y a une question liée, qui en fait est attribuée à Newton, qui est simplement *qu'est-ce qu'une variable réelle ?*. Si vous demandez à un mathématicien son point de vue sur cette question, la réponse la plus probable que vous obtiendrez est qu'*une variable réelle est la donnée d'un ensemble X et d'une application de cet ensemble X vers les nombres réels*. Pourtant, si vous pensez plus profondément à cela, vous trouverez que la réponse est très insatisfaisante. En effet, elle signifie que l'on ne peut avoir coexistence de variables continues, notamment des variables qui peuvent prendre leur valeur dans un domaine continu de valeurs possibles, et de variables discrètes, notamment les variables qui peuvent prendre leur valeur dans un ensemble dénombrable de valeurs, disons, avec une multiplicité finie pour chacune d'elles. La raison à cela est que si vous

Variable réelle $f : X \to \mathbb{R}$	Opérateur auto-adjoint H dans l'espace de Hilbert
Domaine $f(X) \subset \mathbb{R}$ de la variable	Spectre de l'opérateur H
Composition $\phi \circ f$, ϕ mesurable	Fonctions mesurables $\phi(H)$ des opérateurs auto-adjoints
Variable complexe bornée Z	Opérateur borné A dans l'espace de Hilbert
Variable infinitésimale dx	Opérateur compact T
Infinitésimal d'ordre $\alpha > 0$	Valeurs caractéristiques $\mu_n(T) = O(n^{-\alpha})$ pour $n \to \infty$
Opérations algébriques sur les fonctions	Algèbres d'opérateurs dans l'espace de Hilbert
Intégrale d'une fonction $\int f(x)dx$	$⨍ T =$ Coefficient de $\log(\Lambda)$ dans $\mathrm{Tr}_\Lambda(T)$
Élément de longueur $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$	$ds = \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$: Propagateur de fermions D^{-1}
$d(a,b) = \text{ Inf } \int_\gamma \sqrt{g_{\mu\,\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu}$	$d(\mu,\nu) = \text{ Sup}\,\lvert\mu(A) - \nu(A)\rvert, \mid\ \lVert[D,A]\rVert \leq 1.$
Géométrie riemannienne (X, ds^2)	Géométrie spectrale $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$
Invariants de courbure	Expansion asymptotique de l'action spectrale
Théorie de jauge	Fluctuations intérieures de la métrique

TABLE 1 – Le dictionnaire « spectral »

avez une variable discrète alors l'ensemble original X avec lequel vous travaillez doit être dénombrable, et alors cela implique qu'il n'autorise pas les variables continues.

La réponse surprenante que les mathématiques fournissent, mais qui n'aurait pas été détectée s'il n'y avait pas eu la formalisation de la mécanique quantique par von Neumann, est qu'une variable réelle est juste un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert. C'est un fait qu'il n'y a qu'un seul espace de Hilbert (séparable) de base dénombrable et on voit que cet espace de Hilbert a des variables à spectre discret. En effet, prenez une description de l'espace de Hilbert en donnant une base orthogonale dénombrable et prenez un opérateur qui est diagonal dans cette base. Cet opérateur a un spectre dénombrable mais il coexiste avec des opérateurs qui ont un spectre continu. En fait, on aurait pu décrire ce même espace de Hilbert comme étant l'espace des fonctions de carré intégrable sur cet intervalle et bien sûr, on aurait là des variables continues, données par les opérateurs de multiplication. La beauté de ce formalisme est que *les variables continues et discrètes y coexistent effectivement*. Toutes les propriétés des variables réelles sont là parce qu'on a un opérateur auto-adjoint, il a un spectre qui est composé des valeurs possibles de la variable et il a une multiplicité spectrale qui est le nombre de fois qu'une valeur peut être atteinte.

Tout ceci s'accorde très bien à la réalité au sens où les variables quantiques sont les opérateurs dans l'espace de Hilbert; le fait nouveau est que les variables discrètes ne commutent pas avec les variables continues. Si elles commutaient, ce seraient des fonctions définies sur le même espace X, ce qui n'est pas possible.

Pour résumer, les variables discrètes et les variables continues coexistent comme opérateurs de l'espace de Hilbert, mais en tant que telles, nécessairement, elles *ne commutent pas*. C'est précisément ce défaut de commutativité qui est le nouvel ingrédient au cœur du calcul quantifié et qui rend le paradigme de la géométrie très efficace.

4 Le paradigme spectral de la géométrie, l'élément de longueur

Ce qui est arrivé dans le processus qui a amené à comprendre l'émergence de la géométrie à partir du quantique est assez instructif. Quand Heisenberg a trouvé ses relations de commutation dans lesquelles interviennent P et Q (le moment et la position), il y avait déjà un soupçon, un morceau de réalité là-dedans, au sens où lorsque vous prenez le spectre, soit de P soit de Q, vous trouvez la droite réelle. L'autre opérateur est un opérateur de différentiation et il donne la structure géométrique pour cette droite. Pourtant, la manière dont les choses ont évolué à partir de ces relations de commutation est qu'elles ont été interprétées non pas comme un premier soupçon d'une « géométrie à partir des opérateurs de l'espace de Hilbert » mais plutôt en termes de représentations de groupes de Lie. Bien sûr, les représentations de groupes, quand on les applique au *e.g.* groupe de Poincaré, donnent une belle notion théorique pour la particule et la théorie a révélé de grandes parties d'un merveilleux paysage. Pourtant, les groupes de Lie de dimension finie peuvent difficilement nous amener aux géométries arbitraires que nous observons dans la gravité et aux variables qu'on a dans la gravité. Les groupes de Lie simples sont comme des diamants isolés mais qui simplement ne permettent pas cette énorme variabilité nécessitée dans la description géométrique de la gravité.

Le développement de la géométrie non-commutative a montré qu'il est possible d'avoir une géométrie qui émerge de considérations provenant purement de l'espace de Hilbert mais pour faire cela, on applique la théorie de la représentation à des formes beaucoup plus élaborées des relations de commutation de Heisenberg impliquant P et Q. Pour obtenir ces relations, on a besoin de revenir en arrière d'une étape et de comprendre comment donner davantage de flexibilité à la fois à P et à Q. La flexibilité supplémentaire pour Q a été difficile à obtenir et il en est discuté dans la Section 5 ci-après. La flexibilité supplémentaire pour P n'a pas été si difficile à trouver. En fait, elle avait déjà été trouvée par Paul Dirac dans [31] quand il a réalisé comment assembler différents moments ensemble pour former une expression unique, un opérateur unique, qui contient effectivement en lui-même toutes les composantes des moments. C'est l'*opérateur de Dirac*, exprimé en termes de matrices gamma. Donc la compréhension du moyen de donner davantage de flexibilité à P provient du travail de Dirac et, plus encore, cette compréhension est profondément enracinée dans la physique et, dans la compréhension de la géométrie, en particulier dans la mesure des longueurs, comme nous allons l'expliquer maintenant.

De nombreux formalismes de géométrie commencent avec le paradigme riemannien comme prérequis, c'est-à-dire l'idée que la géométrie est donnée par la mesure de longueur et que cette mesure des longueurs est décidée localement simplement en stipulant le carré de l'élément de longueur $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Il s'avère que cette idée a même été questionnée par Riemann lui-même !

Il a écrit dans sa leçon inaugurale sur les fondements de la géométrie qu'on peut se demander si la texture de l'espace (ou de l'espace-temps) obéira au « paradigme de Riemann » à toute échelle, la raison étant que les notions de rayon de lumière et de corps solide sur lesquelles son intuition s'appuyait cesseraient d'avoir du sens à des échelles très petites.

À la fin du 18ème siècle, le désir d'unifier la mesure des distances a amené à la mise au point concrète de l'unité de longueur qui a été appelée « mètre étalon » et qui était conservée près de Paris sous la forme d'une barre de platine. Plus tard, la pertinence de ce choix fut remise en question au début des années 1920 parce que des gens découvrirent que le mètre étalon changeait de longueur, ce qui bien sûr était très problématique. Ils découvrirent cela en comparant la longueur du mètre étalon à la longueur d'onde de la transition atomique fixe du Krypton. Le résultat de cette observation, de nombreuses années après, a été que des physiciens ont déplacé la définition de l'unité de longueur de la barre de platine à la longueur d'onde d'une certaine transition du Krypton et plus tard, finalement, à une transition hyperfine du Caesium.

Si vous pensez plus profondément à cela, vous trouvez que la raison pour laquelle leur unité de longueur classique devait être localisée était d'abord qu'elle devait être assez petite, puisqu'elle est supposée représenter ds, et d'autre part parce qu'elle commute avec les coordonnées, elle doit être localisée quelque part (lorsqu'on l'a fait, c'était près de Paris). Pourtant l'unité de longueur qui est donnée par la longueur d'onde de la transition hyperfinie du Caesium[1], est en fait de nature spectrale et ne commute plus avec les coordonnées.

En réalité, dans la droite ligne de la discussion ci-dessus, elle fait intervenir l'opérateur de Dirac, ou, plutôt, son inverse, le propagateur de Dirac. Évidemment, parce qu'il ne commute pas avec les coordonnées, il n'a pas besoin d'être localisé. De plus, si on veut unifier le système métrique dans notre galaxie, il est clair qu'une telle définition spectrale devrait être utilisée comme unité de longueur. En effet, il est plus pratique de dire à des gens d'étoiles éloignées que notre unité de longueur est une certaine transition du spectre de l'hélium ou de l'hydrogène plutôt que de leur dire qu'ils doivent venir à Paris et comparer leur unité avec une barre de métal qui se trouve là.

Outre le point de vue physique que c'est une bien meilleure définition de l'unité de longueur, mathématiquement parlant, cela implique que l'on remplace effectivement le ds^2 de la géométrie riemannienne par une racine carrée très subtile, qui consiste à prendre la racine carrée à travers une algèbre de Clifford et où l'élément infinitésimal de longueur qui était formulé en terme des variables infinitésimales par Riemann est remplacé par un infinitésimal qui est un opérateur adéquat dans l'espace de Hilbert (voir la Table 1).

Notons que cette notion d'infinitésimal a été en fait prédite par Newton au sens où il disait explicitement qu'un infinitésimal ne devrait pas être un nombre mais plutôt une variable! En fait, Newton a donné la définition d'une variable infinitésimale et, quand vous la traduisez dans la représentation des variables en utilisant des opérateurs de l'espace de Hilbert, cela donne précisément ce qu'on appelle un opérateur compact. Ces opérateurs compacts ont exactement toutes les propriétés dont vous pouvez rêver pour les infinitésimaux, ils forment un idéal parmi les opérateurs, etc., etc...

1. On l'appelle unité de temps en utilisant la vitesse de la lumière comme facteur de conversion.

Maintenant, quand vous pensez à l'élément de longueur pour l'espace-temps, vous trouvez que la formulation mathématique de l'inverse de l'opérateur de Dirac, dans le langage de la physique, est codé par ce que l'on appelle habituellement le propagateur de fermions. Ce propagateur de fermions intervient dans les graphes de Feynman comme les jambes internes faisant intervenir des fermions. Quand vous regardez la théorie des champs quantiques dans des livres à la Feynman, vous trouvez que ce propagateur est un tout petit segment rejoignant deux événements très proches :

Figure 2 : Générateur quantique de nombres aléatoires

Cette apparence qualitative d'un élément de longueur infinitésimal devient même plus frappante quand on réalise qu'en théorie quantique des champs, l'élément de longueur acquiert vraiment des corrections quantiques quand on l'habille. Cela signifie que si vous prenez dès le début la version correcte de l'élément de longueur pour la géométrie, vous comprendrez bientôt qu'il y a des corrections quantiques aux mesures des longueurs, à la géométrie, qui sont données par l'habillage du propagateur de fermion. De plus, les champs de jauge apparaissent comme termes additionnels dans l'opérateur de Dirac et ils incarnent exactement l'intuition de Riemann qu'au cas où son paradigme échouerait à des petites échelles, la géométrie serait basée sur les forces qui tiennent les choses ensemble!

5 Le paradigme spectral de la géométrie, l'algèbre

Le nouveau paradigme de la géométrie est codé par des *triplets spectraux* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ où l'opérateur non borné D code l'analogue de l'opérateur de Dirac comme décrit dans la Section 4 et où $\mathcal{A}$ est une algèbre d'opérateurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. L'algèbre $\mathcal{A}$ n'est pas supposée être commutative et ses automorphismes intérieurs (comme expliqué en Section 2) correspondront aux symétries internes en physique. À cause de sa flexibilité, ce nouveau paradigme fournit l'outil nécessaire pour raffiner notre compréhension de la structure de l'espace physique aux petites échelles, et pour « *rechercher les fondements de ses relations métriques à l'extérieur de lui, en reliant les forces qui agissent sur lui* » . L'idée principale, décrite en détails dans [28], est que l'élément de longueur incarne maintenant non seulement la force de la gravité mais toutes les forces connues, la force électro-faible et la force électro-forte, apparaissent à partir de l'action spectrale et des fluctuations intérieures de la métrique. Cela fournit une perspective complètement nouvelle sur l'interprétation géométrique de la structure détaillée du modèle standard et du mécanisme de Brout-Englert-Higgs. On obtient la simple image mentale suivante pour l'apparence du champ scalaire : imaginez que l'espace considéré a deux côtés, comme une feuille de papier à deux dimensions S. Alors quand on différentie une fonction sur un tel espace, on peut contraindre la fonction à l'un ou l'autre côté $S_\pm$ de la feuille et obtenir ainsi deux champs de spin un. Mais on peut aussi prendre la différence finie $f(s_+) - f(s_-)$ de la fonction aux points reliés des deux côtés. Le champ correspondant est clairement insensible aux rotations locales et est un champ scalaire de spin zéro. Ceci, dans une coquille de noix, est la manière dont le champ de Brout-Englert-Higgs apparaît géométriquement une fois qu'on accepte qu'il y a une « structure fine » qui est révélée par la structure détaillée du modèle standard de la matière et des forces. Finalement, cela permet de retrouver le sens géométrique du lagrangien de la gravité couplé au modèle standard. Ce lagrangien extrêmement compliqué est obtenu à partir de l'action spectrale développée en [1] qui est le seul invariant spectral additionnel naturel de la géométrie non-commutative.

Pour satisfaire la contrainte de Riemann que l'inverse de l'élément de longueur D incarne les forces de la nature, il est évidemment important que nous ne séparions pas artificiellement la partie gravitationnelle de la partie jauge, et que D englobe les deux forces d'une manière unifiée. Dans la géométrisation traditionnelle de la physique, la partie gravitationnelle spécifie la métrique alors que la partie jauge correspond à la connexion sur un fibré principal. Dans le paradigme géométrique non-commutatif, D décrit les deux forces d'une manière unifiée et les bosons de jauge apparaissent comme des fluctuations intérieures de la métrique mais ils forment une partie inséparable de cette dernière. Le point-clef est que les champs de jauge *non abéliens* surgissent inévitablement comme un résultat de la non-commutativité de notre paradigme géométrique.

La géométrie non-commutative dictée par la physique est alors donnée par le produit du continu ordinaire 4-dimensionnel par une géométrie non-commutative finie $(\mathcal{A}_F, \mathcal{H}_F, D_F)$ qui apparaît naturellement à partir de la classification des géométries de KO-dimension finie égale à 6 modulo 8 (*cf.* [5,3]). L'algèbre de dimension finie $\mathcal{A}_F$ qui est apparue est de la forme

$$\mathcal{A}_F = C_+ \oplus C_-; \qquad C_+ = M_2(\mathbb{H}), \quad C_- = M_4(\mathbb{C}).$$

L'accord du formalisme mathématique de la géométrie spectrale et de toutes les subtilités telles que la périodicité de période 8 de la KO-theory, est prometteuse mais elle pourrait encore s'avérer accidentelle. Plutôt, ce qui est plus convaincant, c'est la pertinence de cette approche quand on retrouve [3] le mécanisme see-saw (qui était dicté par le calcul purement mathématique du modèle), en ignorant à ce moment son rôle-clef en physique pour fournir des masses très petites aux neutrinos, et qu'on sait la manière dont il est « ajouté à la main » dans le modèle standard. La masse faible pour le Higgs qui a été trouvée en 2012 mettait le modèle en défaut, mais dans [10] nous avons montré la compatibilité du modèle avec la valeur mesurée de la masse du Higgs, du fait du rôle dans la renormalisation du champ scalaire qui était déjà présent dans [7] mais que nous avions ignoré car nous pensions qu'il n'affecterait pas le processus d'auto-couplage du Higgs.

Dans tous les développements précédents, nous avons suivi une approche « bottom-up » , *i.e.* nous découvrions les détails de la géométrie non-commutative finie $(\mathcal{A}_F, \mathcal{H}_F, D_F)$ à partir des informations expérimentales contenues dans le modèle standard couplé à la gravitation. En 2014, en collaboration avec S. Mukhanov [15,14], nous avons étudié le problème purement géométrique de coder les 4-variétés de la manière la plus économique possible dans le formalisme spectral. Le problème n'avait pas de lien a priori avec le modèle standard des particules et les forces et l'idée était de traiter les coordonnées de la même manière que les moments sont assemblés dans un seul opérateur en utilisant des matrices gamma. La grande surprise a été que cette étude a fourni l'explication conceptuelle de la géométrie non-commutative finie à partir des algèbres de Clifford ! Ceci est décrit en détails dans [28] à quoi nous faisons référence. Ce que nous avons obtenu est une forme plus élevée des relations de commutation de Heisenberg entre P et Q, dont les représentations irréductibles dans l'espace de Hibert correspondent aux géométries de spin 4-dimensionnelles. Le rôle de P est joué par l'opérateur de Dirac comme expliqué précédemment, et le rôle de Q par le slash de Feynman des coordonnées en utilisant des algèbres de Clifford. La preuve que toutes les géométries de spin sont obtenues s'appuie sur des résultats profonds de la théorie de l'immersion et des recouvrements ramifiés de la sphère. Le volume de la géométrie 4-dimensionnelle est automatiquement quantifié par le théorème de l'indice et le modèle spectral, en prenant en compte les automorphismes intérieurs dus à la nature non-commutative des algèbres de Clifford, donne la gravité d'Einstein couplée avec une légère extension du modèle standard, le modèle de Pati–Salam. Ce modèle s'est avéré dans [11,13] permettre d'unifier les constantes de couplage. Nous renvoyons à l'article [17] pour un compte-rendu concis de toute l'histoire de l'évolution de cette théorie de ses débuts à aujourd'hui.

Modèle standard	Modèle spectral
Boson de Higgs	Métrique intérieure$^{(0,1)}$
Bosons de jauge	Métrique intérieure$^{(1,0)}$
Masses des fermions u, ν	Dirac$^{(0,1)}$ dans $\uparrow$
Matrice CKM, Masses down	Dirac$^{(0,1)}$ dans $(\downarrow 3)$
Mélange des leptons, Masses des leptons e	Dirac$^{(0,1)}$ dans $(\downarrow 1)$
Matrice de masse de Majorana	Dirac$^{(0,1)}$ sur $E_R \oplus J_F E_R$
Couplages de jauge	Fixé à l'unification
Paramètre d'éparpillement de Higgs	Fixé à l'unification
Constante de Tadpole	$-\mu_0^2 \, \lvert\mathbf{H}\rvert^2$

TABLE 2 – Le dictionnaire entre la terminologie de la physique et la géométrie de structure fine

6 Dimension 4

L'approche ci-dessus de la géométrie de l'espace-temps n'était pas directement motivée par la gravité quantique mais elle adresse une question préliminaire plus basique qui est de comprendre la raison pour laquelle la gravité et le modèle standard ensemble représentent l'ensemble des forces de la nature. Nous avons vu dans la Section 5 que tant qu'on autorise le codage de l'algèbre de coordonnées en utilisant un montant minimum de non-commutativité, la gravité couplée avec le modèle standard apparaît naturellement avec les théories de jauge non-abéliennes comme témoins du codage non-commutatif. Nous discutons maintenant brièvement du fait que la dimension 4 est distinguée dans cette approche. Comme expliqué plus haut, l'extension de la géométrie riemannienne au-delà de son domaine classique, dans la théorie des espaces d'opérateurs fournit la flexibilité nécessaire pour répondre à la question de Riemann dans sa leçon inaugurale. Du point de vue mathématique, c'est la notion de variété qui est au centre, et quand on veut capturer les propriétés-clefs qu'ont les variétés à un niveau global (non local), on trouve que la principale d'entre elle est la dualité de Poincaré. Mais ça n'est pas la dualité de Poincaré dans l'homologie ordinaire, mais plutôt dans une théorie plus raffinée appelée *KO*-homologie. Une interaction remarquable avec le formalisme quantique apparaît alors à partir de la confluence entre la compréhension abstraite de la notion de variété à partir de sa classe fondamentale en *KO*-homologie avec la réalisation des cycles en *KO*-homologie à partir des représentations dans l'espace de Hilbert. La touche finale sur la compréhension de la raison géométrique qui se cache derrière la gravité couplée avec le modèle standard vient de la quantification simultanée de la classe fondamentale de *KO*-homologie et de son dual en *KO*-théorie qui donne naissance à la relation de Heisenberg d'un niveau plus élevé. Nous expliquons maintenant avec davantage de détails la raison pour laquelle la dimension 4 joue un rôle particulier dans ce contexte [15,14].

Pour coder une variété M de dimension d en utilisant la dualité ci-dessus entre la *KO*-homologie et la *KO*-théorie, on a besoin de construire une paire d'applications ϕ, ψ de M vers la sphère (de la même dimension d) de telle façon que la somme des pullbacks de la forme (sphérique) du volume de la sphère ne s'évanouisse nulle par sur M. Ce problème est facile à résoudre en dimension 2 et 3 parce qu'on écrit d'abord M comme une couverture ramifiée $\phi : M \to S^d$ de la sphère et qu'on pré-compose ϕ avec un difféomorphisme f de M tel que $\Sigma \cap f(\Sigma) = \emptyset$ où Σ est le sous-ensemble dans lequel ϕ est ramifié. Le sous-ensemble est de codimension 2 dans M et il n'y a pas de difficulté à trouver f parce que $(d-2) + (d-2) < d$ pour $d < 4$. Il est à noter que le 2 pour la codimension de Σ est facile à comprendre à partir de l'analyse complexe : pour une application arbitraire continue $\phi : M \to S^d$, le jacobien s'évanouira sur un sous-ensemble de codimension 1, mais en analyse complexe en dimension 1, le jacobien est une somme de carrés et son évanouissement signifie l'évanouissement de la dérivée qui donne deux conditions plutôt qu'une. Ainsi, **la dimension $d = 4$ est la dimension critique** pour le problème d'existence ci-dessus de la paire ϕ, ψ. Une telle paire n'existe pas toujours[2] mais, comme cela est montré dans [15, 14], elle existe toujours pour les variétés de spin ce qui est le cas correspondant pour l'intégrale fonctionnelle calculée dans la signature euclidienne.

La forme d'un niveau plus élevé de la relation de commutation d'Heisenberg mentionnée ci-dessus fait intervenir en dimension d la puissance d du commutateur $[D, Z]$ de l'opérateur de Dirac avec l'opérateur Z qui est construit (en utilisant la structure réelle J, voir [28]) à partir des coordonnées. Nous expliquerons maintenant brièvement comment cela s'adapte parfaitement avec le formalisme de D. Sullivan sur les variétés de Sobolev, *i.e.* des variétés de dimension d où le pseudo-groupe sous-tendant la carte préserve les fonctions continues avec une dérivée dans L^d. Il a découvert le rôle particulièrement intrigant de la dimension 4 à cet égard. Il a montré dans [37] que les variétés topologiques pour des dimensions > 5 admettent des coordonnées bi-Lipschitziennes et qu'elles sont uniques à petites perturbations près, de plus l'existence et l'unicité sont aussi vérifiées pour les structures de Sobolev : une dérivée dans L^d.

2. Elle n'existe pas pour $M = P_2(\mathbb{C})$.

Un résultat plus fort était connu classiquement pour les dimensions 1, 2 et 3. Là, la topologie contrôle la structure de continuité à petite déformation près. En dimension 4, D. Sullivan a démontré avec S. Donaldson dans [32] que pour les variétés avec coordonnées dans des cartes reliées par le pseudo-groupe préservant les fonctions continues avec une dérivée dans L^4, il est possible de développer une théorie de jauge $SU(2)$ et les célèbres invariants de Donaldson. Ainsi, en dimension 4, les variétés de Sobolev se comportent comme les variétés continues par opposition aux variétés topologiques abondantes de Freedman[3]. La question évidente alors est de savoir dans quelle mesure l'équation de niveau plus élevé de Heisenberg de [15,14] distingue les variétés de Sobolev comme les variétés pertinentes pour l'intégrale fonctionnelle faisant intervenir l'action spectrale.

7 Le niveau de la seconde quantification

La dernière section est plus spéculative et au contraire des sections précédentes, elle adresse une question fondamentale qui est essentiellement ouverte. Cette question peut être formulée comme suit

> *Quelle est la pertinence du lien entre le formalisme à plusieurs particules de la théorie quantique des champs et la géométrie de l'espace-temps ?*

En fait, nous avons déjà vu un soupçon d'une réponse dans la Section 4 où nous avons remarqué que puisque l'élément de longueur codé par le propagateur de Dirac est habillé (comme une série de puissances formelles des puissances de $\hbar$) à partir des corrections de la théorie des champs, cela suggérait que la géométrie elle-même, en étant englobée par le propagateur de Dirac obtient son habillage.

Mais le formalisme ci-dessus reste au niveau de la première quantification et le problème de la seconde quantification ne peut être ignoré puisque les corrections quantiques de l'élément de longueur, comme expliqué dans la Section 4 ci-dessus sont seulement la partie émergée de l'iceberg. En effet, l'habillage advient pour toutes les fonctions de n-points pour les fermions, et non seulement pour les fonctions de deux points.

Un autre soupçon significatif pour le rôle de la seconde quantification est le résultat de [16] sur la seconde quantification des fermions et l'action spectrale comme une entropie. Le point là est que le principe d'action qui retrouve la gravité couplée au modèle standard est donné par la fonctionnelle additive la plus générale des géométries spectrales et que celles-ci dépendent d'une fonction paire f arbitraire donnée a priori d'une variable réelle qui définit l'action comme une trace de $f(D)$. Ce que nous avons montré en [16], comme une première étape vers la construction à partir de la théorie quantique des champs d'une version *quantifiée au second niveau* de la géométrie spectrale, est que si on applique une quantification fonctorielle libre aux fermions comme celle des algèbres de Clifford et si on utilise l'opérateur de Dirac pour définir une évolution temporelle sur l'algèbre de Clifford, on découvre que l'entropie de von Neumann des états d'équilibre de Boltzmann-Gibbs (voir la Section 2) est l'action spectrale pour une fonction f intimement reliée à la fonction zeta de Riemann. Cela nous a amenés aux premières lignes d'un

3. pour lesquelles tout module de continuité quel qu'il soit n'est pas connu.

dictionnaire allant de la première à la seconde quantification comme celui donné dans la Table 3. Notons également qu'un résultat analogue à [16] a été obtenu dans [33] pour le cas du boson.

Première-quantification	**Seconde-quantification**
Algèbre	Action des fluctuations intérieures sur l'évolution temporelle
Espace de Hilbert	Algèbre de Clifford
Opérateur de Dirac	Évolution temporelle pour les états KMS_β sur l'algèbre de Clifford
Action spectrale	Entropie des états KMS_β

TABLE 3 – Le dictionnaire pour la seconde quantification fermionique des triplets spectraux

D'un point de vue purement mathématique, ce besoin de passer au niveau supérieur d'une seconde quantification de géométrie est en quelque sorte similaire à ce qui se passe dans le développement de la K-théorie. La K-théorie topologique, telle qu'elle a été développée par Atiyah-Hirzebruch, basée sur la périodicité de Bott amène à la dualité-clef entre la KO-homologie et la KO-théorie et est à l'origine des relations plus élevées de Heisenberg. Comme cela a déjà été dit dans [26], la K-théorie algébrique, qui est une vaste spécialisation de la K-théorie topologique, est en train de mendier le développement d'une théorie duale et on devrait s'attendre à ce qu'il y ait des relations profondes entre cette théorie duale et la théorie des quanta interragissant de la géométrie. Comme point de départ concret, notons que les résultats les plus profonds sur la topologie des groupes de difféomorphismes des variétés sont fournis par la K-théorie algébrique des espaces de Waldhausen et nous nous référons à [34] pour une image unifiée de la K-théorie algébrique.

Finalement, la compréhension conceptuelle de la renormalisation a montré (voir [30]) qu'il y a un groupe de symétrie très non-commutatif, le *Groupe de Galois cosmique*, qui incarne dans le processus de renormalisation les ambiguités inhérentes aux calculs des interactions physiques de la théorie quantique des champs. Comment ce groupe de symétrie se combine avec l'impact vu ci-dessus de la physique sur la géométrie, et comment la renormalisation s'adapte au principe d'action spectrale sont des questions ouvertes profondes dont seules les premières étapes de la résolution ont été récemment franchies [35,36]. Ces sont les témoins du rôle surprenant de la non-commutativité en physique.

Références

[1] A. Chamseddine, A. Connes, *The Spectral action principle*, Comm. Math. Phys. Vol.186 (1997), 731–750.

[2] A. Chamseddine, A. Connes, *Inner fluctuations of the spectral action*, J. Geom. Phys. 57 (2006), N.1, 1–21.

[3] A. Chamseddine, A. Connes, M. Marcolli, *Gravity and the standard model with neutrino mixing*, Adv. Theo. Math. Phys. 11 (2007) 991-1089.

[4] A. Chamseddine, A. Connes, *Quantum gravity boundary terms from the spectral action of noncommutative space.* Phys. Rev. Lett. 99 (2007), no. 7, 071302, 4 pp.

[5] A. Chamseddine, A. Connes, *Why the Standard Model ?*, J. Geom. Phys. 58 (2008), no. 1, 38-47.

[6] A. Chamseddine, A. Connes, *The uncanny precision of the spectral action.* Comm. Math. Phys. 293 (2010), no. 3, 867–897.

[7] A. Chamseddine and A. Connes, *Noncommutative Geometry as a framework for unification of all fundamental interactions including gravity*. Fortsch. Phys. 58 (2010) 553.

[8] A. Chamseddine, A. Connes, *Noncommutative geometric spaces with boundary : spectral action.* J. Geom. Phys. 61 (2011), no. 1, 317–332.

[9] A. Chamseddine, A. Connes, *Spectral action for Robertson-Walker metrics*. J. High Energy Phys. 2012, no. 10, 101.

[10] A. Chamseddine and A. Connes, *Resilience of the Spectral Standard Model*, JHEP, 1209 (2012) 104.

[11] A. Chamseddine, A. Connes and W. D. van Suijlekom, *Beyond the Spectral Standard Model : Emergence of Pati-Salam Unification.* JHEP 11 (2013) 132.

[12] A. Chamseddine, A. Connes and W. D. van Suijlekom, *Inner Fluctuations in Noncommutative Geometry without the First Order Condition.* Jour. Geom. Phys. 73 (2013) 222.

[13] A. Chamseddine, A. Connes and W. D. van Suijlekom, *Grand Unification in the Spectral Pati-Salam models*. JHEP 2511 (2015) 011.

[14] A. Chamseddine, A. Connes and V. Mukhanov, *Geometry and the Quantum : Basics*, JHEP 12 (2014) 098.

[15] A. Chamseddine, A. Connes and V. Mukhanov, *Quanta of Geometry : Noncommutative Aspects*, Phys. Rev. Lett. 114 (2015).

[16] A. Chamseddine, A. Connes and W. D. van Suijlekom, *Entropy and the spectral action*. arXiv : 1809.02944.

[17] A. Chamseddine, W. D. van Suijlekom, *A survey of spectral models of gravity coupled to matter*. Advances in Noncommutative Geometry, Springer, (2019).

[18] A. Connes. *Un nouvel invariant pour les algèbres de von Neumann*. (French) C. R. Acad. Sci. Paris Ser A-B 273 1971 A900–A903.

[19] A. Connes. *Calcul des deux invariants d'Araki et Woods par la théorie de Tomita et Takesaki*. (French) C. . Acad. Sci. Paris Ser A-B 274 (1972), A175–A177.

[20] A. Connes, *Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 274 (1972), 1923–1926.

[21] A. Connes. *Une classification des facteurs de type III*. C. R. Acad. Sci. Paris Ser A-B 275 (1972), A523–A525.

[22] A. Connes. *Une classification des facteurs de type III*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **6** (1973), 133-252.

[23] A. Connes. *The von Neumann algebra of a foliation*. Mathematical problems in theoretical physics, pp. 145-151, Lecture Notes in Phys., 80, Springer, Berlin, 1978.

[24] A. Connes. *Sur la théorie non commutative de l'intégration*. Algèbres d'opérateurs, pp. 19-143, Lecture Notes in Math., 725, Springer, Berlin, 1979.

[25] A. Connes, *C^*-algèbres et géométrie différentielle*. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **290** (1980), A599-A604.

[26] A. Connes, *Leçon inaugurale*, Collège de France, 1985.

[27] A. Connes, A. van Daele, *The group property of the invariant S of von Neumann algebras*. Math. Scand. 32 (1973), 187–192 (1974).

[28] A. Connes, M. Karoubi *Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm* K-Theory 2 (1988) 431–463.

[29] A. Connes and M. Takesaki. *The flow of weights on factors of type III*. Tôhoku Math. J. **29** (1977), 473-575.

[30] A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Colloquium Publications, Vol.55, American Mathematical Society, 2008.

[31] P. A. M. Dirac. Quantum theory of emission and absorption of radiation. *Proc. Roy. Soc. Lond.* A114 (1927) 243.

[32] S. Donaldson, D. Sullivan, *Quasiconformal 4-manifolds*. Acta Math. Volume 163 (1989), 181-252.

[33] R. Dong, M. Khalkhali, W. D. van Suijlekom, *Second quantization and the spectral action*. J. Geom. Phys. 167 (2021) 104285.

[34] B. I. Dundas, T. G. Goodwillie, R. McCarthy, *The local structure of algebraic K-theory*. Algebra and Applications, 18. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2013.

[35] T. van Nuland, W. D. van Suijlekom, *Cyclic cocycles in the spectral action* J. Noncommut. Geom. (2021) [arXiv :2104.09899].

[36] T. van Nuland, W. D. van Suijlekom, *One-loop corrections to the spectral action* To appear in *JHEP* [arXiv :2107.08485].

[37] D. Sullivan, *Hyperbolic geometry and homeomorphisms*. Geometric Topology Conference, Athens, Georgia, 1977, Academic Press, New York, 1979, pp. 543–555.

[38] M. Takesaki, *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III*, Acta Math. Vol.131 (1973), 249–310.

[39] M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*. Lecture Notes in Math., 128, Springer, 1970.