Messiaen

Conférence de Kyoto

12 novembre 1985

On me demande de faire un résumé technique de mon langage musical. Ce n'est pas une chose facile. Il faudrait y passer 2 ou 3 mois, en faisant une sorte de classe pour initiés, avec exemples musicaux au Piano et à l'Orchestre. Je vais essayer de le faire en une heure, uniquement avec des mots, et, hélas ! en français. La première chose que je puis dire, c'est que je me suis toujours heurté à quatre difficultés, qui sont le malheur de ma vie, et auxquelles le temps seul a pu apporter quelques solutions. La première difficulté est que je suis un musicien rythmicien, et que les gens auxquels je m'adresse confondent le rythme avec les valeurs égales et les temps réguliers. La seconde est que je vois des couleurs intellectuellement lorsque j'entends ou que je lis de la musique, et que mes élèves comme mes auditeurs ne voient pas de couleurs du tout. La troisième est que je suis ornithologue, que j'ai noté beaucoup de chants d'oiseaux, que je les utilise constamment dans mes œuvres, et que le public des concerts est généralement composé d'habitants des villes qui n'ont jamais entendu un chant d'oiseau. La quatrième, la plus grave, et la plus terrible, est que je suis croyant, chrétien, et catholique, et que je parle de Dieu, des Mystères Divins, et des Mystères du Christ, à des gens qui n'y croient pas, ou qui connaissent mal la religion et la théologie. Si vous le permettez, je vais traiter de ces quatre difficultés, l'une après l'autre.

Le rythme

Après avoir terminé mes études traditionnelles au Conservatoire de Paris, j'ai voulu en savoir davantage sur le rythme et je l'ai étudié pratiquement tout seul. J'ai d'abord travaillé le plain-chant ou chant grégorien, et l'alternance des arsis et des thésis, c'est-à-dire des levées et des retombées, et le mélange du 2 et du 3. Ensuite, j'ai abordé la Métrique grecque, avec l'emploi des nombres premiers (par exemple le chiffre 7 dans les Épitrites ou le chiffre 11 dans le vers Aristophanien). Puis, j'ai longuement réfléchi sur les Decî-tâlas ou rythmes provinciaux de l'Inde Antique. J'ai essayé de retrouver leurs symboles cosmiques et religieux, et surtout leurs lois rythmiques. On trouve dans la Métrique grecque le rythme Crétique : longue, brève, longue - qui existe aussi dans les decî-tâlas de l'Inde sous le nom de Dhenkî, ce rythme est un "rythme non rétrogradable". Le rythme non rétrogradable est au départ de presque toutes mes recherches rythmiques. On trouve déjà des rythmes non rétrogradables dans ma première œuvre valable pour l'orgue : "La Nativité du Seigneur", écrite en 1935. Je vais essayer d'expliquer le rythme non rétrogradable par quelques images poétiques. Depuis longtemps, dans les arts décoratifs (architecture, tapisserie, vitrerie, parterres de fleurs), on use de motifs inversement symétriques, ordonnés autour d'un centre libre. Cette disposition se retrouve dans les nervures des feuilles d'arbres, dans les ailes de papillons, dans le visage et le corps humain, et même dans les vieilles formules de magie. Le ryhme non rétrogradable fait exactement la même chose. Ce sont deux groupes de durées, rétrogradés l'un par rapport à l'autre, encadrant une valeur centrale libre et commune aux deux groupes. Lisons le rythme de gauche à droite ou de droite à gauche, l'ordre de ses durées reste le même. C'est un rythme absolument fermé.

Viennent ensuite les "personnages rythmiques". On trouve dans la "Danse sacrale" du "Sacre du Printemps" de Stravinsky, le départ de cette idée : deux groupes de durées sont en présence, le premier décroît, le second ne change pas. En amplifiant un peu la chose, je vais donner des personnages rythmiques une explication qui vient des conventions théâtrales. Supposons une scène de théâtre : trois personnages sont sur le plateau - le premier agit, c'est lui qui mène la scène - le second est mû, est agi par le premier - le troisième assiste au conflit sans intervenir, il regarde et ne bouge pas. De même, trois groupes rythmiques sont en présence : le premier augmente, c'est le personnage attaquant - le deuxième diminue, c'est le personnage attaqué - le troisième ne change jamais, c'est le personnage immobile. Dans le cinquième mouvement de "Turangalîla-Symphonie" (pour Piano solo, Onde Martenot, et grand Orchestre, 1946, 1947, 1948), j'ai utilisé un développement à six personnages rythmiques. Deux augmentent, deux diminuent, deux restent immobiles. Avec cette complication que les trois premiers accomplissent les gestes des trois autres en sens inverse, en rétrogradant les durées.

Les "permutations symétriques". On sait que le nombre de permutations de plusieurs objets distincts augmente démesurément à chaque ajout d'une unité nouvelle aux objets choisis. Trois objets ont 6 permutations possibles, douze objets donnent 479 001 600 permutations. Je prends une gamme chromatique de durées allant de la triple croche à la ronde, donc de 1 à 32 triples croches, avec toutes les durées intermédiaires. Si je veux en chercher et en utiliser les permutations, leur nombre est si élevé qu'il me faudrait plusieurs années pour les écrire. Il faut donc choisir, et choisir avec le maximum de chance de dissemblance d'une permutation à l'autre. Pour y arriver, je lis ma gamme chromatique de durées dans un ordre choisi par moi. Puis, ayant écrit le résultat, je numérote de 1 à 32 la succession des durées obtenues. Ensuite, je lis cette nouvelle succession dans le même ordre que la première fois, j'écris de nouveau le résultat, et je recommence, ce qui me donne un troisième résultat, et ainsi de suite, jusqu'à ce que je retrouve textuellement la gamme chromatique de durées de départ. Cela donne un chiffre de permutations raisonnable, pas très loin du nombre de durées choisies, et aussi des permutations assez différentes pour être juxtaposées et superposées. J'ai utilisé les "permutations symétriques" pour la première fois dans "Île de feu 2" pour piano (1950), mais on les retrouve dans plusieurs de mes œuvres postérieures à 1950. L'œuvre où elles apparaissent le plus fortement, c'est "Chronochromie" pour orchestre (1959-1960). Dans les deux "strophes" de Chronochromie, on entend des “permutations symétriques” superposées 3 par 3, dont le déroulement fait chaque fois toute la strophe. Comme la succession de leurs durées est difficile à entendre, j’ai habillé ces durées de trois façons : d’abord par des chants d’oiseaux aux Bois, qui rappellent constamment l’unité de valeur (ici, la triple croche) - ensuite par des timbres d’instruments métalliques à résonance prolongée (gongs, cloches, cymbales, et tam tam) - enfin, par des races d’accords aux couleurs très différentes, confiées aux cordes.

Pour être tout à fait complet, je dois mentionner quelques autres recherches rythmiques. Dans mon “Livre d’orgue” (1951), j’ai utilisé trois cas de permutation : le mouvement rétrograde, le mouvement extrêmes au centre, le mouvement centre aux extrêmes. Encore dans mon “Livre d’orgue”, j’ai utilisé des rythmes hindous traités en “personnages rythmiques”. Toujours dans mon “Livre d’orgue”, je me suis servi d’une gamme chromatique de 64 durées, allant de 1 à 64 triples croches, dans un ordre de permutation choisi par moi, et traitées en canon rétrograde. Dans mes “Trois petites Liturgies de la Présence Divine”, pour chœur de voix de femmes, Piano solo, Onde Martenot, vibraphone, percussions, orchestre à cordes (1944), on trouvera un canon par ajout du point : toutes les durées proposantes étant augmentées de leur moitié par les durées répondantes. Enfin, j’ai écrit en 1949 “Mode de valeurs et d’intensités” pour Piano, sorte de super-série de 36 sons, 24 durées, 12 attaques, 7 intensités. L’idée de série, quittant l’univers exclusif des sons, est appliquée à d’autres paramètres. Ce sont, évidemment, les durées qui ont le plus d’importance : elles divisent le clavier en trois gammes chromatiques de durées, la première basée sur la triple croche, la deuxième basée sur la double croche, la troisième basée sur la croche. J’ai repris cet effet dans la “Chouette Hulotte” de mon “Catalogue d’oiseaux” pour piano (1956 à 1958), et dans le tableau des “Stigmates” de mon opéra “saint François d’Assise” (écrit de 1974 à 1983).

Le son-couleur

J’ai toujours aimé la couleur. Tout enfant, je faisais des décors de théâtre miniature, dont les fonds de scène étaient en cellophane colorée avec des encres de couleurs. Je plaçais ces fonds de scène contre une fenêtre, et la lumière du soleil passait à travers mes cellophanes et renvoyait des reflets colorés. Vers l’âge de 10 ans, j’ai vu pour la première fois les vitraux de la Sainte Chapelle à Paris, et ces vitraux me marquèrent pour la vie. J’aime aussi beaucoup les vitraux de la cathédrale de Bourges, leurs rouges et leurs bleus sont extraordinaires, mais rien ne peut remplacer la Sainte Chapelle qui est toute en vitres. Vers l’âge de 23 ans, Blanc-Gatti était atteint de synopsie, c’est-à-dire qu’il avait un dérèglement du nerf optique et du nerf auditif qui lui faisait voir des couleurs lorsqu’il entendait des sons. Il voyait ces couleurs par les yeux, et elles se superposaient pour lui au milieu ambiant, C’est ainsi qu’il a peint un orgue, dont les tuyaux sont entourés de cercles de couleurs : lorsque l’orgue était joué et produisait des complexes de sons, il entendait les sons, voyait l'orgue, et, en plus, des cercles de couleurs se superposaient pour lui à la vision de l'orgue : il a donc peint exactement ce qu'il voyait. Ce phénomène m'a fait beaucoup réfléchir. Et je me suis rendu compte que, moi aussi, je liais des couleurs aux sons, mais intellectuellement, pas par les yeux. En effet, depuis toujours, lorsque j'entends ou lorsque je lis de la musique (en l'entendant intérieurement), je vois dans ma tête des complexes de couleurs qui marchent et bougent avec les complexes de sons. À force d'observer ce qui se passait en moi, j'en ai déduit une loi. S'il reste à la même place, un complexe de sons situé dans le médium engendre toujours les mêmes couleurs. Si on le transporte à l'octave aiguë, les mêmes couleurs seront dégradées vers le blanc (c'est-à-dire plus claires), si on le transporte à l'octave grave, les mêmes couleurs seront rabattues par le noir (c'est-à-dire plus sombres). Si on transpose le même complexe de sons au demi-ton, au ton, à la tierce, à la quarte, etc. les couleurs correspondantes changent complètement. Il s'ensuit qu'il y a, pour chaque complexe de sons, 12 combinaisons de couleurs changeant avec chacun des 12 demi-tons, mais que la combinaison de couleurs reste la même au simple changement d'octave, avec un éclaircissement s'il s'agit d'une octave aiguë, avec un assombrissement s'il s'agit d'une octave grave.

J'ai utilisé dans mes œuvres un très grand nombre de complexes de sons qui sont en même temps des complexes de couleurs. Pour les chants d'oiseaux harmonisés, j'ai dû parfois inventer un accord différent pour chaque note de la mélodie. Je parlerai seulement ici des "modes à transpositions limitées", des "accords à renversements transposés sur une même note de basse", des "accords à résonance contractée", de "l'accord du total chromatique".

Les "modes à transpositions limitées". J'en avais catalogué sept dans ma jeunesse, mais je ne me suis servi en fait que de quatre modes : le mode 2, le mode 3, le mode 4, le mode 6. Chaque mode n'est transposable qu'un certain nombre de fois, après quoi on retombe dans les mêmes notes. C'est précisément cette limitation, cette impossibilité dans la transposition qui fait leur charme, et les apparente aux "rythmes non rétrogradables" : en effet, les "rythmes non rétrogradables" ne peuvent pas se rétrograder parce qu'ils contiennent en eux-mêmes de petites rétrogradations, et les "modes à transpositions limitées" ne peuvent pas se transposer parce qu'ils contiennent en eux-mêmes de petites transpositions. On a souvent cité mes "modes à transpositions limitées" comme des gammes. Ce ne sont pas des gammes, mais des couleurs harmoniques. Couleurs du mode 2, qui se transpose trois fois : première transposition : bleu violet - deuxième transposition : or et brun - troisième transposition : vert. Couleurs du mode 3, qui se transpose quatre fois : première transposition : orangé, or, et blanc laiteux - deuxième transposition : gris et mauve - troisième transposition : bleu et vert - quatrième transposition : orangé, rouge, avec un peu de bleu. Les modes sont des lieux colorés, des petits pays colorés, où la couleur générale reste la même tant que l'on ne change pas de mode ou de transposition. Pour les accords, il en va autrement. L'accord est une couleur en soi qui change aux 12 transpositions possibles. Dans le cas des “accords à résonance contractée”, nous aurons toujours deux couleurs : la couleur de l’accord appogiature, la couleur de l’accord réel, compliquées des sons résultants graves ramenés au médium contre les autres notes. Dans le cas des “accords du total chromatique”, il s’agit non pas d’un “cluster” mais d’un ensemble de douze sons comprenant huit sons colorés, et quatre sons supplémentaires aigus qui rentrent dans la résonance des huit premiers. Le premier “accord du total chromatique” donne : une large nappe bleu violet, avec des lunes roses, jaune pâle, et gris d’acier - les quatre notes supplémentaires l’entourent d’un cercle vert mousse clair. Le neuvième “accord du total chromatique” donne : deux zones rouges côte à côte : une grande zone rouge rubis, une zone rouge carmin plus petite - les quatre notes supplémentaires ajoutent tout autour un cercle bleu gris, clair et brillant. Le cas le plus intéressant est celui des “accords à renversements transposés sur la même note de basse”. L’accord à l’état fondamental possède une certaine couleur. Ses renversements, en groupant différemment les mêmes notes, donnent des couleurs analogues mais non semblables. Si nous transposons les renversements sur la même note de basse, nous obtenons quatre couleurs très différentes : l’état fondamental, le premier, le deuxième, et le troisième renversements. En prenant chacun des douze sons comme note de basse nous obtenons 48 couleurs différentes. Quatrième “accord à renversements transposés” sur la même note de basse : mi. Etat fondamental sur mi : bandes verticales vertes, violettes, bleu foncé - premier renversement sur mi : blanc et or - deuxième renversement sur mi : large manteau bleu saphir intense, dans les plis : des reflets violet Parme et bleu de Chartres - troisième renversement sur mi : une spirale d’or à reflets bleus et roses, sur un grand fond rouge carmin. Ces reflets irisés, ces opalescences, évoquent certains papillons dont les ailes - bleues de tous les bleus - deviennent vertes et violettes suivant les incidences de la lumière. Mieux encore, ils imitent les mouvements colorés des gemmes et des pierres précieuses : l’œil de chat, l’alexandrite, la chalcopyrite, les tourmalines, et l’opale (qui a donné son nom à l’opalescence).

Les chants d’oiseaux

Je ne suis pas seulement musicien, rythmicien, et apôtre du son couleur, je suis aussi ornithologue. Depuis l’âge de 18 ans environ, je note des chants d’oiseaux. J’ai noté des chants d’oiseaux chaque année, au moment où les oiseaux chantent, c’est-à-dire au printemps, tôt le matin (avant le lever du soleil), tard le soir (avant le coucher du soleil), et aussi dans la matinée et dans l’après-midi. J’ai fait ce travail d’abord en France, puis aux États-Unis d’Amérique, au Japon, et en Nouvelle-Calédonie. Chaque oiseau a son style, son esthétique particulière. Je parlerai d’abord des oiseaux de France (qui sont à peu près les mêmes dans toute l’Europe). On trouve en France les oiseaux des parcs et des jardins (comme la Fauvette à tête noire), les oiseaux de lisière de forêt (comme la Grive musicienne), les oiseaux des champs de blé (comme l’Alouette des champs), les oiseaux des vignes (comme la Linotte), les oiseaux des garrigues (comme le Traquet Stapazin), les oiseaux des roseaux et des étangs (comme la Rousserolle Effarvatte), les oiseaux de haute montagne (comme le Chocard des Alpes), les oiseaux des côtes marines et de l'Océan (comme le Courlis cendré). Il y a parmi tous ces oiseaux de grands et de petits chanteurs. Ceux qui ne font que des cris rythmés : les oiseaux de la montagne et de la mer. Ceux qui font des strophes plus ou moins élaborées : le Pic vert, le Pinson, le Loriot, la Chouette Hulotte. Ceux qui font de grands solos : l'Alouette des champs, la Grive musicienne, le Rossignol, la Fauvette des jardins, le Merle noir, le Rouge-gorge. L'emploi des chants d'oiseaux dans une œuvre demande beaucoup de travail. Il y a d'abord la notation. C'est une dictée musicale, prise dans la nature, avec un crayon et du papier à musique. On peut en même temps enregistrer le chant au magnétophone, et faire une autre dictée musicale d'après le magnétophone. Généralement, la notation d'après le magnétophone est plus exacte - mais plus artistique est celle faite dans la nature. Il faut noter plusieurs fois un même oiseau, et mélanger toutes les notations, pour obtenir un oiseau idéal. Il faut ensuite rendre le timbre de l'oiseau. On peut le faire par l'instrumentation : les piccolos, les flûtes, le xylophone, le piano, peuvent se rapprocher du timbre de certains oiseaux. On peut aussi rendre le timbre par l'harmonisation. C'est en inventant des accords plus ou moins chargés en sons harmoniques que l'on se rapproche le plus de l'oiseau. Plusieurs oiseaux chantent parfois ensemble, spécialement au lever du jour. Il faut les noter séparément, puis les réunir en contrepoint sur le papier. Cela ne reproduit pas les mélanges entendus, mais cela reste vraisemblable si l'on fait chanter ensemble des oiseaux du même pays et du même habitat. C'est l'attitude que j'ai adoptée dans "Réveil des oiseaux" pour piano et orchestre (1952-1953). On peut au contraire mêler des chants d'oiseaux de pays et d'habitat différents, ce qui donne des résultats mensongers par rapport à la réalité vivante, mais très intéressants musicalement. Je l'ai fait dans "Oiseaux exotiques" pour Piano, xylophone, glockenspiel, percussions, orchestre de Bois et Cuivres (1955), qui rassemble des oiseaux de l'Inde, de la Chine, de l'Amérique du Nord. Les œuvres que je viens de citer ne contiennent que des chants d'oiseaux. Dans "Catalogue d'oiseaux" pour Piano seul (écrit en 1956, 1957, 1958), je me suis intéressé aussi aux paysages dans lesquels évoluaient les oiseaux et j'ai écrit chaque pièce en l'honneur d'une province de France. Le titre de la pièce est le nom de l'oiseau type de la région choisie. Tous les oiseaux qui sont ses compagnons d'habitat chantent aussi. Et des thèmes musicaux très colorés sont consacrés aux arbres, aux fleurs, aux montagnes, aux rochers, aux rivières, à la mer, au ciel. L'œuvre entière dure presque trois heures. La forme de chaque pièce suit la marche vivante des heures du jour et de la nuit. Ce procédé formel sera repris dans ma plus grande pièce pour Piano seul : "la Fauvette des jardins", pièce qui commence à quatre heures du matin et se termine à dix heures du soir, avec tous les chants d'oiseaux, tous les événements, et tous les éclairages d'une journée. Exécutée en concert, "la Fauvette des jardins" dure environ quarante minutes.

Tout de suite après le "Catalogue d'oiseaux" est venue la "Chronochromie" pour grand orchestre (1959-1960), dans laquelle on trouve des oiseaux de Suède, du Mexique, du Japon. Les Antistrophes rendent hommage à deux grands solistes de France : la

Grive musicienne, jouée par l'ensemble des Bois - et l'Alouette des champs, jouée par xylophone, marimba, et jeu de cloches. L'Épôde est un long contrepoint à 18 voix réelles, où chantent 18 oiseaux de France, confiés à 18 cordes solistes. Plus courtes sont les sept pièces des "Sept Haïkaï" (1962), pour Piano et orchestre. Elles sont spécialement dédiées au Japon. On y trouve quelques très beaux paysages du Japon ("le parc de Nara et les lanternes de pierre", "Miyajima et le torii dans la mer"), une allusion aux musiques traditionnelles japonaises, transposées sur le plan chrétien, avec mes couleurs harmoniques personnelles substituées aux accords du Shô : c'est la pièce intitulée "Gagaku". Enfin, tous les oiseaux japonais que j'ai notés à Karuizawa y figurent : notamment le célèbre Uguisu (Bouscarle du Japon), l'Hototoguisu (petit coucou à tête grise), le Kibitaki (gobe-mouches Narcisse), l'Oruri (gobe-mouches bleu du Japon), l'Aoji (bruant masqué du Japon), le San kô chô (gobe-mouches de Paradis du Japon), le Kuro tsugumi (Merle japonais), et aussi Hibari (Alouette des champs japonaise), Binzui (Pipit de Hodgson), Ô-yoshikiri (Rousserolle Turdoïde orientale).

Après les "Sept Haïkaï", j'ai écrit "Couleurs de la Cité céleste", pour piano et ensemble instrumental (1963), où l'on trouve l'oiseau Tui (Nouvelle-Zélande), le Benteveo (Argentine), et dix oiseaux du Brésil. Dans "Des Canyons aux étoiles" (1971-1974), pour Piano solo, cor solo, xylorimba, glockenspiel, et orchestre, on entend 52 oiseaux des États-Unis d'Amérique, et spécialement de l'Utah, et aussi quelques oiseaux d'Afrique, d'Australie, et des îles Hawaï.

La musique religieuse

Une grande partie de mes œuvres est consacrée à la méditation sur des mystères de la Foi chrétienne et catholique. Les "Méditations sur le Mystère de la Sainte Trinité" pour orgue (1969) traitent du premier et du plus grand mystère de la Foi. Les "Trois petites Liturgies de la Présence Divine" pour chœur de voix de femmes, Piano solo, Onde Martenot, vibraphone, célesta, percussions, et orchestre à cordes (1944), parlent de la Présence de Dieu : en nous (Antenne de la Conversation intérieure) - en Lui-même (Séquence du Verbe, Cantique Divin) - en toutes choses (Psalmodie de l'Ubiquité par amour). Plusieurs mystères de la vie de Jésus-Christ, Homme-Dieu, sont également évoqués. La naissance du Christ dans "la Nativité du Seigneur" pour orgue (1935), dans les "Vingt Regards sur l'Enfant Jésus" pour Piano seul (1944), sa Transfiguration dans "la Transfiguration de Notre-Seigneur Jésus-Christ" pour sept solistes instrumentaux, chœur et très grand orchestre (1965-1969), ses souffrances dans "l'Amen de l'agonie de Jésus" (troisième pièce des "Visions de l'Amen" pour deux pianos (1943), sa mort dans "la Puissance des ténèbres" du "Livre du Saint Sacrement" pour orgue (1984), sa Résurrection dans "Résurrection" des "Chants de terre et de ciel" pour soprano et piano (1938), dans "Combat de la mort et de la vie" des "Corps glorieux" pour orgue (1939), dans "l'Apparition du Christ ressuscité à Marie-Madeleine" du "Livre du Saint Sacrement" pour orgue (1984), son Ascension dans “l’Ascension” pour orchestre (1933). La Résurrection du Christ étant le gage de la nôtre, deux œuvres sont spécialement consacrées à notre propre résurrection : ce sont “les Corps glorieux” pour orgue (1939), puis “Et exspecto resurrectionem mortuorum” pour orchestre de Bois, Cuivres, cloches, gongs, tam tams (1964). Enfin, une œuvre est dédiée au Saint-Esprit : c’est la “Messe de la Pentecôte” pour orgue (1950).

Je voudrais maintenant parler de mes œuvres les plus importantes comme volume sonore : “la Transfiguration de Notre-Seigneur Jésus-Christ” (1965 à 1969), et l’opéra “saint François d’Assise” (1975 à 1983). Ces deux œuvres constituent une synthèse de toutes mes recherches sur le rythme, la couleur, les chants d’oiseaux. Elles sont aussi des actes de Foi.

“La Transfiguration de Notre-Seigneur Jésus-Christ” utilise un effectif considérable. Sept solistes instrumentaux : un Piano solo, un violoncelle solo, flûte, clarinette, xylorimba, vibraphone, marimba - chœur mixte de 100 personnes - Orchestre énorme de 109 musiciens - au total 216 exécutants. L’œuvre dure plus d’une heure et demie et se divise en deux septénaires, adoptant chacun le même déroulement : Récit évangélique - deux méditations - deuxième récit évangélique - deux méditations - Choral terminal. Les textes mis en musique sont des textes latins, tirés de l’Évangile selon saint Matthieu, des Épîtres de saint Paul, des Psaumes, du livre de la Sagesse, de la Genèse, des prières liturgiques de l’office de la fête, et de plusieurs passages de la “Somme théologique” de saint Thomas d’Aquin traitant de la Transfiguration. Deux idées parcourent l’œuvre : la lumière (parce que le Christ transfiguré était lumineux, brillant comme le soleil, et que les ressuscités participeront à cette gloire) - la filiation (parce que le Christ est à la fois homme et Dieu, que sa personne est celle du Fils de Dieu, le Fils par excellence, et aussi parce que la grâce nous rend fils adoptifs de Dieu). Plusieurs passages de la “Transfiguration” sont en rapport direct avec ce que j’appelle l’éblouissement, c’est-à-dire une sensation colorée intérieure analogue à celle que produisent sur les yeux les rosaces, les verrières, les vitraux des grandes cathédrales gothiques, quelque chose de terrible et de sacré, dont on ne comprend pas le détail, qui nous transporte dans un monde de lumière trop fort pour notre raison.
- Le premier de ces passages se situe dans la huitième pièce, au moment où la Voix qui sort de la nuée dit : “Celui-ci est mon Fils bien aimé”. La Voix est confiée au Chœur. Elle est accompagnée d’accords trillés multicolores aux cordes, dont les couleurs se meuvent à des vitesses différentes. Ce sont des “accords tournants”, joués dans deux transpositions superposées, auxquels s’ajoutent le frémissement des sons harmoniques, les trilles de triangle et de cymbale. Le mouvement est très lent, la nuance est pianissimo. Peu à peu, le crescendo et les “accords tournants” amènent une lumière accrue par la victorieuse tierce majeure.
- Le deuxième passage se situe à la fin de la neuvième pièce. Une grande combinaison rythmique superpose le rythme du chœur à trois groupes de rythmes différents utilisant des pieds grecs traités en brèves et longues de durées diverses, et des decî-tâlas de l’Inde en mouvement rétrograde. Chaque groupe de rythme a ses harmonies propres :

ce sont des "accords à résonance contractée", des "accords tournants", des "accords à renversements transposés". Les petites cymbales, les cloches, les gongs, doublent les rythmes des Bois et des Cordes, les trompettes et les trombones soulignent le rythme du chœur. La sonorité est très forte, ce sont des couleurs énormes qui évoluent en masse les unes sur les autres.
- Le troisième passage est dans la douzième pièce, sur les mots latins : "Gloria in excelsis Deo !" (Gloire à Dieu dans les hauteurs !).

Le début de la phrase est donné en force, par les Bois, les Cuivres, et le Chœur. Brusquement, sur le mot "Deo", on tombe dans un abîme de douceur, avec le chœur et les cordes pianissimo subito, faisant un grand changement de clarté, des contrepoints par les violoncelles pizzi, le piano jouant des accords en "deuxième mode à transpositions limitées", et des "accords à renversements transposés" et "à résonance contractée". Enfin, la sensation d'éblouissement se retrouve dans les deux chorals qui terminent chaque septénaire. Le premier choral est pianissimo, le deuxième choral est fortissimo, mais l'un et l'autre ne peuvent s'analyser que par des couleurs. Ce sont des couleurs à la fois suaves et terrifiantes, qui rejoignent cette interprétation des Psaumes s'adressant à Dieu par laquelle j'ai terminé ma "Conférence de Notre-Dame" :

"Dans Ta Musique, nous VERRONS la Musique -
Dans Ta lumière, nous ENTENDRONS la Lumière".

"Saint François d'Assise", opéra en trois actes et huit tableaux, m'a coûté plus de huit années de travail. J'en ai fait moi-même le poème, la musique, l'orchestration, et les projets de décors et de costumes. L'œuvre est très longue : près de cinq heures de spectacle. Son effectif est considérable. Il y a d'abord les sept rôles : l'Ange, saint François, le lépreux, Frère Léon, Frère Massée, Frère Élie, Frère Bernard. Puis un chœur mixte de 150 personnes. Composition orchestrale : les Bois par 7 - cinq claviers : xylophone, xylorimba, marimba, glockenspiel, vibraphone - les Cuivres par 4 (avec six cors) - trois Ondes Martenot - les Cordes en grand nombre - en plus des cinq claviers, cinq percussionnistes jouant une quarantaine d'instruments, dont deux jeux de cloches, un Éoliphone (machine à vent), et un Géophone (machine à terre). Chaque personnage a quatre ou cinq thèmes. Plus un thème d'oiseau qui l'accompagne dans toutes ses entrées en scène. Par exemple, la Gerygone (petite fauvette de l'île des Pins, près de la Nouvelle Calédonie) est attachée à l'Ange. La Capinera (Fauvette à tête noire), oiseau type des Carceri d'Assise, accompagne saint François. L'œuvre entière repose, non pas sur une progression dramatique, mais sur une progression intérieure : à chaque tableau, saint François reçoit un accroissement de grâce.

Au premier tableau : "la Croix", François comprend ce qu'est la sainteté.

Au deuxième tableau : "les Laudes", François désire la sainteté.

Au troisième tableau : "le baiser au lépreux", lorsque François embrasse le lépreux, un double miracle se produit : le lépreux est guéri et François devient saint François.

Au quatrième tableau : "l'Ange voyageur", l'Ange apparaît familièrement au milieu des hommes, comme un beau papillon énigmatique, et ceux-ci ne le reconnaissent pas.

Au cinquième tableau : “l’Ange musicien”, l’Ange apparaît à saint François (qui le reconnaît tout de suite), et il joue un solo de viole d’une telle suavité que saint François s’évanouit.

Au sixième tableau : “le Prêche aux oiseaux”, saint François, initié aux mystères célestes par la musique de l’Ange, comprend le langage des oiseaux et parle avec eux.

Au septième tableau : “les Stigmates”, le Christ parle à saint François, et c’est le chœur qui symbolise la voix du Christ. Une immense Croix apparaît. Cinq rayons partent de la Croix et viennent frapper saint François - celui-ci reçoit le sceau de l’approbation divine par les Stigmates : il devient ainsi conforme au Christ dont il porte les cinq plaies : aux deux mains, aux deux pieds, au côté droit.

Au huitième tableau : “la mort et la nouvelle vie”, l’Ange apparaît de nouveau à saint François et lui promet le Paradis, saint François meurt, et le chœur chante sa résurrection future.

Grâce à l’énorme composition orchestrale, mon opéra contient des milliers d’accords et de combinaisons de timbres, avec de constants changements de couleurs. Dans le sixième tableau : “le Prêche aux oiseaux”, on entend non seulement les oiseaux que j’ai notés aux Carceri : le Troglodyte, le Rouge-gorge, la Fauvette à tête noire, mais aussi les oiseaux de l’Île des Pins (près de la Nouvelle Calédonie) : Eopsaltria, Philemon, la fauvette Gerygone, le Gammier - on entend aussi beaucoup d’oiseaux d’Italie, de France, et d’Europe (dont l’Alouette des champs, le Merle noir, la Grive musicienne, le Loriot), des oiseaux du Maroc, du Japon, l’oiseau-lyre d’Australie. Au début du tableau, et dans le grand concert d’oiseaux qui précède sa conclusion, en plus des rythmes très complexes des xylos et des Bois, certains instruments solistes jouent hors tempo (au signe du Chef), pour rendre l’impression de désordre organisé que donne un ensemble de chants d’oiseaux. Il ne s’agit pas de musique aléatoire : ce sont des tempi différents qui se superposent. Couleurs, chants d’oiseaux, rythmes, sont plus abondants ici que dans toutes mes autres œuvres. Ce qui domine cependant, c’est la Foi. Tout mon opéra est un immense acte de Foi en Dieu. Il est en même temps un hommage à la sainteté incrnée par saint François. L’œuvre se résume par ces paroles de saint François mourant :

“Seigneur ! Musique et Poésie m’ont conduit vers Toi : par image, par symbole, et par défaut de Vérité. Seigneur ! Illumine-moi de ta Présence ! Délivre-moi, enivre-moi, éblouis-moi pour toujours de ton excès de Vérité...”

L’acte de Foi s’augmente de l’Espérance en la Résurrection, chantée en conclusion par le chœur :
“De la douleur, de la faiblesse, et de l’ignominie : il ressuscite de la Force, de la Gloire, de la Joie !!!”

```
import math
from math import pi,log

ggaammaa = 0.5772156649

def I(t):
    return((-2*log(2)+2-ggaammaa-log(t))/(4*(pi**0.5)*(t**0.5)))

def J(t):
    return((log(1/t)/(4*(pi**0.5)*(t**0.5)))-((log(4*pi)+0.5*ggaammaa)/
(2*(pi**0.5)*(t**0.5))))

def latracedemoinstDaucarre(t):
    return(J(t))

t = 1
for x in range(1,324):
    t = t/10
    print('t = ',t)
    print('   I(t) = ',I(t),'  J(t) = ',J(t),'\n')
```

La créativité en musique et en mathématiques

Pierre Boulez et Alain Connes[1]

Introduction : Bonsoir à tous, je vous souhaite la bienvenue au cœur de l'Ircam dans l'espace de projection pour cette rencontre inédite entre un mathématicien, entre Alain Connes, et un compositeur, Pierre Boulez. Alors, cette rencontre appartient au festival Agora, qui interroge la relation entre l'invention et la contrainte, entre finalement l'intuition et la logique. Et il nous semblait très important de placer ce soir ce point nodal de rencontre, cette tentative de rencontre entre deux mondes qui coexistent et qui, peut être, ont des choses à se dire.

Alors je voulais simplement vous signaler que, évidemment, il sera question de la déduction dans l'opération artistique comme de l'intuition dans l'opération mathématique. Et c'est le *comme* qui est une relation insondable et assez complexe. Gérard Assayag, directeur de l'Unité mixte de recherche CNRS-Ircam, va animer, s'il en est besoin, ce débat, en tout cas, va servir de catalyseur. Et je voulais aussi dire que ce débat s'inscrit dans le cadre de la conférence Mathématiques et musique, conférence internationale qui a lieu au moment d'Agora.

Peut être que cette conférence décrètera l'irréductibilité entre l'invention artistique et l'invention mathématique. Mais irréductible est un terme qui a été interrogé par les mathématiciens. Donc, nous restons dans le domaine mathématique. En guise de lancer, je ne voulais faire qu'une citation, comme on fait souvent en France pour commencer ou pour terminer, une citation du plus intuitif et peut être du plus déductif de tous les esprits, Leibniz, qui disait et qui parlait certainement aux compositeurs autant qu'aux scientifiques : *"Le monde parfait est le monde le plus simple en hypothèses et le plus riche en phénomènes."*.

Je cède la parole à Gérard Assayag.

1. Cette conférence s'est tenue à l'IRCAM le 15 juin 2011. Elle est visionnable à l'adresse : https://medias.ircam.fr/x70ce3e$_{p}ierre-boulez-et-alain-connes-la-creativ$

Gérard Assayag : Merci Franck. Nous allons commencer par une courte présentation de Pierre Boulez et ensuite s'engagera un dialogue en partie, mais en partie seulement improvisé.

Pierre Boulez : Bien, alors un petit texte au début, pour lancer un peu le débat, parce que ce n'est pas du tout un texte définitif et dogmatique. C'est un texte, au contraire plutôt sceptique, je dirais. Si, pour rendre compte d'une œuvre, on parle de musique mathématique, il ne s'agit pas d'un alliage très cordial. Ces deux mots, si près l'un de l'autre, indiquent une œuvre rébarbative, sèche, inexpressive, ennuyeuse.

Elle ne vient pas du cœur, ne retourne pas au cœur, pour citer, une fois de plus, ce grand modèle, mais sort du cerveau et ne va même pas à un autre cerveau. C'est donc déjà une sorte de réhabilitation de la réflexion, de la réflexion musicale que de rapprocher directement les deux mots mathématiques, musique, et d'y ajouter le troisième mot contact, mot discret, sans prétention, mais signe d'une volonté on ne peut plus déterminée. Bien évidemment, ce n'est pas la première fois que ce rapprochement est tenté.

Depuis le quadrivium au Moyen Âge, jusqu'aux travaux de Rameau et d'Alembert et jusqu'aux constructions mystiques de Scriabine. On a même beaucoup écrit. Et cependant, il existe toujours une sorte de frontière non dite entre la créativité musicale et la structure du langage expliquée ou du moins approchée scientifiquement. Quand un musicien, un compositeur s'approche de l'outil informatique, qu'il désire utiliser le matériel électronique, plusieurs malentendus peuvent surgir, difficiles à surmonter. Désirant avant tout l'outil qui lui permette de travailler de proche en proche, il s'attache à un rendement immédiat. Il s'attend à ce qu'on lui fasse des propositions, qu'on lui fournisse des exemples. À partir de là, il peut imiter ces exemples ou essayer de les transgresser en modifiant les paramètres qu'on lui propose. Mais il peut très bien ne pas aller plus loin et délaisser cet outil qu'il a tout juste effleuré. Le second écueil, c'est de transcrire trop littéralement des procédés, des schémas plutôt, qui lui sont fournis par l'outil mathématique ou arithmétique.

Ce qui, dans un cas, a un sens, est pertinent, n'a plus de sens dans la transcription littérale. Autant la première approche que je signale est basée sur la perception immédiate et ne se soucie pas de codifier en vue d'un langage, autant la seconde approche s'inquiète fort peu, voire pas du tout, de la perception, et se fie bien davantage à la notion de schéma pouvant s'appliquer indifféremment à tout paramètre. Ne tenant compte que de la perception, on n'arrive pas à organiser un langage, les objets que l'on a trouvés n'étant pas assez forts pour cela. Si l'on ne tient pas compte de la perception, le langage ne peut se constituer que d'une façon proprement hasardeuse, les paramètres n'ayant pas la même valeur dans le modèle et dans la transcription.

C'est là où le critère esthétique fait son apparition. Choix ou rejet des solutions proposées ? Faire face au tableau fut-il total des possibles. L'intuition devient comme un court-circuit indispensable. C'est ainsi que parmi tous les univers possibles d'intervalles, de durées, de dynamiques, etc., l'intuition va choisir celle qui servira le compositeur au moment où la solution va acquérir toute sa nécessité. Plus on sera capable de maîtriser cet univers des possibles, plus l'intuition aura servi de critère absolu dans cet instant du choix plus ou moins approché d'une certaine vérité dont on a besoin à un moment donné.

D'ailleurs, que l'on pense musique avec ou sans interprète, une musique combinée entre électronique et instrument ou une musique purement électronique, il reste à trouver le geste et la forme. Là, on n'a plus affaire à des objets, mais à des textures qui, en changeant continument ou par cassure, vont occuper un espace-temps. Quel modèle mathématique va nous donner la possibilité de trouver ce geste qui va justifier toutes les autres catégories ?

De ce point de vue, j'ai trouvé tout à fait approprié la citation de Mallarmé placée en tête de ce symposium. *"Un coup de dés jamais n'abolira le hasard."*. Pour résumer mon attitude de compositeur, je dirais que je n'attends pas tout d'une organisation systématique de quelques paramètres que ce soient. Je suppose que l'invention, si elle se réalise, ne peut se faire que si elle admet l'accident, l'imprévu qui remet en question ce que l'on avait cru établir.

Autant que j'en puisse juger, l'intuition scientifique passe par les mêmes phases. Et sur ce terrain incertain, elle est en mesure de se confronter avec l'intuition musicale. C'est une profession de foi bien fragile, certes, que je propose, mais je dois, je crois, davantage à cette fragilité qu'à la sécurité des dogmes. Je la crois plus riche de promesses.

Gérard Assayag : Votre conclusion illustre une tension qui, me semble-t-il, traverse votre oeuvre qui est la tension entre système et liberté. Et dans un entretien récent à la revue Musik Blätter, revenant sur *Le marteau sans maître*, vous indiquez bien comment cette œuvre avait marqué son temps par une combinaison de constructivisme très achevé, même un peu rigide, issu de l'école de Vienne, mais d'une liberté ornementale et d'une certaine fraîcheur qu'on a pu appeler l'esprit français disons. Donc, l'idée était de travailler avec le constructivisme, mais de manière à y être libre. Or, c'est une chose qui ne va pas de soi et je me dis que c'est peut être une problématique que rencontre aussi le mathématicien. Qu'en pensez vous Alain Connes ?

Alain Connes : Disons que j'ai un peu réfléchi, donc, à ces deux aspects qui sont des aspects dont on parle assez peu en mathématique, qui sont justement la créativité et le rôle de l'esthétique. Et je crois que je vais vous livrer quelques réflexions que j'ai eues là dessus, mais simplement comme un point de départ. Je pense que ça correspondra bien à ce dont vous avez parlé. Donc, en fait, a priori, lorsqu'on parle de créativité en mathématiques, le mathématicien est un peu sceptique parce que l'essentiel de la tâche du mathématicien, c'est résoudre des problèmes. Et c'est en gros une tâche de découverte. C'est-à-dire que le mathématicien est à la recherche de vérités, qui préexistent à sa présence, avant qu'il commence à chercher. Et ce qui est assez extraordinaire, justement, vous parliez de cette relation avec les mathématiques, ce qui est assez extraordinaire, c'est de voir que l'évolution des mathématiques qui a eu lieu au XX$^{\text{ème}}$ siècle, en fait, permet déjà le rapprochement entre la musique et les mathématiques. Pourquoi ? Parce que, en fait, le rôle des mathématiques qui, au départ, était un rôle qu'on pourrait en gros résumer comme une partie de la physique, est devenu, au fil des mathématiques qu'on appelle modernes, des mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle, en fait, c'est devenu un espèce de substitut de la philosophie au niveau de la création des concepts. Et ce qui est assez remarquable, en fait, c'est que justement... Cette transition, on peut presque la faire remonter à Galois. Et ce qui est assez remarquable, c'est qu'un peu comme en musique, elle a engendré au départ des résistances considérables et qui continuent à se manifester de manière sporadique. Mais je vais vous citer... Est-ce que ça dérange si je fais une citation en anglais parce que c'est un texte qui est en anglais au départ.

Mais c'est un texte très récent d'un mathématicien bien connu qui s'appelle Vladimir Arnold, et qui parle des mathématiques, et qui parle de l'enseignement des mathématiques, et qui parle des mathématiques modernes. Ne vous en faites pas, je suis français, donc je défendrai le point de vue français après. Mais il faut quand même que j'expose au départ ce point de vue. Donc il dit : "*Mathematics is a part of physics, physics is an experimental science, a part of natural science, mathematics is the part of physics where experiments are cheap.* (rires). *In the middle of the twentieth century, it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic. Whole generations of mathematicians grew up without knowing half of their science, and of course in total ignorance of any other sciences. They first began teaching their ugly scholastic pseudo-mathematics to their students.*"

Il continue, il continue, et son texte est très amusant, il est plein de piques, etc. Et il dit ensuite : "*The ugly building built by under-educated mathematicians who were exhausted by their inferiority complex and who were unable to make themselves familiar with physics, reminds one's..."* Bon, alors après, il parle d'une axiomatique des nombres impairs, etc. et ensuite, il dit donc, finalement, qu'il a interrogé par exemple des étudiants français en mathématiques, il leur a demandé "*2+3 ?*". Et "*a french primary school pupil replies 3+2 because addition is commutative*". Et ensuite, il explique "*Judging by my teaching experience in France, the university students'idea of mathematics, I feel sorry for them because they are very intelligent but deformed kids, is as poor as that of this pupil.*", l'élève qui répondait "*2+3=3+2.*". Et ensuite, il donne des exemples.

Mais en fait quand on approfondit un peu ce texte d'Arnold, on s'aperçoit que si vous voulez, ce qu'il critique, c'est les mathématiques. Ce qu'ils critiquent, c'est si vous voulez tous les exemples qu'il prend où il dit les mathématiciens modernes ne savent pas faire ça, etc., c'est des mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et ces mathématiques, il donne des exemples de courbes à tracer dans le plan ou des choses comme ça, c'est des mathématiques qui maintenant sont complètement digérées et que l'ordinateur fait beaucoup mieux qu'un mathématicien, il le fait en un quart de seconde. Et ce qu'il n'a pas digéré, ce qu'il n'explique pas justement, c'est le merveilleux phénomène qui s'est produit dans les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle et qui justement, permettent... Je vais vous lire un petit texte de Grothendieck. Et ce que dit Grothendieck, c'est : "*La clarification progressive, justement, des notions de définitions, d'énoncés, de démonstrations, de théories mathématiques dont* *on pourrait, si on ne faisait que des mathématiques que comme étant une partie de la physique, on pourrait les ignorer complètement. Et dire que c'est des fantaisies d'axiomaticiens, a été à cet égard très salutaire et nous a fait prendre conscience de toute la puissance des outils d'une simplicité enfantine pourtant.* C'est-à-dire que les concepts mathématiques, en fait, il ne faut pas avoir peur. En général, ils ont une version enfantine et cette version enfantine est beaucoup plus proche de leur réalité que les versions extrêmement élaborées, "*donc d'une simplicité enfantine, pourtant, dont nous disposons pour formuler avec une précision parfaite ceux-là mêmes qui pouvait sembler informulable par la seule vertu d'un usage suffisamment rigoureux du langage courant à peu de choses près. S'il y a une chose qui m'a fasciné dans les mathématiques depuis mon enfance, c'est justement cette puissance à cerner par des mots et à exprimer de façon parfaite l'essence de telles choses mathématiques qui, au premier abord, se présentent sous une forme si élusive ou si mystérieuse qu'elles paraissent au delà des mots.*"

Et ça, si vous voulez, c'est une chose extrêmement importante parce que la plupart des gens, quand on leur parle de mathématiques, ils pensent à l'arithmétique, ils pensent aux nombres.

Bon, ils pensent peut être à la géométrie, mais ils ne se rendent pas compte que les mathématiques modernes, c'est-à-dire les mathématiques du XX$^{\text{ème}}$ siècle, elles ont justement réussi à perfectionner le langage courant par des concepts qui sont extrêmement précis, mais qui, justement, ont un potentiel d'application qui va bien au-delà de la physique.

Bon, alors, quand on pense justement à la musique et si vous voulez, pour bien situer les choses par rapport aux mathématiques, je vais vous lire un petit texte que j'avais écrit il y a longtemps et où je parlais justement du lien entre les deux et je disais : "*Il est crucial à mes yeux pour un enfant d'être exposé très tôt à la musique. Je pense qu'exposer un enfant à la musique vers l'âge de 5 ou 6 ans permet d'équilibrer un petit peu la prépondérance dans son intellect du sens de la vue et cette richesse incroyable, purement visuelle, qu'un enfant acquiert très tôt et qui, donc en fait est reliée à la géométrie.*".

Elle est reliée à la géométrie du moment qu'elle s'inscrit dans l'espace par l'intermédiaire d'une image mentale. Si vous voulez, il y a le même phénomène en mathématique que par rapport à un musicien. Quand un non-mathématicien voit un mathématicien en train de travailler dans le métro. Qu'est ce qu'il voit ? Il voit une page pleine de formules. Elles n'ont aucun sens. Quand un non-musicien voit un musicien travailler dans le métro et lire une partition, c'est exactement pareil, il a l'impression de... C'est pareil !

Or, il y a une partie essentielle du travail des mathématiciens qui est justement de créer des images mentales. Mais quand je parle d'images mentales, ça a à voir avec la géométrie. On voit une figure géométrique, on voit, elle s'inscrit dans l'espace. Mais ce qui est vraiment étonnant, c'est que justement, dans le fonctionnement du mathématicien, il n'y a pas seulement l'image géométrique, il y a l'algèbre. Et l'algèbre n'a rien de visuel, mais par contre, l'algèbre a une temporalité, c'est-à-dire l'algèbre s'inscrit dans le temps.

Quand vous faites un calcul, quand vous exposez une démonstration, ça s'inscrit dans le temps. C'est exactement comme le musicien qui, après avoir compris une œuvre musicale, l'avoir zippée complètement dans son esprit, a quelque chose qui tient en rien, l'étale. Le mathématicien, c'est pareil. Quand il fait un calcul algébrique, ça s'inscrit dans le temps, mais c'est quelque chose qui est très proche du langage, qui a cette précision diabolique du langage et d'une certaine manière, si vous voulez, il y a une connivence assez incroyable entre le calcul algébrique, cette partie des mathématiques qui a à voir avec le langage, qui a un déroulement dans le temps et certaines œuvres musicales. Et ça, je ne peux pas m'empêcher d'y penser. C'est-à-dire que pour moi, il y a certaines œuvres musicales relativement courtes qui disent quelque chose.

Et j'avais même cette impression, vous allez rigoler mais j'avais même cette impression quand on voyait ces salles qui vont de manière répétitive écouter les sonates de Beethoven des années et des années. Ça m'a rappelé, si vous voulez, des gens qui sont là et qui essayent de comprendre. Et on leur répète la même chose. Ils savent qu'il y a quelque chose, et ce quelque chose est intransmissible autrement que par la musique. On ne peut pas le transformer en autre chose que ce qui est transmis, mais ça transmet quelque chose.

Donc, on ne peut pas dire que ça n'est pas un langage. De même, on ne peut pas dire que les mathématiques n'ont pas un aspect langage. Elles ont un aspect langage qui est extrêmement important.

Mais l'essentiel de ce que j'ai dit, si vous voulez, c'est que cet aspect langage des mathématiques est devenu beaucoup plus florissant. Il est devenu beaucoup plus expressif. Il est devenu beaucoup plus large que, justement, les mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Et quand on en reste aux mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, bien sûr, on peut dire "Ah, ces mathématiques-là, elles ont un rapport avec la musique parce qu'il y a l'arithmétique, il y a le log 3 sur log 2, qui est le clavier bien tempéré, etc.

Mais ça ne va pas aller au delà. En fait, le langage mathématique, justement, a franchi bien d'autres frontières et d'une certaine manière, maintenant, on peut espérer que, justement, il y ait une possibilité de rapprochement qui est beaucoup plus grande à cause de ça. Encore faut-il accepter les mathématiques modernes. Et encore faut-il avoir absorbé toute cette élaboration, qui n'est pas du tout évidente.

Gérard Assayag : Alors cette dualité algèbre / géométrie, c'est un de vos chevaux de bataille. C'est extrêmement intéressant parce qu'elle nous amène au coeur du problème de la relation maths-musique, parce que c'est une dualité qu'on rencontre sans arrêt dans la recherche musicale, soit de manière métaphorique, nous en avons discuté, soit de manière technique, et je pourrais éventuellement donner des exemples. Alors notamment dans l'analyse musicale, c'est-à-dire que quand on regarde une partition, il y a une expression que j'ai entendue et qui me plaît bien, c'est la partition vue d'avion, quand on essaie de comprendre ce mécanisme, c'est-à-dire on la regarde comme un tout mais on a le droit de faire ce qu'on veut. On peut sauter d'un point à un autre et mettre en relation un point avec un autre librement et c'est une vision évidemment géométrique.

Alain Connes : Bien sûr.

Gérard Assayag : Ou alors il y a une autre façon de l'aborder, qui est du point de vue de ces mécanismes d'engendrement. Et là, on a un point de vue beaucoup plus local, parce qu'on regarde la mécanique. Est ce que ça, c'est quelque chose que vous ressentez, cette tension quand vous, quand vous regardez une musique, pas quand vous la créez, mais quand vous regardez une musique existante ?

Pierre Boulez : Quand je regarde la musique, je commence d'abord par essayer de comprendre la forme, parce que c'est elle qui vous dirige, simplement dans l'évaluation. On a fait ici une expérience une fois, sur trois niveaux de compréhension de la musique. On a donné d'abord, disons, une sonate de Mozart ou un mouvement, ou un demi-mouvement (la première moitié du mouvement), et on a demandé à quelqu'un qui n'est absolument pas musicien, à quelqu'un qui n'a aucune culture musicale, on lui a demandé qu'est ce qu'il pensait ? Il en a donné une description très vague et pas du tout relevante si je peux dire. Ensuite le moyen. Il avait écouté plusieurs fois des sonates de Mozart, donc il pouvait trouver une forme, en tout cas un contraste entre les thèmes. C'est déjà une approche beaucoup plus précise et le cultivé, alors, décrivait exactement ce qui est passé. Ensuite, on a passé une œuvre de Schophausen pour piano, un fragment bien sûr. Eh bien, les trois réponses étaient très similaires parce que chacun créait son propre théâtre de la forme et ils s'aiguillaient vers les passages qui les avaient particulièrement frappés, c'est-à-dire qu'il n'y avait aucune conception de la forme.

Mais il y avait une conception des événements et des événements qui étaient encore pas liés par une forme mais des événements séparés, qui les avaient frappés, soit parce qu'ils étaient très forts, soit parce qu'ils étaient joués par un instrument spécialisé, etc., etc. Donc, vous voyez que c'est très difficile d'approcher une forme même, parce qu'une forme est vraiment, disons, ce que... comment la personne la regarde. Et là, quand on est musicien, évidemment, on essaye d'avoir une vue, disons plus objective, et non pas seulement subjective.

Voilà comment moi, je vois la musique. Alors quand on voit le détail, on voit en effet comment le discours se construit et s'il se construit plus horizontalement que verticalement ou plus verticalement qu'horizontalement, ou s'il se construit par cassure, ou bien s'il est construit pas continuité, etc., etc. Il y a beaucoup de façon d'envisager la perception même de la musique et je suis persuadé qu'il y a beaucoup de gens qui se font aussi une espèce de... qui... puisqu'ils ne peuvent pas comprendre la forme musicale, qui se font une certaine narration, spécialement quand ils ont écouté une œuvre plusieurs fois, ils se font une narration personnelle et c'est cette narration qu'ils suivent. C'est pour cela que les gens, le public en général, s'il ne fait pas d'effort, s'installe tellement bien dans une œuvre parce qu'il l'écoute toujours de la même façon et donc qu'il a devant lui les mêmes images, les mêmes clichés, les mêmes clichés, je dirais, plutôt que les mêmes images. Et c'est comme ça qu'il absorbe la musique, il ne l'absorbe pas par une espèce de description de la continuité, il l'accepte comme un tout, suivi d'un tout, suivi d'un tout.

Gérard Assayag : Mais l'analyste-expert, le compositeur qui regarde un autre compositeur, n'a-t-il pas cette liberté quand il regarde une partition, de la voir finalement comme un espace où il peut se promener à son gré, ce qui n'est pas réaliste dans la mesure où la partition n'a pas été engendrée de cette façon-là, en agissant simultanément sur toutes les parties ?

Pierre Boulez : Oui, certainement, quand vous analysez... Moi, ce qui m'intéresse dans l'analyse, c'est même l'analyse fausse, mais qui engendre quelque chose.

Je me souviens d'une fois quand Stockhausen m'a montré une analyse du Quatuor de Webern, mais il regardait la densité des rencontres. Ce qui n'a rien à voir avec Webern, qui était simplement un contrepoint à quatre voix, et donc un contrepoint à quatre voies, surtout si c'est en canon, les choses sont décalées les unes par rapport aux autres. Donc s'il y a un phrasé individuel, les choses sont évidemment pas toujours d'une intensité constante. Mais pour lui, ce qui l'intéressait à ce moment là, c'était le phénomène de l'intensité.

Comment un canon à quatre voix peut donner des intensités de cet ordre, statistiquement parlant. Je trouve ça plus intéressant que d'analyser simplement, même comme le compositeur l'a conçu. Ce qui est intéressant dans une analyse, c'est pas lorsque vous voulez refaire ce que le compositeur a fait, c'est de voir par quel procédé il est arrivé à un résultat pareil. Et donc, même si l'analyse est fausse, est fausse complètement, l'analyse est beaucoup plus intéressante parce qu'elle est productive.

Alain Connes : D'accord, il y a quand même une différence assez frappante, justement, là, on parle d'Œuvres. Donc on voit... Alors si on regarde un aspect des mathématiques, qui est une démonstration, on peut dire la chose suivante qui est un peu semblable, c'est que, si vous voulez, une démonstration, il y a deux manières de la regarder. Il y a une vérification ligne à ligne. Et ça, je pense, c'est un peu comme quelqu'un qui joue un morceau de musique qui ne l'a pas encore digéré et qui est obligé d'avoir la partition devant les yeux.

Donc, on peut faire ça. On peut vérifier une démonstration ligne à ligne. Mais il y a une deuxième étape qui est extrêmement importante. C'est qu'en fait, un mathématicien sait qu'il ne comprend une démonstration que quand il est capable dans son cerveau de la zipper en une demi-seconde. C'est-à-dire qu'il n'aura pas les ingrédients successifs de la démonstration, mais il aura immédiatement l'intégralité de la démonstration.

Pierre Boulez : Est ce que je peux ouvrir une parenthèse ?

Alain Connes : Bien sûr.

Pierre Boulez : En musique, ça, ça dépend beaucoup d'un point de vue très différent, c'est si vous êtes interprète, ou si vous êtes compositeur. Si vous êtes compositeur, vous avez tout le temps de naviguer et vous naviguez d'un point à l'autre et vous essayez de conforter votre analyse par comparaison d'un point à un autre, quelles sont les différences, quelles sont les similarités, etc. Si vous êtes interprète, cette façon, disons, d'amasser la connaissance est une conséquence... est une espèce de choses inconsciente. Quand vous êtes au point D, par exemple, vous savez que vous avez déjà joué le point A, et ses successions, et vous savez que vous allez rencontrer le point N et ses successions. Mais vous ne le savez pas exactement. Mais vous le savez, plus ça se rapproche, plus vous êtes conscient de ce qui va suivre. Et plus ça s'éloigne, et plus vous êtes conscient que ça s'éloigne et donc que la forme a atteint un point du présent, c'est-à-dire qu'on a constamment ces trois dimensions dans la tête, présent, bien sûr, celui où vous êtes et le passé qui vous y a amené, le futur qui va vous mener à...

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr. Mais ce que je veux dire, c'est que justement, cette espèce de linéarité de l'œuvre, il y a quelque chose qui est extrêmement frappant pour le mathématicien, c'est-à-dire que si un mathématicien essaye de comprendre une démonstration, il y a ce procédé qui consiste à essayer de la lire linéairement. Il y a un autre procédé qui est bien plus efficace, qui consiste à regarder l'énoncé du théorème et à commencer par chercher soi-même une démonstration.

Et quand on a fait ça, ce qui se produit, c'est que la lecture de la démonstration, à ce moment-là, on va dire : “Mais ça, c’est rien. Ça, c’est rien”. Et on va dire : “LÀ, c’est LÀ qu’il se passe quelque chose”. Et c’est seulement comme ça, c’est seulement à partir de ce mécanisme-là qu’on a vraiment compris, c’est-à-dire... Donc ça, je ne sais pas s’il y a quelque chose d’analogue à ça dans une oeuvre musicale. C’est-à-dire, est-ce qu’une oeuvre musicale répond à une question, à un questionnement, etc. Et on peut dire lorsque l’oeuvre se déroule “Ah !”. Bon, j’ai eu parfois cette impression-là à la fin de certains morceaux où il y avait une espèce de moment où il y avait un moment explicatif a posteriori ou l’inverse. Je veux dire au moment où on voit qu’il y a un thème qui ensuite va se dérouler, etc. Mais en mathématique, c’est quelque chose d’extrêmement fort.

C’est-à-dire qu’il y a une différence énorme, justement, entre le mathématicien qui comprend vaguement l’énoncé et puis va se mettre à vérifier la démonstration pas à pas, etc. Et le mathématicien qui va avoir un acte qui n’est pas du tout passif, mais va se mettre à réfléchir par lui-même et après, seulement après, va regarder la démonstration.

Gérard Assayag : Est ce que ça a quelque chose à voir avec la compression, ce zippage que vous évoquez ?

Alain Connes : Absolument, bien sûr, bien sûr. C’est-à-dire que le mathématicien fonctionne par niveaux d’abstraction, par niveaux hiérarchiques d’abstraction, c’est-à-dire qu’en fait, ça veut dire qu’il ne peut progresser, comme les notions sont très compliquées, que si ces notions là, il est capable de les rendre en occupant un espace qui est presque nul et après, il va pouvoir les manipuler mais les manipuler abstraitement sans savoir ce que le zippage contient, simplement en ayant une idée intuitive de ce que cette motion signifie. Bien sûr pour ça, le langage est extrêmement important, c’est pour ça que, bon, il y a des mathématiciens très créatifs comme Grothendieck, etc. qui ont donné 36 noms nouveaux comme le schéma. Schéma, ça a un sens mathématique bien précis, etc. Et ça n’est qu’avec ce mécanisme de zippage complet qu’on peut progresser par des niveaux hiérarchiques de compréhension.

Pierre Boulez : Pour la musique, c’est surtout la mémoire qui joue. Je vois, par exemple, c’est très frappant. Quand j’étais surtout en charge d’orchestre, je faisais des séances d’initiation, mais d’explications sur des œuvres et j'ai toujours remarqué qu'il fallait toujours des exemples. Parce que quand on joue l'œuvre, l'exemple revient à la mémoire immédiatement. Et là, la mémoire fonctionne de façon à aimanter la perception dans un sens ou dans l'autre.

Alain Connes : D'accord, oui, alors donc je pense qu'il y a quelque chose qui est très analogue dans ce cas-là, parce que, bon, il y a certains mathématiciens comme Grothendieck qui fonctionnent un peu à l'envers, c'est-à-dire qu'ils partent du cas général et puis ils... mais la plupart des mathématiciens fonctionnent de manière différente, c'est-à-dire que si on leur donne un bon exemple et qu'on leur explique concrètement sur un exemple, un phénomène général, en général justement, ils sont parfaitement capables d'immédiatement généraliser et d'avoir le cas général et je suppose qu'en musique, enfin, on voit bien dans la musique de Beethoven ou des choses comme ça, on voit bien qu'il y a un système génératif qui permet à partir de choses relativement simples d'engendrer quantités de choses qui s'en déduisent et ça, en mathématiques, c'est un phénomène assez général. Donc il y a ce côté de presque génération automatique qui se produit et qui joue un rôle très, très, très, très important.

Gérard Assayag : Alors pour revenir à cette dualité algèbre / géométrie, vous mentionnez, alors c'est très important, que du côté algébrique, vous mettez le temps, il y a un engendrement. Donc un engendrement. Il y a une combinatoire de symboles. Il y a des règles de production. C'est des choses qu'on utilise beaucoup en musique. Les musiciens se sont beaucoup intéressés, par exemple, aux grammaires formelles ou aux règles de production pour produire des séquences intéressantes, ou non d'ailleurs, de notes.

Mais dès lors que ça produit des séquences, on est bien d'accord, mais est ce que des séquences, ça suffit pour définir du temps ? C'est une question que je vais poser à la fois au mathématicien et au musicien.

Alain Connes : Bien sûr, je vais répondre parce que je veux dire : mon premier travail mathématique a consisté exactement à ça, c'est-à-dire si vous voulez, ce qui est assez incroyable, c'est que, justement, on s'aperçoit que ce qu'on appelle la non commutativité, qu'est ce que ça veut dire ? Ça veut dire que quand vous écrivez un mot, ce n'est pas l'ensemble des lettres du mot qui compte, mais c'est l'ordre aussi dans lequel il est écrit.

D'accord, bon, on peut donner 36 exemples. Et ce qui est absolument incroyable, ce qui est absolument incroyable, c'est que justement, on s'aperçoit lorsqu'on fait des mathématiques, on s'aperçoit que lorsqu'on regarde l'algèbre non-commutative, c'est-à-dire l'algèbre justement, dans laquelle on ne se permet pas de dire que $abab$, ça fait a^2b^2. Eh bien, le temps est engendré de manière naturelle. Ça, c'est beaucoup plus fort que de dire que l'algèbre s'inscrit dans le temps.

C'est qu'en fait, et ça, ça vient du quantique, c'est-à-dire le quantique nous a appris que justement, il fallait lorsqu'on faisait des calculs de mécanique quantique, on ne pouvait pas, c'est ce qu'a trouvé Heisenberg, on ne pouvait pas permuter des quantités comme la position et le moment, etc. On ne pouvait plus calculer de manière trop simple lorsqu'on s'intéresse à des systèmes microscopiques, ce qui est absolument incroyable. Et le potentiel philosophique n'a pas du tout été suffisamment exploité, de ce fait-là. Le fait est que quand on prend une algèbre d'une certaine qualité, qu'on appelle une algèbre d'opérateurs, qui est non-commutative, eh bien, elle engendre son propre temps. Elle a un groupe d'automorphismes qui est paramétré par un paramètre t, mais qui est vraiment le temps dans les exemples physiques qui la fait tourner avec le temps. Alors ça, c'est hallucinant et ça vient exactement du fait qu'on ne peut pas permuter a et b. Donc, quand vous écrivez un mot, l'ordre des lettres est important, alors que quand Descartes, etc., quand des gens de cette époque-là faisaient des calculs, ils faisaient des calculs de manière commutative, c'est-à-dire en permutant les lettres.

Gérard Assayag : Si je comprends bien, c'est l'algèbre qui évolue elle-même et qui se transforme elle-même, qui engendre donc une série

Alain Connes : Elle engendre un passage du temps. Alors ça, ça avait déjà été pressenti puisqu'Hamilton avait écrit des phrases tout à fait prophétique, justement, et où il parlait de la relation entre l'algèbre et le temps.

Donc, ce qui me frappait tout à l'heure, c'est que vous vous expliquiez que, justement, dans le travail d'un interprète, il y a toujours ce présent. Et puis il y a le passé et le futur, etc. Donc on voit bien, je vais dire la musique en gros, c'est une analyse profonde, microscopique du temps. C'est une compréhension du temps qui va de plus en plus loin dans la finesse. Mais ce qui est tout à fait étonnant, c'est qu'au niveau algébrique, il y a exactement la même chose qui se produise et qu'en fait justement, non seulement, bien sûr, un calcul algébrique se fait de manière linéaire, avec des termes ordonnés dans le temps, ça, c'est rien.

Mais ce qui est hallucinant, c'est l'inverse. C'est le fait que même si on faisait des mathématiques en dehors du temps, etc., eh bien le temps serait là et serait présent. Il serait engendré de manière naturelle.

Gérard Assayag : Vous évoquiez un autre point tout à l'heure qui était sans le dire, je vais dire le terme technique, vous m'excuserez, la correspondance de Curry-Howard, c'est-à-dire le fait qu'une preuve, on peut aussi la regarder comme un programme, comme un calcul.

Alain Connes : Oui, si on veut, oui, bien sûr.

Gérard Assayag : Ça évoque une question qu'on s'est posée ici même lors du tout premier congrès Mathématiques et Musique qui a été organisé en 1999 à la demande de la Société de mathématiques européenne avec M. Bourguignon. On avait décidé de mettre ça sous l'égide de la question "Est-ce qu'il y a une correspondance entre ce que les musiciens appellent la logique musicale, qui est toujours une logique d'organisation, et ce que les matheux appellent la logique tout court, la logique mathématique ou la logique formelle, la logique mathématisée ?

Et on était arrivés, on n'avait évidemment pas tranché cette question, on était simplement arrivés à dire la chose suivante, c'est qu'il y a bien de la logique dans l'organisation de la musique. Il y a bien des termes formels qu'on engendre. Il y a même des choses qui ressemblent à des axiomes, c'est-à-dire des hypothèses de départ qu'on se donne pour engendrer un matériau. Mais il y a deux choses qu'il n'y a pas. Il n'y a pas de notion de vérité : on ne cherche pas à ce que ces termes qu'on agrège, qui vont finir par former une partition, établissent une certaine valeur de vérité, ce n'est pas ça le problème. Ce n'est pas le problème de la logique. Le problème de la logique musicale n'est pas le problème de la logique mathématique. Vous êtes d'accord avec moi ?

Pierre Boulez : Certainement pas d'accord avec ça. Je l'ai dit discrètement, mais je le pense.

Gérard Assayag : On peut le dire et je crois que c'est facile à établir. Il n'y a pas de valeur de vérité, donc déjà, ça enlève tout un aspect calculatoire parce que souvent, c'est ça qu'on cherche. Et puis, il y a un autre problème beaucoup plus profond, qui est le suivant : en logique pure, lorsqu'on déroule une démonstration, je peux utiliser un terme A pour ma démonstration. Et j'ai parfaitement le droit de le réutiliser ensuite, mais il ne se passe rien. Ça ne me coûte rien. Je l'utilise, je peux l'utiliser mille fois si je veux, si je le désire. Quand on considère une séquence musicale, un élément du langage musical comme ressemblant un petit peu à une démonstration et que l'on regarde les termes que l'on agrège les notes, les accords, etc., eh bien, le fait d'avoir exposé un objet musical n'est pas du tout innocent. Et la seconde fois qu'on l'expose, ça n'a pas du tout la même valeur que la première fois qu'on l'avait exposé. Donc déjà, déjà, on n'est plus dans cette hypothèse. *(Rires.)* Je vois, je crois que je vous vois venir.

Alain Connes : Non, non, en fait, si vous voulez, ça veut dire que vous ne connaissez pas un certain pan du développement mathématique, qui est ce qu'on appelle la logique linéaire. Dans la logique, dans la logique linéaire, en particulier Jean-Yves Girard à Marseille, lorsqu'on a utilisé une fois, on ne peut plus utiliser.

Donc, je veux dire, il ne faut pas croire que les mathématiciens manquent d'imagination. Ils ont utilisé cette logique-là. Elle leur est déjà apparue. Mais en fait, si vous voulez, bon, simplement pour rebondir un peu sur ce que vous disiez à propos de ce qui se passe en musique au niveau de la logique, ce que je dirais, c'est qu'il y a pour le mathématicien effectivement un rôle de l'esthétique, quand il regarde une démonstration. C'est-à-dire un mathématicien est capable de dire en regardant une démonstration les chances qu'elle a d'être vraie. Il est capable, en regardant une formule même obtenue par un ordinateur, de dire les chances qu'elle a d'être vraie. Donc là, il y a un rôle de l'esthétique. Mais si vous voulez pour moi, il ne faudrait pas du tout croire que la qualité, bon, c'est une qualité nécessaire pour un énoncé mathématique, d'être vrai, d'être correct, une démonstration d'être correcte. Mais la notion, qui est beaucoup plus intéressante et beaucoup plus difficile à définir et qui est beaucoup plus proche de la musique, c'est la notion de sens, c'est-à-dire que, si vous voulez, un énoncé mathématique, vous pourriez fabriquer un ordinateur qui vous fabriquerait 36 énoncés mathématiques à la pelle et qui seraient tous corrects parce qu'il les aurait fabriqués en faisant des démonstrations correctes. Ce serait facile. Par contre, si vous regardiez tous ces énoncés, la plupart d'entre eux seraient complètement inintéressants parce qu'ils n'auraient pas de sens.

Qu'est ce que ça veut dire un sens ? Un sens, c'est quelque chose qui est... qui ne répond pas à la logique, parce que l'énoncé en question est correct. Mais il y a pour le mathématicien une notion d'un énoncé qui est merveilleux, qui a un sens. Et je pense que là, on a un rapprochement avec la musique. Parce que vous me disiez une pièce musicale n'a pas à être correcte, bien sûr, mais elle doit avoir un sens. Si elle n'a pas de sens, à ce moment-là, bon, ben, je vais dire, on pourrait faire n'importe quoi. On pourrait inventer 36 morceaux de musique. Et là, je pense qu'on touche un point essentiel parce que la notion de correct, c'est une condition nécessaire. C'est une condition nécessaire pour le mathématicien, bien entendu. Mais un mathématicien pourrait passer sa vie à faire ce que disait Arnold des axiomes sur les nombres impairs ou des choses comme ça. Et ça veut dire qu'il aurait perdu son temps. Il aurait perdu son temps parce que justement, il n'aurait pas trouvé de vérité qui a du sens. Il n'aurait pas dévoilé un pan de cette réalité mathématique, mais justement, des choses qui ont du sens. Et ça, c'est une chose extrêmement difficile à définir en mathématiques. Et je pense que c'est aussi difficile à définir qu'en musique, d'une certaine manière.

Pierre Boulez : Oui, c'est très difficile parce que lors de l'Histoire, on voit des gens qui ont à peu près, surtout au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, le même vocabulaire et dans un cas, l'oeuvre est très belle et dans l'autre cas, l'œuvre va être complètement inintéressante. C'est-à-dire que la même grammaire peut servir non pas des buts du reste, mais peut servir à des fins très différentes.

Alain Connes : Oui, donc, je veux dire, ça veut dire simplement que quand on s'en tient au niveau de la structure, de la logique, etc., on ne touche pas le problème essentiel et le problème essentiel pour les mathématiques, justement, bien sûr, il y a le problème de la vérité, il y a le problème qu'on peut discuter en long, en large et en travers. Mais il y a un problème beaucoup plus difficile, beaucoup plus important, qui est de voir justement en quel sens ce qu'on a trouvé dévoile un petit coin de la réalité mathématique. Et ça, ça signifie avoir du sens. Exactement.

Gérard Assayag : Le problème que vous évoquez, c'est le problème que rencontrent les démonstrateurs automatiques de théorèmes, les programmes informatiques qui démontrent des théorèmes, ils peuvent démontrer des théorèmes corrects, mais ils ne savent pas comment dire qu'un théorème est intéressant. Et donc, ils peuvent démontrer des milliards de choses inintéressantes. Alors c'est intéressant parce que ça peut rejoindre une problématique qu'on connaît ici, qui est la composition assistée par ordinateur, où on a des programmes informatiques que des compositeurs utilisent pour calculer des matériaux ou des structures intéressants.

Mais ils pourraient en calculer des milliards qui ne seraient pas intéressants. C'est in fine le compositeur qui décide. Alors est-ce que vous pourriez nous aider ? Comment pourriez-vous, compositeur, nous aider à converger de manière plus fine, plus intéressante, vers des résultats qui ne sont pas seulement corrects du point de vue du calcul, mais susceptible d'intéresser le musicien ?

Pierre Boulez : La première chose que je peux vous répondre, c'est une réponse très bête, c'est parce que ça me plaît, tout simplement parce que ce que vous me donnez, ce que vous me proposez, ça me plaît.

Gérard Assayag : C'est comme ça qu'on fonctionne.

Pierre Boulez : Oui, mais tout le raisonnement de la musique est fondé là dessus, bien sûr, on ne va pas dire aussi bêtement que ça, ça me plaît, donc je le choisis. Vous pouvez avoir un goût terrible, le kitsch, et le dire, ça me plaît aussi, bien sûr. Mais ce qui est intéressant, c'est que quand vous avez comme ça des quantités de possibilités, vous ne pouvez pas les écouter, si vous avez mille possibilités, au bout de cent, vous serez fatigué ou vous n'aurez absolument plus de jugement. C'est ça qui est dangereux en musique. C'est que plus vous écoutez les différentes solutions, moins vous avez de réactions disons pour choisir les choses. Et donc, à un moment donné, il faut deux choses.

Premièrement, restreindre le périmètre du choix et deuxièmement, décider : "oui, ça, pourquoi je le choisis ? Parce que ça me paraît meilleur, pour cette raison, pour cette raison. Mais au fond de ça, vous essayez de vous justifiez vous même. Mais le principal, c'est uniquement... c'est pas uniquement, mais c'est principalement l'intuition et l'intuition. Bon, ça existe et c'est un don que vous avez, même si vous êtes très doué, vous l'avez un jour, vous ne l'avez pas le lendemain.

C'est-à-dire c'est très variable et quelquefois, vous êtes très pointus, d'autres fois moins pointus, parce que vous êtes davantage séduit par le... Et il y a une question aussi en musique qui est difficile, c'est de joindre la structure abstraite si on peut dire, et l'objet concret, parce que l'objet concret qui est très intéressant, peut être dans une structure tout à fait inepte. Et au contraire, un structure très intelligente peut avoir des objets qui sont tout à fait inintéressants. Et donc, c'est cette combinaison qui n'est pas facile non plus à organiser, qui fait que l'œuvre acquiert une grande validité. Mais ça, ça a toujours été le cas. Je veux dire, si vous regardez l'Histoire de la musique, vous avez par exemple deux personnalités très distinctes comme Berlioz et Schumann, je prends exprès ces deux exemples. Chez Berlioz, il y a un sens de l'instrumentation qui est absolument remarquable, même quand il était très jeune. Mais le sens de l'harmonie, c'est-à-dire du langage harmonique, était très primitif chez lui. Alors on explique cela parce qu'il a joué de la guitare quand il était jeune et donc que la guitare a simplifié son vocabulaire.

Ça n'enchanterait pas les guitaristes, si on dit ça. Mais tandis que Schumann avait au contraire un langage harmonique très... beaucoup plus raffiné. Mais son langage instrumental était vraiment très disons, sans beaucoup de signification, sans beaucoup de couleurs, même, tout simplement.

Et donc, c'est très rare d'avoir chez les mêmes musiciens des gens qui sont doués également, pour les différentes composantes. Si bien que quand vous avez quelqu'un comme Wagner, évidemment, vous avez là, vous avez tout.

Mais Wagner qui, disons, n'a jamais parlé de système, il a toujours parlé de musique nouvelle, de musique du futur, etc. Mais il n'a jamais codifié son langage. Pas du tout même. Mais il a pris le langage tel qu'il l'a trouvé, et sous l'influence, en particulier de Liszt, il a détourné le langage de la fonction sur laquelle ce langage vivait, et donc finalement, il a inventé ce langage très ambigu où toutes les relations sont possibles. Dans un langage plus classique, disons même Beethoven, sans parler de Mozart, vous avez des accords qui faisaient des accords tournants, si l'on peut dire qui aidaient la modulation, qui aidaient donc à aller un peu dans un pays voisin, mais dans Wagner, vous êtes... quelquefois, vous ne savez pas du tout où vous êtes, parce qu'il utilise uniquement des choses ambiguës.

Cette ambiguïté s'est généralisée au fur à mesure et a conduit à Schönberg, qui a de nouveau, lui, créé un dogme.

Et ce dogme était intéressant d'une certaine façon, parce qu'il a en effet, il organisait le langage musical d'une autre façon. Mais ce dogme, ce dogme, ne tenait pas compte des phénomènes verticaux, et, ou à peine compte des phénomènes verticaux, et c'est la faiblesse du langage dodécaphonique de Schönberg., c'est qu'une dimension prévaut sur les autres ou sur l'autre, spécifiquement, c'est-à-dire que le domaine horizontal prévaut sur le domaine vertical et dans Bach, ça, c'était typique, les domaines verticaux et horizontaux seront tout à fait contrôlés.

Et là, le domaine vertical, vous le percevez immédiatement ; le domaine horizontal, le contrepoint, vous lez percevez quand vous avez étudié la partition, c'est là, la différence. C'est que vous ne percevez pas la musique de la même façon si elle est écrite d'une façon ou d'une autre. Et ça, il n'y a rien à faire, on ne changera jamais ça, parce que c'est un phénomène de perception.

Alain Connes : Oui, ce que je voulais dire, c'est au niveau général de la structure. C'est, bon, finalement, si vous voulez, on peut résumer en gros un peu le travail du mathématicien en disant que de temps en temps, il y a un mathématicien qui... trouve un phénomène brut. Un exemple de ça, c'est par exemple quand Riemann trouve la relation entre les nombres premiers et les zéros d'une certaine fonction. D'accord ? Et c'est une trouvaille, c'est-à-dire que c'est quelque chose qu'après, on va pouvoir vérifier jusqu'à un certain niveau avec l'ordinateur, etc.

Mais ça va donner aux mathématiciens d'un siècle après, de deux siècles après une espèce d'objectif. Et la raison, c'est qu'on sait que ce phénomène est suffisamment profond et suffisamment mystérieux pour que l'on soit sûr que toutes les notions qui seront inventées, découvertes à l'occasion de cette recherche, c'est-à-dire pour essayer de trouver une démonstration de ce fait-là, seront, auront du sens, auront du sens. Et alors ? Justement, là où je pense qu'il y a un rapprochement qui est possible, si vous voulez avec la musique, c'est qu'on peut dire en fait qu'il y a deux aspects dans le travail du mathématicien. C'est-à-dire, bien sûr, il y a un aspect incroyablement rationnel qui consiste, une fois qu'on a une idée de démonstration, à essayer de vérifier qu'elle est correcte, bien sûr. Ça, c'est le rationalisme à l'état pur. Mais il y a un aspect qui est bien plus intéressant et qui a à voir avec l'intuition. Et cet aspect qui a à voir avec l'intuition, c'est qu'il y a une période dans laquelle le mathématicien ne doit absolument pas se dire "est-ce-que ce que je dis est correct ? etc. Est ce que je vais vérifier tous les petits détails, etc." Et dans laquelle, justement, il doit se permettre de rêver ? Il doit se permettre de voir beaucoup plus loin et dans cette période-là, qui est en gros, mise en route un petit peu comme par un élan poétique. C'est quelque chose qui est intransmissible en mots. C'est-à-dire que si un mathématicien est dans cette période-là, il est incapable de l'expliquer à des gens qu'il va rencontrer qui vont lui dire "oui, bon, mais alors ?".

Et il est incapable de l'écrire. Parce que s'il l'écrit, c'est comme s'il essayait d'attraper quelque chose qui va disparaître à partir du moment où il va l'écrire. Mais la question que je me pose, c'est de savoir dans quelle mesure, justement, cette intuition qui est terriblement présente, qui est quelque chose d'extrêmement fort, peut se traduire d'une autre manière. Est-ce qu'elle peut s'exprimer sous une forme musicale, est-ce qu'elle peut s'exprimer autrement. Parce qu'elle vient de quelque chose qui est très profond, qui est à l'intérieur.

Et si vous voulez, il y a un texte de Grothendieck que je vous lirai si j'ai le temps et qui parle justement du rêve en mathématiques et qui dit à quel point, justement, le rêve n'est pas admis en mathématiques. Il n'est pas admis. Pourquoi ? Parce que quand un mathématicien écrit un article, il ne va pas écrire sur des rêves qu'il a fantasmés, etc. Il va écrire des démonstrations. Et donc il y a toute une partie invisible du travail du mathématicien qui n'est jamais visible.

La partie qui est visible, ça va être une démonstration rigoureuse, écrite, etc. Et il va y avoir tout un... quelque chose qui est entièrement caché et qui est toute cette partie invisible et qui a consisté en ces... toutes ces journées, etc. dans lesquelles il y avait un rêve, qui était présent à l'intuition, qui était présent à l'esprit et qui n'était pas encore réalisé. Bon moi, ça me fait penser si vous voulez que le fonctionnement de la musique, on a un peu l'impression qu'on en est à ce niveau de l'intuition, de quelque chose qui n'est pas encore réalisé, etc. mais qu'on a réussi à transmettre, par contre. On a réussi à le transmettre sous forme musicale et à partir du moment où, justement, il y avait quelque chose de vrai derrière, il y avait une vraie inspiration, etc., là, ça a du sens et finalement, on arrive à travers la musique à transmettre quelque chose. Et alors ? Ce qui est très amusant, c'est que finalement, il m'est arrivé d'avoir un apport de l'extérieur par une œuvre musicale pour un problème que je me posais et que cet apport musical soit plus important que si j'avais lu un texte mathématique.

Il m'était arrivé d'écouter des œuvres musicales relativement courtes, mais qui avaient un sens, et c'était un sens qui cadrait avec une espèce d'intuition que j'avais à un moment donné, mais que je ne pouvais pas traduire autrement, je ne pouvais pas la traduire par des mots. Je ne pouvais pas dire "Bon, eh bien, etc.". Mais par contre, il y avait par exemple, je ne sais pas, un prélude, qui correspondait exactement à cette intuition. Je ne savais pas pourquoi. Donc, là, il y a quelque chose, à mon avis, si vous voulez justement, dans la notion de sens et tout ça.

Pierre Boulez : Non, moi, je dis que la transcription d'une intuition musicale, de la mathématique à la musique, c'est très, très inconfortable.

C'est très, très inconfortable parce que les choix ne sont pas les mêmes. La culture n'est pas la même et les choix ne sont pas les mêmes. Je disais tout à l'heure, je prends le cas d'un compositeur qui l'a fait, Xenakis pour ne pas le nommer, qui a utilisé beaucoup les glissandos, les courbes, alors on voyait des courbes superbes, magnifiques, etc. Mais qu'est ce qu'on entend, on entend un matériau extrêmement pauvre.

Alain Connes : Ce n'était pas du tout de ça dont je parlais. Si vous voulez, il y a deux choses très, très différentes. Il y a le fait d'utiliser des mathématiques, bon, je me souviens d'avoir écouté, effectivement, une conférence de Xenakis, il y a très, très longtemps, à un moment donné où je me posais la question de savoir si j'allais faire des mathématiques ou si j'allais m'intéresser à la musique ? Des choses comme ça.

Et ça m'avait dégoûté, vraiment, parce que il était venu à la Sorbonne, il avait fait un exposé et dans son exposé, il avait entouré le tableau dans lequel il avait quelques formules générales par des formules mathématiques, et ces formules mathématiques n'avaient rien à voir avec ce dont il parlait. Donc, elles étaient là uniquement comme outil psychologique pour, comment dire, pour effrayer les gens qui ne connaissaient pas les mathématiques et pour, donc, leur imposer comme ça quelque chose. Donc, ce n'était pas du tout ça dont je parlais.

Ce dont je parlais, c'était un problème qui est complètement ouvert à mon avis, qui est qu'il y a certaines notions mathématiques, certaines intuitions mathématiques qui ne sont pas transmissibles par des mots pour le moment.

Pierre Boulez : Oui, mais moi, ce que je voulais dire, c'est pas simplement comme une critique. Mais disons un glissando, qui suive une courbe ou une autre, c'est un matériau extrêmement primitif, c'est un matériau limite. Ce qui nous intéresse dans une continuité comme ça, c'est la notion de coupure, c'est-à-dire de l'intervalle, parce que l'intervalle définit vraiment la façon dont vous percevez les choses. Et donc quand on cible, par exemple, on avait vu, même une courbe qui vous inspire une sorte de geste... Mais ce geste, il faudra le transmettre non pas par un geste direct comme ça, mais il faut le transmuter, pratiquement, avec des intervalles qui lui donneront vraiment un sens, justement. Et c'est pour ça que je dis c'est la transposition ou la trans-figuration de ça, et vraiment moins primitive qu'on ne pense.

Alain Connes : D'accord, mais ce que j'avais en tête, par exemple, vous avez parlé, à propos de Wagner, de l'ambiguïté entre les tonalités, etc. Et alors, justement, il y a une idée mathématique qui est relativement simple à expliquer, qui est due à Galois et qui n'est pas encore, comment dire, capturée mathématiquement. Et c'est précisément l'idée d'ambiguïté. Et donc, ce que j'ai en tête, c'est la chose suivante, c'est que justement, comme les mathématiques arrivent à capturer des concepts à des niveaux de conceptualisation qui sont très élevés... Par exemple, ce qu'a fait Galois, ce qu'il a compris, c'est qu'en fait, les gens avant lui, cherchaient des symétries, et lui, il a réussi à comprendre qu'en fait, la première chose qu'il fallait faire, c'était briser complètement la symétrie entre les racines. Et après, une fois qu'on avait brisé complètement la symétrie, on arrivait à retrouver la structure intérieure par d'autres procédés. Mais ce que j'ai en tête, c'est que cette idée, bon, vous allez lire 36 textes mathématiques autour de cette idée. Il n'y a aucun de ces textes qui l'épuise complètement. Il n'y en en a aucun. C'est-à-dire lorsqu'on l'écrit en termes rationnels, etc., on n'arrive pas à l'épuiser. Et je suis persuadé qu'il y a sûrement certaines structures musicales qui arriveraient à transmettre une partie du contenu de cette idée, de manière complémentaire, à la manière rationnelle de la dire. C'est ça que j'ai en tête, pas du tout le fait que l'on puisse utiliser les mathématiques pour guider certaines choses... C'est quelque-chose qui est beaucoup plus, qui se situe beaucoup plus au niveau conceptuel, et au fait, justement, qu'il y a des concepts mathématiques beaucoup plus élaborés, beaucoup plus compliqués et beaucoup plus, comment dire ? Et en même temps beaucoup plus enfantins qu'on pourrait croire et que, justement, on n'arrive pas à les percevoir complètement lorsqu'on utilise uniquement le langage linéaire, rationnel, etc. Et que la musique polyphonique, etc., peuvent aider considérablement, ne serait-ce que par la polyphonie, c'est-à-dire le langage écrit est un langage linéaire unique.

Il y a un seul, un seul narrateur. Et la polyphonie, justement, bon, ben, on le sait bien. Et à mon avis, justement, ça, ça devrait permettre d'aller au-delà de certaines choses qu'on est seulement capable de faire pour le moment.

Gérard Assayag : La question que vous posez est vraiment celle de la source de la créativité. C'est-à-dire que si je la transforme un petit peu, c'est "Est-ce qu'il existe des niveaux de représentation très profonds, pré-verbaux, quasi conceptuel, mais on ne va pas vraiment dire ça puisqu'ils sont encore non verbalisés, mais qui pourraient ensuite, au moment où ils éclosent et où ils apparaissent, se transformer de diverses façons en mathématiques, en langage.

Alain Connes : C'est exactement ça. C'est exactement ça. Mais ce que je veux dire, c'est que je reviens toujours à Grothendieck, mais il montre bien à quel point, justement, le processus de créativité est un processus de retour à l'enfance. C'est en ce sens là, c'est-à-dire que c'est un processus qui consiste à essayer de se dépouiller entièrement de tous les dogmes, de tout ce qui nous a été imposé, etc. Et de revenir à une perception complètement enfantine. Mais justement, bon, après justement, être capable de la rendre universelle et de la transmettre. Alors ça, c'est évidemment au cœur de la musique, mais c'est aussi, c'est semblable au sein des mathématiques.

Pierre Boulez : Mais est ce possible d'être aussi enfantin ? J'allais dire infantile, excusez-moi, d'être aussi enfantin, après avoir fait tout de même des expériences qui vous ont marqué ?

Alain Connes : Justement...

Pierre Boulez : Est-ce que ça n'est pas artificiel ?

Alain Connes : Je ne pense pas que ce soit artificiel. Je ne pense pas que soit artificiel, l'exemple de Grothendieck, qui est un exemple extrêmement frappant parce qu'à un moment donné, justement, il a, pour revenir au CNRS parce qu'il était parti et il avait fait justement une demande au CNRS et son texte s'appelait *Dessins d'enfants.* Donc vous, vous lisez ça, c'est un enfant, vous pouvez dire, c'est infantile, etc. Mais en fait, c'était relié à un des problèmes les plus profonds des mathématiques qui est ce qu'on appelle la compréhension du groupe de Galois de la clôture algébrique de Q, etc.

Et c'est très souvent le cas, en fait, que quand les gens deviennent des professionnels, ils s'entourent de plus en plus d'une couche protectrice qui les empêche justement de retourner à cet état-là. Et au contraire, je pense que ce qui est absolument essentiel, justement, c'est de permettre le rêve, de permettre, d'essayer d'aller au-delà de l'interdit du rêve, etc., et de revenir à cette source-là. Et je pense que lorsqu'on revient à la source, par exemple, de la notion d'ambiguïté, qui est une notion qui existe et qui pourrait être manifestée dans pas mal de domaines, eh bien à ce moment-là, elle aura effectivement diverses formes, elle prendra diverses formes. Et on n'arrivera jamais à la résumer à une expression.

Il n'y aura jamais une seule expression qui la résumera et ça restera une source d'inspiration constante. Et c'est le cas pour la théorie de Galois, c'est-à-dire que c'est une théorie qui n'est pas épuisée et elle n'est pas épuisée au sens où elle reste... c'est quand les gens la comprennent vraiment, c'est-à-dire que quelqu'un pourrait lire un livre sur la théorie de Galois et n'y rien comprendre parce qu'il n'aurait pas compris l'idée de départ. Et c'est une idée, justement, qui est une idée enfantine, qui est l'idée d'ambiguité.

Mais cette idée, lorsqu'on l'a comprise, elle met les choses en mouvement. C'est une vraie idée met les choses en mouvement, ça là, ça, je pense, c'est très semblable à la musique. Parce qu'on a l'impression, si vous voulez mon impression, moi, sur la créativité en musique, ce n'est pas une impression, c'est plus une impression par rapport à la musique classique, la musique romantique, c'est-à-dire la musique qui est émotionnelle. Mais mon impression, c'était plus, par rapport au mathématicien, qu'il y avait une espèce de batterie émotionnelle qui se charge, indépendamment de l'expression instrumentale et ensuite, une fois qu'elle est suffisamment chargée, il y a un travail qui est extrêmement difficile, qui est de rendre l'émotion individuelle universelle, la transformer, la rendre universelle. Et c'est un processus qui peut paraître extrêmement différent du processus mathématique. Mais schématiquement, c'est le même parce que, que fait le mathématicien ? Quel est le rôle de l'intuition de mathématicien ? Le rôle de son intuition, c'est exactement comme un chasseur. Il dit "Il y a quelque chose là !". Il le sent très, très profondément. Mais après, cette chose-là, il doit aller la chercher et il y a une réalité qui est extrêmement cruelle, etc., et qui l'empêche d'aller la chercher. Donc, après, il a un vrai travail, et ce travail, je pense que c'est le même. C'est très semblable au travail qui consiste à avoir une émotion personnelle, à essayer de la rendre universelle. Donc, il y a un parallèle, bien sûr, ce sont des choses différentes, mais le rôle de l'intuition est le rôle absolument moteur de l'intuition au démarrage et c'est le même dans les deux, je pense

Pierre Boulez : Oui, ça, je le pense aussi, très certainement, mais, en plus de ça, je dirais qu'il y a deux contraintes : d'abord, l'objet n'existe pas, celui que vous imaginez, donc, il reste à construire, et deuxièmement, nous avons, dans une musique qui est instrumentale, par exemple, nous avons à tenir compte de ce qui est la transmission. Et cette transmission se fera mal si par exemple, l'idée est géniale mais la réalisation est insuffisante. Et justement, cette différence entre les objets dont vous vous servez, par exemple, les notes. Quand vous avez, par exemple, un objet tout à fait remarquable, je pense, tout simplement, parce que tout le monde connaît ça, à un son de tam-tam. Un son de tam-tam est beaucoup plus intéressant qu'un son de violon, juste comme ça, mais qu'est-ce qu'il fait ? Ce son est si intéressant, qu'il sort du contexte automatiquement, et donc il faut le restreindre au contraire, pour l'employer d'une façon très très mesurée pour qu'il ait disons sa place. Tandis que vous avez un Fa#, un Sol, ou je ne sais quoi, lui, il est neutre, et donc vous pouvez l'utiliser à votre découverte, c'est-à-dire qu'il y a des objets qui sont prêts à la découverte, et des objets qui ne sont pas prêts à la découverte, qui monopolisent...

Alain Connes : C'est un peu comme un caractère chinois qui a du sens en lui-même, par opposition à une lettre de l'alphabet qui n'a pas de sens en soi.

Pierre Boulez : Et ça n'est pas commode de devoir utiliser les deux.

Gérard Assayag : Nous pourrions continuer très longtemps cette passionnante discussion mais nous devons rendre l'antenne, pour que le Festival et le Colloque se poursuivent. Je pense que nous avons eu deux très belles paroles de fin et je voudrais juste mentionner une conclusion sur l'émotion, je me rappelle avoir lu dans l'un de vos ouvrages, celui avec Changeux, et qui est que pour qu'un jour les machines puissent s'imaginer des buts, et donc deviennent plus intéressantes, il faudrait qu'elles souffrent. Nous avons un grand programme en tant qu'informaticiens, pour faire en sorte que les machines puissent souffrir, elles aussi. Merci Alain Connes, merci Pierre Boulez.

Rencontre entre deux figures majeures de la création musicale et de la recherche mathématique contemporaine, Pierre Boulez et Alain Connes.

Quelle est la place de l'intuition dans le raisonnement mathématique et dans l'activité artistique ? Y a-t-il une dimension esthétique dans l'activité mathématique ? La notion d'élégance d'une démonstration mathématique ou d'une construction théorique en musique joue-t-elle un rôle dans la créativité ?

Ce dialogue autour de l'invention dans les deux disciplines est animé par Gérard Assayag, directeur du laboratoire CNRS/Ircam Sciences et technologies de la musique et du son. Introduction : Frank Madlener, directeur de l'Ircam.

Dans le cadre de la troisième conférence internationale “Mathematics and Computation in Music” (MCM 2011), Agora 2011.

Captation et postproduction Année Zéro. Production Ircam.

Traduction du paragraphe 3.3 du chapitre 2, p. 328 et suivantes, du livre Noncommutative geometry, quantum fields and motives, d'Alain Connes et Matilde Marcolli (Denise Vella-Chemla, juin 2021)

3.3. Système quantique et fonctions prolates.

Le passage du système classique au système quantique remplace l'intégration de la forme symplectique sur une région de l'espace des phases par un comptage des états quantiques dans une limite d'énergie donnée.

Le système classique (X, h) décrit au § 3.2 ci-dessus est facile à quantifier. L'espace mécanique quantique de Hilbert est simplement donné par

(2.50) $$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})^{\text{pair}},$$

c'est-à-dire l'espace des fonctions paires de carré intégrable $f(q)$. Exiger que les fonctions soient paires reflète simplement la symétrie discrète $(p, q) \mapsto (-p, -q)$ définissant X dans le cadre classique.

L'hamiltonien H génère le groupe des transformations d'échelle, qui est donné par la représentation naturelle ϑ_{a} de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathcal{H}$, de la forme

(2.51) $$(\vartheta_{\mathrm{a}}(\lambda)f)(q) = f(\lambda^{-1}q).$$

Celui-ci est unitaire après multiplication par $|\lambda|^{-1/2}$ de sorte que la représentation

(2.52) $$\lambda \mapsto |\lambda|^{-1/2}\vartheta_{\mathrm{a}}(\lambda)$$

est unitaire. Pour $h \in \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on définit les opérateurs correspondants

(2.53) $$\vartheta_{\mathrm{a}}(h) = \int_{\mathbb{R}_+^*} h(\lambda)\vartheta_{\mathrm{a}}(\lambda)d^*\lambda$$

avec $d^*\lambda = \dfrac{d\lambda}{\lambda}$ la mesure multiplicative de Haar sur $\mathbb{R}_+^*$.

Au cutoff infrarouge $|q| \leq \Lambda$ correspond la projection orthogonale P_Λ sur le sous-espace

(2.54) $$P_\Lambda = \{f \in L^2(\mathbb{R})^{\text{pair}} \mid f(q) = 0, \forall q \text{ avec } |q| > \Lambda\}.$$

Pour définir le cutoff ultraviolet, on utilise la transformée de Fourier, qui est définie comme suit pour les groupes abéliens localement compacts :

Définition 2.2. Soient A, B une paire de groupes abéliens localement compacts avec pour mesures de Haar da, db. Soit $\alpha(a, b)$ un bicaractère qui donne un isomorphisme $B \sim \widehat{A}$ de B avec le dual de Pontrjagin de A. Alors la transformée de Fourier $\mathbf{F}_\alpha$ est définie par

(2.55) $$\mathbf{F}_\alpha(f)(b) := \int \alpha(a, b)f(a)da$$

Le cutoff ultraviolet est donné par la projection orthogonale $\widehat{P}_\Lambda$ donnée par le conjugué

(2.56) $$\widehat{P}_\Lambda = \mathbf{F}_{e_\mathbb{R}} P_\Lambda \mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}^{-1}.$$

Ici $\mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}$ est la transformée de Fourier associée au bicaractère $e_\mathbb{R}$ introduit ci-dessus dans (2.37) (voir Annexe 1).

La première difficulté que l'on rencontre, inhérente au système quantique, est le fait que les deux cutoffs P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$ ne commutent pas, donc on ne peut pas juste intersecter leurs domaines afin d'effectuer les deux cutoffs à la fois. En effet, aucune fonction non nulle sur $\mathbb{R}$ ne peut avoir la propriété qu'à la fois la fonction et sa transformée de Fourier sont toutes les deux à support compact.

La position relative des deux projections (2.54) et (2.56) a d'abord été analysée dans les travaux de Slepian, Landau, Pollak, motivés par des problèmes de génie électrique ([196, 197, 245]), au début des années soixante.

Le résultat a été depuis considérablement affiné. Pour expliquer le point principal, rappelons d'abord au lecteur des faits bien connus sur la géométrie des couples de projections.

LEMME 2.3. Donner une paire de projections orthogonales $P_i, i = 1, 2$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ revient à donner une représentation unitaire du groupe diédral $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le produit libre de deux copies du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ces représentations unitaires irréductibles sont paramétrées par un angle $\alpha \in [0, \pi/2]$.

Ce que Slepian, Pollack et Landau ([196, 197, 245]) ont fait consiste à analyser la position relative des projections P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$ pour $\Lambda \to \infty$. Dans des problèmes concrets de génie électrique, cela permet de prendre en compte des signaux qui, à toutes fins utiles, sont de support fini à la fois selon la variable de temps et selon la variable duale de fréquence. Cela avait un rôle important dans les premiers développements de la technologie laser.

L'idée de base utilisée dans les articles de Pollack, Slepian, Landau ([196, 197, 245]) est qu'il existe un opérateur différentiel de second ordre $\mathbf{W}_\Lambda$ sur $\mathbb{R}$, qui commute à la fois avec P_Λ et avec $\widehat{P}_\Lambda$. Cet opérateur est de la forme

$$(\mathbf{W}_\Lambda \psi)(q) \;=\; -\partial((\Lambda^2 - q^2)\partial)\psi(q) + (2\pi\Lambda q)^2\psi(q). \tag{2.60}$$

Ici le symbole ∂ désigne la différenciation ordinaire en une variable. Pour être plus précis, (2.60) définit un opérateur symétrique de domaine naturel l'espace de Schwartz. Rappelons que par définition les indices de déficience $n_\pm(T)$ d'un opérateur symétrique T sont les dimensions de $\ker(T^* \pm i)$. On peut montrer que l'opérateur $\mathbf{W}_\Lambda$ a ses deux indices de déficience qui sont égaux à 4 et qu'il admet une unique extension auto-adjointe qui commute avec le groupe diédral Γ associé aux projections P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$. Nous utilisons la même notation $\mathbf{W}_\Lambda$ pour désigner cet opérateur auto-adjoint. Il commute avec la transformée de Fourier $\mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}$.

Si l'on astreint la variable à appartenir au domaine $[-\Lambda, \Lambda]$, l'opérateur $\mathbf{W}_\Lambda$ a un spectre discret simple. Ses propriétés ont été étudiées il y a longtemps. Il apparaît dans la factorisation de l'équation de Helmholtz

$$\Delta\psi + k^2\psi \;=\; 0 \tag{2.61}$$

dans l'un des systèmes de coordonnées peu séparables dans l'espace euclidien de dimension 3, appelé *système de coordonnées sphéroïdales prolates*. Les valeurs propres $\chi_n(\Lambda), n \geq 0$ de $\mathbf{W}_\Lambda$, listées en ordre croissant $\chi_{n+1} > \chi_n$, sont simples et positives. Les fonctions propres correspondantes ψ_n sont appelées fonctions d'ondes sphéroïdales prolates. Puisque le produit $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ commute avec $\mathbf{W}_\Lambda$, ce sont des fonctions propres de $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$. Par les résultats de Pollack, Landau, Slepian ([196, 197, 245]) , les valeurs propres λ_n de l'opérateur $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ sont simples. De plus, si on les liste dans l'ordre décroissant $\lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_n > \ldots$, on a

$$P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda \psi_n = \lambda_n \psi_n. \tag{2.62}$$

Ainsi, les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates ψ_n sont les vecteurs propres de $P_\Lambda \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ associés à des valeurs propres non nulles.

On en sait beaucoup sur les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates ψ_n. En particulier, on peut les considérer comme étant à valeurs réelles. Elles sont paires pour n pair et impaires pour n impair, et elles ont exactement n zéros dans l'intervalle $[-\Lambda, \Lambda]$. Nous les normalisons pour qu'elles aient leur L^2-norme égale à 1. Nous ne nous intéressons qu'aux ψ_n pour des valeurs paires de n, puisque dans notre espace mécanique quantique de Hilbert, on se restreint aux fonctions paires. Lorsque $\Lambda \to \infty$, la fonction ψ_n converge vers la fonction d'Hermite-Weber Ω_n d'ordre n.

Les valeurs propres λ_n se comportent qualitativement de la manière suivante, comme fonctions du cutoff. Elles restent très proches de la valeur $\lambda_n \sim 1$, jusqu'à ce que n tombe dans un intervalle I de taille $\sim \log \Lambda$ autour de la valeur $4\,\Lambda^2$. Leur comportement dans cet intervalle est régi par la relation

$$\lambda_n = (1 + e^{\pi\delta})^{-1} \tag{2.63}$$

où δ est la solution de plus petite valeur absolue de l'équation

$$(n + 1/2)\pi = 4\pi\Lambda^2 + \delta\,\log(8\pi\Lambda^2) - \delta(\log(|\delta/2|) - 1). \tag{2.64}$$

Au-delà de l'intervalle I, les valeurs propres λ_n tendent très rapidement vers zéro.

Pour la paire de projections P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$, on obtient de cette façon les valeurs propres α_n de l'opérateur angle α du lemme 2.3 par (2.59), c'est-à-dire

$$\cos^2(\alpha_n) = \lambda_n. \tag{2.65}$$

Ceci montre que l'angle α_n est essentiellement 0 sauf sur[1] un intervalle I de taille $\sim \log\Lambda$ autour de la valeur $n \sim 4\Lambda^2$. Il passe alors de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et reste sensiblement égal à $\frac{\pi}{2}$ pour toutes les plus grandes valeurs de n. Cela montre clairement comment imposer à la fois le cutoff ultraviolet et le cutoff infrarouge en se restreignant au sous-espace B_Λ de $\mathcal{H}$ couvert par les ψ_{2n}, pour $2n \leq 4\Lambda^2$. Aucune attention particulière n'est nécessaire pour définir précisément la borne supérieure, puisqu'on peut montrer que, pour tout n dans l'intervalle I considéré ci-dessus et pour tout $h \in \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on a

$$\|\vartheta_{\mathrm{a}}(h)\psi_n\| \;=\; O(\Lambda^{-\rho}) \tag{2.66}$$

pour quelques $\rho > 0$, et avec $\vartheta_{\mathrm{a}}(h)$ comme en (2.53). On note Q_Λ la projection orthogonale sur $B_\Lambda \subset \mathcal{H}$.

Nous arrivons maintenant au problème de compter le nombre d'états du système quantique statistique qui ont une énergie bornée $|H| \leq E$ sur l'hamiltonien H (c'est-à-dire le générateur des transformations d'échelle). L'hamiltonien H est le générateur de l'action de mise à l'échelle de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathcal{H}$ et on identifie, comme précédemment, le groupe dual de $\mathbb{R}_+^*$ avec $\mathbb{R}$ en utilisant le bicaractère défini dans (2.47) (voir Annexe 2).

Lemme 2.4. Soit N_E la projection spectrale, de l'action de mise à l'échelle de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathcal{H}$, associé à l'intervalle $[-E, E]$ dans le groupe dual $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}_+^*$. Il est donné par

$$N_E \;=\; \vartheta_{\mathrm{a}}(h_E), \qquad \text{avec} \qquad h_E(u) = |u|^{-1/2}\frac{1}{2\pi}\int_{-E}^{E} |u|^{is}ds, \tag{2.67}$$

avec $\vartheta_{\mathrm{a}}(h_E)$ défini en (2.53).

Nous pouvons maintenant formuler le problème du comptage des états quantiques du flot de mise à l'échelle de la manière suivante.

Remarque 2.5. Compter le nombre d'états quantiques de l'hamiltonien H assujetti à la contrainte $|H| \leq E$ revient à calculer la dimension de la presque-intersection des projections Q_Λ et N_E. Ceci est donné par $\mathrm{Tr}(Q_\Lambda N_E)$.

Pour calculer $\mathrm{Tr}(Q_\Lambda N_E)$ pour Λ grand, on peut utiliser l'analyse de l'opérateur d'angle entre P_Λ et $\widehat{P}_\Lambda$ décrit ci-dessus avec (2.66) et remplacer Q_Λ par

$$R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda, \tag{2.68}$$

[1] up to se traduit par sauf sur ?

ce qui introduit un terme d'erreur de l'ordre de $O(\Lambda^{-\rho}\log\Lambda)$. Par conséquent, pour compter le nombre d'états quantiques dans la presque-intersection des deux projections Q_Λ et N_E, on a juste besoin de calculer

$$\mathrm{Tr}(Q_\Lambda N_E) \sim \mathrm{Tr}(R_\Lambda \vartheta_{\mathrm{a}}(h_E)). \tag{2.69}$$

Il reste ainsi à calculer $\mathrm{Tr}(R_\Lambda \vartheta_{\mathrm{a}}(h_E))$. Nous appliquons alors le théorème 3 de [71], qui est en fait valide pour tout corps local et qui est un cas particulier du théorème 2.36 [2]

$$\int'_{(K,\alpha)} \frac{f(u^{-1})}{|1-u|} d^*u \;=\; \langle \varrho_\alpha, g\rangle, \qquad \text{avec} \quad g(\lambda) = \frac{f((\lambda+1)^{-1})}{|\lambda+1|}, \tag{2.102}$$

où $\langle \varrho_\alpha, g\rangle$ est l'appariement de la distribution ϱ et de la fonction $g(\lambda)$.

Théorème 2.6. Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$ une fonction à support compact, et soit $\vartheta_{\mathrm{a}}(h)$ donnée par (2.53). Alors $R_\Lambda\vartheta_{\mathrm{a}}(h)$ est un opérateur de classe trace. De plus, pour $\Lambda \to \infty$, on a

$$\mathrm{Tr}(R_\Lambda \vartheta_{\mathrm{a}}(h)) \;=\; 2h(1)\log\Lambda + \int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1). \tag{2.70}$$

Nous voulons appliquer cette formule à la fonction $h = h_E$ de (2.67). Noter que cette fonction n'a pas un support compact, donc en principe, le résultat ne s'applique pas directement. Nous ferons attention à ce point technique au § 5.1 ci-dessous. Dans (2.70), l'intégrale est singulière en $u = 1$ et le théorème 2.6 sélectionne une valeur principale particulière dénotée par $\int'$, dont nous discuterons en détail au § 4 ci-dessous.

Annexe 1: Référence au bicaractère défini dans (2.37)

Plus précisément, considérons le produit $\mathbb{R}\times\widehat{\mathbb{R}}$ du groupe additif $\mathbb{R}$ par son groupe dual $\widehat{\mathbb{R}}$ et utilisons le bicaractère

$$e_{\mathbb{R}}(p,q) \;=\; \exp(-2\pi i p q) \tag{2.37}$$

pour identifier $\widehat{\mathbb{R}}$ avec $\mathbb{R}$. Dans cette notation, $\frac{\partial}{\partial q}$ correspond à $-2\pi i p$ et le générateur $iq\frac{\partial}{\partial q}$ des transformations de mise à l'échelle correspond à $2\pi q p$. Ainsi, l'hamiltonien $h(q,p)$ est de la forme

$$h(q,p) = 2\pi q p. \tag{2.38}$$

La forme symplectique canonique

$$\omega = dp \wedge dq \tag{2.39}$$

est le produit de la mesure de Haar sur $\mathbb{R}$ par la mesure de Haar duale sur $\widehat{\mathbb{R}}$.

Dénotons par X le quotient de $\mathbb{R}\times\widehat{\mathbb{R}}$ par la symétrie discrète $(p,q)\mapsto(-p,-q)$.

L'hamiltonien $h(q,p)$ n'est pas positif, mais cela est en accord avec la symétrie $\frac{1}{2}+iE \mapsto \frac{1}{2}-iE$sur les zéros de ζ. Cette symétrie montre que nous devrions comparer

$$2N(E) = \#\{\rho \mid \zeta^*(\rho) = 0, |\Im\rho| \leq E\} \tag{2.40}$$

avec le volume symplectique de $|h| \leq E$, i.e. avec le volume symplectique de la région satisfaisant

$$|qp| \leq \frac{E}{2\pi}$$

[2] Théorème 2.36. Soit $\mathbb{A}_{\mathbb{Q},S}$ comme précédemment, avec comme caractère de base $\alpha = \prod_{v\in S}\alpha_v$. Soit $h \in \mathcal{S}(C_{\mathbb{Q},S})$ une fonction de support compact. Alors, dans la limite $\Lambda\to\infty$, on a

$$\mathrm{Tr}(\vartheta_{\mathrm{a}}(h)\; R_\Lambda) \;=\; 2h(1)\log\Lambda + \sum_{v\in S}\int'_{\mathbb{Q}_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1). \tag{2.271}$$

Annexe 2 : Référence au bicaractère défini dans (2.47)

Maintenant $2 \times \frac{E}{2\pi} \times 2\,\log\Lambda$ est la forme symplectique de la région du cutoff

(2.46) $$W(E,\Lambda) = \{(\lambda,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid \lambda \in [\Lambda^{-1},\Lambda], \quad |\theta| \leq E\}$$

dans le produit du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ par son groupe dual $\widehat{\mathbb{R}}_+^* \simeq \mathbb{R}$. Ici nous identifions $\widehat{\mathbb{R}}_+^*$ avec $\mathbb{R}$ en utilisant le caractère

(2.47) $$\langle \lambda, \theta \rangle \;=\; \lambda^{i\theta}.$$

En fait, le produit de la mesure de Haar sur $\mathbb{R}_+^*$, par la mesure duale de Haar sur $\mathbb{R}$ est donné par

(2.48) $$\frac{1}{2\pi}\frac{d\lambda}{\lambda} \;\times\; d\theta.$$

Références

[71] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), $\mathrm{n}^{\mathrm{o}}1, 29-106$.

[196] H.J. Landau, H. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty II*, Bell Syst. Tech. J. Vol. 40 (1961).

[197] H.J. Landau, H. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty III*, Bell Syst. Tech. J. Vol. 41 (1962).

[245] H. Pollak, D. Slepian, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty*, Bell Syst. Tech. Journal, Vol. 40 (1961), 43-64.

THEOREM 2.18. *The dimension of the near intersection of Q_Λ with N_E is given by*

$$\mathrm{Tr}(Q_\Lambda N_E) = \frac{4E}{2\pi}\log\Lambda - 2(\langle N(E)\rangle - 1) + o(1), \quad \textit{for } \Lambda \to \infty. \tag{2.132}$$

This still requires justifying the fact that we applied the result of Theorem 2.6 to the function $h_E \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$. This is discussed in §5.1 below. We also give in Remark 2.23 below an explanation for the additive 2 that appears in the expression $-2\langle N(E)\rangle+2$ in (2.131) and (2.132).

5.1. Quantized calculus.

In order to prove Theorem 2.18 and refine the analysis of §5, we use the quantized calculus developed in [**68**]. In particular, we analyze here the relative position of the three projections P_Λ, $\widehat{P}_\Lambda$, and N_E, using identities involving the quantized calculus, as proved in [**72**]. The method used here is based on the idea of Burnol [**37**] which simplifies the original argument of [**71**].

First recall from §IV of [**68**] that the main idea of quantized calculus is to give an operator-theoretic version of the calculus rules, based on the operator-theoretic differential

$$đf := [F, f], \tag{2.133}$$

where f is an element in an involutive algebra $\mathcal{A}$ represented as bounded operators on some Hilbert space $\mathcal{H}$, and the right-hand side of (2.133) is the commutator with a self-adjoint operator F on $\mathcal{H}$ with $F^2 = 1$.

In particular, we recall the framework for the quantized calculus in one variable, as in §IV of [**68**]. We let functions $f(s)$ of one real variable s act as multiplication operators on $L^2(\mathbb{R})$, by

$$(f\,h)(s) := f(s)\,h(s)\,, \quad \forall h \in L^2(\mathbb{R}). \tag{2.134}$$

We let $\mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}$ denote the Fourier transform with respect to the basic character $e_\mathbb{R}(x) = e^{-2\pi i x}$, namely

$$\mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}(h)(y) := \int h(x)\,e^{-2\pi i x y}\,dy. \tag{2.135}$$

We also introduce the notation

$$\Pi_{[a,b]} := \mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}\,\mathbf{1}_{[a,b]}\mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}^{-1}, \tag{2.136}$$

for the conjugate by the Fourier transform $\mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}$ of the multiplication operator by the characteristic function $\mathbf{1}_{[a,b]}$ of the interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

DEFINITION 2.19. *We define the* quantized differential *of f to be the operator*

$$đf := [H,\, f] = H\,f - f\,H, \tag{2.137}$$

where H is the Hilbert transform $H = 2\,\Pi_{[0,\infty]} - 1$ given by

$$(H\,h)(s) := \frac{1}{i\pi}\int \frac{h(t)}{s-t}dt. \tag{2.138}$$

Thus, the quantized differential of f is given by the kernel

$$k(s,t) = \frac{i}{\pi}\,\frac{f(s)-f(t)}{s-t}. \tag{2.139}$$

We follow [**281**] and [**37**], and use the classical formula expressing the Fourier transform as a composition of the inversion

$$I(f)(s) := f(s^{-1}) \tag{2.140}$$

with a multiplicative convolution operator. We use the unitary identification

$$w : L^2(\mathbb{R}, ds)^{\text{even}} \to L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*\lambda),\ \ w(\eta)(\lambda) := \lambda^{1/2}\,\eta(\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^* \tag{2.141}$$

whose inverse is given by

$$w^{-1} : L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*\lambda) \to L^2(\mathbb{R}, ds)^{\text{even}},\ \ w^{-1}(\xi)(x) := |x|^{-1/2}\,\xi(|x|)\,. \tag{2.142}$$

Also we define the duality $\langle \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\rangle$ by the bicharacter

$$\mu(v,s) = v^{-is}\,, \quad \forall v \in \mathbb{R}_+^*, s \in \mathbb{R}\,, \tag{2.143}$$

so that the Fourier transform $\mathbf{F}_\mu : L^2(\mathbb{R}_+^*) \to L^2(\mathbb{R})$ associated to the bicharacter μ is

$$\mathbf{F}_\mu(f)(s) := \int_0^\infty f(v) v^{-is} d^*v\,. \tag{2.144}$$

Lemma 2.20. *On $L^2(\mathbb{R})^{\text{even}}$ one has*

$$\mathbf{F}_{e_\mathbb{R}} = w^{-1} \circ I \circ \mathbf{F}_\mu^{-1} \circ u \circ \mathbf{F}_\mu \circ w, \tag{2.145}$$

where u is the multiplication operator by the function

$$u(s) := e^{2\,i\,\theta(s)}, \tag{2.146}$$

where $\theta(s)$ is the Riemann-Siegel angular function of (2.24).

Proof. First $\mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}$ preserves globally $L^2(\mathbb{R})^{\text{even}}$. One has, for $\xi \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$,

$$\begin{aligned}(w \circ \mathbf{F}_{e_\mathbb{R}} \circ w^{-1})(\xi)(v) &= v^{1/2} \int_\mathbb{R} |x|^{-1/2}\,\xi(|x|)\,e^{-2\pi i x v}\,dx \\ &= v^{1/2} \int_{\mathbb{R}_+^*} u^{1/2}\,\xi(u)\,(e^{2\pi i u v} + e^{-2\pi i u v})\,d^*u\,.\end{aligned}$$

This gives

$$\begin{aligned}(I \circ w \circ \mathbf{F}_{e_\mathbb{R}} \circ w^{-1})(\xi)(\lambda) &= (w \circ \mathbf{F}_{e_\mathbb{R}} \circ w^{-1})(\xi)(\lambda^{-1}) \\ &= \lambda^{-1/2} \int_{\mathbb{R}_+^*} (e^{2i\pi u\lambda^{-1}} + e^{-2i\pi u \lambda^{-1}})\,u^{1/2}\xi(u) d^*u\end{aligned}$$

We thus obtain

$$I \circ w \circ \mathbf{F}_{e_\mathbb{R}} \circ w^{-1} = C \tag{2.147}$$

where the operator C on the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}_+^*, d^*\lambda)$ is given by convolution by

$$v \mapsto 2v^{-1/2}\cos(2\pi v^{-1}). \tag{2.148}$$

By construction C is unitary and commutes with the regular representation of $\mathbb{R}_+^*$. Thus $C = \mathbf{F}_\mu^{-1} \circ u \circ \mathbf{F}_\mu$ where u is the Fourier transform

$$u(s) = \int_0^\infty 2v^{-1/2}\cos(2\pi v^{-1}) v^{-is} d^*v. \tag{2.149}$$

This is defined in the sense of distributions. To compute (2.149) one can let $v = e^{-t}$ and use

$$\int_{\mathbb{R}} e^{t/2} e^{-ze^t} e^{ist}\, dt = z^{-(1/2+is)} \Gamma(1/2 + is)\,, \quad \forall z\,,\ \Im z > 0\,. \tag{2.150}$$

This gives

$$u(s) = 2\cos((1/2 + is)\pi/2)(2\pi)^{-(1/2+is)} \Gamma(1/2 + is) \tag{2.151}$$

and the duplication formula

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) = \pi^{1/2} 2^{1-z} \Gamma(z) \tag{2.152}$$

shows that $u(s)$ is given by

$$u(s) = \frac{\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)}{\pi^{-(1-z)/2}\Gamma((1-z)/2)}\,,\ z = 1/2 + is\,, \tag{2.153}$$

which, using (2.24) gives (2.146). ∎

The following lemma relates the quantized calculus to the analysis of the geometry of the three projections P_Λ, $\widehat{P}_\Lambda$ and N_E.

Lemma 2.21. *For any Λ there is a unitary operator*

$$W = W_\Lambda : L^2(\mathbb{R})^{\text{even}} \to L^2(\mathbb{R}), \tag{2.154}$$

such that, for any functions $h_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$, $j = 1, 2$, one has

$$\begin{aligned} &W \vartheta_{\mathrm{a}}(\tilde{h}_1) \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda \vartheta_{\mathrm{a}}(\tilde{h}_2) W^* = \\ &\qquad \hat{h}_1 \left(\tfrac{1}{2} u^{-1} đu \Pi_{[-\infty, \frac{2\log\Lambda}{2\pi}]} + \Pi_{[0, \frac{2\log\Lambda}{2\pi}]} \right) \hat{h}_2 \end{aligned} \tag{2.155}$$

Here $\tilde{h}_j(\lambda) = \lambda^{-1/2} h_j(\lambda)$, the operator $đu$ is the quantized differential of the function u of (2.146) and $\hat{h}_j$ is the multiplication operator by the Fourier transform $\mathbf{F}_\mu(h_j)$.

Proof. We let ϑ_{m} be the regular representation of $\mathbb{R}_+^*$ on $L^2(\mathbb{R}_+^*)$

$$(\vartheta_{\mathrm{m}}(\lambda)\, \xi)(v) := \xi(\lambda^{-1}\, v)\,, \quad \forall \xi \in L^2(\mathbb{R}_+^*)\,. \tag{2.156}$$

One has

$$w\, \vartheta_{\mathrm{a}}(\tilde{h}_j) w^{-1} = \vartheta_{\mathrm{m}}(h_j), \quad \text{and} \quad \mathbf{F}_\mu \vartheta_{\mathrm{m}}(h_j) \mathbf{F}_\mu^{-1} = \widehat{h}_j\,. \tag{2.157}$$

Now we have $P_\Lambda = \mathbf{1}_{[-\Lambda,\Lambda]}$, so that $w P_\Lambda w^{-1} = \mathbf{1}_{[0,\Lambda]}$, and we obtain

$$\begin{aligned} \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda = \mathbf{F}_{e_\mathbb{R}} P_\Lambda \mathbf{F}_{e_\mathbb{R}}^{-1} P_\Lambda &= w^{-1} I \mathbf{F}_\mu^{-1} u \mathbf{F}_\mu \mathbf{1}_{[0,\Lambda]} \mathbf{F}_\mu^{-1} u^{-1} \mathbf{F}_\mu I \mathbf{1}_{[0,\Lambda]} w \\ &= w^{-1} \mathbf{F}_\mu^{-1} u^{-1} \mathbf{F}_\mu \mathbf{1}_{[\Lambda^{-1},\infty]} \mathbf{F}_\mu^{-1} u \mathbf{F}_\mu \mathbf{1}_{[0,\Lambda]} w, \end{aligned} \tag{2.158}$$

where we used the identity $I \mathbf{F}_\mu^{-1} u \mathbf{F}_\mu = \mathbf{F}_\mu^{-1} u^{-1} \mathbf{F}_\mu I$, which follows from the symmetry $\theta(-s) = -\theta(s)$. We also used the identity $I \mathbf{1}_{[0,\Lambda]} I = \mathbf{1}_{[\Lambda^{-1},\infty]}$.
We now set

$$W_\Lambda := \mathbf{F}_\mu\, \vartheta_{\mathrm{m}}(\Lambda)\, w, \tag{2.159}$$

with $\vartheta_{\mathrm{m}}(\Lambda)$ as in (2.156). One has

$$W_\Lambda\, \vartheta_{\mathrm{a}}(\tilde{h}_1) \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda \vartheta_{\mathrm{a}}(\tilde{h}_2) W_\Lambda^{-1} = \tag{2.160}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{F}_\mu \vartheta_{\rm m}(\Lambda)\vartheta_{\rm m}(h_1)\,\mathbf{F}_\mu^{-1}u^{-1}\mathbf{F}_\mu \mathbf{1}_{[\Lambda^{-1},\infty]}\mathbf{F}_\mu^{-1}u\mathbf{F}_\mu\mathbf{1}_{[0,\Lambda]}\vartheta_{\rm m}(h_2)\vartheta_{\rm m}(\Lambda)^{-1}\mathbf{F}_\mu^{-1}\\ &= \widehat{h}_1 u^{-1}\mathbf{F}_\mu\vartheta_{\rm m}(\Lambda)\mathbf{1}_{[\Lambda^{-1},\infty]}\vartheta_{\rm m}(\Lambda)^{-1}\mathbf{F}_\mu^{-1}u\mathbf{F}_\mu\vartheta_{\rm m}(\Lambda)\mathbf{1}_{[0,\Lambda]}\vartheta_{\rm m}(\Lambda)^{-1}\mathbf{F}_\mu^{-1}\widehat{h}_2\,.\end{aligned}$$

Here we use the identities (2.157) and the fact that $\vartheta_{\rm m}(\Lambda)$ commutes with multiplicative convolution operators such as $\mathbf{F}_\mu^{-1}u^{-1}\mathbf{F}_\mu$. Next we see that

$$\vartheta_{\rm m}(\Lambda)\mathbf{1}_{[\Lambda^{-1},\infty]}\vartheta_{\rm m}(\Lambda)^{-1} = \mathbf{1}_{[1,\infty]}\,,\ \vartheta_{\rm m}(\Lambda)\mathbf{1}_{[0,\Lambda]}\vartheta_{\rm m}(\Lambda)^{-1} = \mathbf{1}_{[0,\Lambda^2]}\,. \tag{2.161}$$

In order to use the quantized calculus on functions on $\mathbb{R}$ as in Definition 2.19, we use the isomorphism of abelian groups

$$t\in\mathbb{R}\mapsto e^{2\pi t}\in\mathbb{R}_+^* \tag{2.162}$$

and note that $\mathbf{F}_\mu$ and $\mathbf{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ are conjugate by this isomorphism since the bicharacter $\mu(v,s)=v^{-is}$ of (2.143) fulfills

$$\mu(e^{2\pi t},s) = e^{-2\pi i st} = e_{\mathbb{R}}(st)\,. \tag{2.163}$$

Thus we get from (2.136),

$$\mathbf{F}_\mu\mathbf{1}_{[a,b]}\mathbf{F}_\mu^{-1} = \Pi_{[\frac{\log a}{2\pi},\frac{\log b}{2\pi}]}\,, \tag{2.164}$$

and we obtain, using (2.160)

$$W_\Lambda\,\vartheta_{\rm a}(\tilde h_1)\widehat{P}_\Lambda P_\Lambda\vartheta_{\rm a}(\tilde h_2)W_\Lambda^{-1} = \widehat{h}_1u^{-1}\Pi_{[0,\infty]}\,u\,\Pi_{[-\infty,\frac{2\log\Lambda}{2\pi}]}\widehat{h}_2\,. \tag{2.165}$$

We then use

$$\frac{1}{2}\,\text{đ}u\,=[\Pi_{[0,\infty]},u]\,, \tag{2.166}$$

which completes the proof of (2.155). ∎

5.2. Proof of Theorem 2.18.

As a first application of Lemma 2.21 we now complete the proof of Theorem 2.18. One has $N_E=\vartheta_{\rm m}(h_E)$, where $\widehat{h}_E=\mathbf{1}_{[-E,E]}$. Thus, $N_E\widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ is unitarily equivalent to

$$\mathbf{1}_{[-E,E]}\left(\frac{1}{2}u^{-1}\text{đ}u\,\Pi_{[-\infty,\frac{2\log\Lambda}{2\pi}]}+\Pi_{[0,\frac{2\log\Lambda}{2\pi}]}\right). \tag{2.167}$$

The trace of $\mathbf{1}_{[-E,E]}\Pi_{[0,\frac{2\log\Lambda}{2\pi}]}$ is equal to $2E\frac{2\log\Lambda}{2\pi}$ and gives the leading term in the formula for $\mathrm{Tr}(N_E\widehat{P}_\Lambda P_\Lambda)$. If we replace $\Pi_{[-\infty,\frac{2\log\Lambda}{2\pi}]}$ by 1 the other term gives

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{1}_{[-E,E]}\left(\frac{1}{2}u^{-1}\text{đ}u\right)\right)=\int_{-E}^{E}k(s,s)ds, \tag{2.168}$$

where $k(s,t)$ is the kernel representing $\frac{1}{2}u^{-1}\text{đ}u$. Its diagonal values are

$$k(s,s) = -\frac{1}{\pi}\frac{d\theta}{ds}, \tag{2.169}$$

where we use (2.139) and (2.146). Thus, the integral gives

$$\mathrm{Tr}\left(\mathbf{1}_{[-E,E]}\left(\frac{1}{2}u^{-1}\text{đ}u\right)\right)=-\frac{2}{\pi}\theta(E)=-2(\langle N(E)\rangle-1). \tag{2.170}$$

The remainder in the formula

$$\operatorname{Tr}(N_E \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda) = 2E\frac{2\log\Lambda}{2\pi} - 2(\langle N(E)\rangle - 1) + r(E,\Lambda) \tag{2.171}$$

is therefore given by

$$r(E,\Lambda) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\mathbf{1}_{[-E,E]}u^{-1}\not{d}u\,\Pi_{[\frac{2\log\Lambda}{2\pi},\infty]}). \tag{2.172}$$

For $\Lambda \to \infty$ one has $\Pi_{[\frac{2\log\Lambda}{2\pi},\infty]} \to 0$ strongly. However, one needs to be a bit careful about the operator $T = \mathbf{1}_{[-E,E]}u^{-1}\not{d}u$, since it is unclear that it is of trace-class. One can check that the operator TT^* is a Hilbert-Schmidt operator. Also $\mathbf{1}_{[-E,E]}u^{-1}\not{d}u\, f$ is of trace-class, for any compactly supported function f, since θ is smooth. With f smooth, compactly supported and identically equal to 1 on $[-E,E]$ one has

$$\operatorname{Tr}(\mathbf{1}_{[-E,E]}u^{-1}\not{d}u\,\Pi_{[\frac{2\log\Lambda}{2\pi},\infty]}) = \operatorname{Tr}(\mathbf{1}_{[-E,E]}u^{-1}\not{d}u\,\Pi_{[\frac{2\log\Lambda}{2\pi},\infty]}\, f). \tag{2.173}$$

In fact, $\mathbf{1}_{[-E,E]}u^{-1}\not{d}u\,\Pi_{[\frac{2\log\Lambda}{2\pi},\infty]}$ is of trace-class by Lemma 2.21.
Moreover, the commutator $[\Pi_{[\frac{2\log\Lambda}{2\pi},\infty]}, f]$ is the conjugate of $\not{d}f$ by the function $s \mapsto \Lambda^{is}$. Thus, it is of trace-class and converges weakly to 0 as a family of Hilbert-Schmidt operators for $\Lambda \to \infty$. Since $\mathbf{1}_{[-E,E]}u^{-1}\not{d}u$ is Hilbert-Schmidt, we see that we can permute f with $\Pi_{[\frac{2\log\Lambda}{2\pi},\infty]}$ without affecting the limit. Since $\Pi_{[\frac{2\log\Lambda}{2\pi},\infty]} \to 0$ strongly, we obtain

$$r(E,\Lambda) \to 0 \quad \text{for} \quad \Lambda \to \infty. \tag{2.174}$$

This completes the proof of Theorem 2.18, making use of (2.66) to control the difference between Q_Λ and $\widehat{P}_\Lambda P_\Lambda$ in the statement.

Remark 2.22. One can use Lemma 2.21 to estimate the angle of the projections Q_Λ and N_E. Indeed, we obtain

$$[N_E, \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda] \sim [\mathbf{1}_{[-E,E]}, \frac{1}{2}u^{-1}\not{d}u\,\Pi_{[-\infty,\frac{2\log\Lambda}{2\pi}]}] + [\mathbf{1}_{[-E,E]}, \Pi_{[0,\frac{2\log\Lambda}{2\pi}]}]. \tag{2.175}$$

The second commutator on the right hand side of (2.175) is of the order of $\log(E) + \log(\log(\Lambda))$ by the analysis of §3.2. The limit for $\Lambda \to \infty$ of the first commutator on the right hand side of (2.175) has Hilbert-Schmidt norm of the order of $\sqrt{\log(E)}$, as one gets from the estimate

$$\int_{|s|>E}\int_{t\in[-E,E]} \left|\frac{e^{2i\theta(s)} - e^{2i\theta(t)}}{s-t}\right|^2 dt\, ds = O(\log(E)). \tag{2.176}$$

6. The map $\mathfrak{E}$

Notice that the first term in (2.132) of Theorem 2.18 above, of the form $\frac{4E}{2\pi}\log\Lambda$, is in fact the symplectic volume $v(W(E,\Lambda))$ of the box

$$W(E,\Lambda) = \{(\lambda,s) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \,:\, |\log\lambda| \le \log\Lambda\,,\ \text{and}\ \ |s| \le E\} \tag{2.177}$$

as in (2.46). The symplectic volume is computed in the symplectic space given by the product of the group $\mathbb{R}_+^* \sim \mathbb{R}$ by its dual $\mathbb{R}$ under the pairing $(\lambda, s) \mapsto \lambda^{is}$, with the symplectic form given by the product of the Haar measure by the dual one.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy
from scipy.special import pro_cv

def fctl(deuxk,m,n):
    if deuxk == 0:
        return(n*(n+1))
    elif deuxk == 2:
        return(0.5*(1-(2*m-1)*(2*m+1)/((2*n-1)*(2*n+3))))
    elif deuxk == 4:
        return(-(n-m+1)*(n-m+2)*(n+m+1)*(n+m+2)/(2*(2*n+1)*((2*n+3)**3)*(2*n+5))
+((n-m-1)*(n-m)*(n+m-1)*(n+m)/(2*(2*n-3)*((2*n-1)**3)*(2*n+1))))
    elif deuxk == 6:

return((4*m*m-1)*((n-m+1)*(n-m+2)*(n+m+1)*(n+m+2)/((2*n-1)*(2*n+1)*((2*n+3)**6)*
(2*n+5)*(2*n+7))-((n-m-1)*(n-m)*(n+m-1)*(n+m)/
((2*n-5)*(2*n-3)*((2*n-1)**5)*(2*n+1)*(2*n+3)))))
    elif deuxk == 8:
        A
=((n-m-1)*(n-m)*(n+m-1)*(n+m)/(((2*n-5)**2)*(2*n-3)*((2*n-1)**7)*(2*n+1)*((2*n+3
)**2)))-((n-m+1)*(n-m+2)*(n+m+1)*(n+m+2)/
(((2*n-1)**2)*(2*n+1)*((2*n+3)**7)*(2*n+5)*((2*n+7)**2)))
        B =
((n-m-3)*(n-m-2)*(n-m-1)*(n-m)*(n+m-3)*(n+m-2)*(n+m-1)*(n+m)/((2*n-7)*((2*n-5)**
2)*((2*n-3)**3)*((2*n-1)**4)*(2*n+1)))-((n-m+1)*(n-m+2)*(n-m+3)*(n-
m+4)*(n+m+1)*(n+m+2)*(n+m+3)*(n+m+4)/
((2*n+1)*((2*n+3)**4)*((2*n+5)**3)*((2*n+7)**2)*(2*n+9)))
        C =
(((n-m+1)**2)*((n-m+2)**2)*((n+m+1)**2)*((n+m+2)**2)/(((2*n+1)**2)*((2*n+3)**7)*
((2*n+5)**2)))-(((n-m-1)**2)*((n-m)**2)*((n+m-1)**2)*((n+m)**2))/
(((2*n-3)**2)*((2*n-1)**7)*((2*n+1)**2))
        D =
((n-m-1)*(n-m)*(n-m+1)*(n-m+2)*(n+m-1)*(n+m)*(n+m+1)*(n+m+2))/((2*n-3)*((2*n-1)*
*4)*((2*n+1)**2)*((2*n+3)**4)*(2*n+5))
        return(2*((4*m*m-1)**2)*A+(B/16)+(C/8)+(D/2))

def lmb(m,n,c):
    somme = 0
    for deuxk in [0,2,4,6,8]:
        somme = somme+fctl(deuxk,m,n)*(c**deuxk)
    return(somme)

for c in [5.5,6.5,7.5,8.5,9.5,10.5]:
    combien = 2*round(c/2)+1
    for n in range(1,combien+1):
        print('c = ',c,' ---- n = ',n)
        lmbpython=[pro_cv(m,n,c) for m in range(1,n+1)]
        for m in range(n+1):
            print('lmb abramovitz ',lmb(m,n,c),'  lmbpython ',pro_cv(m,n,c))
        print('===========================')
```

```
s =  14.134725142
0.5+si =  (0.5+14.134725142j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1552377653.3785648-1552377653.3785648j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-3.30837177700281e-11 + 2.07813922434745e-10j)
u(s) =  (-0.950564420053128 + 0.310527427659872j)

s =  21.022039639
0.5+si =  (0.5+21.022039639j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (77525022863903.48-77525022863903.48j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (5.68208436213105e-11 + 2.53411986062046e-10j)
u(s) =  (-0.904261286362284 - 0.426979538135515j)

s =  25.01085758
0.5+si =  (0.5+25.01085758j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.079118690732051e+16-4.079118690732051e+16j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (6.55654265160747e-11 - 1.88783247477696e-10j)
u(s) =  (-0.784724741017776 + 0.619844400502721j)

s =  30.424876126
0.5+si =  (0.5+30.424876126j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.013472878096727e+20-2.013472878096727e+20j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (9.37768690744111e-11 + 1.57364604426574e-10j)
u(s) =  (-0.475882080201416 - 0.879509093610273j)

s =  32.935061588
0.5+si =  (0.5+32.935061588j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.0383998769677638e+22-1.0383998769677638e+22j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-1.95754884228338e-10 + 3.026926960643e-10j)
u(s) =  (-0.410202611710304 + 0.91199441738754j)

s =  37.586178159
0.5+si =  (0.5+37.586178159j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.5463270824839915e+25-1.5463270824839915e+25j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (9.77987772933804e-11 + 3.23111059877631e-10j)
u(s) =  (-0.832148978949123 - 0.554552140771208j)

s =  40.918719012
0.5+si =  (0.5+40.918719012j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.9021598612498257e+27-2.9021598612498257e+27j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-4.4672668213468e-11 - 2.15276398663108e-10j)
u(s) =  (-0.917432154463171 - 0.397892249179437j)

s =  43.327073281
0.5+si =  (0.5+43.327073281j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.2754755543853489e+29-1.2754755543853489e+29j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-9.38139069931091e-11 + 1.24443749030768e-10j)
u(s) =  (-0.275254914228019 + 0.961371276975403j)

s =  48.005150881
0.5+si =  (0.5+48.005150881j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.981533271273009e+32-1.981533271273009e+32j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-1.97059496182276e-10 - 1.72832748036447e-10j)
u(s) =  (0.130434005539049 - 0.991456993620511j)
```

```
s =  49.773832478
0.5+si =  (0.5+49.773832478j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.1884164640852186e+33-3.1884164640852186e+33j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-2.13261321858653e-10 + 4.13195584430969e-
10j)
u(s) =  (-0.579296195808325 + 0.815117118898875j)

s =  52.970321478
0.5+si =  (0.5+52.970321478j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.8326133188886015e+35-4.8326133188886015e+35j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-1.78183286029802e-10 + 6.69587166829831e-
10j)
u(s) =  (-0.867737842433297 + 0.497022169333722j)

s =  56.446247697
0.5+si =  (0.5+56.446247697j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.136103288554269e+38-1.136103288554269e+38j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-5.27718897604577e-11 - 1.40541037639854e-
10j)
u(s) =  (-0.752858419003555 - 0.658182498198996j)

s =  59.347044003
0.5+si =  (0.5+59.347044003j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.0821980836627741e+40-1.0821980836627741e+40j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.34962595046576e-10 + 5.01096124606246e-
10j)
u(s) =  (-0.639526180501978 - 0.768769318100397j)

s =  60.831778525
0.5+si =  (0.5+60.831778525j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.114743881543562e+41-1.114743881543562e+41j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-5.52301698567417e-10 + 3.33975567034732e-
10j)
u(s) =  (0.464494099712826 + 0.885576214298894j)

s =  65.112544048
0.5+si =  (0.5+65.112544048j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.2781785378624e+43-9.2781785378624e+43j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-1.29185704126552e-10 - 1.34773943123525e-
10j)
u(s) =  (-0.0423226467531508 - 0.999103995373754j)

s =  67.079810529
0.5+si =  (0.5+67.079810529j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.039429323786669e+45-2.039429323786669e+45j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (5.52176582913716e-11 - 8.79667661835222e-
10j)
u(s) =  (-0.992150520397526 + 0.125049369750186j)

s =  69.546401711
0.5+si =  (0.5+69.546401711j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.821730225365428e+46-9.821730225365428e+46j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (9.83145559355855e-11 - 3.67444229828273e-
10j)
u(s) =  (-0.866385344622433 + 0.499376045304005j)

s =  72.067157674
0.5+si =  (0.5+72.067157674j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (5.150126730895443e+48-5.150126730895443e+48j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (4.90377889861868e-10 - 1.34183160051896e-
9j)
u(s) =  (-0.764358123967549 + 0.644791949643302j)

s =  75.704690699
```

0.5+si = (0.5+75.704690699j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.5606299558424955e+51-1.5606299558424955e+51j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.24913483013558e-10 - 8.19014852548133e-11j)
u(s) = (0.398701655779606 - 0.917080688750226j)

s = 77.144840069
0.5+si = (0.5+77.144840069j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.4988315007563905e+52-1.4988315007563905e+52j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-6.29298545786825e-11 + 1.71277493801281e-10j)
u(s) = (-0.762124629060977 + 0.647430343572685j)

s = 79.33737502
0.5+si = (0.5+79.33737502j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.693255881671456e+53-4.693255881671456e+53j)
la valeur de zeta par mpmath est : (4.38207291101612e-10 - 4.9060608563521e-10j)
u(s) = (-0.112471588202902 + 0.993654941036938j)

s = 82.910380854
0.5+si = (0.5+82.910380854j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.285098951091125e+56-1.285098951091125e+56j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.45466165298013e-10 - 1.72962385789377e-10j)
u(s) = (-0.171421302162206 - 0.985197816260786j)

s = 84.735492981
0.5+si = (0.5+84.735492981j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (2.2594695022426364e+57-2.2594695022426364e+57j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-8.14305489207517e-11 + 1.04083530692999e-9j)
u(s) = (-0.987832802824919 + 0.155519624687901j)

s = 87.425274613
0.5+si = (0.5+87.425274613j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.5450541737439268e+59-1.5450541737439268e+59j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-6.67152931552292e-11 - 2.15373635591392e-10j)
u(s) = (-0.824893140979883 - 0.565288692584895j)

s = 88.809111208
0.5+si = (0.5+88.809111208j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.3582530078666087e+60-1.3582530078666087e+60j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-6.75411047881234e-10 + 4.20439850543594e-10j)
u(s) = (0.441441702135125 + 0.897289932862304j)

s = 92.491899271
0.5+si = (0.5+92.491899271j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.419113439620957e+62-4.419113439620957e+62j)
la valeur de zeta par mpmath est : (9.13272312077283e-10 + 9.624251820362e-10j)
u(s) = (-0.0523742656856326 - 0.998627526304925j)

s = 94.651344041
0.5+si = (0.5+94.651344041j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.3136595910132959e+64-1.3136595910132959e+64j)
la valeur de zeta par mpmath est : (3.61364416050155e-10 + 6.11487575086228e-10j)
u(s) = (-0.48232346553893 - 0.875993193232969j)

s = 95.870634228
0.5+si = (0.5+95.870634228j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (8.918014841128276e+64-8.918014841128276e+64j)

```
la valeur de zeta par mpmath est :  (3.38023783328051e-10 - 2.4152792582532e-10j)
u(s) =  (0.324019087473094 + 0.946050543550984j)

s =  98.831194218
0.5+si =  (0.5+98.831194218j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.330979021029762e+66-9.330979021029762e+66j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.41130973522465e-11 - 6.80573799334799e-10j)
u(s) =  (-0.997492501364251 + 0.0707722383570443j)

s =  101.317851006
0.5+si =  (0.5+101.317851006j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.637619076802185e+68-4.637619076802185e+68j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.21550820414569e-10 + 8.17883387213535e-10j)
u(s) =  (-0.863277060043693 - 0.504730341471857j)

s =  103.72553804
0.5+si =  (0.5+103.72553804j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.0360606104740298e+70-2.0360606104740298e+70j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-4.82680530069077e-10 - 9.17537187523422e-10j)
u(s) =  (-0.566489438209433 - 0.824068999779238j)

s =  105.446623052
0.5+si =  (0.5+105.446623052j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.0401467570263094e+71-3.0401467570263094e+71j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.43669791147536e-10 - 5.93854151089687e-10j)
u(s) =  (-0.889414407200569 + 0.457101752637257j)

s =  107.168611184
0.5+si =  (0.5+107.168611184j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.545843637091742e+72-4.545843637091742e+72j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (6.67526798927193e-10 - 4.83756467413237e-10j)
u(s) =  (0.311312336275299 + 0.95030764980759j)

s =  111.029535543
0.5+si =  (0.5+111.029535543j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.956552216993838e+75-1.956552216993838e+75j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-2.67066589564165e-10 - 3.92466375402052e-11j)
u(s) =  (0.957721773713627 - 0.287696027353237j)

s =  111.874659177
0.5+si =  (0.5+111.874659177j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (7.379463586902966e+75-7.379463586902966e+75j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-4.81709731409654e-12 + 8.78544596675861e-12j)
u(s) =  (-0.537707417449351 + 0.843131504108315j)

s =  114.320220915
0.5+si =  (0.5+114.320220915j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.438413455776848e+77-3.438413455776848e+77j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.25250329167113e-10 - 1.14592577948171e-9j)
u(s) =  (-0.976388848536374 + 0.216020407493852j)

s =  116.226680321
0.5+si =  (0.5+116.226680321j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (6.869453122926582e+78-6.869453122926582e+78j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-2.04032333591704e-10 + 3.94680725519543e-
```

```
10j)
u(s) =  (-0.578229412483074 + 0.81587422225456j)

s =  118.790782866
0.5+si =  (0.5+118.790782866j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.8558719670815885e+80-3.8558719670815885e+80j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.25285238589866e-11 + 9.16078936293596e-
11j)
u(s) =  (-0.963278872539167 - 0.268502911938902j)

s =  121.370125002
0.5+si =  (0.5+121.370125002j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.2167632565357707e+82-2.2167632565357707e+82j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-6.91971953425824e-10 - 6.73136347434968e-
10j)
u(s) =  (0.0275905152843536 - 0.999619309270441j)

s =  122.946829294
0.5+si =  (0.5+122.946829294j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.638325291926723e+83-2.638325291926723e+83j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-2.10373430260225e-12 + 6.97572186267122e-
10j)
u(s) =  (-0.999981810133543 + 0.00603153397156909j)

s =  124.256818554
0.5+si =  (0.5+124.256818554j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.0653208331825935e+84-2.0653208331825935e+84j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (7.44368422294761e-10 - 2.9518500573854e-
10j)
u(s) =  (0.728223116584622 + 0.685340129039426j)

s =  127.51668388
0.5+si =  (0.5+127.51668388j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.458032810285737e+86-3.458032810285737e+86j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (8.31766482997672e-10 + 1.35412550058204e-
9j)
u(s) =  (-0.452118114551002 - 0.891958076646446j)

s =  129.5787042
0.5+si =  (0.5+129.5787042j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (8.820942527878277e+87-8.820942527878277e+87j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (5.13019971782096e-11 + 8.93421884800529e-
11j)
u(s) =  (-0.504067389156467 - 0.863664325527539j)

s =  131.087688531
0.5+si =  (0.5+131.087688531j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.43900600197461e+88-9.43900600197461e+88j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-5.09971444339762e-11 + 1.47648345643521e-
10j)
u(s) =  (-0.786833640997953 + 0.617165149205552j)

s =  133.497737203
0.5+si =  (0.5+133.497737203j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.15942188056924e+90-4.15942188056924e+90j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.09152963620951e-12 + 5.44907201357633e-
12j)
u(s) =  (-0.922843946086328 - 0.385174053087418j)

s =  134.756509753
0.5+si =  (0.5+134.756509753j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.0043652019946583e+91-3.0043652019946583e+91j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (8.96197709142036e-10 - 5.53656632767619e-
10j)
```

```
u(s) =  (0.44753715531083 + 0.894265337926221j)

s =  138.116042055
0.5+si =  (0.5+138.116042055j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (5.8828251379245155e+93-5.8828251379245155e+93j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.24941473286007e-9 + 7.82537704761482e-
10j)
u(s) =  (0.43649160433932 - 0.899708330149982j)

s =  139.736208952
0.5+si =  (0.5+139.736208952j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (7.4962600019903e+94-7.4962600019903e+94j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-8.06511039381521e-11 - 2.03269552747694e-
10j)
u(s) =  (-0.727972507715427 - 0.685606321448764j)

s =  141.123707404
0.5+si =  (0.5+141.123707404j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (6.627956978072351e+95-6.627956978072351e+95j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.43851976812573e-11 - 3.50003370235871e-
11j)
u(s) =  (-0.346430223681124 + 0.938075743274622j)

s =  143.111845808
0.5+si =  (0.5+143.111845808j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.505442575065387e+97-1.505442575065387e+97j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-8.60710706867922e-10 + 1.13259210054659e-
9j)
u(s) =  (-0.267812421456572 + 0.963471072172681j)

s =  146.000982487
0.5+si =  (0.5+146.000982487j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.407988403815083e+99-1.407988403815083e+99j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (5.12602481740474e-10 + 5.63189059976061e-
10j)
u(s) =  (-0.0938378292361003 - 0.995587495805473j)

s =  147.422765343
0.5+si =  (0.5+147.422765343j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.3137796559772138e+100-
1.3137796559772138e+100j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-2.01900930503973e-10 + 1.22417453611093e-
9j)
u(s) =  (-0.94703799898525 + 0.321121516684865j)

s =  150.053520421
0.5+si =  (0.5+150.053520421j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (8.188277323349563e+101-8.188277323349563e+101j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.63493191706703e-10 + 2.28135696178927e-
10j)
u(s) =  (0.143097999263358 - 0.989708524064935j)

s =  150.925257612
0.5+si =  (0.5+150.925257612j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.22018889626019e+102-3.22018889626019e+102j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.99295285127262e-10 - 2.37469527360629e-
10j)
u(s) =  (0.227348206150401 + 0.973813531000774j)

s =  153.024693811
0.5+si =  (0.5+153.024693811j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (8.711479145783569e+103-8.711479145783569e+103j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (5.41906305380901e-10 - 6.46719840452352e-
10j)
```

u(s) = (-0.175000047688599 + 0.984568424899438j)

s = 156.112909294
0.5+si = (0.5+156.112909294j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.113873807174776e+106-1.113873807174776e+106j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-6.58394896884048e-10 - 3.29860242688459e-10j)
u(s) = (0.598711188949123 - 0.800964988140611j)

s = 157.597591818
0.5+si = (0.5+157.597591818j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.1472785025645233e+107-1.1472785025645233e+107j)
la valeur de zeta par mpmath est : (2.44763259041992e-10 + 6.63948434280297e-10j)
u(s) = (-0.760716289540543 - 0.64908452980153j)

s = 158.849988171
0.5+si = (0.5+158.849988171j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (8.204249151113659e+107-8.204249151113659e+107j)
la valeur de zeta par mpmath est : (6.24026463016982e-10 - 6.45860318607301e-10j)
u(s) = (-0.0343769276622227 + 0.999408938745537j)

s = 161.188964138
0.5+si = (0.5+161.188964138j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (3.233408618537105e+109-3.233408618537105e+109j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.78954740798523e-10 + 1.43942296094718e-9j)
u(s) = (-0.969557644025701 + 0.244863175898949j)

s = 163.030709687
0.5+si = (0.5+163.030709687j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (5.835494042246828e+110-5.835494042246828e+110j)
la valeur de zeta par mpmath est : (2.01212632923008e-10 - 7.21178180727684e-10j)
u(s) = (-0.855556034013618 + 0.517710220744084j)

s = 165.537069188
0.5+si = (0.5+165.537069188j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (2.991482376772555e+112-2.991482376772555e+112j)
la valeur de zeta par mpmath est : (2.11580722544306e-10 + 2.6361417955864e-10j)
u(s) = (-0.216403684694507 - 0.976303971747822j)

s = 167.184439978
0.5+si = (0.5+167.184439978j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (3.978353083477994e+113-3.978353083477994e+113j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-9.91171663853344e-11 - 4.16998370534047e-10j)
u(s) = (-0.89304759083845 - 0.449962221189301j)

s = 169.094515416
0.5+si = (0.5+169.094515416j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (7.993448945933399e+114-7.993448945933399e+114j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.51572330542178e-10 + 6.44757378725371e-10j)
u(s) = (-0.895259213394523 - 0.445545666382464j)

s = 169.911976479
0.5+si = (0.5+169.911976479j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (2.886665606142069e+115-2.886665606142069e+115j)
la valeur de zeta par mpmath est : (8.14700738434611e-10 - 5.58859559889156e-12j)

u(s) = (0.999905893697718 + 0.0137187371336478j)

s = 173.41153652
0.5+si = (0.5+173.41153652j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (7.042955788188926e+117-7.042955788188926e+117j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.25733054785378e-9 + 6.68547856790935e-10j)
u(s) = (0.559179182997771 - 0.829046826965729j)

s = 174.754191523
0.5+si = (0.5+174.754191523j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (5.803611476883072e+118-5.803611476883072e+118j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.46064493315253e-10 - 8.48779284195828e-10j)
u(s) = (-0.942475182550351 - 0.334276128786739j)

s = 176.441434298
0.5+si = (0.5+176.441434298j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (8.21704004680623e+119-8.21704004680623e+119j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.23922478490878e-10 + 7.59920653652182e-10j)
u(s) = (-0.948192161072706 + 0.317697380663217j)

s = 178.377407776
0.5+si = (0.5+178.377407776j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.7195452986345755e+121-1.7195452986345755e+121j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.96108964307702e-11 - 2.81275679496069e-10j)
u(s) = (-0.99032492126316 + 0.138767972980453j)

s = 179.91648402
0.5+si = (0.5+179.91648402j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.9290933242520965e+122-1.9290933242520965e+122j)
la valeur de zeta par mpmath est : (5.33021584807101e-10 - 7.26467210999725e-10j)
u(s) = (-0.300101757142996 + 0.953907194311744j)

s = 182.207078484
0.5+si = (0.5+182.207078484j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (7.046439047613409e+123-7.046439047613409e+123j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.37037953890155e-10 - 1.83111305875474e-9j)
u(s) = (-0.988860754144504 - 0.148843571956424j)

s = 184.874467848
0.5+si = (0.5+184.874467848j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.651908747484085e+125-4.651908747484085e+125j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-5.73645102804586e-10 - 7.91260412437333e-11j)
u(s) = (0.962658054873552 - 0.270720278861768j)

s = 185.598783678
0.5+si = (0.5+185.598783678j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.4512789046648092e+126-1.4512789046648092e+126j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.67347672617128e-10 + 3.19559733384411e-10j)
u(s) = (-0.569559570004176 + 0.821950057008725j)

s = 187.228922584
0.5+si = (0.5+187.228922584j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.8785050674440644e+127-

1.8785050674440644e+127j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.07132487196449e-9 + 9.20736554523122e-10j)
u(s) = (0.150329372692857 + 0.988635969255517j)

s = 189.416158656
0.5+si = (0.5+189.416158656j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (5.8333624190185805e+128-5.8333624190185805e+128j)
la valeur de zeta par mpmath est : (2.39477972284474e-11 - 8.20919716174381e-11j)
u(s) = (-0.843148026514329 + 0.537681509245965j)

s = 192.026656361
0.5+si = (0.5+192.026656361j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (3.5218400640634895e+130-3.5218400640634895e+130j)
la valeur de zeta par mpmath est : (6.79283494310972e-10 + 4.08579483826483e-10j)
u(s) = (0.468660231540883 - 0.883378507420224j)

s = 193.079726604
0.5+si = (0.5+193.079726604j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.8414574952880744e+131-1.8414574952880744e+131j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.12612979819482e-10 + 3.51259560154926e-10j)
u(s) = (-0.813593697395441 + 0.581433827325536j)

s = 195.26539668
0.5+si = (0.5+195.26539668j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (5.704268812618368e+132-5.704268812618368e+132j)
la valeur de zeta par mpmath est : (3.93352709500721e-10 + 1.28281448807204e-9j)
u(s) = (-0.82811423547166 - 0.56055937509698j)

s = 196.876481841
0.5+si = (0.5+196.876481841j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (7.165776067533748e+133-7.165776067533748e+133j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-6.58467785741349e-12 + 9.06440580892489e-11j)
u(s) = (-0.989501321978507 + 0.144523817423873j)

s = 198.015309676
0.5+si = (0.5+198.015309676j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.287045736347182e+134-4.287045736347182e+134j)
la valeur de zeta par mpmath est : (7.55223170776906e-10 - 2.50097575253218e-10j)
u(s) = (0.802345626885894 + 0.59685969458247j)

s = 201.264751944
0.5+si = (0.5+201.264751944j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (7.061373991228215e+136-7.061373991228215e+136j)
la valeur de zeta par mpmath est : (9.43272408274395e-10 + 3.38017917020795e-10j)
u(s) = (0.77240247825116 - 0.635133380945682j)

s = 202.493594514
0.5+si = (0.5+202.493594514j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.86621268145427e+137-4.86621268145427e+137j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-6.75777313949429e-11 - 3.06477053148937e-10j)
u(s) = (-0.907269346750846 - 0.420550035603655j)

```
s =  204.189671803
0.5+si =  (0.5+204.189671803j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (6.986102605567655e+138-6.986102605567655e+138j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-5.22409400698168e-12 - 2.17004827609778e-10j)
u(s) =  (-0.998841591985626 - 0.0481193736406862j)

s =  205.394697202
0.5+si =  (0.5+205.394697202j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.637554644475133e+139-4.637554644475133e+139j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (3.89209262405808e-10 - 2.39965416670969e-10j)
u(s) =  (0.449139921399348 + 0.893461432298775j)

s =  207.906258888
0.5+si =  (0.5+207.906258888j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.396882407230915e+141-2.396882407230915e+141j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.96774444629878e-10 + 8.52949138078122e-10j)
u(s) =  (-0.898934902737129 - 0.438082230455593j)

s =  209.576509717
0.5+si =  (0.5+209.576509717j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.304243891466219e+142-3.304243891466219e+142j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (6.3708003274539e-12 + 5.91858174948955e-10j)
u(s) =  (-0.999768296622083 - 0.0215256374893757j)

s =  211.690862595
0.5+si =  (0.5+211.690862595j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.150790886917215e+143-9.150790886917215e+143j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-6.65007973442198e-10 - 1.01010471160437e-9j)
u(s) =  (-0.395252850702886 - 0.918572361880796j)

s =  213.34791936
0.5+si =  (0.5+213.34791936j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.2356149792485679e+145-1.2356149792485679e+145j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.09943820663171e-10 + 5.61149992448104e-10j)
u(s) =  (-0.754425533410844 - 0.656385644676812j)

s =  214.547044783
0.5+si =  (0.5+214.547044783j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (8.126664874533795e+145-8.126664874533795e+145j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (6.72890174573925e-10 - 8.52106374432809e-10j)
u(s) =  (-0.231836340666952 + 0.972754805254723j)

s =  216.169538508
0.5+si =  (0.5+216.169538508j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.039341783544951e+147-1.039341783544951e+147j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (9.41990664768021e-10 - 6.84049325874633e-10j)
u(s) =  (0.309475577172679 + 0.9509073914602j)

s =  219.067596349
0.5+si =  (0.5+219.067596349j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.857781377166161e+148-9.857781377166161e+148j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-7.66079978940723e-11 - 4.37109109532409e-11j)
u(s) =  (0.5087958981879 - 0.860887178431166j)
```

```
s =  220.714918839
0.5+si =  (0.5+220.714918839j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.3108805161941847e+150-
1.3108805161941847e+150j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-3.44806519094783e-10 - 3.09676749157584e-
10j)
u(s) =  (0.107042765300168 - 0.994254417338349j)

s =  221.430705555
0.5+si =  (0.5+221.430705555j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.035193296170766e+150-4.035193296170766e+150j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-4.25219698936481e-10 + 2.56363129299649e-
10j)
u(s) =  (0.466831390360516 + 0.88434634220653j)

s =  224.007000255
0.5+si =  (0.5+224.007000255j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.308777747719959e+152-2.308777747719959e+152j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (4.33202279272239e-10 + 9.53871122926893e-
10j)
u(s) =  (-0.658025796611345 - 0.752995385772016j)

s =  224.98332467
0.5+si =  (0.5+224.98332467j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.070087031279763e+153-1.070087031279763e+153j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-9.94509136489416e-10 + 6.82076615291725e-
10j)
u(s) =  (0.360192685462852 + 0.932877928423129j)

s =  227.42144428
0.5+si =  (0.5+227.42144428j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.9280541652274154e+154-
4.9280541652274154e+154j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (4.19942217527474e-10 + 1.59573617264964e-
9j)
u(s) =  (-0.870459601881578 - 0.492239861746469j)

s =  229.337413306
0.5+si =  (0.5+229.337413306j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.993713374879329e+155-9.993713374879329e+155j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (9.33818366954923e-10 + 1.49644182324131e-
9j)
u(s) =  (-0.439461727697198 - 0.898261314924213j)

s =  231.2501887
0.5+si =  (0.5+231.2501887j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.0165066027382366e+157-
2.0165066027382366e+157j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-5.59826553711542e-10 - 4.81268698808318e-
10j)
u(s) =  (0.150059465463546 - 0.988676972941511j)

s =  231.987235253
0.5+si =  (0.5+231.987235253j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (6.418064726646767e+157-6.418064726646767e+157j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.15324779190224e-10 - 1.53481378202033e-
10j)
u(s) =  (0.3261985838301 + 0.945301266214728j)

s =  233.693404179
0.5+si =  (0.5+233.693404179j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.361218060291138e+158-9.361218060291138e+158j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-3.3562097536657e-10 + 2.10141785055858e-
10j)
```

u(s) = (0.43674380506669 + 0.899585931824127j)

s = 236.524229666
0.5+si = (0.5+236.524229666j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (7.988919407040291e+160-7.988919407040291e+160j)
la valeur de zeta par mpmath est : (6.0727669657306e-10 + 4.12717707105335e-10j)
u(s) = (0.368097551778345 - 0.929787175849806j)

s = 237.769820481
0.5+si = (0.5+237.769820481j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (5.652171973382166e+161-5.652171973382166e+161j)
la valeur de zeta par mpmath est : (2.05291244064513e-11 + 2.1884504239006e-10j)
u(s) = (-0.98255413599759 - 0.185976799182147j)

s = 239.555477573
0.5+si = (0.5+239.555477573j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (9.340487067076052e+162-9.340487067076052e+162j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.88301477994475e-10 - 9.32221914359244e-10j)
u(s) = (-0.921597264858048 - 0.38814749954897j)

s = 241.049157796
0.5+si = (0.5+241.049157796j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (9.757543850481089e+163-9.757543850481089e+163j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.38445778074197e-10 - 6.16844442890063e-10j)
u(s) = (-0.904083334651191 + 0.427356202723123j)

s = 242.823271934
0.5+si = (0.5+242.823271934j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.5835077787910239e+165-1.5835077787910239e+165j)
la valeur de zeta par mpmath est : (8.32177882818011e-11 - 6.68140661334423e-10j)
u(s) = (-0.969447902586337 + 0.245297297520695j)

s = 244.070898497
0.5+si = (0.5+244.070898497j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.1239223087643139e+166-1.1239223087643139e+166j)
la valeur de zeta par mpmath est : (2.73593764761868e-10 - 1.81837572142814e-10j)
u(s) = (0.387224290002862 + 0.921985547192436j)

s = 247.136990075
0.5+si = (0.5+247.136990075j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.3879944050285648e+168-1.3879944050285648e+168j)
la valeur de zeta par mpmath est : (2.85106725843567e-10 + 2.19113125904151e-11j)
u(s) = (0.988256588100332 - 0.15280352115156j)

s = 248.10199006
0.5+si = (0.5+248.10199006j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (6.319741231340195e+168-6.319741231340195e+168j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-3.4544585258209e-11 - 2.74441971953952e-10j)
u(s) = (-0.968806653333523 - 0.247817813033391j)

s = 249.573689645
0.5+si = (0.5+249.573689645j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (6.37786544854199e+169-6.37786544854199e+169j)

```
la valeur de zeta par mpmath est :  (-2.06215019780266e-10 + 6.45440252246734e-10j)
u(s) =  (-0.81475499891268 + 0.579805391270902j)

s =  251.014947795
0.5+si =  (0.5+251.014947795j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (6.135989710587494e+170-6.135989710587494e+170j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (3.95238497907813e-11 - 3.87337832347018e-11j)
u(s) =  (0.0201893670571877 + 0.999796173956347j)

s =  253.069986748
0.5+si =  (0.5+253.069986748j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.5481316859239606e+172-1.5481316859239606e+172j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-4.03980643043094e-13 + 2.79042469782098e-12j)
u(s) =  (-0.958941603097036 + 0.28360359985311j)

s =  255.306256455
0.5+si =  (0.5+255.306256455j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (5.192358307393555e+173-5.192358307393555e+173j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.13878234009644e-10 + 1.87150407259429e-10j)
u(s) =  (0.132706867303423 - 0.991155329587893j)

s =  256.380713694
0.5+si =  (0.5+256.380713694j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.8076739922162347e+174-2.8076739922162347e+174j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (3.826172967722e-10 - 1.24435955359283e-9j)
u(s) =  (-0.827243698400219 + 0.561843273037161j)

s =  258.610439492
0.5+si =  (0.5+258.610439492j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.320500976065398e+175-9.320500976065398e+175j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (8.03201008716942e-10 + 9.54130434157385e-10j)
u(s) =  (-0.170513391107409 - 0.985355358971103j)

s =  259.87440699
0.5+si =  (0.5+259.87440699j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (6.787392112472552e+176-6.787392112472552e+176j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-5.11960389162392e-11 + 5.61269559051954e-10j)
u(s) =  (-0.983497060588132 + 0.180924105122808j)

s =  260.805084505
0.5+si =  (0.5+260.805084505j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.9281959571055307e+177-2.9281959571055307e+177j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-1.06943384646652e-9 + 7.62866652659214e-11j)
u(s) =  (0.98987453199886 + 0.141945098189453j)

s =  263.573893905
0.5+si =  (0.5+263.573893905j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.2669877507571375e+179-2.2669877507571375e+179j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (3.94125213389517e-10 + 6.81549616896039e-10j)
u(s) =  (-0.498794721061001 - 0.866720154514526j)

s =  265.557851839
```

```
0.5+si =  (0.5+265.557851839j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (5.115426153889088e+180-5.115426153889088e+180j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.77683956147414e-10 + 1.4381951309042e-
10j)
u(s) =  (0.576980509536905 - 0.816757914938371j)

s =  266.614973782
0.5+si =  (0.5+266.614973782j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.691769765074278e+181-2.691769765074278e+181j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-6.42671029120823e-11 + 9.33704314379228e-
10j)
u(s) =  (-0.990569471026977 + 0.137011397589024j)

s =  267.921915083
0.5+si =  (0.5+267.921915083j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.0970935965556758e+182-
2.0970935965556758e+182j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-3.44354709874858e-10 + 3.62629791828993e-
10j)
u(s) =  (-0.0516641563385155 + 0.998664515715788j)

s =  269.970449024
0.5+si =  (0.5+269.970449024j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (5.237251727798899e+183-5.237251727798899e+183j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-5.31679488928859e-13 + 9.95568245410955e-
12j)
u(s) =  (-0.994312114182059 + 0.106505490895128j)

s =  271.494055642
0.5+si =  (0.5+271.494055642j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (5.734424904553734e+184-5.734424904553734e+184j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-5.2049203698936e-10 + 1.52909900221445e-
9j)
u(s) =  (-0.792329494091307 + 0.610093413169632j)

s =  273.459609188
0.5+si =  (0.5+273.459609188j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.2570925713244014e+186-
1.2570925713244014e+186j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-4.83926413045817e-10 - 2.02062492686866e-
9j)
u(s) =  (-0.891508541414766 - 0.453003885838231j)

s =  275.587492649
0.5+si =  (0.5+275.587492649j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.556183797629066e+187-3.556183797629066e+187j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-6.81924620046898e-10 - 3.36711329727201e-
10j)
u(s) =  (0.607969014304277 - 0.793960753215055j)

s =  276.452049503
0.5+si =  (0.5+276.452049503j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.3828486912468283e+188-
1.3828486912468283e+188j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (9.68540045301749e-11 - 2.32764663106156e-
10j)
u(s) =  (-0.704824247487366 + 0.709381970558765j)

s =  278.25074353
0.5+si =  (0.5+278.25074353j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.3325043487612005e+189-
2.3325043487612005e+189j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-4.92897023045876e-11 + 3.77862983280901e-
10j)
```

u(s) = (-0.966538443940808 + 0.256521804890736j)

s = 279.229250928
0.5+si = (0.5+279.229250928j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.0847974111064905e+190-1.0847974111064905e+190j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-8.68125802227608e-10 + 1.35593408699769e-10j)
u(s) = (0.952370709518671 + 0.304942669449327j)

s = 282.465114765
0.5+si = (0.5+282.465114765j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.749108264400431e+192-1.749108264400431e+192j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.36365697658413e-10 + 2.69737870205608e-12j)
u(s) = (0.999217771429157 + 0.0395454834349521j)

s = 283.211185733
0.5+si = (0.5+283.211185733j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (5.646475984048286e+192-5.646475984048286e+192j)
la valeur de zeta par mpmath est : (6.06686994626423e-11 - 4.60917895676259e-10j)
u(s) = (-0.965939395218416 + 0.258768399857856j)

s = 284.835963981
0.5+si = (0.5+284.835963981j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (7.247396071115964e+193-7.247396071115964e+193j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-5.34967512945024e-11 + 3.00280212054396e-10j)
u(s) = (-0.938473630613214 + 0.34535090074243j)

s = 286.667445363
0.5+si = (0.5+286.667445363j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.287054511504402e+195-1.287054511504402e+195j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.51298504892155e-12 - 8.42413534329141e-12j)
u(s) = (-0.937502747076959 - 0.347977871743481j)

s = 287.911920501
0.5+si = (0.5+287.911920501j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (9.089985006665091e+195-9.089985006665091e+195j)
la valeur de zeta par mpmath est : (7.39020985042769e-10 - 1.11501816837679e-9j)
u(s) = (-0.389575650710006 + 0.920994469241722j)

s = 289.579854929
0.5+si = (0.5+289.579854929j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.248556826605491e+197-1.248556826605491e+197j)
la valeur de zeta par mpmath est : (5.86692086965878e-10 - 9.90493004983568e-10j)
u(s) = (-0.480552688372266 + 0.876965856631934j)

s = 291.846291329
0.5+si = (0.5+291.846291329j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.390807823597919e+198-4.390807823597919e+198j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-2.13482113344052e-10 - 2.70056076466799e-10j)
u(s) = (-0.230840010629361 - 0.972991721183987j)

s = 293.558434139
0.5+si = (0.5+293.558434139j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (6.464694576848946e+199-6.464694576848946e+199j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-7.03252429964199e-10 - 6.61817312061742e-10j)

```
u(s) =  (0.0606518118090314 - 0.998158984192547j)

s =  294.965369619
0.5+si =  (0.5+294.965369619j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (5.8930857656921775e+200-
5.8930857656921775e+200j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-1.22708250364479e-10 - 3.07129663906652e-
10j)
u(s) =  (-0.724693795249288 - 0.689071043599377j)

s =  295.573254879
0.5+si =  (0.5+295.573254879j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.531210501595543e+201-1.531210501595543e+201j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-6.49265137028191e-11 - 1.33188891271668e-
12j)
u(s) =  (0.999158722804393 - 0.0410103236255239j)

s =  297.979277062
0.5+si =  (0.5+297.979277062j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (6.7049382983096625e+202-
6.7049382983096625e+202j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-3.15405943623219e-11 + 3.30398316939007e-
10j)
u(s) =  (-0.981938481366148 + 0.189200472547705j)

s =  299.840326054
0.5+si =  (0.5+299.840326054j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.247327233636674e+204-1.247327233636674e+204j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (4.90938890326557e-10 + 1.31559782934572e-
9j)
u(s) =  (-0.755534318596051 - 0.655109069868208j)

s =  301.649325462
0.5+si =  (0.5+301.649325462j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.1382496659407784e+205-
2.1382496659407784e+205j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-3.70572645590588e-10 - 4.27211203006005e-
10j)
u(s) =  (-0.141277654305137 - 0.989970011866014j)

s =  302.69674959
0.5+si =  (0.5+302.69674959j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.1081505572774717e+206-
1.1081505572774717e+206j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-4.34626342951471e-10 + 1.0318123489683e-
9j)
u(s) =  (-0.698612660147102 + 0.715500070637455j)

s =  304.864371341
0.5+si =  (0.5+304.864371341j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.336757918446181e+207-3.336757918446181e+207j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.99199053350019e-10 + 2.54967028452078e-
10j)
u(s) =  (-0.241936174584797 - 0.970292166013541j)

s =  305.728912602
0.5+si =  (0.5+305.728912602j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.2974915151046254e+208-
1.2974915151046254e+208j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (5.67231654884611e-11 - 5.5124270250932e-
11j)
u(s) =  (0.0285848048226505 + 0.999591370977783j)

s =  307.219496128
```

```
0.5+si =  (0.5+307.219496128j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.3488479139772683e+209-
1.3488479139772683e+209j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (7.45019340067342e-10 - 4.3317379800579e-
10j)
u(s) =  (0.494705216699596 + 0.869060842847141j)

s =  310.109463147
0.5+si =  (0.5+310.109463147j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.263177311997494e+211-1.263177311997494e+211j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.05896616123406e-9 + 1.37616235758572e-
10j)
u(s) =  (0.966785164408776 - 0.255590386906628j)

s =  311.16514153
0.5+si =  (0.5+311.16514153j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (6.631864254440693e+211-6.631864254440693e+211j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-2.67372319970624e-10 - 7.12621043917815e-
10j)
u(s) =  (-0.753199048856446 - 0.657792667032507j)

s =  312.427801181
0.5+si =  (0.5+312.427801181j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.8195569181568105e+212-
4.8195569181568105e+212j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-3.03710726209785e-10 + 9.23770628351672e-
10j)
u(s) =  (-0.804904931001207 + 0.593403784997998j)

s =  313.985285731
0.5+si =  (0.5+313.985285731j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (5.565506051805626e+213-5.565506051805626e+213j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.11631098537715e-10 - 4.8015247778971e-
10j)
u(s) =  (-0.674666392595895 + 0.738122793782712j)

s =  315.475616089
0.5+si =  (0.5+315.475616089j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (5.783495596671459e+214-5.783495596671459e+214j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.36005150660009e-9 - 1.82562897619575e-9j)
u(s) =  (-0.286181362027057 + 0.958175468287667j)

s =  317.734805942
0.5+si =  (0.5+317.734805942j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.010865469079842e+216-2.010865469079842e+216j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-9.4457927625933e-10 - 1.25319652413565e-
9j)
u(s) =  (-0.275414314839603 - 0.961325623907652j)

s =  318.853104256
0.5+si =  (0.5+318.853104256j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.1648577795512568e+217-
1.1648577795512568e+217j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (3.74311191220601e-10 - 1.20581689209521e-
9j)
u(s) =  (-0.824216068439019 + 0.566275438745954j)

s =  321.160134309
0.5+si =  (0.5+321.160134309j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.36617893921348e+218-4.36617893921348e+218j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-2.67152283289972e-10 - 1.38923465879477e-
10j)
u(s) =  (0.574286664147945 - 0.81865427830175j)
```

s = 322.144558672
0.5+si = (0.5+322.144558672j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (2.0495767786645057e+219-2.0495767786645057e+219j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.0594423547496e-10 - 9.32058249931976e-10j)
u(s) = (-0.974489244218357 + 0.224434206177915j)

s = 323.466969558
0.5+si = (0.5+323.466969558j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.6360526039267782e+220-1.6360526039267782e+220j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-7.89971273942077e-10 + 1.03878665241607e-9j)
u(s) = (-0.267168375273619 + 0.963649863411836j)

s = 324.862866052
0.5+si = (0.5+324.862866052j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.465754876789825e+221-1.465754876789825e+221j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.10913617959938e-9 + 6.51805008569298e-10j)
u(s) = (0.486596567220363 + 0.873626797190484j)

s = 327.443901262
0.5+si = (0.5+327.443901262j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (8.449150622101991e+222-8.449150622101991e+222j)
la valeur de zeta par mpmath est : (4.07958450009071e-10 + 3.13361822784031e-10j)
u(s) = (0.257852723675222 - 0.966184233411669j)

s = 329.03307168
0.5+si = (0.5+329.03307168j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.025477940654878e+224-1.025477940654878e+224j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-8.73554867483065e-10 - 6.68670632254667e-10j)
u(s) = (0.261091436460598 - 0.965314074178387j)

s = 329.953239728
0.5+si = (0.5+329.953239728j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.351651278457431e+224-4.351651278457431e+224j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.91527010083047e-10 - 4.50072795069745e-10j)
u(s) = (-0.69335101872479 + 0.72060000335362j)

s = 331.474467583
0.5+si = (0.5+331.474467583j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.746983725417871e+225-4.746983725417871e+225j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-6.25832558242157e-10 + 1.06977256609118e-9j)
u(s) = (-0.490044192034517 + 0.871697590826777j)

s = 333.645378525
0.5+si = (0.5+333.645378525j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.4367708908831236e+227-1.4367708908831236e+227j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.63772923811868e-10 + 2.21260324846413e-10j)
u(s) = (-0.292098601769155 - 0.956388209277158j)

s = 334.211354833
0.5+si = (0.5+334.211354833j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (3.495343535707612e+227-3.495343535707612e+227j)
la valeur de zeta par mpmath est : (5.55498908734683e-10 - 1.07246783126143e-10j)

```
u(s) =  (0.928131468462771 + 0.372252571850188j)

s =  336.841850428
0.5+si =  (0.5+336.841850428j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.1776238311464516e+229-
2.1776238311464516e+229j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-1.39611203140013e-9 - 1.62378653828712e-
9j)
u(s) =  (-0.149930696843258 - 0.988696508613229j)

s =  338.339992851
0.5+si =  (0.5+338.339992851j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.290856622756943e+230-2.290856622756943e+230j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (3.52525155673547e-10 + 5.71356361022069e-
10j)
u(s) =  (-0.448556031234616 - 0.89375471290675j)

s =  339.858216725
0.5+si =  (0.5+339.858216725j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.4872090297137385e+231-
2.4872090297137385e+231j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-3.59840772530016e-10 - 7.66568535788477e-
10j)
u(s) =  (-0.638870204695514 - 0.769314540062905j)

s =  341.042261111
0.5+si =  (0.5+341.042261111j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.5975459803167806e+232-
1.5975459803167806e+232j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (3.06493247333222e-11 - 8.6886212737027e-
11j)
u(s) =  (-0.778672183384721 + 0.627430976939072j)

s =  342.05487751
0.5+si =  (0.5+342.05487751j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (7.838776860719794e+232-7.838776860719794e+232j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.20206254293083e-9 - 1.36523835093049e-
10j)
u(s) =  (0.97453013769724 + 0.224256573415062j)

s =  344.66170294
0.5+si =  (0.5+344.66170294j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.705370112405877e+234-4.705370112405877e+234j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-9.03135415177491e-10 - 1.27712248965799e-
9j)
u(s) =  (-0.333261044615122 - 0.942834596385826j)

s =  346.347870566
0.5+si =  (0.5+346.347870566j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (6.65085390949008e+235-6.65085390949008e+235j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-2.14594512933454e-11 - 1.87655086200294e-
11j)
u(s) =  (0.133345746481054 - 0.991069579744675j)

s =  347.272677584
0.5+si =  (0.5+347.272677584j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.8429539297631567e+236-
2.8429539297631567e+236j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (4.92187629502783e-10 - 1.06010223553267e-
9j)
u(s) =  (-0.645333729362144 + 0.763900764332322j)

s =  349.316260871
0.5+si =  (0.5+349.316260871j)
```

```
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (7.044954278910672e+237-7.044954278910672e+237j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (4.50618385226602e-10 + 7.75458787743933e-10j)
u(s) =  (-0.495130207942292 - 0.86881878270619j)

s =  350.408419349
0.5+si =  (0.5+350.408419349j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.9168395367560186e+238-3.9168395367560186e+238j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.08739211983086e-10 - 4.67258293713358e-10j)
u(s) =  (-0.667264879332279 + 0.744820502409556j)

s =  351.878649025
0.5+si =  (0.5+351.878649025j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.9437473273071637e+239-3.9437473273071637e+239j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (8.18894722488168e-10 - 1.18644198153611e-9j)
u(s) =  (-0.35465511261163 + 0.934997193096472j)

s =  353.488900489
0.5+si =  (0.5+353.488900489j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.9477026685063786e+240-4.9477026685063786e+240j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-8.66297625340482e-10 + 1.57480579417892e-9j)
u(s) =  (-0.535381463142465 + 0.844610376992432j)

s =  356.017574977
0.5+si =  (0.5+356.017574977j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.6268509540168276e+242-2.6268509540168276e+242j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-9.00825192808038e-10 - 1.04555127335887e-10j)
u(s) =  (0.973415520391678 - 0.229046337365441j)

s =  357.151302252
0.5+si =  (0.5+357.151302252j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.5590167265802188e+243-1.5590167265802188e+243j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-3.488580188794e-11 - 5.06609301851748e-11j)
u(s) =  (-0.356678522314061 - 0.934227184211584j)

s =  357.952685102
0.5+si =  (0.5+357.952685102j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (5.489650301856764e+243-5.489650301856764e+243j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-5.36349676676824e-10 + 4.09093138718934e-10j)
u(s) =  (0.264409517866423 + 0.964410497071446j)

s =  359.743754953
0.5+si =  (0.5+359.743754953j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.14937349259701e+244-9.14937349259701e+244j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.99107738574564e-10 - 4.24771576192391e-10j)
u(s) =  (-0.639723452818613 + 0.76860516776424j)

s =  361.289361696
0.5+si =  (0.5+361.289361696j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.0370173030359319e+246-1.0370173030359319e+246j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-4.64994677988288e-10 + 9.61799400149861e-
```

10j)
u(s) = (-0.621091399885239 + 0.783738140572826j)

s = 363.331330579
0.5+si = (0.5+363.331330579j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (2.5632621961216606e+247-2.5632621961216606e+247j)
la valeur de zeta par mpmath est : (6.86825463472301e-11 + 1.12583486624728e-10j)
u(s) = (-0.457543504848982 - 0.889187236284028j)

s = 364.736024114
0.5+si = (0.5+364.736024114j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (2.32840409395302e+248-2.32840409395302e+248j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-8.65208569778381e-11 - 3.28845051860514e-10j)
u(s) = (-0.870514794735003 - 0.492142247878929j)

s = 366.212710288
0.5+si = (0.5+366.212710288j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (2.3682972088421448e+249-2.3682972088421448e+249j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.42067428567273e-10 - 1.2212963734841e-9j)
u(s) = (-0.973298255471271 - 0.229544126251626j)

s = 367.993575482
0.5+si = (0.5+367.993575482j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (3.8843770827161795e+250-3.8843770827161795e+250j)
la valeur de zeta par mpmath est : (3.44314739634486e-10 + 5.07320621319375e-10j)
u(s) = (-0.36927815045146 - 0.929318915980457j)

s = 368.968438096
0.5+si = (0.5+368.968438096j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.796226637568577e+251-1.796226637568577e+251j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-2.85289836682732e-10 + 4.54308719184962e-10j)
u(s) = (-0.434370733617332 + 0.900734181530158j)

s = 370.050919212
0.5+si = (0.5+370.050919212j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (9.83596447818845e+251-9.83596447818845e+251j)
la valeur de zeta par mpmath est : (4.22741033747001e-10 - 3.11918289841961e-11j)
u(s) = (0.989170587390519 + 0.146770395657113j)

s = 373.061928372
0.5+si = (0.5+373.061928372j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.114016956240417e+254-1.114016956240417e+254j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-3.97955893137077e-10 - 2.68410925140678e-11j)
u(s) = (0.990942897113052 - 0.134283932997163j)

s = 373.864873911
0.5+si = (0.5+373.864873911j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (3.9323462806282885e+254-3.9323462806282885e+254j)
la valeur de zeta par mpmath est : (4.50915719044432e-13 + 2.4355028517241e-10j)
u(s) = (-0.999993144455167 - 0.00370284249381473j)

s = 375.825912767

0.5+si = (0.5+375.825912767j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (8.559517351738185e+255-8.559517351738185e+255j)
la valeur de zeta par mpmath est : (2.84051946387913e-10 + 2.40007934593912e-10j)
u(s) = (0.166908768473293 - 0.985972343936072j)

s = 376.324092231
0.5+si = (0.5+376.324092231j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.8719809160075433e+256-1.8719809160075433e+256j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-4.75049568822088e-10 + 1.56215607724243e-10j)
u(s) = (0.804832340770311 + 0.593502235252775j)

s = 378.43668025
0.5+si = (0.5+378.43668025j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (5.169921945608036e+257-5.169921945608036e+257j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.08570654426503e-11 + 1.57632496666266e-10j)
u(s) = (-0.990557042604469 + 0.137101222994341j)

s = 379.872975347
0.5+si = (0.5+379.872975347j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.93523139536923e+258-4.93523139536923e+258j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-5.80686273273285e-10 + 2.13208067385915e-9j)
u(s) = (-0.861888594656996 + 0.507097673431927j)

s = 381.484468617
0.5+si = (0.5+381.484468617j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (6.203676974037067e+259-6.203676974037067e+259j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.07783780001986e-10 - 1.06722754229308e-9j)
u(s) = (-0.979806319648586 + 0.199948933422023j)

s = 383.44352945
0.5+si = (0.5+383.44352945j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.3461619602243202e+261-1.3461619602243202e+261j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.43887594772338e-9 + 1.44751250746939e-9j)
u(s) = (-0.00598428281794034 - 0.999982094019272j)

s = 384.956116815
0.5+si = (0.5+384.956116815j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (1.4486602082107065e+262-1.4486602082107065e+262j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.96745115201879e-10 + 2.10487720397024e-10j)
u(s) = (-0.0674158443856955 - 0.99772496406856j)

s = 385.861300846
0.5+si = (0.5+385.861300846j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (6.004438140751945e+262-6.004438140751945e+262j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-2.54498715170055e-11 + 4.37497284316627e-11j)
u(s) = (-0.494330181244248 + 0.869274221354258j)

s = 387.222890222
0.5+si = (0.5+387.222890222j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (5.097210265726076e+263-5.097210265726076e+263j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.05047886034597e-9 - 8.97047665356707e-10j)
u(s) = (0.156593264495834 + 0.98766317614587j)

```
s =  388.846128354
0.5+si =  (0.5+388.846128354j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (6.526591200416557e+264-6.526591200416557e+264j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (9.52713308404735e-10 - 1.2297644271048e-9j)
u(s) =  (-0.249860370771961 + 0.968281877924808j)

s =  391.456083564
0.5+si =  (0.5+391.456083564j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.9370143489330245e+266-
3.9370143489330245e+266j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.0576121252353e-9 - 1.72227027621303e-11j)
u(s) =  (0.999469769613627 + 0.0325603996987877j)

s =  392.24508334
0.5+si =  (0.5+392.24508334j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.359606763673598e+267-1.359606763673598e+267j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (7.21073260226802e-11 + 9.47503735313968e-
10j)
u(s) =  (-0.988483542189095 - 0.151328407185672j)

s =  393.427743844
0.5+si =  (0.5+393.427743844j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (8.713855012562412e+267-8.713855012562412e+267j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (7.95424368630898e-10 - 1.11375494211086e-
9j)
u(s) =  (-0.324453538555461 + 0.945901634060791j)

s =  395.582870011
0.5+si =  (0.5+395.582870011j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.572834913187417e+269-2.572834913187417e+269j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.04496612846355e-11 + 1.24296601996109e-
11j)
u(s) =  (-0.17179532719635 - 0.985132663935958j)

s =  396.381854223
0.5+si =  (0.5+396.381854223j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.025463275802118e+269-9.025463275802118e+269j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-7.05493659953465e-10 + 7.02916526359041e-
10j)
u(s) =  (0.00365962272979499 + 0.999993303558262j)

s =  397.91873621
0.5+si =  (0.5+397.91873621j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.009048925515238e+271-1.009048925515238e+271j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-1.39679537208277e-9 + 1.52199956402865e-
9j)
u(s) =  (-0.0856341300728373 + 0.996326651137377j)

s =  399.985119876
0.5+si =  (0.5+399.985119876j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.591640333444542e+272-2.591640333444542e+272j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-5.08320028385596e-10 - 1.18697329314578e-
9j)
u(s) =  (-0.690049721830656 - 0.723761964599746j)

s =  401.839228601
0.5+si =  (0.5+401.839228601j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.768983074921023e+273-4.768983074921023e+273j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.2778515939217e-9 + 6.25263328047075e-10j)
u(s) =  (0.613654662905523 - 0.789574540302763j)

s =  402.861917764
0.5+si =  (0.5+402.861917764j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.377345140858701e+274-2.377345140858701e+274j)
```

la valeur de zeta par mpmath est : (2.51005962789963e-11 + 2.4753629805907e-10j)
u(s) = (-0.979644698251703 - 0.200739296569994j)

s = 404.2364418
0.5+si = (0.5+404.2364418j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (2.0595686998513182e+275-2.0595686998513182e+275j)
la valeur de zeta par mpmath est : (7.86989192441199e-11 - 4.32821083268445e-10j)
u(s) = (-0.935993423473354 + 0.352017487086304j)

s = 405.13438746
0.5+si = (0.5+405.13438746j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (8.440033993502918e+275-8.440033993502918e+275j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-2.83223295366466e-10 + 3.3983383024513e-11j)
u(s) = (0.971614452799661 + 0.236569979310122j)

s = 407.581460387
0.5+si = (0.5+407.581460387j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (3.941925523228781e+277-3.941925523228781e+277j)
la valeur de zeta par mpmath est : (3.02583351306066e-10 + 5.43001306252409e-10j)
u(s) = (-0.526112828891119 - 0.850414776021772j)

s = 408.947245502
0.5+si = (0.5+408.947245502j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (3.3684559498380656e+278-3.3684559498380656e+278j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-3.4387983097471e-10 - 1.55817009526937e-9j)
u(s) = (-0.907111945759828 - 0.420889436621735j)

s = 410.513869193
0.5+si = (0.5+410.513869193j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (3.9460540721953575e+279-3.9460540721953575e+279j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-4.95310978329301e-10 - 1.36537851647864e-9j)
u(s) = (-0.767411870898033 - 0.641154443488291j)

s = 411.972267804
0.5+si = (0.5+411.972267804j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (3.900006417760735e+280-3.900006417760735e+280j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-2.25519985632822e-10 - 8.63674065717174e-10j)
u(s) = (-0.872339948240564 - 0.488899800269518j)

s = 413.26273607
0.5+si = (0.5+413.26273607j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (2.9607893876479297e+281-2.9607893876479297e+281j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.09412547237731e-10 - 5.81107964952853e-10j)
u(s) = (-0.931526691042077 + 0.363672962805957j)

s = 415.018809755
0.5+si = (0.5+415.018809755j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.670681155639158e+282-4.670681155639158e+282j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-8.60876459464237e-11 - 2.35977608873163e-10j)
u(s) = (-0.765087411788746 - 0.643926433936608j)

```
s =  415.455214996
0.5+si =  (0.5+415.455214996j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.270234429789943e+282-9.270234429789943e+282j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (5.38181940068385e-10 + 1.70323194317773e-
10j)
u(s) =  (0.817919287384492 - 0.575332981258957j)

s =  418.38770579
0.5+si =  (0.5+418.38770579j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.28113875489823e+284-9.28113875489823e+284j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (2.4774898224103e-9 + 1.16261633990465e-9j)
u(s) =  (0.639053921413247 - 0.769161937127809j)

s =  419.861364818
0.5+si =  (0.5+419.861364818j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.395373103509152e+285-9.395373103509152e+285j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-2.81517432107396e-10 - 1.48520005009839e-
10j)
u(s) =  (0.564541781710429 - 0.825404492781035j)

s =  420.643827625
0.5+si =  (0.5+420.643827625j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.2114480943672354e+286-
3.2114480943672354e+286j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (3.15140827383944e-11 - 7.21288340455225e-
11j)
u(s) =  (-0.679411065357675 + 0.733757864877397j)

s =  422.076710059
0.5+si =  (0.5+422.076710059j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.049273380151387e+287-3.049273380151387e+287j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-3.03790556238475e-10 + 5.06296009581594e-
10j)
u(s) =  (-0.470555044735877 + 0.882370642005648j)

s =  423.716579627
0.5+si =  (0.5+423.716579627j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.007707279520951e+288-4.007707279520951e+288j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (4.79559659815431e-10 - 2.04151719897297e-
9j)
u(s) =  (-0.895411778966932 + 0.445238976379188j)

s =  425.069882494
0.5+si =  (0.5+425.069882494j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.35817410989296e+289-3.35817410989296e+289j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.26338927258588e-9 - 2.19774053313392e-9j)
u(s) =  (-0.503237215286613 + 0.864148312010471j)

s =  427.208825084
0.5+si =  (0.5+427.208825084j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (9.666395383971671e+290-9.666395383971671e+290j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-2.27548435086897e-10 - 2.01303384077575e-
10j)
u(s) =  (0.121940131464741 - 0.992537457398097j)

s =  428.127914077
0.5+si =  (0.5+428.127914077j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.095021626163508e+291-4.095021626163508e+291j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-5.06035447406089e-10 + 1.36264359624075e-
9j)
u(s) =  (-0.757607480472204 + 0.652710430077924j)

s =  430.328745431
0.5+si =  (0.5+430.328745431j)
```

```
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.299084283786073e+293-1.299084283786073e+293j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.48857242170007e-10 + 6.64201648149101e-
11j)
u(s) =  (0.667924810377575 - 0.744228760316384j)

s =  431.301306931
0.5+si =  (0.5+431.301306931j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (5.985594411523079e+293-5.985594411523079e+293j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (3.04348626986366e-11 + 4.64613129868594e-
10j)
u(s) =  (-0.991454644082494 - 0.130451863639934j)

s =  432.138641735
0.5+si =  (0.5+432.138641735j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (2.230114640361499e+294-2.230114640361499e+294j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-8.97683624839431e-10 + 2.44133467047949e-
10j)
u(s) =  (0.862263464641659 + 0.506459986123506j)

s =  433.889218481
0.5+si =  (0.5+433.889218481j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (3.487786944583936e+295-3.487786944583936e+295j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-3.30470466005643e-10 + 3.60583115060584e-
10j)
u(s) =  (-0.0869848039750829 + 0.996209638518582j)

s =  436.161006433
0.5+si =  (0.5+436.161006433j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.2369063782785679e+297-
1.2369063782785679e+297j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (1.63660113289008e-9 + 1.22071089292486e-9j)
u(s) =  (0.285066606002284 - 0.958507710006753j)

s =  437.581698168
0.5+si =  (0.5+437.581698168j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (1.1521683305888742e+298-
1.1521683305888742e+298j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (6.77880456645603e-10 + 6.5644569367999e-
10j)
u(s) =  (0.0321199326356646 - 0.999484021847008j)

s =  438.621738656
0.5+si =  (0.5+438.621738656j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (5.902272523171785e+298-5.902272523171785e+298j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (8.82668659724515e-11 - 6.6040828238594e-
10j)
u(s) =  (-0.964899704062078 + 0.262618660991445j)

s =  439.918442214
0.5+si =  (0.5+439.918442214j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (4.5249636457199805e+299-
4.5249636457199805e+299j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (6.4665322586625e-10 - 1.12742405958614e-9j)
u(s) =  (-0.504914569108705 + 0.863169321687105j)

s =  441.683199201
0.5+si =  (0.5+441.683199201j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) =  (7.236214734110357e+300-7.236214734110357e+300j)
la valeur de zeta par mpmath est :  (-6.60073511148012e-11 - 7.4482539402142e-
10j)
u(s) =  (-0.984414951786158 - 0.175861316666723j)

s =  442.904546303
0.5+si =  (0.5+442.904546303j)
```

le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.928332479887231e+301-4.928332479887231e+301j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-6.91167182338837e-10 + 1.41153755776469e-9j)
u(s) = (-0.613212148188726 + 0.789918262425789j)

s = 444.319336278
0.5+si = (0.5+444.319336278j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.548340742096448e+302-4.548340742096448e+302j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.54110423406954e-9 + 2.32424432101958e-9j)
u(s) = (-0.389233002509899 + 0.921139332434104j)

s = 446.860622696
0.5+si = (0.5+446.860622696j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (2.463136848053914e+304-2.463136848053914e+304j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-9.96422716071006e-10 + 1.17100608864486e-10j)
u(s) = (0.972753922832068 + 0.231840043164901j)

s = 447.441704194
0.5+si = (0.5+447.441704194j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (6.136142956285409e+304-6.136142956285409e+304j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.98099793422818e-10 - 9.08679068351272e-10j)
u(s) = (-0.909257347947388 + 0.416234399351538j)

s = 449.148545685
0.5+si = (0.5+449.148545685j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (8.959474836254863e+305-8.959474836254863e+305j)
la valeur de zeta par mpmath est : (-1.58963666300377e-11 - 5.40992003028693e-11j)
u(s) = (-0.841043564351064 - 0.540967395379512j)

s = 450.12694578
0.5+si = (0.5+450.12694578j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (4.1661560311740454e+306-4.1661560311740454e+306j)
la valeur de zeta par mpmath est : (5.45248113756662e-10 - 5.6609882938752e-10j)
u(s) = (-0.0375101202918484 + 0.999296247804274j)

s = 451.403308445
0.5+si = (0.5+451.403308445j)
le cos((0.5 + 1j*s)*pi*0.5) = (3.093535119061664e+307-3.093535119061664e+307j)
la valeur de zeta par mpmath est : (1.88794093508895e-9 - 7.75071496764075e-10j)
u(s) = (0.711535350408185 + 0.702650300732451j)

```
c =  5.5  ---- n =  1
lmb abramovitz  15.706243074344021   lmbpython  14.460555877929892
lmb abramovitz  2.780506325558795   lmbpython  5.83583151962449
============================
c =  5.5  ---- n =  2
lmb abramovitz  6.277918321355996   lmbpython  22.751451128939003
lmb abramovitz  15.939995472311896   lmbpython  16.055884943867735
lmb abramovitz  8.197947773296795   lmbpython  9.191718374946461
============================
c =  5.5  ---- n =  3
lmb abramovitz  29.936040828088036   lmbpython  29.790071504326697
lmb abramovitz  25.79063140991268   lmbpython  25.56150074359101
lmb abramovitz  20.119469849111628   lmbpython  20.38995672863029
lmb abramovitz  14.34679673668497   lmbpython  14.709780008700175
============================
c =  5.5  ---- n =  4
lmb abramovitz  37.52632358294167   lmbpython  37.119962351867045
lmb abramovitz  34.75415168978595   lmbpython  35.020148793128804
lmb abramovitz  31.50423432010349   lmbpython  31.493677350194154
lmb abramovitz  26.9930511861094   lmbpython  27.177534880980357
lmb abramovitz  22.187218240448207   lmbpython  22.34220216334206
============================
c =  5.5  ---- n =  5
lmb abramovitz  46.373580259325244   lmbpython  46.376642837485534
lmb abramovitz  45.42284202213086   lmbpython  45.40112235756655
lmb abramovitz  43.02875922515859   lmbpython  43.1332765771552
lmb abramovitz  39.93816355677225   lmbpython  40.0028958742959
lmb abramovitz  36.14728298141789   lmbpython  36.25947968889567
lmb abramovitz  31.98086480595997   lmbpython  32.05568598915244
============================
c =  5.5  ---- n =  6
lmb abramovitz  57.962184013949546   lmbpython  57.963755878718345
lmb abramovitz  57.42605736097832   lmbpython  57.425407818799904
lmb abramovitz  55.912044985614315   lmbpython  55.94304653118317
lmb abramovitz  53.63888452817856   lmbpython  53.70338102531189
lmb abramovitz  50.80152649793068   lmbpython  50.863539915541
lmb abramovitz  47.473999437184396   lmbpython  47.54227023018183
lmb abramovitz  43.78798815312704   lmbpython  43.82765509476563
============================
c =  5.5  ---- n =  7
lmb abramovitz  71.73549207757075   lmbpython  71.7349528083202
lmb abramovitz  71.37903013951059   lmbpython  71.38137232721454
lmb abramovitz  70.33792735517805   lmbpython  70.3530775671625
lmb abramovitz  68.68648961084153   lmbpython  68.72098236589525
lmb abramovitz  66.51773735151376   lmbpython  66.56505977324332
lmb abramovitz  63.91229612532818   lmbpython  63.9594551667151
lmb abramovitz  60.925092530722374   lmbpython  60.9677399295074
lmb abramovitz  57.62010475148477   lmbpython  57.64271841859163
============================
c =  6.5  ---- n =  1
lmb abramovitz  22.4418947213093   lmbpython  17.531938131887273
lmb abramovitz  -2.57376805769061   lmbpython  6.816577617608084
============================
c =  6.5  ---- n =  2
lmb abramovitz  -34.240353796723234   lmbpython  27.964008133096705
lmb abramovitz  19.13403159413321   lmbpython  18.952330177861253
lmb abramovitz  7.099457590738748   lmbpython  10.108456805861687
============================
c =  6.5  ---- n =  3
lmb abramovitz  35.60282917509205   lmbpython  36.76343623845523
lmb abramovitz  31.794776245471454   lmbpython  30.152573186802655
lmb abramovitz  22.376997887381997   lmbpython  23.0272042489469
lmb abramovitz  14.483570977742962   lmbpython  15.551561655511442
============================
```

```
c =  6.5  ---- n =  4
lmb abramovitz  46.60603700834337   lmbpython  44.667422366966704
lmb abramovitz  39.54124935770773   lmbpython  40.78417645039121
lmb abramovitz  35.8717533747185   lmbpython  35.534479765272245
lmb abramovitz  29.072722328844993   lmbpython  29.561063470016336
lmb abramovitz  22.664530924030924   lmbpython  23.11039082710915
============================
c =  6.5  ---- n =  5
lmb abramovitz  53.60734336197222   lmbpython  53.57078871123596
lmb abramovitz  51.791123521396564   lmbpython  51.68842165504849
lmb abramovitz  47.75734392682746   lmbpython  48.13157492477539
lmb abramovitz  43.507905524117525   lmbpython  43.60050336488203
lmb abramovitz  38.11298213364293   lmbpython  38.41698965337265
lmb abramovitz  32.54466808565532   lmbpython  32.756529558406356
============================
c =  6.5  ---- n =  6
lmb abramovitz  64.74020898152001   lmbpython  64.75226443022558
lmb abramovitz  63.83376548056891   lmbpython  63.81214490839881
lmb abramovitz  61.38127537271023   lmbpython  61.47445165504884
lmb abramovitz  57.96001522014941   lmbpython  58.149625578153575
lmb abramovitz  53.958973471915876   lmbpython  54.10252667655951
lmb abramovitz  49.31767528971552   lmbpython  49.50401592275828
lmb abramovitz  44.357604419767604   lmbpython  44.46870712223425
============================
c =  6.5  ---- n =  7
lmb abramovitz  78.29019690177248   lmbpython  78.29112147801925
lmb abramovitz  77.723867598222   lmbpython  77.72612503704903
lmb abramovitz  76.09950335681948   lmbpython  76.13870732915419
lmb abramovitz  73.60542695406414   lmbpython  73.70442659992665
lmb abramovitz  70.45346009142831   lmbpython  70.58354632024728
lmb abramovitz  66.78340479645067   lmbpython  66.90330168568545
lmb abramovitz  62.64442896453164   lmbpython  62.761090734217646
lmb abramovitz  58.16846762169589   lmbpython  58.23133317300062
============================
c =  7.5  ---- n =  1
lmb abramovitz  37.80944995693082   lmbpython  20.57630805347189
lmb abramovitz  -17.93241038298437   lmbpython  7.804539412356618
============================
c =  7.5  ---- n =  2
lmb abramovitz  -157.52066623618384   lmbpython  33.14078229955326
lmb abramovitz  23.86261202479214   lmbpython  21.898297299569307
lmb abramovitz  2.9738494373495117   lmbpython  11.050487087355936
============================
c =  7.5  ---- n =  3
lmb abramovitz  35.42222515643515   lmbpython  44.08132940649011
lmb abramovitz  42.324920096356045   lmbpython  34.95590141666719
lmb abramovitz  24.508159394458467   lmbpython  25.782630486535055
lmb abramovitz  13.655403373579452   lmbpython  16.43417581850433
============================
c =  7.5  ---- n =  4
lmb abramovitz  60.172210171383895   lmbpython  53.384150786725215
lmb abramovitz  42.573743405147695   lmbpython  47.11241982831888
lmb abramovitz  41.693117925862204   lmbpython  39.88636317636608
lmb abramovitz  30.99278702161593   lmbpython  32.104471003064646
lmb abramovitz  22.79957183473868   lmbpython  23.930070930484266
============================
c =  7.5  ---- n =  5
lmb abramovitz  62.756438611723524   lmbpython  62.386141970483656
lmb abramovitz  59.23748244477727   lmbpython  58.93043569480277
lmb abramovitz  52.55976622559341   lmbpython  53.709521350135596
lmb abramovitz  47.601088784841686   lmbpython  47.54341523482688
lmb abramovitz  40.04253871955213   lmbpython  40.75633161776054
lmb abramovitz  32.98829062279026   lmbpython  33.51521419508332
============================
```

```
c =  7.5  ---- n =  6
lmb abramovitz  73.01669375979729   lmbpython  73.05230161733084
lmb abramovitz  71.48392024840186   lmbpython  71.36688255116685
lmb abramovitz  67.56955524353585   lmbpython  67.83002735039179
lmb abramovitz  62.666829611921585   lmbpython  63.152653776028004
lmb abramovitz  57.43962615496458   lmbpython  57.693707695397364
lmb abramovitz  51.21571980754604   lmbpython  51.65726083422918
lmb abramovitz  44.89830024331258   lmbpython  45.17081133032158
============================
c =  7.5  ---- n =  7
lmb abramovitz  86.17948650632127   lmbpython  86.19113633406305
lmb abramovitz  85.29209530428805   lmbpython  85.27970786324728
lmb abramovitz  82.81036929655275   lmbpython  82.89859395729808
lmb abramovitz  79.17297964256376   lmbpython  79.42504574188128
lmb abramovitz  74.82047208339492   lmbpython  75.12895846796897
lmb abramovitz  69.9402384008961   lmbpython  70.19424130831484
lmb abramovitz  64.47113795282682   lmbpython  64.74828909494542
lmb abramovitz  58.72943077629472   lmbpython  58.88210458863669
============================
c =  7.5  ---- n =  8
lmb abramovitz  101.68013013253339   lmbpython  101.68006069648786
lmb abramovitz  101.08753610780936   lmbpython  101.09342800739302
lmb abramovitz  99.37121081497479   lmbpython  99.42147313198078
lmb abramovitz  96.69376793344163   lmbpython  96.82598790073953
lmb abramovitz  93.26092548211055   lmbpython  93.4658722149434
lmb abramovitz  89.24880967244685   lmbpython  89.47340366734184
lmb abramovitz  84.752702349297   lmbpython  84.9530854827672
lmb abramovitz  79.80775406595528   lmbpython  79.98651578248356
lmb abramovitz  74.5466197104223   lmbpython  74.63769692992837
============================
c =  7.5  ---- n =  9
lmb abramovitz  119.3498981066048   lmbpython  119.34826867998882
lmb abramovitz  118.91990545277196   lmbpython  118.92612731468185
lmb abramovitz  117.65489867344367   lmbpython  117.68809374718944
lmb abramovitz  115.62403982465756   lmbpython  115.7026934347765
lmb abramovitz  112.92473955176132   lmbpython  113.05372714965418
lmb abramovitz  109.66046057135446   lmbpython  109.82389612129897
lmb abramovitz  105.91882785403514   lmbpython  106.08748439436448
lmb abramovitz  101.75923081598084   lmbpython  101.90836500509644
lmb abramovitz  97.2217272011139   lmbpython  97.34042083466353
lmb abramovitz  92.37168270932509   lmbpython  92.42882032980023
============================
c =  8.5  ---- n =  1
lmb abramovitz  75.52256446952026   lmbpython  23.60519304127665
lmb abramovitz  -55.53260963733547   lmbpython  8.796277062723078
============================
c =  8.5  ---- n =  2
lmb abramovitz  -465.31375784499267   lmbpython  38.25957774921061
lmb abramovitz  32.932222148033546   lmbpython  24.86687714871561
lmb abramovitz  -7.746966609812985   lmbpython  12.008266893051534
============================
c =  8.5  ---- n =  3
lmb abramovitz  16.729956000589837   lmbpython  51.41568289148662
lmb abramovitz  65.21282542520298   lmbpython  39.86240374320519
lmb abramovitz  26.555517213094348   lmbpython  28.611896738476457
lmb abramovitz  10.747902785622511   lmbpython  17.34487692081182
============================
c =  8.5  ---- n =  4
lmb abramovitz  81.75500243225986   lmbpython  62.740797364790026
lmb abramovitz  40.08814945618178   lmbpython  53.785965689715454
lmb abramovitz  51.038398692747336   lmbpython  44.44681707911772
lmb abramovitz  32.49998435616119   lmbpython  34.76141526504107
lmb abramovitz  22.174133917885616   lmbpython  24.78781083161575
============================
```

```
c =  8.5  ---- n =  5
lmb abramovitz  74.4092375944729   lmbpython  72.66063165083239
lmb abramovitz  67.56012407505372   lmbpython  66.91756003799543
lmb abramovitz  56.63654965712722   lmbpython  59.72678988535475
lmb abramovitz  52.63259749419523   lmbpython  51.748492592981314
lmb abramovitz  41.72693300459837   lmbpython  43.2351483013
lmb abramovitz  33.12628280477043   lmbpython  34.31902183625127
============================
c =  8.5  ---- n =  6
lmb abramovitz  83.0315399202235   lmbpython  83.02994306330737
lmb abramovitz  80.42135294629145   lmbpython  80.01154952138731
lmb abramovitz  74.20366145186537   lmbpython  74.89406666535483
lmb abramovitz  67.5021635070647   lmbpython  68.61620913084366
lmb abramovitz  61.2690512649762   lmbpython  61.57119171475895
lmb abramovitz  53.02244028265107   lmbpython  53.965235163714596
lmb abramovitz  45.315543103831246   lmbpython  45.922553849114294
============================
c =  8.5  ---- n =  7
lmb abramovitz  95.54031113925835   lmbpython  95.58897774148875
lmb abramovitz  94.15197322278003   lmbpython  94.06575593230508
lmb abramovitz  90.39279814064679   lmbpython  90.57793935367849
lmb abramovitz  85.2172456222035   lmbpython  85.80604759462372
lmb abramovitz  79.47985361033159   lmbpython  80.13092834832189
lmb abramovitz  73.32308674451737   lmbpython  73.77974840456741
lmb abramovitz  66.30470602136513   lmbpython  66.8980736323002
lmb abramovitz  59.24904141677209   lmbpython  59.585068265965056
============================
c =  8.5  ---- n =  8
lmb abramovitz  110.68600572981256   lmbpython  110.69492561108497
lmb abramovitz  109.80720044264277   lmbpython  109.80525570403222
lmb abramovitz  107.30334948314588   lmbpython  107.3972897184736
lmb abramovitz  103.51730723128078   lmbpython  103.80941197021971
lmb abramovitz  98.85734121207217   lmbpython  99.3084253726909
lmb abramovitz  93.62115369199176   lmbpython  94.08639918803455
lmb abramovitz  87.88702443137461   lmbpython  88.28089636170864
lmb abramovitz  81.60958711035313   lmbpython  81.992307706313
lmb abramovitz  75.097041236501   lmbpython  75.29572824857064
============================
c =  8.5  ---- n =  9
lmb abramovitz  128.13240054045585   lmbpython  128.13125527646383
lmb abramovitz  127.51661090564683   lmbpython  127.52652944782548
lmb abramovitz  125.72123577001545   lmbpython  125.78521678701348
lmb abramovitz  122.88799051934677   lmbpython  123.05474415979282
lmb abramovitz  119.20908594665674   lmbpython  119.48957618440414
lmb abramovitz  114.87375640942295   lmbpython  115.2241830336211
lmb abramovitz  110.01840011404462   lmbpython  110.36814542249573
lmb abramovitz  104.70533239187075   lmbpython  105.00891679845338
lmb abramovitz  98.9622959352295   lmbpython  99.21618098772535
lmb abramovitz  92.92201506599058   lmbpython  93.04584587222
============================
c =  9.5  ---- n =  1
lmb abramovitz  163.13823904571956   lmbpython  26.625426617000034
lmb abramovitz  -138.8039303773302   lmbpython  9.79022837459747
============================
c =  9.5  ---- n =  2
lmb abramovitz  -1146.3951788855936   lmbpython  43.33882003510077
lmb abramovitz  52.225974204082775   lmbpython  27.846590025343545
lmb abramovitz  -31.77807355452098   lmbpython  12.976301423576459
============================
c =  9.5  ---- n =  3
lmb abramovitz  -46.43249618462764   lmbpython  58.66411748610207
lmb abramovitz  117.60526612469693   lmbpython  44.815856197134195
lmb abramovitz  28.870771056823173   lmbpython  31.487954716440456
lmb abramovitz  3.717758319318637   lmbpython  18.27524633106089
```

```
============================
c =  9.5  ---- n =  4
lmb abramovitz  117.81865438464565   lmbpython  72.25864741366296
lmb abramovitz  24.937496636341955   lmbpython  60.64216254145324
lmb abramovitz  68.57952552186475   lmbpython  49.14232522844463
lmb abramovitz  33.27623087555991   lmbpython  37.49865209864576
lmb abramovitz  20.048816996979994   lmbpython  25.67380862959827
============================
c =  9.5  ---- n =  5
lmb abramovitz  89.52616667761312   lmbpython  83.92218148434242
lmb abramovitz  76.31933786428841   lmbpython  75.40766428140898
lmb abramovitz  58.644668383136356   lmbpython  66.05516487565474
lmb abramovitz  59.70491567942377   lmbpython  56.14684686796576
lmb abramovitz  42.87702318250205   lmbpython  45.81987558791087
lmb abramovitz  32.645282105994575   lmbpython  35.15794347212423
============================
c =  9.5  ---- n =  6
lmb abramovitz  95.13507702219081   lmbpython  94.67789169419862
lmb abramovitz  90.66728289116328   lmbpython  89.57231094033955
lmb abramovitz  80.80343766526401   lmbpython  82.52502893769649
lmb abramovitz  72.11972760503112   lmbpython  74.4443410377259
lmb abramovitz  65.66214232486934   lmbpython  65.6757959675667
lmb abramovitz  54.53649850572554   lmbpython  56.39676192115216
lmb abramovitz  45.457482977661186   lmbpython  46.71441091040319
============================
c =  9.5  ---- n =  7
lmb abramovitz  106.55651602567181   lmbpython  106.66861002556026
lmb abramovitz  104.37659854191189   lmbpython  104.0473471867737
lmb abramovitz  98.69433489337825   lmbpython  99.07972181571874
lmb abramovitz  91.46973476652433   lmbpython  92.75354284353864
lmb abramovitz  84.27033429135287   lmbpython  85.51639289720381
lmb abramovitz  76.92079105847897   lmbpython  77.6102303952042
lmb abramovitz  68.00894721940304   lmbpython  69.18260737783595
lmb abramovitz  59.64499074637849   lmbpython  60.33151712062811
============================
c =  9.5  ---- n =  8
lmb abramovitz  121.14790052433543   lmbpython  121.19201981816053
lmb abramovitz  119.84704157061587   lmbpython  119.79551608557384
lmb abramovitz  116.2148212342615   lmbpython  116.37096796354493
lmb abramovitz  110.93626502094206   lmbpython  111.54286390618668
lmb abramovitz  104.78076314586811   lmbpython  105.69968016425148
lmb abramovitz  98.21098986459899   lmbpython  99.08557834824356
lmb abramovitz  91.17018608050665   lmbpython  91.86158482282109
lmb abramovitz  83.38260077322856   lmbpython  84.13926300170269
lmb abramovitz  75.59754266225124   lmbpython  75.999310684774
============================
c =  9.5  ---- n =  9
lmb abramovitz  138.25801584578457   lmbpython  138.26395320539672
lmb abramovitz  137.38237908884707   lmbpython  137.39030716481824
lmb abramovitz  134.8582242379125   lmbpython  134.96575679641518
lmb abramovitz  130.96145558939017   lmbpython  131.2894290813026
lmb abramovitz  126.05273592375926   lmbpython  126.61919655459019
lmb abramovitz  120.45915417549881   lmbpython  121.15095023090596
lmb abramovitz  114.36942865145947   lmbpython  115.02982752717372
lmb abramovitz  107.80351427814698   lmbpython  108.3641314120795
lmb abramovitz  100.7348733528063   lmbpython  101.23611078709996
lmb abramovitz  93.4610602676168   lmbpython  93.70949729238387
============================
c =  9.5  ---- n =  10
lmb abramovitz  157.64732415040334   lmbpython  157.64511144160883
lmb abramovitz  157.01072918479775   lmbpython  157.0249493676558
lmb abramovitz  155.14580451412132   lmbpython  155.22574353717846
lmb abramovitz  152.17729426500551   lmbpython  152.3810658501328
lmb abramovitz  148.28224351494046   lmbpython  148.6390004664687
```

```
lmb abramovitz  143.6504490620017   lmbpython  144.13394298860374
lmb abramovitz  138.44257744261213   lmbpython  138.97875060079377
lmb abramovitz  132.75943713748   lmbpython  133.26546996992096
lmb abramovitz  126.63974531732654   lmbpython  127.06862314611178
lmb abramovitz  120.10758289148535   lmbpython  120.44871455365796
lmb abramovitz  113.29458503392354   lmbpython  113.4552382781958
============================
c =  9.5  ---- n =  11
lmb abramovitz  179.20522344847592   lmbpython  179.20219341326168
lmb abramovitz  178.71757224129303   lmbpython  178.7292124979008
lmb abramovitz  177.27639006568768   lmbpython  177.33454210751952
lmb abramovitz  174.943574562476   lmbpython  175.08048908519203
lmb abramovitz  171.81139784863777   lmbpython  172.0482038321462
lmb abramovitz  167.98791489390646   lmbpython  168.32228848744995
lmb abramovitz  163.58002385431726   lmbpython  163.98218307316256
lmb abramovitz  158.67766696903453   lmbpython  159.09862331121928
lmb abramovitz  153.34365737144384   lmbpython  153.73293603497356
lmb abramovitz  147.61461391015732   lmbpython  147.9376460184713
lmb abramovitz  141.51948282024364   lmbpython  141.75755905995473
lmb abramovitz  135.12312182965834   lmbpython  135.23092115725106
============================
c =  10.5  ---- n =  1
lmb abramovitz  351.0706033181817   lmbpython  29.640485921744265
lmb abramovitz  -309.60614990909096   lmbpython  10.785595996298163
============================
c =  10.5  ---- n =  2
lmb abramovitz  -2528.7708369755246   lmbpython  48.39465411610356
lmb abramovitz  92.7085882867133   lmbpython  30.832391221635355
lmb abramovitz  -80.99426354895104   lmbpython  13.951314250733498
============================
c =  10.5  ---- n =  3
lmb abramovitz  -202.27826580749678   lmbpython  65.83565820015909
lmb abramovitz  232.75581372222325   lmbpython  49.79072589887336
lmb abramovitz  32.33580488945934   lmbpython  34.39459782659385
lmb abramovitz  -10.994547192808216   lmbpython  19.219708486579485
============================
c =  10.5  ---- n =  4
lmb abramovitz  179.56256810736363   lmbpython  81.69693127109512
lmb abramovitz  -15.479514233153665   lmbpython  67.5843785117743
lmb abramovitz  103.5084482989881   lmbpython  53.92460897120458
lmb abramovitz  32.913511808757185   lmbpython  40.29311781255393
lmb abramovitz  15.16344150254275   lmbpython  26.581006373084602
============================
c =  10.5  ---- n =  5
lmb abramovitz  109.64983230778773   lmbpython  95.59539513478683
lmb abramovitz  84.69838081874816   lmbpython  84.18959264074968
lmb abramovitz  56.438307971083454   lmbpython  72.59302240392893
lmb abramovitz  71.14730724774849   lmbpython  60.68546797105538
lmb abramovitz  43.08394984437797   lmbpython  48.484886373706594
lmb abramovitz  31.026527669252847   lmbpython  36.02427101765557
============================
c =  10.5  ---- n =  6
lmb abramovitz  109.84314354509183   lmbpython  107.65926538733393
lmb abramovitz  102.20309886221195   lmbpython  99.8085175939208
lmb abramovitz  86.58084736014547   lmbpython  90.57881090270766
lmb abramovitz  76.08277594497208   lmbpython  80.55093170385148
lmb abramovitz  71.19116862582007   lmbpython  69.95759697057713
lmb abramovitz  55.47377756897382   lmbpython  58.926365616407125
lmb abramovitz  45.081447184853296   lmbpython  47.53863901275594
============================
c =  10.5  ---- n =  7
lmb abramovitz  119.47848483880941   lmbpython  119.53719246275676
lmb abramovitz  116.04289825089069   lmbpython  115.09614178550265
lmb abramovitz  107.45140626188339   lmbpython  108.27114745449595
```

```
lmb abramovitz  97.53125015345158   lmbpython  100.16628837795813
lmb abramovitz  89.02843868977804   lmbpython  91.21535796699993
lmb abramovitz  80.82733842140826   lmbpython  81.64131000431452
lmb abramovitz  69.3954608340923   lmbpython  71.57796967479266
lmb abramovitz  59.790807066084575   lmbpython  61.11405207205564
============================
c =  10.5  ---- n =  8
lmb abramovitz  133.21626631893133   lmbpython  133.34869126314595
lmb abramovitz  131.28705929785485   lmbpython  131.06011468003314
lmb abramovitz  126.02449400282295   lmbpython  126.26590482800502
lmb abramovitz  118.735152663762   lmbpython  119.93942297816781
lmb abramovitz  110.8079028673675   lmbpython  112.56473193186275
lmb abramovitz  102.90354277896178   lmbpython  104.4140764196361
lmb abramovitz  94.56590328635595   lmbpython  95.65658736252576
lmb abramovitz  85.00000589897819   lmbpython  86.4056062513603
lmb abramovitz  75.97590347360338   lmbpython  76.74158917878408
============================
c =  10.5  ---- n =  9
lmb abramovitz  149.82967527726134   lmbpython  149.8650857978642
lmb abramovitz  148.58670513586878   lmbpython  148.56509911555077
lmb abramovitz  145.05195926892833   lmbpython  145.20846303699756
lmb abramovitz  139.73970457563914   lmbpython  140.35183901957555
lmb abramovitz  133.2989950897189   lmbpython  134.37941573668184
lmb abramovitz  126.2693636673043   lmbpython  127.54622756099016
lmb abramovitz  118.87434612065726   lmbpython  120.02582531048385
lmb abramovitz  110.98839356832204   lmbpython  111.94075395674761
lmb abramovitz  102.45145899256184   lmbpython  103.38072426616033
lmb abramovitz  93.94427421508999   lmbpython  94.41354413385034
============================
c =  10.5  ---- n =  10
lmb abramovitz  168.89476183110472   lmbpython  168.8980520408982
lmb abramovitz  168.01912720519306   lmbpython  168.0361075956498
lmb abramovitz  165.4749409062441   lmbpython  165.60128708963637
lmb abramovitz  161.48984092577155   lmbpython  161.85600566865463
lmb abramovitz  156.37913225984522   lmbpython  157.04541640302858
lmb abramovitz  150.4646673166825   lmbpython  151.3655942304136
lmb abramovitz  143.991314271817   lmbpython  144.96680374819
lmb abramovitz  137.07104915538605   lmbpython  137.96375623192665
lmb abramovitz  129.69328910880367   lmbpython  130.44495174341756
lmb abramovitz  121.84866590081265   lmbpython  122.47973802428147
lmb abramovitz  113.82202044563422   lmbpython  114.12336479250797
============================
c =  10.5  ---- n =  11
lmb abramovitz  190.22513273717064   lmbpython  190.2218887424476
lmb abramovitz  189.5696167920799   lmbpython  189.58837006285853
lmb abramovitz  187.64236662923466   lmbpython  187.7401072563985
lmb abramovitz  184.55422534254157   lmbpython  184.79786370018672
lmb abramovitz  180.46754156607645   lmbpython  180.90223966100044
lmb abramovitz  175.56646930127334   lmbpython  176.18582007837188
lmb abramovitz  170.02315689667546   lmbpython  170.76318496351277
lmb abramovitz  163.96759440193222   lmbpython  164.72980244813354
lmb abramovitz  157.4711082953529   lmbpython  158.1642077084265
lmb abramovitz  150.55571236195067   lmbpython  151.1309368712771
lmb abramovitz  143.24374327653547   lmbpython  143.68327180577086
lmb abramovitz  135.66442922403968   lmbpython  135.86552994593424
============================
```

Calcul de certaines valeurs de $N(E)$ et de $N_{\text{osc}}(E)$ pour les 2 001 052 premiers zéros de zeta fournis par Odlyszko

On souhaite calculer les valeurs de $N(E)$ et de $N_{\text{osc}}(E)$ apparaissant dans les formules de l'article [1]. On calcule les valeurs de $N_{\text{osc}}(E)$ et de $N(E)$ en omettant le $N_{\text{osc}}(E)$ qui est minuscule rapporté à $N(E)$ et la constante $o(1)$ pour x variant de 1000 en 1000 jusqu'à 2 millions.

$$N(E) = \#\text{ de zéros } \rho, \quad 0 < \text{Im } \rho < E,$$

$$N(E) = \frac{E}{2\pi}\left(\log\left(\frac{E}{2\pi}\right) - 1\right) + \frac{7}{8} + o(1) + N_{\text{osc}}(E),$$

$$N_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi}\text{ Im } \log\zeta\left(\frac{1}{2} + iE\right).$$

On utilise le fichier des premiers zéros de zeta fournis par Odlyszko à cette page https://www-users.cse.umn.edu/ odlyzko/zeta_tables/index.html (dernier fichier de 14 méga des 2 millions et quelques premiers zéros).

Voici le programme python.

```
import mpmath
from mpmath import zeta, log, pi

f = open('zero', 'r') ; zeros = []
for line in f.readlines():
    zeros.append(float(line))
f.close() ; print(zeros) ; listeetapes = []
for k in range(1,202):
    listeetapes.append(1000*k) ; print(listeetapes)

LP1 = zeros ; print('j ai ',len(zeros), ' zeros.')
LP2 = listeetapes ; print('j ai ',len(listeetapes), ' etapes de 1000 en 1000.')
listeN = [] ; nb = 0 ; indice = 0
for val in LP2:
    while LP1[indice] < val:
        nb = nb+1
        indice = indice+1
    listeN.append(nb+1)
print(listeN)
listeNosc = []
for val in LP2:
    Noscval = (1/pi)*log(zeta(0.5+1j*val)).imag
    print('Nosc(',val, ') = ',Noscval)
    listeNosc.append(Noscval)
listeN = []
for val in LP2:
    Nval = (val/(2*pi))*(log(val/(2*pi))-1)+7/8
    print('N(',val, ') = ',Nval)
    listeN.append(Nval)
```

Voici son résultat.

```
C:_2022>python3 pgm-trace-AC.py

j ai 2001052 zeros.

j ai 201 etapes de 1000 en 1000.

[650, 1518, 2470, 3475, 4521, 5599, 6704, 7831, 8979, 10143, 11325, 12520, 13729,
14951, 16183, 17426, 18679, 19942, 21212, 22492, 23780, 25075, 26377, 27687, 29003,
30325, 31654, 32989, 34328, 35674, 37025, 38380, 39741, 41108, 42477, 43852, 45232,
46615, 48004, 49396, 50792, 52191, 53595, 55003, 56413, 57828, 59246, 60668, 62092,
63520, 64951, 66385, 67823, 69263, 70706, 72153, 73601, 75053, 76508, 77964, 79425,
80887, 82352, 83819, 85289, 86762, 88237, 89714, 91194, 92675, 94160, 95646, 97134,
98626, 100119, 101613, 103111, 104611, 106111, 107615, 109121, 110627, 112136, 113648,
115161, 116676, 118193, 119711, 121232, 122753, 124278, 125803, 127331, 128860,
130391, 131923, 133457, 134993, 136530, 138070, 139610, 141153, 142696, 144241,
145788, 147337, 148886, 150437, 151991, 153545, 155100, 156658, 158216, 159776,
161338, 162901, 164464, 166030, 167597, 169165, 170735, 172306, 173877, 175451,
177026, 178601, 180179, 181758, 183337, 184918, 186501, 188084, 189669, 191254,
192842, 194429, 196018, 197610, 199201, 200794, 202389, 203983, 205579, 207176,
208774, 210374, 211975, 213576, 215179, 216783, 218388, 219994, 221601, 223209,
224818, 226428, 228039, 229651, 231265, 232879, 234494, 236110, 237727, 239345,
240964, 242585, 244205, 245827, 247450, 249073, 250699, 252324, 253951, 255578,
257207, 258836, 260466, 262098, 263730, 265362, 266996, 268631, 270266, 271903,
273541, 275178, 276817, 278458, 280098, 281740, 283382, 285025, 286669, 288315,
289961, 291606, 293254, 294902, 296551, 298201, 299852]


Valeurs de N_osc(E)
Nosc( 1000 ) = 0.383758055576301
Nosc( 2000 ) = 0.00692590568567653
Nosc( 3000 ) = 0.352563001522947
Nosc( 4000 ) = -0.382343520339771
Nosc( 5000 ) = -0.331174708068316
Nosc( 6000 ) = -0.326671139180878
Nosc( 7000 ) = 0.0278186179979788
Nosc( 8000 ) = -0.432085164489919
Nosc( 9000 ) = 0.161508351927404
Nosc( 10000 ) = -0.965348189957804
Nosc( 11000 ) = -0.034331553545049
Nosc( 12000 ) = -0.591941536407323
Nosc( 13000 ) = -0.427856843684574
Nosc( 14000 ) = 0.481437588461084
Nosc( 15000 ) = 0.0128351671232399
Nosc( 16000 ) = -0.0739703067945915
Nosc( 17000 ) = -0.114445898444961
Nosc( 18000 ) = 0.47761643523313
Nosc( 19000 ) = -0.776816464474978
Nosc( 20000 ) = -0.411696911713147
Nosc( 21000 ) = -0.00764356336479126
Nosc( 22000 ) = -0.185263881968176
Nosc( 23000 ) = -0.599693013501741
Nosc( 24000 ) = 0.063915924298229
```

```
Nosc( 25000 ) = 0.0941487411543167
Nosc( 26000 ) = -0.243514906671866
Nosc( 27000 ) = 0.295967378851052
Nosc( 28000 ) = 0.939473750312999
Nosc( 29000 ) = -0.102333961862674
Nosc( 30000 ) = 0.366668707618175
Nosc( 31000 ) = 0.529523732057935
Nosc( 32000 ) = -0.442542434315681
Nosc( 33000 ) = -0.389010392995795
Nosc( 34000 ) = 0.840906193161458
Nosc( 35000 ) = -0.610880081308593
Nosc( 36000 ) = -0.610569324641092
Nosc( 37000 ) = -0.0317979257107866
Nosc( 38000 ) = -0.755035305794233
Nosc( 39000 ) = 0.332955791079267
Nosc( 40000 ) = 0.339603620901035
Nosc( 41000 ) = 0.366963303569216
Nosc( 42000 ) = -0.487889858737618
Nosc( 43000 ) = -0.132504540696431
Nosc( 44000 ) = 0.521269329873319
Nosc( 45000 ) = -0.44242605604978
Nosc( 46000 ) = 0.0568108944961279
Nosc( 47000 ) = 0.0958852080406014
Nosc( 48000 ) = 0.748428599424214
Nosc( 49000 ) = 0.0850041149479729
Nosc( 50000 ) = 0.173294063906156
Nosc( 51000 ) = 0.0782729103691658
Nosc( 52000 ) = -0.137633399701163
Nosc( 53000 ) = 0.585599628798736
Nosc( 54000 ) = 0.305731004523303
Nosc( 55000 ) = 0.0783801396569388
Nosc( 56000 ) = 0.957143581637952
Nosc( 57000 ) = -0.00629659539794501
Nosc( 58000 ) = 0.237927992384787
Nosc( 59000 ) = 0.737965869186978
Nosc( 60000 ) = -0.459666832738653
Nosc( 61000 ) = 0.689995262022332
Nosc( 62000 ) = 0.230443052793375
Nosc( 63000 ) = 0.203764321112265
Nosc( 64000 ) = -0.349289442632852
Nosc( 65000 ) = -0.389240390110076
Nosc( 66000 ) = 0.122174477935644
Nosc( 67000 ) = 0.222058540747528
Nosc( 68000 ) = -0.0535925112670249
Nosc( 69000 ) = 0.330158199296895
Nosc( 70000 ) = -0.592765221217699
Nosc( 71000 ) = 0.210591972981959
Nosc( 72000 ) = -0.227743868428881
Nosc( 73000 ) = -0.876636103638097
Nosc( 74000 ) = 0.29419876931228
Nosc( 75000 ) = 0.314225703576578
Nosc( 76000 ) = -0.787876150581017
Nosc( 77000 ) = 0.0158175764024074
Nosc( 78000 ) = 0.752505883802389
Nosc( 79000 ) = -0.551309697417488
Nosc( 80000 ) = 0.130201384417933
```

```
Nosc( 81000 ) = 0.822223866090762
Nosc( 82000 ) = -0.450679408962654
Nosc( 83000 ) = -0.664544736157512
Nosc( 84000 ) = 0.204014107995555
Nosc( 85000 ) = 0.177826492200025
Nosc( 86000 ) = 0.279184585918481
Nosc( 87000 ) = 0.52986210060069
Nosc( 88000 ) = -0.0488678308511089
Nosc( 89000 ) = 0.563784412590586
Nosc( 90000 ) = -0.611858760372732
Nosc( 91000 ) = 0.444073421682511
Nosc( 92000 ) = -0.248985016737911
Nosc( 93000 ) = 0.327977444841952
Nosc( 94000 ) = 0.193563453098525
Nosc( 95000 ) = 0.365979831073296
Nosc( 96000 ) = -0.136949921195056
Nosc( 97000 ) = -0.297773646946324
Nosc( 98000 ) = -0.0993990470283767
Nosc( 99000 ) = -0.525082663071168
Nosc( 100000 ) = 0.441580694176321
Nosc( 101000 ) = -0.183331906393346
Nosc( 102000 ) = 0.615938230549891
Nosc( 103000 ) = -0.145159208688994
Nosc( 104000 ) = -0.451474545993183
Nosc( 105000 ) = -0.288149456810336
Nosc( 106000 ) = 0.359391354745738
Nosc( 107000 ) = -0.494551833377462
Nosc( 108000 ) = -0.835946049932327
Nosc( 109000 ) = 0.348981795245421
Nosc( 110000 ) = 0.0737520643341306
Nosc( 111000 ) = -0.648360715507267
Nosc( 112000 ) = 0.195678792414958
Nosc( 113000 ) = -0.381326858438024
Nosc( 114000 ) = -0.366801717424715
Nosc( 115000 ) = 0.251609526818841
Nosc( 116000 ) = 0.486047302480328
Nosc( 117000 ) = -0.651557287826327
Nosc( 118000 ) = -0.149477099473716
Nosc( 119000 ) = 0.00381623980309567
Nosc( 120000 ) = -0.180342658786511
Nosc( 121000 ) = 0.309191899164819
Nosc( 122000 ) = 0.483381375366056
Nosc( 123000 ) = -0.646992470654489
Nosc( 124000 ) = -0.0713231983735892
Nosc( 125000 ) = 0.220824555501911
Nosc( 126000 ) = -0.760280816934044
Nosc( 127000 ) = -0.00453391911300344
Nosc( 128000 ) = 0.498011500457068
Nosc( 129000 ) = -0.242853721691892
Nosc( 130000 ) = -0.217490549540124
Nosc( 131000 ) = 0.583591755648516
Nosc( 132000 ) = 0.169739031581031
Nosc( 133000 ) = 0.550155508267964
Nosc( 134000 ) = -0.26609299769627
Nosc( 135000 ) = 0.729924015790812
```

```
Nosc( 136000 ) = -0.452995256560284
Nosc( 137000 ) = -0.806182008779237
Nosc( 138000 ) = 0.678906009795932
Nosc( 139000 ) = 0.0106872458185936
Nosc( 140000 ) = 0.197459014055692
Nosc( 141000 ) = -0.752599906839724
Nosc( 142000 ) = 0.168573247801969
Nosc( 143000 ) = -0.0310723202514719
Nosc( 144000 ) = -0.343698589617153
Nosc( 145000 ) = -0.761576402963764
Nosc( 146000 ) = -0.277083214579719
Nosc( 147000 ) = 0.117299100345798
Nosc( 148000 ) = -0.571013623171946
Nosc( 149000 ) = -0.334705766407674
Nosc( 150000 ) = -0.16655990908723
Nosc( 151000 ) = -0.0594548653597756
Nosc( 152000 ) = -0.00636377179913257
Nosc( 153000 ) = -0.000352225722724104
Nosc( 154000 ) = -0.0345764721836697
Nosc( 155000 ) = -0.102281638055672
Nosc( 156000 ) = -0.196800011691507
Nosc( 157000 ) = -0.311549366694369
Nosc( 158000 ) = -0.440031328397133
Nosc( 159000 ) = 0.424170218302019
Nosc( 160000 ) = 0.287390681048193
Nosc( 161000 ) = 0.15588627333438
Nosc( 162000 ) = 0.035835490207199
Nosc( 163000 ) = -0.0666594524657066
Nosc( 164000 ) = -0.145571214048846
Nosc( 165000 ) = -0.194945959435731
Nosc( 166000 ) = 0.791097977448314
Nosc( 167000 ) = -0.18162860206239
Nosc( 168000 ) = -0.10738448832388
Nosc( 169000 ) = 0.0195031793558246
Nosc( 170000 ) = -0.795359873959695
Nosc( 171000 ) = 0.4535661259387
Nosc( 172000 ) = -0.228243840535141
Nosc( 173000 ) = 0.164621543387366
Nosc( 174000 ) = -0.362488965151799
Nosc( 175000 ) = 0.195711910000949
Nosc( 176000 ) = -0.155548982006256
Nosc( 177000 ) = -0.411104189002594
Nosc( 178000 ) = 0.434155350955472
Nosc( 179000 ) = 0.385281293710043
Nosc( 180000 ) = -0.552731148864603
Nosc( 181000 ) = -0.374942268109689
Nosc( 182000 ) = -0.0764669386202632
Nosc( 183000 ) = -0.652473718502977
Nosc( 184000 ) = -0.0981839693008503
Nosc( 185000 ) = 0.591129004949415
Nosc( 186000 ) = -0.579859199955315
Nosc( 187000 ) = -0.606523264172363
Nosc( 188000 ) = 0.515712662768376
Nosc( 189000 ) = -0.208624248615676
Nosc( 190000 ) = 0.224945264952419
```

```
Nosc( 191000 ) = -0.17914668404669
Nosc( 192000 ) = -0.416514393326578
Nosc( 193000 ) = -0.482817845622543
Nosc( 194000 ) = 0.62623800145108
Nosc( 195000 ) = 0.914903910901149
Nosc( 196000 ) = -0.612612952411029
Nosc( 197000 ) = 0.0478516455605207
Nosc( 198000 ) = -0.0995803381734762
Nosc( 199000 ) = -0.0508285830654285
Nosc( 200000 ) = 0.198146222665143
Nosc( 201000 ) = 0.65134299717344
```

```
Valeurs de N(E)
N( 1000 ) = 648.616235312967
N( 2000 ) = 1516.99307077859
N( 3000 ) = 2468.64743478799
N( 4000 ) = 3474.38234186248
N( 5000 ) = 4520.33117338178
N( 6000 ) = 5598.32667003394
N( 7000 ) = 6702.97218043465
N( 8000 ) = 7830.43208433556
N( 9000 ) = 8977.83849091124
N( 10000 ) = 10142.9653475268
N( 11000 ) = 11324.0343309507
N( 12000 ) = 12519.5919409838
N( 13000 ) = 13728.4278563336
N( 14000 ) = 14949.5185619379
N( 15000 ) = 16181.9871643908
N( 16000 ) = 17425.0739698923
N( 17000 ) = 18678.1144455084
N( 18000 ) = 19940.5223831964
N( 19000 ) = 21211.7768161155
N( 20000 ) = 22491.4116965801
N( 21000 ) = 23779.0076432476
N( 22000 ) = 25074.1852635805
N( 23000 ) = 26376.5996927252
N( 24000 ) = 27685.9360837994
N( 25000 ) = 29001.9058509936
N( 26000 ) = 30324.2435146516
N( 27000 ) = 31652.7040323755
N( 28000 ) = 32987.0605260129
N( 29000 ) = 34327.1023337332
N( 30000 ) = 35672.6333310713
N( 31000 ) = 37023.470476054
N( 32000 ) = 38379.4425422271
N( 33000 ) = 39740.389010192
N( 34000 ) = 41106.1590936118
N( 35000 ) = 42476.6108798918
N( 36000 ) = 43851.6105691404
N( 37000 ) = 45231.0317977465
N( 38000 ) = 46614.7550351313
N( 39000 ) = 48002.6670440389
N( 40000 ) = 49394.6603962133
```

```
N( 41000 ) = 50790.6330365347
N( 42000 ) = 52190.4878897009
N( 43000 ) = 53594.1325043865
N( 44000 ) = 55001.4787305194
N( 45000 ) = 56412.4424259087
N( 46000 ) = 57826.9431889614
N( 47000 ) = 59244.9041146509
N( 48000 ) = 60666.2515712624
N( 49000 ) = 62090.9149957497
N( 50000 ) = 63518.8267058035
N( 51000 ) = 64949.9217269596
N( 52000 ) = 66384.1376332722
N( 53000 ) = 67821.4144002461
N( 54000 ) = 69261.6942688727
N( 55000 ) = 70704.9216197398
N( 56000 ) = 72151.0428562999
N( 57000 ) = 73600.0062964791
N( 58000 ) = 75051.7620718933
N( 59000 ) = 76506.2620340184
N( 60000 ) = 77963.4596667222
N( 61000 ) = 79423.3100046293
N( 62000 ) = 80885.7695568402
N( 63000 ) = 82350.7962355736
N( 64000 ) = 83818.349289339
N( 65000 ) = 85288.3892402881
N( 66000 ) = 86760.8778254216
N( 67000 ) = 88235.7779413603
N( 68000 ) = 89713.0535924138
N( 69000 ) = 91192.6698417046
N( 70000 ) = 92674.5927651265
N( 71000 ) = 94158.7894079336
N( 72000 ) = 95645.2277437763
N( 73000 ) = 97133.8766360128
N( 74000 ) = 98624.7058011411
N( 75000 ) = 100117.685774208
N( 76000 ) = 101612.787876063
N( 77000 ) = 103109.984182337
N( 78000 ) = 104609.247494031
N( 79000 ) = 106110.551309613
N( 80000 ) = 107613.869798533
N( 81000 ) = 109119.177776052
N( 82000 ) = 110626.450679328
N( 83000 ) = 112135.664544656
N( 84000 ) = 113646.795985813
N( 85000 ) = 115159.82217343
N( 86000 ) = 116674.720815337
N( 87000 ) = 118191.470137823
N( 88000 ) = 119710.048867755
N( 89000 ) = 121230.436215513
N( 90000 ) = 122752.611858687
N( 91000 ) = 124276.555926505
N( 92000 ) = 125802.248984945
N( 93000 ) = 127329.672022484
N( 94000 ) = 128858.806436476
N( 95000 ) = 130389.634020099
```

N(96000) = 131922.136949852
N(97000) = 133456.297773579
N(98000) = 134992.099398979
N(99000) = 136529.525082596
N(100000) = 138068.55841924
N(101000) = 139609.183331841
N(102000) = 141151.384061704
N(103000) = 142695.145159144
N(104000) = 144240.451474482
N(105000) = 145787.288149394
N(106000) = 147335.640608583
N(107000) = 148885.494551771
N(108000) = 150436.835945989
N(109000) = 151989.651018144
N(110000) = 153543.926247875
N(111000) = 155099.648360656
N(112000) = 156656.804321148
N(113000) = 158215.3813268
N(114000) = 159775.366801659
N(115000) = 161336.748390416
N(116000) = 162899.51395264
N(117000) = 164463.651557231
N(118000) = 166029.149477043
N(119000) = 167595.996183704
N(120000) = 169164.180342604
N(121000) = 170733.690808046
N(122000) = 172304.51661857
N(123000) = 173876.646992417
N(124000) = 175450.071323145
N(125000) = 177024.779175391
N(126000) = 178600.760280764
N(127000) = 180178.004533867
N(128000) = 181756.501988448
N(129000) = 183336.24285367
N(130000) = 184917.217490499
N(131000) = 186499.416408194
N(132000) = 188082.830260918
N(133000) = 189667.449844442
N(134000) = 191253.266092948
N(135000) = 192840.270075935
N(136000) = 194428.452995208
N(137000) = 196017.80618196
N(138000) = 197608.321093942
N(139000) = 199199.989312707
N(140000) = 200792.802540939
N(141000) = 202386.75259986
N(142000) = 203981.831426706
N(143000) = 205578.031072274
N(144000) = 207175.343698544
N(145000) = 208773.761576357
N(146000) = 210373.277083169
N(147000) = 211973.882700855
N(148000) = 213575.571013578
N(149000) = 215178.334705722
N(150000) = 216782.166559865

```
N( 151000 ) = 218387.059454821
N( 152000 ) = 219993.006363728
N( 153000 ) = 221600.000352182
N( 154000 ) = 223208.034576429
N( 155000 ) = 224817.102281595
N( 156000 ) = 226427.196799969
N( 157000 ) = 228038.311549324
N( 158000 ) = 229650.440031286
N( 159000 ) = 231263.57582974
N( 160000 ) = 232877.712609278
N( 161000 ) = 234492.844113685
N( 162000 ) = 236108.964164469
N( 163000 ) = 237726.066659412
N( 164000 ) = 239344.145571174
N( 165000 ) = 240963.194945919
N( 166000 ) = 242583.208901983
N( 167000 ) = 244204.181628562
N( 168000 ) = 245826.107384449
N( 169000 ) = 247448.980496781
N( 170000 ) = 249072.795359835
N( 171000 ) = 250697.546433835
N( 172000 ) = 252323.228243802
N( 173000 ) = 253949.835378418
N( 174000 ) = 255577.362488927
N( 175000 ) = 257205.804288052
N( 176000 ) = 258835.155548944
N( 177000 ) = 260465.411104152
N( 178000 ) = 262096.565844612
N( 179000 ) = 263728.614718669
N( 180000 ) = 265361.552731112
N( 181000 ) = 266995.374942232
N( 182000 ) = 268630.076466902
N( 183000 ) = 270265.652473682
N( 184000 ) = 271902.098183933
N( 185000 ) = 273539.408870959
N( 186000 ) = 275177.579859164
N( 187000 ) = 276816.606523229
N( 188000 ) = 278456.484287302
N( 189000 ) = 280097.208624214
N( 190000 ) = 281738.7750547
N( 191000 ) = 283381.179146649
N( 192000 ) = 285024.416514359
N( 193000 ) = 286668.482817811
N( 194000 ) = 288313.373761964
N( 195000 ) = 289959.085096055
N( 196000 ) = 291605.612612919
N( 197000 ) = 293252.952148321
N( 198000 ) = 294901.099580305
N( 199000 ) = 296550.05082855
N( 200000 ) = 298199.801853744
N( 201000 ) = 299850.34865697
```

Référence

[1] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function.* Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.

Grothendieck, la moisson
Olivia Caramello, Alain Connes, Laurent Lafforgue
interviewés par Nicolas Martin

Nicolas Martin : Dire de *Récoltes et semailles* qu'il s'agit de l'ouvrage d'une vie, c'est à la fois tout dire et ne rien dire du tout. Longtemps, cet ouvrage sous forme de tapuscrit de plus de 1000 pages a été entouré d'une forme de légende, passant de main en main de façon plus ou moins clandestine, l'histoire racontant d'ailleurs que c'est mon estimé confrère et prédécesseur Stéphane Deligeorges qui s'en vit confier la première copie définitive par Grothendieck lui-même pour tâcher de lui trouver un éditeur. Las, cette somme qui emprunte autant aux mathématiques qu'à la littérature, à la philosophie, à la mystique, à la politique ou à l'écologie, cette somme fut cantonnée longtemps à n'être accessible que via un fichier numérique en ligne, jusqu'à ce mois de janvier : l'éditeur Gallimard, avec l'aide d'ailleurs de l'IHES, a donc publié *Récoltes et semailles*, dans un coffret de deux volumes de la collection Tel, et pour entrer dans la pensée si iconoclaste d'Alexandre Grothendieck, je vous propose simplement de l'écouter, dans la façon qu'il a d'aborder l'enseignement mathématique, nous sommes au Cern, en 1972.

Alexander Grothendieck *(archive enregistrée)* : Je vais être confronté dès cet automne à cette situation pour la première fois de ma vie d'ailleurs, d'être dans un amphithéâtre avec des étudiants auxquels je dois pour de bon enseigner les mathématiques qui vont les préparer à certains examens, leur procurant certains diplômes, dont je suis pour ma part convaincu que ce sont des connaissances qui ne servent à rien : d'une part qui ne servent à rien pour la société dans son ensemble mais d'autre part, dont il n'est même pas clair qu'ils servent à quelque chose pour ceux qui vont avoir ce diplôme, parce qu'il n'est absolument pas clair que cela leur permettra d'avoir un métier par la suite. Alors ce que font la plupart encore des scientifiques, c'est que ou bien ils se refusent à voir le problème ou bien, s'ils le voient, posent un voile public par-dessus ce problème dans leurs relations avec les étudiants. Les relations entre les étudiants et eux sont donc des relations traditionnelles de professeur à étudiant ; c'est-à-dire qu'ils font un cours technique, celui qu'on leur demande, un point c'est tout. Lorsque, exceptionnellement, les étudiants posent des questions techniques, on répond à ces questions techniques du mieux qu'on peut. En ce qui me concerne, j'ai décidé de ne pas m'en tenir à ce type de relations et ne plus séparer l'enseignement mathématique d'une discussion à visage découvert avec les étudiants ou tous ceux qui voudront venir assister à la discussion pour essayer de faire le point : "Pourquoi est-ce que nous sommes là ?" ; "Qu'est-ce que nous allons apprendre ensemble ?" ; "Que signifie l'examen qui est au bout du programme de cette année ?" ; "Quel est son sens ?" ; "Quel est notre rôle mutuel, moi professeur et vous étudiants ?". Et décider ensemble sur ce qu'on fera.

Nicolas Martin : Voilà, Alexandre Grothendieck en 1972, donc 2 ans après son départ de l'IHES. Laurent Lafforgue, une réaction à ce que vous venez d'entendre.

Laurent Lafforgue : Oui, ce passage est extrêmement intéressant et il nous permet tout de suite de réaliser deux traits essentiels de la pensée de Grothendieck. D'une part, le fait qu'il ne

Emission La méthode scientifique écoutable ici : https://www.franceculture.fr/emissions/la-methode-scientifique/grothendieck-la-moisson

Transcription Denise Vella-Chemla, février 2022.

sépare pas les choses, c'est-à-dire qu'il n'est pas d'une part mathématicien, et d'autre part une personne, un écrivain, il est tout cela à la fois. On peut même introduire l'œuvre mathématique de Grothendieck en disant qu'en fait, il n'est pas vraiment un mathématicien, il est un écrivain qui fait des mathématiques. Une deuxième caractéristique qui apparaît dans cet extrait, c'est qu'on l'entend poser une question de fond : "Pourquoi enseigner les mathématiques ? Pourquoi faire des mathématiques ?". Et en fait, ceci est également caractéristique de tout ce qu'il a fait dans sa vie, c'est-à-dire aller à la racine des choses, et poser les questions les plus fondamentales, remettre en cause toutes les évidences, voilà. Donc c'est ce qu'il a fait dans toute son œuvre et qui apparaît ici tout de suite.

Nicolas Martin : Il a vécu un certain goût pour la lettre, Alain Connes, puisqu'on l'entend dire avec une certaine provocation "puisque de toute façon, ce que je vous enseigne ne servira absolument à rien" et on voit qu'il lie tout de suite, ce qu'il fera d'ailleurs dans son œuvre, l'enseignement mathématique, comme vient de le dire Laurent Lafforgue, à tout le reste, c'est-à-dire à la discussion dans un champ beaucoup pius large d'échanges avec les étudiants et avec son public.

Alain Connes : Oui en fait, ça, il faut, je veux dire, si on présente ça d'emblée, bon, comme Laurent l'a expliqué, on peut comprendre effectivement certaines facettes de son caractère mais ça correspond quand même à une période très très spécifique dans sa vie et on ne peut pas, je veux dire, il ne faut pas confondre l'impression première que l'on aurait de cette période avec l'évolution d'Alexandre Grothendieck. Donc j'essaierai, au contraire, si vous voulez, de me placer dans l'histoire de sa propre évolution, comme complémentaire à ce qu'a dit Laurent. Et dans l'histoire de sa propre évolution, je veux le faire, parce que je voudrais contraster deux périodes, si vous voulez. Grothendieck a eu une enfance extrêmement solitaire. Il a été pas abandonné mais je veux dire, il est resté loin de ses deux parents à partir de l'âge de 6 ans, et il en a beaucoup souffert. Mais dans *Récoltes et semailles*, il explique bien que la solitude est sa compagne préférée et c'est sa compagne qui lui permet d'être créateur, plus que toute autre chose. Première chose.

Ensuite, si vous voulez quand Grothendieck, à travers des vicissitudes assez dures dans sa vie, a fait ses études à la faculté de Montpellier. Quand il a eu 20 ans, il est monté à Paris. Et là, il a été admirablement bien reçu par les mathématiciens qui étaient Henri Cartan, Dieudonné, Schwartz, Serre, enfin donc, si vous voulez, il y a eu une période bénie.

Nicolas Martin : Les fondateurs de l'IHES par ailleurs...

Alain Connes : Non, non, pas encore. C'est la période dans laquelle il a commencé par un sujet qui est, comme il le dit, assez rébarbatif, qui est l'analyse fonctionnelle, dans laquelle il a trouvé, si vous voulez, pour détendre un peu l'atmosphère, il a trouvé une notion qui est ce qu'on appelle les espaces *nucléaires*. Alors il faut savoir que cela n'a rien à voir avec la physique nucléaire, bien qu'on puisse désintégrer les mesures atomiques sur un espace nucléaire. Donc en fait, si vous voulez, Grothendieck a fait une trouvaille formidable, il a ébloui Dieudonné et Schwartz à ce moment-là et ensuite, il a bifurqué vers ce qu'on appelle la géométrie algébrique. Et là à nouveau, il a été admirablement bien reçu si vous voulez par Jean-Pierre Serre. Il y a une correspondance entre Grothendieck et Jean-Pierre Serre, qui est un très gros volume, et dans lequel on voit comment, si vous voulez, ces deux caractères vraiment complémentaires, ont fait un échange qui a été incroyablement productif. Et après, si vous voulez, grâce à Serre, grâce aussi au dévouement incroyable de Jean Dieudonné, Grothendieck a pu donner toute sa mesure, en géométrie algébrique. Comme il le dit dans *Récoltes et semailles*, il n'a jamais peiné, c'est-à-dire que pour lui, cela ne représentait pas un effort, il se baissait et il récoltait tout ce qu'il pouvait, et ça a été une période, bon, il a eu un passage difficile quand sa mère est morte, il a eu un genre de dépression pendant 6 mois, puis après, il a eu une période de créativité absolument rayonnante, dans laquelle il a inventé la notion de topos dont nous parlerons après mais en 70, il a eu un changement extrêmement brutal, qu'il est très difficile d'analyser correctement, il y a toutes sortes d'analyses possibles, et il y a un dessin qu'il a fait, qui est absolument frappant, dans lequel il y a écrit en allemand des sorcières, et en-dessous de ce dessin, il y a un texte en allemand, dans lequel il explique qu'il est en train de faire cuire un de ses principaux théorèmes, qui est ce qu'on appelle le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck, il y a un feu qui est attisé par des diablotins, et ce qu'écrit Grothendieck en allemand en dessous, c'est que pour expliquer ce théorème, il faut 500 pages, et qu'il ne comprend pas que l'esprit humain soit consacré à ça, alors qu'il ressent dans son corps que la vie est menacée. Et en gros, si vous voulez, il fait une profession de foi écologique à ce moment-là, il est aussi effrayé bien sûr par la menace nucléaire, et il fait une profession de foi que ne renierait personne maintenant, 51 ans après.

Nicolas Martin : On va discuter évidemment de tout ça. Je tiens à préciser deux choses tout de suite, c'est que nous avions donc déjà consacré une émission à Alexandre Grothendieck, nous n'allons pas redonner toute sa biographie, je vous renvoie à cette émission si vous voulez en savoir plus, vraiment, sur le début de sa carrière et toute cette période que vient de résumer brillamment Alain Connes, on va vraiment se concentrer sur *Récoltes et semailles*.

Olivia Caramello, peut-être un mot, déjà, sur cette archive que vous avez entendue, et de ré-entendre la voix de Grothendieck, avec ce petit accent si significatif, et puis, plus généralement, sur le lien que vous avez, vous, à *Récoltes et semailles* ; il était disponible en ligne, gratuitement, c'était important de lui redonner corps, dans un volume, accessible à tout le monde en papier selon vous ?

Olivia Caramello : Oui, oui, absolument, donc oui, c'est toujours émotionnant d'écouter la voix de Grothendieck, si pure et attentive à la précision de l'expression aussi. Il était, je veux quand même le souligner, très rigoureux en mathématique, mais il l'est aussi dans sa réflexion anthropologique, psychanalytique, et d'autre nature, qui se trouve en grande abondance dans ce merveilleux texte *Récoltes et semailles*.

Donc oui, je voudrais juste ajouter une remarque par rapport à ce qu'Alain Connes disait. Effectivement, cet extrait du discours le fait peut-être apparaître comme peut-être un peu trop provocateur, c'est-à-dire ça met en avant ce côté de provocation et ça peut peut-être si c'est pas vraiment mis dans le bon contexte, ça peut faire penser que lui, il voulait vraiment arrêter la recherche scientifique, et beaucoup de gens l'ont interprété comme ça alors que si on regarde quand même même sa production scientifique après cette période-là, on voit quand même qu'il n'a jamais arrêté de faire de la recherche, que ça soit en mathématique ou dans d'autres sujets. Donc ça, je voulais quand même le préciser et Grothendieck, c'est vraiment un penseur à large échelle, donc c'est quelqu'un qui bien sûr a fourni une preuve spectaculaire de son talent, surtout en mathématiques, mais pas seulement. Et en fait, on commence à le découvrir avec notamment ce texte *Récoltes et semailles* qui est truffé de réflexions très très profondes sur tout un tas de sujets, et aussi sur toute l'éthique des mathématiques et plus généralement de l'activité scientifique. Donc personnellement, je vois ce discours au Cern comme peut-être, un pas important dans cette œuvre de réflexion plus large, au-delà des mathématiques, qui après s'est approfondie dans les années suivantes, et voilà, donc, personnellement, je trouve que c'est très très bien que *Récoltes et semailles* soit enfin sorti. Moi, je le connaissais déjà, bien évidemment à travers la version électronique, et en fait, pour moi, ça a été merveilleux de découvrir ce texte parce que ça explique une vision, vraiment. C'est un texte dans lequel Grothendieck prend le temps d'expliquer sa vision, sa vision des mathématiques, et aussi, bien sûr, les rapports qu'il a avec la communauté mathématique, à cause, notamment, de cette vision, de comment cette vision est reçue par ses contemporains et par d'autres personnes autour de lui. Donc personnellement, ça a été très rassurant pour moi de voir un mathématicien avec une telle innocence, une telle pureté d'esprit, et un tel regard large sur les mathématiques, une véritable vision. Donc ça m'a encouragée beaucoup à cultiver moi-même cette approche inter-disciplinaire globale aux mathématiques. Donc pour moi, ça a été vraiment fondamental.

Nicolas Martin : Et on discutera comme le soulignait tout à l'heure Alain Connes, des topos qui sont un concept mathématique développé par Grothendieck qui ont été extrêmement critiqués, voire plus d'ailleurs, par la communauté mathématique, et dont vous avez tous les trois été les continuateurs d'une certaine manière. On y reviendra tout à l'heure, et j'aimerais qu'on parle de ce livre, des circonstances dans lesquelles il a été écrit et puis de ce qu'il représente pour chacun d'entre vous individuellement, parce que c'est une telle somme qu'il y a beaucoup, de très nombreuses portes d'entrée et j'aimerais entendre la vôtre tout de suite, après ça.

(Et nous parlons donc de *Récoltes et semailles*, le livre-testament d'Alexandre Grothendieck, un livre qui vient d'être édité chez Gallimard en deux volumes, nous en parlons avec Olivia Caramello, Alain Connes, Laurent Lafforgue.)

Avant d'entendre votre relation, votre porte d'entrée individuelle à ce livre, je vais en lire un tout petit extrait. Dans les nombreuses introductions, propédeutiques, et propos liminaires qu'il y a avant de rentrer dans le vif du livre, si tant est qu'on puisse parler de vif et ça, je vous laisserai le dire, nous sommes donc page 99 de cette nouvelle édition dans le troisième chapitre qui s'intitule *Une lettre*. Voilà ce qu'écrit Alexandre Grothendieck :

> *"Dans cette pré-lettre, je voudrais maintenant te* dire (puisqu'il faut préciser que c'est donc écrit à la première personne et qu'il y a une adresse à la deuxième personne du singulier au lecteur.), *je voudrais maintenant te dire en quelques pages (si faire se peut) de quoi il est question dans* Récoltes et semailles, *te le dire de façon plus circonstanciée que ne le dit le seul sous-titre* : "Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien", *le mien, de passé, tu l'auras deviné....*

> *Il y a beaucoup de choses dans* Récoltes et semailles, *et les unes et les autres y verront sans doute beaucoup de choses différentes : un* ***voyage****, à la découverte d'un passé, une méditation sur l'existence, un tableau de mœurs d'un milieu et d'une époque, (ou le tableau du glissement, insidieux et implacable d'une époque à une autre...) ; une enquête (quasiment policière par moments, et en d'autres frisant le roman de cape et d'épée dans les bas-fonds de la mégalopolis mathématique...) ; une vaste divagation mathématique (qui sèmera plus d'un...) ; un traité pratique de psychanalyse appliquée (ou, au choix, un livre de "psychanalyse-fiction") ; un panégyrique de la connaissance de soi ; "Mes confessions" ; un journal intime ; une psychologie de la découverte et de la création ; un réquisitoire (impitoyable, comme il se doit...), voire un règlement de comptes dans "le beau monde mathématique" (et sans faire de cadeaux...).*

Voilà autant de pistes, d'ouvertures, qui disent la richesse de cette œuvre, je vais vous donner la parole, Alain Connes, quelle est dans cette liste presque... voilà, euh, programmatique, celle qui est la vôtre, la porte d'entrée, votre approche, qui vous permette de plonger dans cet ouvrage ?

Alain Connes : Alors de mon propre point de vue, si vous voulez, *Récoltes et semailles* a joué un rôle extrêmement important par l'enseignement que j'ai eu de Grothendieck de l'attitude du chercheur dans sa recherche. C'est-à-dire si vous voulez, en fait, Grothendieck, très loin dans *Récoltes et semailles*, arrive à distinguer, si vous voulez, en gros, deux manières de faire des mathématiques : il y a les mathématiques sportives, qui consistent à résoudre des problèmes, et il y a les mathématiques qui sont... il fait la distinction entre le yin et le yang, mais si vous voulez des mathématiques qui sont d'une toute autre nature, qui consistent à explorer un sujet, un peu, Grothendieck compare cette exploration à l'exploration du corps d'une femme, et il dit, si vous voulez, toute l'attention qu'il faut, tout le soin qu'il faut, toute la patience infinie qu'il faut pour faire cela. Et, si vous voulez, ce qui m'a donc énormément aidé, c'est que chacun d'entre nous est différent, chaque mathématicien est différent, mais dans ma propre évolution, bien sûr, si vous voulez, au départ, quand on veut se faire accepter comme mathématicien, on n'est pas obligé, mais il vaut mieux résoudre des problèmes qui étaient posés, avant, longtemps avant. Donc ça, c'est une espèce de... comment dire ? de passage obligé. Mais une fois que ce passage obligé a été franchi, si on veut vraiment faire des choses profondes, adopter cette attitude qui consiste à essayer de, si vous voulez, d'avancer de ε dans un domaine donné en appliquant des techniques qui sont déjà connues, ça n'est pas ça qui est créatif. Et ce que Grothendieck explique merveilleusement dans son livre, c'est justement, il donne, si vous voulez, pas une recette, mais un tas de raisons, un tas d'explications. Par exemple, il dit qu'il ne faut pas avoir peur de l'erreur, et que l'erreur au contraire est quelque chose de positif, parce que lorsqu'on comprend qu'on a fait une erreur, on comprend qu'on est sur la mauvaise voie, eh bien, c'est là qu'on progresse. Et ainsi de suite. Et il explique, si vous voulez, je veux le dire, ça, il explique que si, je vais vous citer sa phrase parce que c'est tellement vrai ce qu'il dit, il dit qu'il ne se considérait jamais comme étant plus doué que ses contemporains, absolument pas, ce que dit Grothendieck, c'est la chose suivante ; il dit :

> *"Je vois maintenant très clairement et sans résidu du moindre doute ceci : que si, avec des dons intellectuels nullement exceptionnels* (il ne se considérait pas du tout comme exceptionnel), *j'ai pu néanmoins constamment donner ma pleine mesure dans mon travail mathématique, et produire une œuvre et enfanter une vision vastes, puissantes et fécondes, ce n'est à rien d'autre qu'à cette fidélité que je le dois, à cette absence de tout souci de me conformer à des normes, grâce à quoi je m'abandonne avec une totale confiance à la pulsion de connaissance originelle,* (ça, c'est extrêmement important, à dire, et il va même, si vous voulez, jusqu'à relier cette pulsion, dans le texte, à la mère) *sans la tailler ni l'amputer en rien de ce qui fait sa force et sa finesse et sa nature indivise.*

Olivia Caramello : Oui, à ce propos, effectivement, je voudrais citer un passage que je trouve vraiment magnifique, et qui illustre justement le point que tu viens de soulever. Donc, toujours dans *Récoltes et semailles*, Grothendieck dit :

> *"Ce qui fait la qualité de l'inventivité et de l'imagination du chercheur, c'est la qualité de son attention, à l'écoute de la voix des choses."*

Donc justement, il souligne l'importance d'avoir une attitude de réceptivité, vis à vis de la richesse du monde. Donc le monde est incroyablement riche, et pour pouvoir saisir cette richesse, il faut adopter une attitude, disons, très réceptive, et travailler sur la qualité de sa propre attention. Donc vous voyez quand même que c'est une approche qui n'est pas du tout l'approche classique des mathématiciens qui sont peut-être poussés par le désir, disons, de casser des noix, comme le dirait Grothendieck *(rires)*, parce qu'il fait aussi la comparaison d'un problème comme si c'était une noix qu'il faut casser, donc la plupart des mathématiciens diraient "ok, essayons de casser cette noix, on va utiliser toutes les méthodes possibles, c'est pas très important comment on y arrive, par exemple, si on a un marteau à disposition, on peut l'utiliser, c'est pas un problème !". Alors, lui, il dit "non, il faut être délicat, il faut être à l'écoute de la voix des choses.". Et qu'est-ce que ça signifie pour lui en fait, pour reprendre l'image de la noix, ça consiste à plonger cette noix dans un liquide émollient, et la laisser tout simplement se reposer, de façon à ce que, au bon moment, elle s'ouvre naturellement. Donc en fait, son approche mathématique a toujours été une approche globale, visant à mettre les problèmes dans le cadre le plus naturel pour que la difficulté se dissolve naturellement. Donc vous voyez, c'est très original comme approche, c'est magnifique.

Nicolas Martin : Laurent Lafforgue, votre point d'entrée, je vais alors, moi aussi, dire un mot pour nos auditrices et nos auditeurs. Grothendieck le dit, le répète à plusieurs reprises dans *Récoltes et semailles*, il ne veut pas que ce texte s'adresse exclusivement aux mathématiciens, il en fait vraiment un point important, il écrit "ce qui est venu, c'est une sorte de longue promenade", alors il est très sur cette idée de la narration au fil de l'écriture, au fil de la marche, "une longue promenade commentée à travers mon œuvre de mathématicien, une promenade à l'intention surtout du profane, de celui qui n'a jamais rien compris aux mathématiques.".

Laurent Lafforgue : Oui, donc moi j'ai eu, disons, deux points d'entrée dans Grothendieck, et, contrairement à Alain Connes, mon premier point d'entrée dans Grothendieck, ça a été vraiment dans son œuvre mathématique. C'est dans un deuxième temps que j'ai découvert *Récoltes et semailles*, quelques années après, et je dois dire que ces deux rencontres, c'est-à-dire d'abord de l'œuvre et ensuite de *Récoltes et semailles* ont été pour moi bouleversantes.

La première parce que, donc, j'avais commencé des études de mathématiques, j'étais à l'École Normale Supérieure, donc, en mathématiques, en fait parce que les mathématiques étaient faciles pour moi, alors même que mes goûts étaient plutôt littéraires. J'étais davantage passionné par la littérature, et jusqu'alors, je n'avais pas rencontré dans les mathématiques, ou dans les sciences, quelque chose qui me paraisse de profondeur comparable à celle des plus grandes œuvres littéraires. Or en deuxième année, à l'École Normale Supérieure, j'ai appris l'existence de Grothendieck, à l'occasion d'un groupe de travail d'initiation à la géométrie algébrique. Donc je me suis précipité à la Bibliothèque, j'ai emprunté un certain nombre de volumes, j'ai commencé à les étudier, et j'ai été totalement stupéfait : c'étaient des mathématiques comme je n'avais jamais vues, et, pour la première fois, dans mes études, j'ai eu le sentiment d'être confronté à une œuvre qui était d'une profondeur et d'une beauté comparable à celle des plus grandes œuvres littéraires. Donc je peux dire que c'est par la lecture des œuvres mathématiques de Grothendieck, qui m'a pris plusieurs années, que j'ai compris que les mathématiques pouvaient être intéressantes, et même passionnantes, voilà, que j'ai compris la profondeur des mathématiques.

Et quelques années plus tard, alors que je préparais une thèse, j'ai entendu parlé de *Récoltes et semailles*, un exemplaire était disponible à la Bibliothèque Universitaire d'Orsay, où j'allais. Et j'ai commencé à le lire, dans cette bibliothèque, et là aussi, j'ai été totalement stupéfait, parce qu'il s'agissait de la même chose, il s'agissait de cette œuvre mathématique que j'avais étudiée déjà depuis plusieurs années, qui pour moi était absolument fascinante, et voilà que l'auteur même de cette œuvre en parlait en termes personnels, c'est-à-dire que ce n'était plus un travail mathématique nécessairement marmoréen, impersonnel, bien sûr, écrit toujours sans référence à aucun auteur, c'était l'investissement d'une personne, qui avait permis cette œuvre, et un investissement d'une intensité incroyable. C'est-à-dire... Olivia a cité ce passage de Grothendieck où il parle de la qualité de l'attention, mais effectivement, c'est ce que l'on perçoit chez lui, c'est-à-dire la qualité et l'intensité de l'attention, à quel point il s'est mis au service des choses, et de la voix des choses, et donc c'est de cela dont il parlait dans *Récoltes et semailles*. Et d'ailleurs, avec une autre dimension qui apparaît, qui est sa propre dimension littéraire à lui. En fait, Grothendieck est un très grand écrivain, et je pense que ça apparaît dans les citations qui ont déjà été faites. Ça s'est même entendu tout à l'heure, dans le bref extrait que nous avons entendu, c'est-à-dire que Grothendieck s'exprime admirablement, donc même à l'oral. Et à l'écrit, en fait, beaucoup de passages de *Récoltes et semailles* sont proprement admirables sur le plan littéraire. Ils relèvent de la philosophie, ils ont un rapport avec les mathématiques, mais ils relèvent aussi de la poésie. Et d'ailleurs, il faut savoir que lorsque le jeune Grothendieck était au lycée, bien avant d'imaginer qu'un jour il deviendrait mathématicien, ses camarades de classe et ses professeurs lui avaient donné un surnom. Et le surnom qu'ils lui avaient donné, ce n'était pas du tout "le Matheux" ou "le Mathématicien", c'était "le Poète".

Nicolas Martin : On va continuer à plonger dans cet ouvrage *Récoltes et semailles* et on va y plonger concrètement, puisque dans quelques minutes, nous avons la chance d'avoir eu accès non seulement au tapuscrit mais également aux notes manuscrites, qu'il y a par littéralement dizaines de milliers, qui sont chez un libraire parisien. On y va tout de suite après ça, restez avec nous.

(Intermède musical :) "Sentinelle mathématique" de Bertrand Burgalat, sur France Culture, nous parlons donc de l'ouvrage *Récoltes et semailles* d'Alexander Grothendieck, qui vient d'être publié, ce mois de janvier, en deux volumes, aux éditions Gallimard, dans la collection Tel, nous en parlons avec Olivia Caramello qui est mathématicienne et logicienne, Professeure associée à l'Università degli Studi dell'Insubria à Côme et titulaire de la Chaire Israel Gelfand à l'Institut des Hautes Études Scientifiques, à l'IHES, Alain Connes, mathématicien, Professeur émérite à l'IHES, titulaire de la Chaire Analyse et géométrie au Collège de France et lauréat de la médaille Fields en 1982, et Laurent Lafforgue, mathématicien, lauréat de la médaille Fields en 2002, qui travaille aujourd'hui chez Huawei mais sur une partie des mathématiques développées par Alexander Grothendieck, nous en reparlerons dans un instant).

Récoltes et semailles est un livre, on l'a dit, qui est longtemps resté en boîtes, nimbé d'une certaine aura de mystère. Outre les plus de 1000 pages du tapuscrit original, il y a également des dizaines de milliers de pages de notes. Bonjour Céline Loozen.

Céline Loozen : Bonjour Nicolas et bonjour à tous.

Nicolas Martin : Vous avez eu la chance et le privilège d'aller consulter ces notes manuscrites qui dorment encore dans la cave d'un libraire parisien.

Céline Loozen : Et oui, grâce à Jean-Bernard Gillot qui est un peu le gardien des archives de Grothendieck. En fait, après sa mort, son fils Matthieu lui demande d'expertiser l'ensemble du corpus, des milliers de pages, laissés dans des caisses et des cartons. Alors, ensemble, ils vont tout ramener à Paris dans une nuit du mois de novembre 2014, en voiture. Après en avoir estimé la valeur, quoique inestimable, ces textes restent encore dans la cave de sa librairie Alain Brieux. Ensemble on a parcouru quelques extraits de *Récoltes et semailles* mais aussi des carnets, des pages finement gribouillées, racontant tantôt des mathématiques complexes, des réflexions personnelles, ou des mémoires de famille.

(Bruit de porte d'entrée dans la librairie Alain Brieux).

Jean-Bernard Gillot : Alors, nous sommes dans la librairie Alain Brieux, rue Jacob à Paris. Je m'appelle Jean-Bernard Gillot et donc, il y a quelques années, on m'a demandé de m'occuper des manuscrits d'Alexander Grothendieck. Donc il y a 60000 pages qui sont dans des malles, qu'on ira voir après. Et puis là, pour l'instant, il y avait un carton, qui était un carton de l'Encyclopédie Universalis, qui est encore marqué Alexander Grothendieck et on a tout fouillé, on a tout présenté, on a tout mis, sur le papier, dans des petites boîtes, tout posé à plat. Donc on a des manuscrits que je vais vous montrer. Maintenant, je vais vous montrer les petites boîtes.

Céline Loozen : Et donc c'est notamment grâce à vous qu'on a récupéré ces manuscrits qui ont permis la publication de la suite, des années après.

Jean-Bernard Gillot : Ouais, moi je suis le gardien, voilà. Je suis le gardien.

Céline Loozen : Le gardien de *Récoltes et semailles*...

Jean-Bernard Gillot : ...de *Réc...* de tous les manuscrits.

Céline Loozen : Alors là, oui, tout est conservé dans des caisses.

Jean-Bernard Gillot : Donc là, on a tout mis, on a 1500 pages, qui sont que des brouillons dans tous les sens, c'était "dans la poubelle", hein, entre guillemets, c'était quelque chose qui était en poubelle.

Céline Loozen : Ah oui, on dit qu'Alexander Grothendieck voulait tout jeter, tout mettre à la poubelle, toute sa production...

Jean-Bernard Gillot : Voilà, sauf qu'en fait, il voulait rien jeter, la preuve c'est que tout est là. Voilà donc...

Céline Loozen : Donc parmi ces caisses, il y a notamment des écrits qu'on retrouve dans *Récoltes et semailles*.

Jean-Bernard Gillot : Possible, probablement, mais là on a aussi des choses, voilà il écrivait, c'est quelqu'un qui était un fou de l'écriture, donc il écrivait en permanence. Donc là, il y a une lettre...

Céline Loozen : Ce qu'on peut dire, déjà, c'est que c'est très hétérogène, dans ce qu'on voit, il y a des équations, il y a des formules, et puis il y a aussi des jets de phrases, des petits schémas aussi.

Jean-Bernard Gillot : Et donc tous les documents sont conservés, on a tout conservé, il doit y avoir une ou deux lettres des impôts et il écrit quelque chose derrière. Voilà, là, par exemple, ce sont des mathématiques. Je sais qu'il y a de la physique, il y a des tas de choses. Voilà donc là, il y a 1500 pages.

Céline Loozen : Il y a de la poésie aussi dans *Récoltes et semailles*.

Jean-Bernard Gillot : Il y a aussi de la poésie, mais c'est énorme. Là alors on va aller voir après le reste de pages, donc on a environ 60000 pages qui sont là. Enfin je sais pas, je veux dire, on parlait tout à l'heure des topos, là, il y a des choses extrêmement importantes sur les topos, c'est l'avenir, c'est Huawei qui va travailler dessus, c'est extraordinaire.

Céline Loozen : C'est vrai qu'un des objets centraux mathématique décrit dans *Récoltes et semailles*, c'est bien cet objet, les topos, qui sont un outil très puissant et unificateur dans le domaine des mathématiques.

Jean-Bernard Gillot : *(riant)* C'est ce que j'ai cru comprendre. Voilà. Bon maintenant, on va...

Céline Loozen : En tout cas, il disait que c'était une de ses plus belles découvertes.

Jean-Bernard Gillot : Je vais vous montrer la suite.

Céline Loozen : On descend au sous-sol.

Jean-Bernard Gillot : On descend dans l'antre des antres, voilà. Nous avons 5 cantines, qui sont toutes référencées. Alors, les cantines, elles sont dans des boîtes, il y a 48 boîtes, ou un peu plus probablement. Chaque boîte est une reliure qu'avait fait faire Alexander par un ami à lui qui était relieur, qui avait appris la reliure en prison, c'est quelqu'un du groupe Action directe qui n'a pas de sang sur les mains, mais qui avait été proche d'Action directe. Donc nous avons... Tout est référencé, tout est daté, tout est numéroté.

Céline Loozen : *(s'exclamant)* Cette écriture si fine...

Jean-Bernard Gillot : Exactement, et donc voilà, nous avons des mathématiques, de la physique, des tas de choses.

Céline Loozen : Oh la la ! On dirait qu'il écrit au fil de l'eau de sa pensée, comme s'il pouvait jamais s'arrêter, c'est vraiment la sensation que ça donne.

Jean-Bernard Gillot : Je pense que c'était le but de sa vie, c'était d'écrire, comme il dit "on n'achète pas des livres, on les fait.". Alors il charge, il surcharge, il gomme, il rectifie, mais tout est intact, voilà. Et il y a donc environ 60000 pages ici, un des derniers paquets. Parce qu'à la fin, il se fâche avec le...

Céline Loozen : ... la communauté...

Jean-Bernard Gillot : Non, la communauté, il a passé sa vie, à se fâcher avec la communauté, si j'ai bien compris. Il se fâche avec son copain qui était le relieur, il lui dit "je vais te donner les boîtes.", il a refusé, donc ils se sont fâchés, donc à la fin, il n'a plus personne pour s'occuper de ses boîtes. Donc il continue son travail et puis, il met ça dans des cartons.

Donc là, on est probablement dans des choses qui sont proches de Dieu, du Diable, enfins...

Céline Loozen : C'est vrai qu'il y a beaucoup de métaphysique et de spiritualité.

Jean-Bernard Gillot : Absolument, et après, il y a aussi des histoires de famille. Il remet en cause tout un tas de choses. Voilà, voilà, ça reste un objet incroyable, et je suis gardien de ça. Je ne comprends même pas pourquoi c'est chez moi *(riant)*.

Céline Loozen : Est-ce que selon vous la publication enfin de cet opus une quarantaine d'années après sa rédaction va changer quelque chose.

Jean-Bernard Gillot : Oui, c'est le début de l'histoire d'Alexander Grothendieck, je pense, entre ça, les topos, et... c'est le début d'une plus grande aventure. On a affaire à un génie, et puis il est là, ses manuscrits sont là au fond de ma cave, c'est ridicule. Mais bon, ils sont là. Je les protège pour l'instant. J'ai qu'une hâte, c'est que ça parte et que ça serve à tout le monde.

Nicolas Martin : Voilà, ces dizaines de milliers de pages manuscrites d'Alexander Grothendieck dans la cave de ce libraire parisien.

Une réaction, effectivement, est-ce qu'il faut faire quelque chose ? Est-ce qu'il faut les prendre, les protéger, les mettre ailleurs, les enlever, puisqu'apparemment, ce monsieur ne demande que ça, pour les verser à la connaissance commune ? Laurent Lafforgue ?

Laurent Lafforgue : La réponse est "oui, évidemment !". Ce sont des textes très précieux de l'un des plus grands créateurs du XX^e^ siècle, l'un des plus grands esprits scientifiques de l'Histoire, donc c'est évidemment précieux, il faudrait que ces manuscrits, en effet, soient sauvegardés, qu'ils soient également scannés, pour être mis à la disposition de tous. Cela dit, je voudrais aussi ajouter une remarque, inspirée par le simple fait que voilà, il y a 60000 pages, on peut se demander "comment est-ce possible ?". Mais ici, il faut faire un commentaire, qui est que pour Grothendieck, l'écriture est le moyen de la recherche de la vérité. Donc Grothendieck, en fait, ne réfléchissait pas de tête comme on dit, il écrivait tout, il écrivait tout ce qui lui passait par la tête et il a passé sa vie à faire cela, donc principalement s'agissant de mathématiques, mais pas seulement. Et en fait, dans *Récoltes et semailles*, il insiste beaucoup sur ce qu'il appelle le pouvoir créateur de l'écriture. Et c'est quelque chose dont il a fait l'expérience, et qui en fait est une leçon pour tout un chacun. C'est-à-dire qu'en écrivant, on trouve beaucoup plus, voilà.

Nicolas Martin : On entendait parler dans ce reportage des topos, c'est très important, j'aimerais qu'on l'évoque maintenant, c'est la grande création, ce que Grothendieck disait être le plus fier d'avoir créé, une volonté unificatrice des mathématiques, et pourtant, paradoxalement, pour des raisons que vous allez peut-être pouvoir m'expliquer, les unes et les autres, ces mathématiques-là ont très mauvaise presse. Aujourd'hui dans la communauté mathématique, il est difficile d'effectuer des recherches et de travailler sur les topos. Alain Connes, vous avez donné des leçons au Collège de France sur les topos mais ça n'a pas duré très longtemps. Vous-même, Olivia Caramello, ça a été difficile, et vous avez eu des pressions pour ne pas continuer dans cette voie, comment est-ce que ça s'explique tout ça ? *(Alain Connes me fait signe que non).*

Alain Connes : Oui. Non, non, en fait, si vous voulez, non. Ça, c'est une version complètement externe de la réalité : la réalité, si vous voulez, c'est que la notion conceptuelle de topos...

Nicolas Martin : ... que vous pouvez nous rappeler, brièvement, s'il vous plaît.

Alain Connes : Ah, je peux vous rappeler ce que c'est. En fait, en gros, si vous voulez, on avait, avant Grothendieck, l'habitude, pour étudier un espace, tout le monde sait que le rôle de l'espace, si vous voulez, est essentiel dans la géométrie, dans les mathématiques. Avant Grothendieck, quand on voulait connaître un espace, on le regardait directement, d'accord ? Et on essayait de le comprendre. Ce que fait l'idée du topos, qui est une idée merveilleuse, c'est... si vous voulez, elle met l'espace dans les coulisses, et ce que l'on fait, ce sont des mathématiques ordinaires avec un paramètre, ce paramètre est dans l'espace en question, il est dans les coulisses. Pour vous donner l'exemple le plus simple possible, supposez que l'espace en question, ce soit simplement deux points.

Eh bien, les mathématiques que vous faites, c'est vous faites deux fois les mathématiques qui sont la théorie des ensembles ordinaire. Eh bien, ce qui est merveilleux, si vous voulez, dans la théorie des topos, qui est là, c'est qu'elle a deux caractéristiques, la première, c'est que, en justement, en analysant ce qui se passe dans le contexte ordinaire de la théorie des ensembles, mais fait avec paramètre dans le topos, on arrive à une connaissance de cet espace qui est l'espace des paramètres, qui est le topos, bien plus fine que si on l'avait regardé directement. Et je dois dire, si vous voulez, que je ne peux pas m'empêcher de dire qu'en ce moment, je suis en train d'écrire un livre avec un psychanalyste, qui est Patrick Gauthier-Lafaye, dans lequel on utilise cette métaphore, mais par rapport, justement, à la psychanalyse.

Et la deuxième chose, qui est absolument extraordinaire, si vous voulez, dans cette idée du topos, c'est qu'elle revient à quoi ? Elle revient à regarder le mathématicien au travail de manière structuraliste. C'est-à-dire le mathématicien au travail va manipuler des ensembles. Mais le structuraliste va se fiche du fait que ce sont des ensembles. Il va regarder le mathématicien qui manipule des objets et des flèches. Et il va dire “ce mathématicien travaille sur ce qu'on appelle en mathématiques une catégorie”. Et ce structuraliste va dire “mais quelles sont les propriétés de cette catégorie, qui font que le mathématicien peut travailler ?”. Eh bien là, on est au cœur des topos.

Nicolas Martin : Comment expliquer, alors, Olivia Caramello, que les topos, alors corrigez-moi évidemment si je le décris de manière trop caricaturale, mais aient si mauvaise presse, ou soient un champ de travail de la mathématique qui finalement aient été rejetés ou repoussés par les institutions ?

Olivia Caramello : Oui, bah, en fait, j'ai réfléchi beaucoup par moi-même, en lisant *Récoltes et semailles* et aussi, vraiment, sur la base de celle qui a été ma propre expérience de vie, parce qu'effectivement, j'ai reçu énormément d'oppositions, en fait, depuis le début de ma carrière, tout simplement parce que je voulais développer, d'une façon globale et systématique cette théorie, justement dans le but de réaliser cette aspiration d'unification qui avait été déjà exprimée par Grothendieck, notamment dans *Récoltes et semailles*. Donc en fait, tout mon travail de recherche a été dirigé vers le but d'élaborer des techniques, des méthodes, pour transférer des connaissances entre des parties complètement différentes des mathématiques, par le biais des topos. Donc en fait, les topos peuvent être utilisés de façon incroyablement efficace, comme des objets-ponts, pour relier des contextes mathématiques les plus divers les uns des autres. Donc en fait, on peut penser métaphoriquement à un topos comme un lieu dans lequel des points de vue différents se rencontrent, en se reflétant les uns dans les autres. Donc, je donne cette métaphore pour souligner, pour vraiment mettre en avant cet aspect d'unification parce que je pense que c'est celui qui a vraiment engendré le plus d'hostilité. Je pense que c'est pas la technicalité des topos en tant qu'objet mathématique comme d'autres objets, parce qu'il y a bien sûr toute une technicalité, même, la théorie est quand même très sophistiquée et très profonde sur le plan purement technique. Mais c'est pas l'aspect technique qui a été à l'origine de l'ostracisme. Je pense que c'est vraiment cette dimension globale et inter-disciplinaire qui dérange les gens, parce qu'aujourd'hui, disons, les mathématiques sont devenues hyper-spécialisées donc chaque spécialiste travaille dans son coin, avec ses propres méthodes, il s'habitue à penser d'une certaine façon. Or, avec ces ponts qu'on arrive à engendrer avec les topos, on peut arriver notamment à démontrer un résultat dans un secteur des mathématiques en utilisant des méthodes complètement étrangères à ce secteur-là. On peut arriver à établir des ponts entre vraiment des secteurs complètement éloignés en apparence, et donc, on peut arriver chez un spécialiste d'un certain domaine avec un résultat qui le surprend beaucoup, qu'on arrive à démontrer par des méthodes qui ne sont pas les siennes. Donc vous pouvez déjà comprendre que ça, ça peut être inquiétant pour certains, si on n'a pas assez d'ouverture d'esprit pour accepter cette pluralité de points de vue. Donc je pense qu'il y a un certain dogmatisme dans certains cercles mathématiques qui fait qu'on s'habitue à un certain langage, et après, on se renferme en quelque sorte, après des années d'hyper-spécialisation, parce qu'il faut quand même comprendre que travailler dans n'importe quel secteur des mathématiques aujourd'hui, ça demande un investissement technique colossal. Donc, c'est quand même humainement compréhensible qu'on s'affectionne beaucoup à certaines méthodes et après, on dit "Ben non ! Je ne veux pas voir autre chose.", moi, ça m'est arrivé plusieurs fois que je donne, par exemple, des exposés où je présente des résultats dans un domaine qui n'est pas le mien...

Nicolas Martin : Par exemple ?...

Olivia Caramello : La théorie des modèles, par exemple, ça m'est arrivé de démontrer un résultat parmi mes premiers, où je faisais une ample généralisation du théorème de Fraïssé, en théorie des modèles, qui est un résultat très important. Et en fait, dans l'auditoire, je me rappelle bien, un théoricien des modèles important qui ne pouvait pas croire que mon résultat était correct, parce que c'était trop général. Et en fait, il a passé tout l'après-midi à essayer de trouver un contre-exemple, bien sûr, sans y parvenir, parce que ma démonstration était tout à fait correcte, sauf qu'elle était formulée dans un langage que lui... Il m'a dit "Non, mais je ne me mets même pas à essayer de comprendre, parce que de toute façon je ne vais pas y arriver." Il me l'a dit comme ça. Et alors, il a préféré passer 4 heures de son temps, et il me tourmentait aussi parce que moi, j'étais là, et donc, il essayait de me fabriquer tous ses contre-exemples et... *(riant)*, ça a été assez pénible mais, c'est juste pour vous donner une idée. Donc je pense qu'il y a vraiment ce côté inter-disciplinaire qui dérange. Après il y a beaucoup d'autres aspects, bien évidemment aussi.

Nicolas Martin : Laurent Lafforgue, un mot parce que vous, vous avez précisément quitté le milieu académique pour passer dans le privé et parce que dans le privé, en l'occurrence, on travaille... en l'occurrence votre employeur travaille, vous demande de travailler sur les topos et utilise cet outil, qui a l'air d'être particulièrement efficace, pour des travaux appliqués, qui ont l'air d'être des travaux passionnants et effectifs.

Laurent Lafforgue : Oui, c'est une histoire qui est totalement stupéfiante pour moi, que je n'aurais jamais imaginée il y a encore quelques années. C'est-à-dire que depuis une dizaine d'années, en fait depuis que je connais Olivia Caramello et ses travaux, je suis devenu dans le monde académique un fervent supporteur du développement de la théorie des topos. Et, comme toutes les personnes qui ont voulu développer les topos ou contribuer à leur développement, je me suis heurté pour cela à une très grande hostilité et, à ma totale surprise, j'ai trouvé donc dans un milieu d'ingénieurs, donc en l'occurrence de la firme Huawei, en France, donc j'ai trouvé, donc chez ces ingénieurs des oreilles beaucoup plus favorables. Donc c'est une chose que je n'aurais jamais attendue, qui me stupéfie aujourd'hui encore. Et donc aujourd'hui, enfin depuis quelques mois, j'ai quitté le monde académique, je suis chez Huawei, et donc mon environnement est constitué d'ingénieurs et de responsables de la hiérarchie de la recherche de Huawei qui sont totalement favorables au développement des topos, qui pensent dès aujourd'hui, c'est-à-dire seulement quelques années après avoir appris l'existence de cette théorie qu'elle est extrêmement importante, et, donc certains parmi eux pensent que les topos vont devenir... les topos de Grothendieck vont devenir, ou peuvent devenir les mathématiques de l'intelligence artificielle, donc c'est-à-dire quelque chose d'une importance absolument colossale, et voilà. Donc, pour moi, c'est inimaginable parce que ça fait 60 ans que la théorie des topos a été introduite par Grothendieck, elle a été développée par lui déjà à longueur de centaines et de centaines de pages, que lui-même, dont tout le monde sait qu'il est l'un des plus grands génies scientifiques de l'Histoire, a énormément insisté sur la puissance des topos, sur l'importance des topos, même sur l'importance des topos au-delà des mathématiques. Donc, en fait, dans *Récoltes et semailles*, un certain nombre de pages sont consacrées à ça, Grothendieck dit pourquoi les topos sont tellement importants à ses yeux, il le dit dans des termes que les mathématiciens peuvent comprendre mais aussi, que même un lecteur qui ne connaît pas les mathématiques peut être sensible à la beauté et à la profondeur de ce que dit Grothendieck quand il parle des topos. Donc il a écrit ces pages-là, et ça n'a eu aucun effet dans le monde académique. Donc là il y a un mystère, que Grothendieck lui-même ne s'explique pas, il constate cette hostilité, il ne la comprend pas. Olivia vient de proposer des éléments d'explication, mais, pour moi ça reste un mystère. C'est-à-dire qu'en fait, les topos sont un sujet sensible. Et c'est bizarre parce qu'habituellement, quand on dit un sujet sensible, on comprend qu'un sujet sensible, c'est par exemple un sujet politique sur lequel les gens ne s'accordent pas. On ne comprend pas qu'un sujet scientifique, qu'une définition théorique puisse être un sujet sensible. Or en fait, elle l'est. Donc voilà, c'est un fait, que personnellement je ne m'explique pas, ou en tout cas pas de manière satisfaisante pour moi.

Nicolas Martin : Eh bien écoutez, ce que je vous propose puisque, vous l'avez entendu, Grothendieck est toujours passionnant, *Récoltes et semailles* est absolument captivant, et qu'en une heure, on a eu à peine le temps d'effleurer un certain nombre de sujets, donc je vous propose, si vous le voulez bien, qu'on refasse un deuxième, puisque finalement, il y a deux volumes à *Récoltes et semailles* chez Gallimard, qu'on consacre une deuxième émission, on reparlera du découpage en deux volumes si vous le voulez, ça fait partie des sujets qui fâchent, mais on consacrera une deuxième émission pour poursuivre cette discussion tout à fait passionnante. Merci, beaucoup, à tous les trois. Merci Alain Connes, merci Olivia Caramello, merci Laurent Lafforgue. *Récoltes et semailles*, c'est donc en deux volumes chez Gallimard dans la collection Tel [1].

[1]La méthode scientifique, c'est Céline Loozen, Natacha Triou, Noémie Naguet de Saint-Vulfran, Antoine Beauchamp, Mariam Ibrahim, Amel Boucherka, Olivier Bétard à la réalisation, Ludovic Auger à la technique, et comme toujours en podcast sur l'application Radio-France et sur Franceculture.fr à tout jamais jusqu'à la fin des temps, jusqu'à preuve du contraire.