La géométrie de l'incertitude

Dana Mackenzie

Pour additionner ou multiplier des nombres, chacun sait que l'ordre des termes n'a aucune importance : $1 + 2 = 2 + 1$. Mais, dans la vie quotidienne comme en mathématiques, la propriété de pouvoir ainsi "commuter" sans difficulté n'est pas la règle générale. Voici plus d'un siècle et demi qu'un astronome irlandais transforma la non-commutativité en élément perturbateur des mathématiques classiques. Après avoir bousculé l'algèbre et participé à l'avènement de la physique quantique, elle est désormais au cœur des développements de la géométrie contemporaine. Serait-elle aussi cachée derrière la physique des interactions fondamentales ?

Professeur de mathématiques en premier cycle universitaire pendant des années, je suis toujours resté stupéfait du nombre d'erreurs que commettaient les étudiants à propos de la commutativité. Glissez l'expression $(x+y)^2$ dans un examen et, comme attiré par un miroir aux alouettes, même quelques-uns des meilleurs élèves la développeront en $x^2 + y^2$ (au lieu de $x^2 + 2xy + y^2$). Comme si les règles de l'arithmétique leur permettaient d'effectuer les opérations "additionner" et "élever au carré" dans n'importe quel ordre.

D'où vient cette fâcheuse habitude ? Je soupçonne qu'elle découle, en grande partie, d'une analogie incorrecte. A l'école primaire, en classe d'arithmétique, les enfants apprennent très tôt que l'ordre n'a aucune importance lorsqu'ils additionnent deux nombres. Pourquoi s'étonner si ces mêmes élèves, des années plus tard, confrontés à des expressions plus compliquées et pressés par le temps, s'en remettent inconsciemment à cette règle familière ?

Il est cependant curieux de procéder de la sorte. Après tout, hors de la salle de classe, personne ne tient la commutativité pour acquise. Lorsque l'on s'habille le matin, peu importe si on met sa montre avant ou après ses chaussures : "mettre sa montre" commute avec "mettre ses chaussures". "Mettre ses chaussettes", en revanche, ne commute pas avec "mettre ses chaussures" et même les jeunes enfants savent dans quel ordre effectuer ces gestes pour obtenir un résultat satisfaisant (quoiqu'ils puissent en décider autrement, histoire de rire un peu). En règle générale, en mathématiques, les nombres

Magazine La Recherche n° 307, Mars 1998, ©La Recherche.

commutent mais pas les opérations, ni les actions. La seconde partie de cette assertion, la non-commutativité des actions, est la pierre de touche de mathématiques peu connues, dont les implications vont du trivial au complexe. Elle sème souvent l'anarchie au cœur de théories dociles et prévisibles. Véritable farfadet théorique, elle surgit régulièrement, sous différents visages, dans les débats entourant les grands chambardements de la pensée mathématique. On la retrouve dans les bizarreries de la mécanique quantique, y compris dans le fameux principe d'incertitude du physicien allemand Werner Heisenberg. Au cours des dernières années, le sujet s'est libéré de ses origines algébriques et a permis d'élaborer une géométrie radicalement nouvelle qui, peut-être, contribuera au prochain bond en avant des physiciens vers une "théorie du tout" unifiée.

Pour se familiariser avec la non-commutativité, il faut tout d'abord savoir que toutes les opérations non commutatives ne sont pas similaires. Cela peut paraître étrange - après tout, les choses commutent où ne commutent pas, n'est-ce pas ? En fait, pas vraiment. Prenez deux navires qui lèvent l'ancre côte à côte à l'équateur. Un des navires parcourt 100 milles vers l'est puis vire de bord et couvre 100 milles vers le nord. Le second navire parcourt 100 milles vers le nord puis 100 milles vers l'est. Se retrouvent-ils au même endroit ?

Non ! Le second navire termine sa course à près d'un trentième de mille à l'est du premier. Si le trajet avait été dix fois plus long dans chaque direction, l'écart aurait atteint à peu près 32 milles - presque mille fois plus. La commutativité ne peut s'appliquer ici à cause de la courbure de la Terre ; de plus, l'erreur commise en l'appliquant dépend de la route suivie par les navires.

La non-commutativité s'impose quand il s'agit de démêler des nœuds. Alexandre le Grand, s'y essayant il y a vingt-trois siècles, finit par couper en morceaux le légendaire nœud gordien. De nos jours, les mathématiciens ne cessent d'apporter de surprenants raffinements à cette approche brutale. Grâce à la non-commutativité, John Horton Conway, de Princeton University, a pu mettre sur pied une ingénieuse méthode pour dénouer certains nœuds sans jouer du sabre.

C'est un Irlandais prodige en mathématiques, William Rowan Hamilton, qui fit entrer le fauve de la non-commutativité dans l'arène. Nommé astronome royal d'Irlande à 22 ans, il fut anobli à 30, et avait déjà atteint l'âge avancé de 38 ans lorsque, le 16 octobre 1843, il eut un trait de génie et résolut un problème qui lui résistait depuis plus d'une dizaine d'années. Hamilton fut l'un des premiers à reconnaître l'importance des nombres complexes. Il s'est ensuite acharné à découvrir de nouveaux systèmes numériques "par-delà" les nombres complexes. Observant que les nombres réels et complexes ordinaires obéissent aux règles de l'arithmétique - notamment l'associativité et la commutativité de l'addition et de la multiplication -, il espérait découvrir de nouveaux nombres exotiques ayant les mêmes propriétés. Mais, en dépit de tous ses efforts, ses recherches n'aboutirent pas (les mathématiciens savent aujourd'hui que de tels nombres n'existent pas). Hamilton comprit finalement qu'il pouvait se contenter d'un sujet de moindre envergure. Ce jour d'automne, il imagina en effet un système numérique satisfaisant toutes les règles habituelles sauf une : la commutativité de la multiplication. Il baptisa son nouveau système quaternions.

Avant même la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, les quaternions furent largement supplantés par d'autres outils plus flexibles, mais leur découverte ne manqua pas de laisser derrière elle au moins un héritage durable : les mathématiciens se sentirent libres de construire de nouvelles structures algébriques enfreignant les règles de l'arithmétique conventionnelle. Ces structures parmi lesquelles les groupes, ou l'algèbre de Clifford (cette dernière étant la plus réussie des généralisations modernes des quaternions), font maintenant partie de la panoplie du chercheur en mathématiques.

L'esprit d'Hamilton survit à travers les travaux des spécialistes contemporains de la géométrie non commutative, En supprimant la commutativité des axiomes d'un type particulier de structure algébrique découverte dans les années 1940, ils ont ouvert une voie menant à de nouveaux types d'espaces géométriques. Leurs travaux ont également été profondément influencés par un autre rebondissement qui, lié à la non-commutativité, se produisit dans le domaine de la physique.

Au début du siècle, la physique du monde subatomique semble prendre un visage de plus en plus étrange. Jusqu'alors, des particules telles que les photons et les électrons étaient considérées comme des objets ponctuels, auxquels on pouvait attribuer des nombres représentant des quantités observables, l'énergie par exemple. Puis, en 1925, Heisenberg esquisse le formalisme mathématique de la physique quantique moderne. Forts de la nouvelle théorie quantique, les physiciens passent “de l'autre côté du miroir”. Des quantités observables comme l'énergie ne sont plus décrites par des nombres mais par ce qu'on appelle des opérateurs, ou actions, agissant sur les particules. Ces dernières ne sont plus des points mais des fonctions d'onde.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les nombres réels commutent mais, en général, les actions ne le font pas. En réinterprétant ce qui est observable à l'aide d'opérateurs, Heisenberg introduisit du même coup l'idée de non-commutativité. En particulier, il découvrit que les actions “mesurer la position de” et “mesurer la quantité de mouvement de” ne commutent pas. Lorsque l'on mesure la position d'une particule, son état est perturbé de telle sorte que sa quantité de mouvement ne peut pas être connue avec une précision optimale. On peut donc voir le principe d'incertitude d'Heisenberg, qui stipule que la position et la quantité de mouvement d'une particule ne peuvent pas être connues simultanément avec des degrés de précision indépendants, comme une conséquence de la non-commutativité.

Les fondateurs de la théorie des quanta firent certainement preuve d'audace à propos de la matière et de l'énergie, mais ils se montrèrent plus conservateurs et tolérants vis-à-vis de la géométrie de l'espace. Ils assimilèrent l'Univers à ce que les mathématiciens appellent une variété, quelque chose de semblable à une feuille de caoutchouc lisse et continue ne possédant ni bords ni faux plis.

Dans un sens, les variétés sont des modèles de commutativité. Que l'on mesure la position d'une particule d'abord par rapport à un axe horizontal puis par rapport à un axe vertical ou vice versa, cela n'a aucune espèce d'importance : on obtient le même résultat dans les deux cas.

Il y a à peu près une quinzaine d'années, des théoriciens commencèrent cependant à concevoir de nouveaux espaces bizarres - des espaces originaux dans lesquels même des opérations simples telles que “mesurer la distance à partir du mur arrière” et “mesurer la distance à partir du mur latéral” ne commutent pas. La non-commutativité donnant lieu à l'incertitude, il s'ensuit que ces distances ne peuvent être connues simultanément. Imaginez-vous en train de chercher vos chaussures dans un placard quantique de cet acabit.

Dès que vous connaissez leur position exacte de la gauche vers la droite, leur image se dilue dans le sens de la profondeur.

Les espaces non commutatifs ont ouvert de nouveaux horizons en géométrie, comme le fit la théorie des quanta en physique. Depuis Euclide, les spécialistes de la géométrie considéraient les points comme des éléments fondamentaux, les “atomes” à partir desquels toutes les autres structures géométriques sont construites, le combustible des fonctions - ces relations mathématiques qui transforment les points en nombres. Les spécialistes de la géométrie non commutative balaient cette tradition vieille de 200 ans et, dans la foulée d’Heisenberg, ils opèrent une refonte de la géométrie, donnant la prépondérance non plus au point, mais à la fonction - un peu comme les physiciens remplacèrent l’idée de *particule* par celle de *fonction d’onde* en physique des quanta.

Le paysage qui en résulte est un monde chimérique, un monde composé exclusivement de verbes et dépourvu de noms, un monde où les seules réalités sont des actions mais où aucun obiet (points ou particules) n’est là pour s’y soumettre. Si les mathématiciens peuvent se satisfaire d’un tel univers fictif, il n’en reste pas moins qu’ils doivent savoir en revenir pour en expliquer les retombées sur le monde observable, ils doivent pratiquer une “ingénierie inverse” et transformer les fonctions en points, jusqu’à ce que tout objet ou relation dans l’un des espaces ait une interprétation dans l’autre. Etablir une telle correspondance est en tout point similaire à ce que Conway fit lorsqu’il trouva le moyen de coder numériquement les enchevêtrements de cordes.

Le problème de la transformation inverse fut résolu en 1943 grâce à un théorème démontré par le mathématicien Israël M. Gelfand, à l’époque exerçant en Union soviétique, actuellement à la Rutgers University de New Brunswick, dans le New Jersey. La méthode utilisée par Gelfand pour reconstruire l’espace est à la fois élégante et ironique. Dans un monde où les verbes sont des objets, fit-il remarquer, les noms doivent devenir des actions. Dans un sens, Gelfand apporta une réponse mathématique à la question posée par le poète irlandais William Butler Yeats à la fin de son poème *Among School Children* : “Comment connaître le danseur à partir de la danse ?”. Les danseurs sont des points, les danses sont des fonctions. L’approche de Gelfand (qui va à l’encontre de l’entendement) suggère que “la danse précède le danseur”. Pour connaître un danseur, il suffit d’observer l’artiste en train de danser - pas seulement *une* danse, plutôt *toutes* les danses possibles.

D'après le théorème de Gelfand, il est possible de reconstruire l'espace à partir de l'univers fictif des fonctions (auquel les mathématiciens donnent le nom obscur d'"algèbre C^*- commutative") si ce dernier satisfait à une courte liste de spécifications, ou axiomes. En tête de liste vient la commutativité : la multiplication des fonctions est commutative, tout comme la multiplication des nombres réels. Supposons alors que, suivant l'idée de Hamilton, on supprime la commutativité de cette liste d'axiomes. Ce critère aboli, des fonctions jusqu'alors interdites jaillissent du système axiomatique comme d'une boîte de Pandore. Mais quelle sorte d'espace obtient-on alors ? L'exemple le plus simple en a été proposé par Alain Connes, professeur de mathématiques à l'Institut des hautes études scientifiques à Bures-sur-Yvette. Connes est souvent considéré comme le père de la géométrie non commutative ; ses travaux lui ont d'ailleurs valu la médaille Fields, équivalent mathématique du prix Nobel. L'espace proposé par Connes est composé de deux points seulement.

Une fonction ordinaire opérant dans cet espace peut être représentée simplement par une paire de nombres. Mais Connes fait alors quelque chose d'extraordinaire : en inscrivant ces deux nombres dans les coins d'un tableau 2×2, il passe des fonctions ordinaires à une algèbre non commutative bien connue, l'ensemble des matrices 2×2. Or une de ces matrices a la propriété irritante d'interchanger les deux points. Cette matrice M étant néanmoins une citoyenne légitime du territoire fictif, il n'existe aucun moyen d'immuniser les points contre ses effets. Il est par conséquent impossible de distinguer les deux points. C'est bien là un principe d'incertitude !

L'exemple peut paraître badin mais il est loin d'être frivole. Connes a montré qu'en raffinant légèrement son espace à deux points, on pouvait obtenir un modèle d'univers permettant de faire des prédictions identiques à celles de la théorie physique qui unifie la force électromagnétique et la force faible responsable de la radioactivité. Connes soutient que, moyennant quelques modifications supplémentaires, il peut également incorporer la troisième force fondamentale de la physique : la force nucléaire forte.

L'essence même de l'espace quantique, on s'en souvient, est d'être "imprégné" d'incertitude. L'espace engendré par le modèle de Connes a une couleur beaucoup plus classique. Comme dans son espace à deux points, chaque point y “est jumelé” avec un alter ego indiscernable, Le déterminisme classique est maître des lieux, et l’incertitude provient uniquement du fait que l’on ne sait pas à quel point on a affaire. Mais Connes assure que cette incertitude est suffisante pour engendrer la totalité du modèle classique décrivant les interactions entre particules élémentaires.

Le modèle de Connes va encore plus loin : il permet en effet d’atteindre un niveau de prédiction inaccessible au modèle classique. En 1995, les physiciens Bruno lochum, Daniel Kastler et Thomas Schücker du Centre de physique théorique de Marseille montrèrent par exemple que, si la structure de Connes est correcte, la masse du boson de Higgs, une particule dont l’existence est prévue par la théorie peut être calculée avec précision, une fois la masse du quark top déterminée. Personne n’a encore observé le boson de Higgs, mais lochum et ses collègues pensent avoir découvert un lien entre cette particule et le quark top. *“Nous pensons,* déclarent-ils dans leur publication*, que la géométrie non commutative est sur le point de révolutionner la physique comme [...] le fit la géométrie de Riemann”.*

Connes insiste sur le fait que la géométrie non commutative est davantage qu’un simple outil facilitant l’étude de la théorie des champs quantiques. Même si elle ne permettait pas aux physiciens de réaliser leurs rêves, elle n’en resterait pas moins un outil mathématique valide et utile. Des ajouts récents au bestiaire des espaces non classiques pourraient d’ailleurs être mieux compris dans le contexte de la nouvelle formulation de Connes. La géométrie non commutative constitue par exemple un environnement naturel pour les fractales, ces figures devenues matière première du pop’art et de la science populaire. Il en est de même pour les pavages non périodiques, motifs construits à partir de formes s’imbriquant à l’infini sans laisser aucun vide et sans jamais se répéter. Pour les mathématiciens, l’aspect le plus surprenant des travaux de Connes est peut-être la facilité avec laquelle ils permettent de rassembler des concepts apparemment sans relation au sein d’une structure commune.

En géométrie non commutative, il existe une opération technique permettant de fusionner certains objets. Non sans humour, les mathématiciens l’ont baptisée en anglais *Connes fusion.* L’expression pourrait certainement s’appliquer à l’ensemble du sujet : un nouveau modèle fusionnant de nombreux cas particuliers, trop rebelles pour les géométries classiques et dont la non-commutativité est le lien caché.

Encarts et légendes des illustrations

Les nœuds de Conway

J.H. Conway s'est penché sur un type de nœuds appelés *tangles*, qu'il définit comme des enchevêtrements quelconques de deux brins dont les quatre bouts restent visibles. Par commodité, on les prend répartis sur les quatre sommets d'un carré, et deux *tangles* sont considérés comme équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre en faisant tourner l'ensemble des brins à l'intérieur du carré. Le but est de démêler les deux brins de telle sorte qu'ils finissent parallèles et horizontaux sur le carré, comme les deux barres du signe =. Conway a démontré que pour une importante classe de *tangles* baptisés *tangles* rationnels, il suffit d'une suite de deux opérations élémentaires. La première opération consiste à saisir le paquet de brins et à le faire tourner de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. Si l'on commence avec deux cordes côte à côte mais verticales (||), *tourner* donne le signe =.
Seconde opération : *torsader*. Tout en immobilisant les deux bouts situés à gauche, on torsade les deux bouts de droite de manière à faire passer le bout du haut par-dessus celui du bas. En torsadant la conformation = on obtient un *tangle* en forme de X pour lequel le brin descendant en diagonale vers la droite passe par-dessus l'autre. Si l'on torsade le *tangle* ||, on retrouve ce même *tangle* ||. Il est facile de s'apercevoir que les opérations *tourner* et *torsader* ne commutent pas. Par exemple, si l'on tourne puis torsade le *tangle* =, on obtient le *tangle* ||. Mais si l'on torsade avant de tourner, on obtient un X.
Conway attribue à chaque *tangle* un nombre qui représente son nombre de torsades. Le *tangle* = ne comportant aucune torsade, son nombre de Conway est zéro. Ensuite, on ajoute 1 par torsade. L'opération *torsader* pour les *tangles* correspond à l'opération ajouter 1 pour les nombres. Et pour l'autre opération, *tourner* ? A première vue, faire tourner un nœud ne semble pas affecter le nombre de torsades qu'il renferme. C'est là que Conway eut une intuition étonnante : tourner un *tangle* correspond en fait à prendre l'opposé de l'inverse de son nombre de Conway ($-1/n$). Par exemple, si l'on tourne un fangle contenant trois torsades, le *tangle* obtenu possède moins un tiers de torsade (nombre de Conway $= -1/3$).

On comprend aisément que n'importe quelle fraction puisse être obtenue avec une séquence appropriée de torsades et de tours. Etonnant, non ? Peut-être, mais ça marche. Pour démêler un *tangle* rationnel quelconque, il suffit d'annuler son nombre de Conway en lui infligeant une série d'opérations appropriée peu importe comment il avait été formé. En conférence, Conway a coutume d'expliquer sa méthode en sortant deux bouts de corde et en orchestrant la danse arithmétique de quatre volontaires autour d'un carré. Vous préférerez peut-être essayer avec des lacets de chaussures. Quoi qu'il en soit, jetez un coup d'œil au *tangle* figurant sur cette page (nombre de Conway : $-3/5$). Il résulte de la séquence $torsader - torsader - torsader - tourner - torsader - torsader - tourner$. Vous pourriez bien sûr le démêler en appliquant la séquence inverse, mais vous pourriez aussi procéder de la manière suivante : *torsader* $(-3/5 + 1 = 2/5)$, puis *tourner* (-1 divisé par $2/5 = -5/2$), puis *torsader* trois fois $(-5/2 + 3 = 1/2)$, *tourner* (-1 divisé par $1/2 = -2$), et enfin *torsader* deux fois $(-2 + 2 = 0)$. Essayez !

Cette méthode fonctionne pour une raison : les manipulations correspondant à la torsade et au tour sont les reflets exacts des opérations arithmétiques utilisées pour calculer le nombre de Conway. Autrement dit, l'absence de commutativité affecte de manière similaire les opérations *torsader* et *tourner* d'une part et les opérations plus 1 et prendre l'opposé de l'inverse d'autre part. Par exemple, en prenant par deux fois l'opposé de l'inverse d'un nombre quelconque, on retombe systématiquement sur le même nombre. Transposé dans le langage des *tangles*, cela implique que tourner l'un quelconque d'entre eux deux fois d'affilée devrait redonner le même *tangle*. Pourtant, si l'on tente de tourner deux fois le *tangle* 3/5, on obtient un *tangle* d'aspect très différent. Il existe néanmoins un moyen de retomber sur la version initiale en manipulant les brins de ce dernier (voir schéma ci-dessous). On peut facilement trouver des relations plus subtiles. Par exemple, pour tout *tangle* rationnel, la séquence d'actions $torsader - tourner - torsader - tourner - torsader - tourner$ donne un *tangle* équivalent. Voyez-vous pourquoi ?

Hamilton

Passionné d'astronomie et d'optique, Hamilton est nommé astronome royal d'Irlande en 1827 à 22 ans. Egalement mathématicien, il a longtemps cherché à généraliser les nombres complexes avec des triplets de réels. Mais en 1843 il réalise soudain, lors d'une promenade dans Dublin, qu'il faut considérer des quadruplets. Sur la pierre d'un pont, il écrit alors les équations définissant les quaternions, première algèbre non commutative.

Heisenberg

En 1924, Heisenberg définit une loi de multiplication non commutative pour certaines variables quantiques décrivant la position et l'impulsion. Puis il donne les fameuses relations d'incertitude sur ces variables.

Le principe d'incertitude d'Heisenberg peut s'interpréter comme une conséquence de la non-commutativité.

Illustration par un tableau de Magritte

De même que Magritte défie les lois de la réflexion sur le miroir, la géométrie non-commutative malmène l'intuition en supprimant une habitude vieille comme le monde mathématique.

Promenades sur la sphère

Les trajectoires orange et jaune ne se terminent pas au même point, ce qui montre que les opérations "faire route de 100 milles au nord" et "faire route de 100 milles à l'est" ne commutent pas. On voit surtout que pour une distance de 1 000 milles, l'écart à l'arrivée est beaucoup plus grand. La noncommutativité n'affecte donc pas tous les résultats de la même manière.

Pour le mathématicien, cela signifie qu'il faudra modéliser les ensembles non commutatifs au cas par cas : quaternions, nœuds de Conway ou espaces de fonctions en mécanique quantique ne sont pas semblables ; il n'y a pas de non-commutativité universelle.

Non-commutativité et Alain Connes

Les spécialistes de la géométrie non commutative donnent la prépondérance aux fonctions et non plus aux points.

La géométrie non commutative est davantage qu'un simple outil facilitant l'étude de la théorie quantique des champs.

Père de la géométrie non commutative qu'il a développée à partir de 1977, Alam Connes a reçu la médaille Fields en 1982. Connes modélise l'incertitude quantique avec un espace où chaque point a un jumeau indiscernable.

La vérité est mathématique

Alain Connes

Lauréat de la médaille Fields, Professeur au Collège de France, organisateur de la "Rencontre du millénaire", Alain Connes est l'un des grands "découvreurs" de notre époque. Défenseur de la doctrine platonicienne selon laquelle le monde mathématique a une existence indépendante des constructions mentales, il vient de publier "Triangle de pensées", un livre d'entretiens avec André Lichnerowicz et Marco Schützenberger.

TANGENTE : Vous êtes le plus connu des mathématiciens français, mais vous l'êtes moins que d'autres scientifiques, les prix Nobel de physique, par exemple. Pourtant, la médaille Fields est en mathématiques l'équivalent du prix Nobel, et vos travaux figurent parmi ceux qui jouissent de la plus importante reconnaissance mondiale. On ne sait donc que peu de choses de vous. Einstein affirmait que l'univers appartenait aux monomaniaques. Avez-vous d'autres centres d'intérêt que les mathématiques ou la physique quantique ?

ALAIN CONNES : Les scientifiques connus du public ont tout fait pour qu'on parle d'eux. Pierre-Gilles de Gennes, par exemple, n'a pas hésité à faire le tour des établissements scolaires ou à prendre des positions discutables. Pour répondre à votre question, bien sûr qu'il y a d'autres activités dans la vie d'un chercheur ! La concentration fatigue. La musique, par exemple, permet de se libérer d'une certaine anxiété suscitée par cet excès de concentration.

Le contact précoce avec la musique prépare à la profondeur du raisonnement mathématique.

C'est ce qui m'arrive quand je joue du piano, surtout quand j'improvise. J'ai appris le piano à 5 ans, dans la ville de Draguignan où j'ai passé ma petite enfance. Puis je l'ai interrompu lorsque mon père, qui pensait que c'était préférable pour mon éducation, s'est installé à Marseille, adoptant pour la circonstance une vie dangereuse : d'inspecteur des contributions, il est devenu chef d'une brigade d'intervention qui arrêtait des trafiquants.
En reprenant le piano à 20 ans, je n'avais rien perdu de mes qualités (je peux jouer n'importe quel morceau d'oreille), mais j'ai eu du mal à me remettre à la discipline du solfège.

TANGENTE : La musique fait bon ménage avec les mathématiques, c'est connu. Avez-vous dû faire un choix entre disciplines littéraires et scientifiques ?

ALAIN CONNES : A passer des mathématiques à la musique, on ne ressent pas de véritable rupture. La similitude des structures ne peut être niée. Il y a là quelque chose de très profond. Songez au développement en fractions continues

Revue Tangente, août-septembre 2000, n° 76, © Tangente, l'aventure mathématique.

de $\log 3/\log 2$ et à la partition du “Clavier bien tempéré” de J.-S. Bach. Mais j’ajouterai que le contact précoce avec la musique prépare à la profondeur du raisonnement mathématique.
Pour les disciplines littéraires, j’ai mis plus de temps à mûrir. Aujourd’hui, en revanche, j’apprécie hautement la littérature.

Tangente : Von Neumann aimait le gin, Hardy s’intoxiquait à la cigarette, Erdös avalait de la Benzédrine. D’après-vous, peut-on se dispenser de drogues dans une activité de recherche ?

Alain Connes : Moi, je suis drogué au café. J’ai un autre stimulant : l’agression des autres. Lorsque je subis des attaques ou des préjudices, cela décuple mon énergie. Le premier exemple auquel je pense est une affaire de plagiat dont j’ai été victime alors que j’étais jeune et naïf. J’écrivais des lettres de vingt pages pour leur faire part de mes progrès à des chercheurs qui travaillaient sur le même thème que moi. Une fois, un de mes “espions” dans l’ex-Union Soviétique me rapporta un fascicule recensant mes dernières trouvailles sous la signature d’un mathématicien dont je tairai le nom. Le milieu scientifique n’échappe pas aux margoulins. Le plagiaire en question s’estimait-il protégé par le rideau de fer ? Toujours est-il que j’ai attendu une occasion favorable, qui s’est présentée aux Etats-Unis, pour le mettre en face de son imposture.

Tangente : Comment travaillez-vous ? Quelle est la part de la recherche dans votre emploi du temps ?

Alain Connes : Avec l’expérience, j’ai mis au point une méthode pour ne pas travailler dans le vide, et éviter que la mémoire de moments de recherche me trahisse : mes carnets. Ecrits au crayon mais très proprement, ils recèlent tous mes calculs et toutes mes idées qui ont abouti à quelque chose. D’un style plus libre que dans des articles, ils sont rigoureusement tenus à jour, au prix d’une ascèse quelquefois contraignante. Une sorte de “journal scientifique”. J’ai aujourd’hui cent carnets.
Il m’est arrivé de passer trois semaines sur le même calcul, à raison de huit heures par jour, pour vérifier un résultat (nous étions deux à calculer indépendamment). Il m’arrive aussi, par exemple après l’intense période de recherche que représente un cours au Collège de France, de rester un mois à me consacrer à la littérature.

La recherche en temps réel

Un cours au Collège de France est un exercice extraordinaire de recherche en temps réel. Comme vous le savez, les cours ne doivent pas porter sur des sujets ayant déjà fait l’objet de publication. Alors, on prépare une piste, et on la suit, quinzaine après quinzaine, avec l’obligation d’apporter, d’un cours sur l’autre, de nouveaux résultats. Quelle stimulation ! La moitié de mes résultats de cette année a été produite pendant cette période de cours ! L’obligation de donner quelques cours - à dose homéopathique - est peut-être la seule chose qui manque au système français du CNRS, par ailleurs fort bon.

Tangente : Nous avons un bon système de recherche en France ?

Alain Connes : Excellent. Je parle du CNRS et non des enseignants-chercheurs tiraillés entre deux missions incompatibles. A l'étranger, les situations des chercheurs sont fortement dépendantes de leur densité de publication. Vous connaissez le slogan "Publish or Perish". Alors, on est tenté de s'intéresser à des problèmes mineurs, pour faire paraître régulièrement des articles, au détriment des problèmes profonds, conceptuels. Savez-vous que Wiles, qui, pour parachever la démonstration du théorème de Fermat, n'a pas publié d'articles pendant quelques années, a failli perdre son poste ?

Tangente : Les sept problèmes du millénaire sélectionnés par le Clay Mathematic Institute sont conceptuels ? Est-ce pour cela qu'aucun d'entre eux ne peut être compris par le commun des mortels ?

Alain Connes : Les sept problèmes résument l'inconnu d'un sujet, voire d'une branche des mathématiques, puisqu'ils ont été choisis pour recouvrir l'ensemble des domaines étudiés par les mathématiques. On ne peut donc les expliquer simplement, sauf à décrire en détail l'historique de chaque sujet. Des questions explicables en peu de mots à un public non averti peuvent être intéressantes, elles resteront anecdotiques, sauf exception. Le miracle de Fermat, c'est qu'un problème a priori mineur a pu être résolu parce qu'on l'a transformé, quelques siècles plus tard, en problème conceptuel.

Tangente : Il reste une place pour la recherche en amateur ?

Alain Connes : Bien sûr ! Je pense même que ce sont des non professionnels qui trouvent souvent les choses les plus merveilleuses ! Je pense, par exemple, à l'algorithme de Lucas (voir en fin d'article). Mais il est peu vraisemblable que des amateurs résolvent une des sept questions Clay.

Tangente : Cette difficulté n'a pas gêné la médiatisation très forte de leur proclamation. En aurait-on parlé autant s'il n'y avait pas eu les millions de dollars ?

Alain Connes : Non, bien sûr ! Même ainsi, ce n'était pas gagné d'avance. Il a fallu déployer une énorme énergie pour faire de cette conférence une réussite. Mais une telle organisation est intéressante, et reposante pour le cerveau. Nous avons bénéficié de circonstances favorables, le travail fait par les différents acteurs de l'année mondiale des mathématiques, l'efficacité du service communication du Collège de France...
Mais j'ai craint jusqu'au bout que la presse, ou même les mathématiciens, ne répondent pas à notre invitation.

Un continent à explorer

Tangente : Il est important que la presse parle de mathématiques ?

Alain Connes : Vital. Il faut que l'opinion publique, en particulier les jeunes en formation, comprennent ce que sont les mathématiques, et ce qu'elles ne sont pas.
Qu'elles sont à l'opposé de ce qu'Allègre a dit d'elles. Qu'elles n'ont pas vocation à être un instrument de sélection, qu'elle ne sont d'ailleurs plus. Qu'en aucun cas, et jamais, elles ne pourront être remplacées par des ordinateurs.
Qu'elles sont une irremplaçable usine à concepts.
Qu'elles constituent un continent à explorer qui n'attend que ses découvreurs.

Tangente : Un continent à explorer, c'est l'approche platonicienne que vous défendez depuis votre livre d'entretiens avec Jean-Pierre Changeux. Cette fois, dans "Triangle de pensées", les interlocuteurs sont des mathématiciens, aujourd'hui disparus. Le dialogue est plus crédible. car dans le premier livre, on avait souvent l'impression que Changeux ne comprenait rien à vos propos. Un livre passionnant, mais au prix de quels efforts de compréhension ! Pour qui ce livre est-il écrit ?

Alain Connes : C'est vrai que le livre est difficile. Un de ses buts est de faire comprendre aux mathématiciens eux-mêmes les conséquences du théorème de Gödel. Une grande découverte du siècle, avec ses conséquences philosophiques.

Tangente : L'autre partie du livre est consacrée aux liens avec la physique, la physique quantique en particulier. Vous êtes au fait, si ce n'est au cœur, des derniers états de la recherche en physique théorique. Y a-t-il beaucoup d'autres mathématiciens dans ce cas ?

Une explication à a renormalisation

Alain Connes : La physique utilise la géométrie non commutative. Et j'ai eu la satisfaction extraordinaire d'apporter, avec le physicien Dirk Kreimer avec qui je travaille ici à l'IHES, une explication à la renormalisation (voir définition en fin d'article) en la reliant au vingt-et-unième problème de Hilbert, qui fait appel aux mathématiques les plus profondes.
C'est vrai que les mathématiciens n'abordent pas toujours les problèmes de physique comme il le faudrait. Il y a ceux qui les sortent de leur contexte pour les résoudre comme des problèmes de mathématiques, et à l'opposé ceux qui cherchent carrément à lire dans la pensée de Dieu.
Moi, ce qui m'intéressait, c'était de savoir pourquoi les physiciens utilisaient telle ou telle recette, et pourquoi elle marchait. Et nous avons fini par trouver !
Il faut dire que tout le monde n'a pas la chance d'avoir, comme ici à l'IHES, des chercheurs de haut niveau de l'autre discipline à proximité. C'est presque par hasard que j'ai rencontré Dirk Kreimer, en allant écouter une de ses conférences.

TANGENTE : Cela serait exceptionnel qu'un mathématicien obtienne, après la médaille Fields, le prix Nobel de physique ! Pourquoi n'avez-vous pas invité des physiciens à vos entretiens de "Triangle de pensées" ? A quand des entretiens avec un philosophe ?

ALAIN CONNES : C'est vrai, nous aurions pu inviter un physicien. Cela s'est trouvé comme cela. Mais ce furent des moments extraordinaires. Aujourd'hui, chaque fois que je relis ce livre, j'entends leurs voix. Un entretien avec un philosophe ? Curieusement, j'ai peur que nous ayons du mal à trouver un langage commun. Je redoute les tiroirs, la classification. J'apprécie la clarté de pensée, mais je crains une philosophie qui ne se heurte pas à une réalité.
Je préfèrerais carrément un poète ! J'ai plus confiance dans la poésie que dans la philosophie.

TANGENTE : Pourtant, même à votre corps défendant, vous êtes vous-même un philosophe. Votre conception de la vérité mathématique est une philosophie. Vous avez affirmé dans La Recherche : "On s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique". Qu'entendez-vous par là, et y voyez-vous une des raisons de la "redoutable efficacité des mathématiques" ?

ALAIN CONNES : Les grandes découvertes nous le disent : rien n'est trop beau pour être vrai. Considérez d'un côté les trajectoires paraboliques, de l'autre côté les orbites elliptiques. Newton arrive. Une équation, quelques principes et tout s'éclaire. Envisagez maintenant une idée terriblement abstraite : le principe d'exclusion de Pauli. Et qu'obtient-on à la sortie ? Le tableau périodique des éléments de Mendeleïev. Si vous passez l'effroyable complexité du monde matériel à travers le tamis de la vérité scientifique, que reste-t-il ? De merveilleuses pépites mathématiques.

Propos recueillis par Francis Casiro et Gilles Cohen

Textes des encarts

La renormalisation

Les équations de la théorie quantique des champs engendrent des infinis et des divergences indésirables.
J. Schwinger, R. Feynman, S. Tomonaga et F. Dyson résolurent partiellement le problème aux alentours des années 50.
La théorie de la renormalisation permet d'escamoter par un tour de passe-passe mathématique les infinis qui pénalisaient la théorie.
Par exemple, un électron ne peut s'imaginer sans son champ électromagnétique. L'idée est de dissocier l'électron de sa charge, d'attribuer au premier une masse infinie et à la seconde une énergie infinie, et de s'arranger pour que les contributions réciproques se compensent afin de donner un résultat fini qui coïncide

avec la quantité observable.

Le test de primalité de Lucas-Lehmer

$2^p - 1$ est un nombre premier si et seulement si $2^p - 1$ divise $L(p-1)$, où $L(n)$ est la suite définie par $L(1) = 4$ et $L(n+1) = L(n)^2 - 2$ pour $n > 1$.
On a successivement, $L(1) = 4, L(2) = 14, L(3) = 194, L(4) = 37\ 634$. Ainsi, $15 = 2^4 - 1$ n'est pas premier car 15 ne divise pas $L(3) = 194$. En revanche, $31 = 2^5 - 1$ est premier car 31 divise $L(4) = 37\ 634 = 31 \times 1214$.

Ordinateur : le meilleur et le pire

Tangente : Quelle est donc la place de l'ordinateur dans la recherche mathématique ? Dans quelle mesure l'Internet a-t-il accéléré la vitesse de la transmission de l'information ? La masse des informations ne devient-elle pas démentielle ?

Alain Connes : Mon opinion sur l'ordinateur est contrastée. Un ordinateur peut être un excellent assistant, mais il ne faut pas lui donner plus d'importance que cela.
Oui, pour la circulation des idées et des informations. Avoir accès de manière instantanée aux dernières recherches, pouvoir lire des abstracts, consulter des encyclopédies électroniques vous donnant de manière ramassée les bonnes définitions et les théorèmes essentiels, facilitent grandement la vie d'un chercheur et représentent un gain de temps formidable. Alors, tout cela représente une masse d'informations considérable, mais les outils existent pour la digérer. Les choses se simplifient avec le temps. On a coutume de dire que les derniers mathématiciens universels, à pouvoir embrasser l'ensemble des connaissances, furent Hilbert et Poincaré. Ce n'est que partiellement vrai.
En dehors de cela, l'ordinateur est, pour moi, essentiellement nocif. Faites l'expérience. Arpentez les couloirs d'un centre de recherche. Et que voyez-vous dans les bureaux ? Des chercheurs vissés à leur machine, consultant leur courrier électronique ou tapant un article. Ce n'est pas du boulot de chercheur. Autrefois, avant l'avènement de l'ordinateur, quand on pénétrait dans un bureau, on se cognait à un matheux allongé sur le plancher, les yeux fixés au plafond, ruminant une idée ou en quête d'une illumination. “Sécher” devant sa feuille blanche est indispensable. L'ordinateur propose une échappatoire nuisible. On devrait imposer chaque mois une semaine sans e-mails.
Il existe un argument plus subtil à opposer à l'engouement pour l'ordinateur. La puissance calculatoire de la machine nous prive du sentiment, de l'intuition que peuvent apporter de longs calculs faits à la main. Je vous ai raconté qu'avec un collègue, chacun de son côté, nous nous sommes lancés dans une longue suite de calculs. On a obtenu le même résultat. Résultat décevant par ailleurs. On était parvenu à une certaine somme de trente-six termes. Si on changeait le signe de huit termes, on tombait sur un cocycle. Résultat qui lui était pertinent. On a pensé à une erreur. On a recommencé nos calculs, en pure perte. En se concentrant sur les détails du calcul, on a constaté l'oubli d'une donnée qui contribuait de manière négative à deux fois l'apport des huit termes. On retombait ainsi sur

nos pieds. A travers des détails de mille petits calculs, on a vu poindre l'esprit d'une algèbre de Hopf. La machine nous aurait donné un résultat brut, inexploitable, nous privant ainsi d'un résultat intéressant.
D'ailleurs vous pouvez constater qu'il n'y a pas d'ordinateur dans mon bureau.

Une réalité archaïque précède les concepts

Alain Connes

“La plupart des énoncés vrais sont non démontrables”.

Bien que tous les mathématiciens ne le reconnaissent pas, il existe une “réalité mathématique archaïque”. Comme la réalité du monde extérieur, celle-ci est a priori non organisée, mais résiste à l’exploration et révèle une cohérence. Non matérielle, elle se situe hors de l’espace-temps. C’est le credo d’Alain Connes, qui nous entraîne aussi dans une réflexion sur le sens profond du théorème de Gödel.

Alain Connes, né en 1947, professeur à l’IHES, occupe depuis 1984 la chaire d’analyse et de géométrie au Collège de France. Ses recherches portent notamment sur la géométrie non commutative. Pour ses travaux, il a reçu à 35 ans la médaille Fields (1982), le prix de La fondation Clay (2000), Le prix Crafoord (2001) et La médaille d’or du CNRS (2004). Certains de ses derniers articles traitent de la théorie de Yang et Mills, au centre de l’un des sept problèmes de La Fondation Clay. Alain Connes a publié en 2000 Triangle de pensées avec André Lichnerowicz et Marcel-Paul Schützenberger (Éditions Odile Jacob).

La Recherche : Dans votre livre Triangle de pensées, André Lichnerowicz dit : “Les mathématiciens ont appris que l’être des choses sur lesquelles ils raisonnent n’était d’aucune importance pour eux.” Il dit aussi : “Dans les mathématiques, l’être avec un grand E est mis entre parenthèses.” Vous vous insurgez contre ce point de vue. Pourquoi ?

Alain Connes : Quelle est la nature de la réalité mathématique ? En simplifiant beaucoup, cette question génère deux types d’attitude.

Celle de Lichnerowicz est en gros la position formaliste, ou structuraliste. Elle consiste à considérer les mathématiques comme un système de déductions logiques obtenues à l’intérieur d’un langage, à partir d’axiomes. Cette position conduit d’une certaine manière à nier le caractère ontologique[*] de la réalité mathématique. La question de la signification des objets mathématiques est évacuée. A l’opposé, mon attitude et celle d’autres mathématiciens consistent à dire qu’il existe une réalité mathématique qui précède l’élaboration des concepts.

La Recherche : Vous soutenez qu’il existe une “réalité mathématique archaïque”. Qu’entendez-vous par là ?

Alain Connes : Je fais une distinction essentielle entre l’objet de l’étude, par exemple la suite des nombres premiers, et les concepts que l’esprit humain

Les Dossiers de La Recherche, août-octobre 2005, n° 20, © La Recherche, Mathématiques, nouveaux défis et vieux casse-têtes. Propos recueillis par Olivier Postel-Vinay

∗. Le mot ontologique vient du grec ontos , “être” : qui concerne l’être des choses.

élabore pour comprendre cette suite. La réalité mathématique archaïque, c'est l'objet de l'étude. De même que la réalité extérieure perçue par les sens, elle est a priori inorganisée. Elle se distingue radicalement des concepts que l'esprit humain lentement élabore pour la comprendre, pour voir ce qu'elle a d'organisé.

La Recherche : En quoi cette réalité archaïque résiste-t-elle au formalisme ?

Alain Connes : Les structuralistes n'ont jamais vraiment digéré le théorème de Gödel[†]. Pour eux, ce théorème dit simplement que dans un système donné il y aura toujours une proposition indécidable, dont on ne peut pas savoir si elle est vraie ou fausse. Or le théorème de Gödel est bien plus méchant que cela. Il dit qu'il y a aura toujours une proposition vraie qui ne sera pas démontrable dans le système. Ce qui est beaucoup plus dérangeant.

La Recherche : Lichnerowicz dit : "Je ne sais pas ce qu'est une proposition vraie non démontrable." Apparemment, vous n'êtes pas de cet avis ?

Alain Connes : C'est un point relativement délicat. On n'a aucune chance de comprendre le sens de cette assertion tant qu'on ne fait pas certaines distinctions de nature qualitative entre les propositions mathématiques. Il faut ainsi distinguer entre une proposition de nature universelle et une proposition de nature existentielle. Tenons-nous en à l'arithmétique. Voici un exemple de proposition universelle : tout nombre entier n pair plus grand que 6 s'écrit comme somme de deux nombres premiers. Pourquoi est-ce une proposition de nature universelle ? Parce que je dis "quel que soit n", après quoi je donne un énoncé qui est décidable : si je prends le nombre 100, on va pouvoir décider si oui ou non il est la somme de deux nombres premiers.

Or un théorème fondamental de la logique est que, si une proposition universelle est démontrable, elle est vraie. Mais la réciproque est fausse. Il existe des propositions universelles qui sont vraies mais qui ne sont pas démontrables. Pour le comprendre, faisons une analogie avec la réalité d'un tribunal. D'une certaine manière, quand on fait des raisonnements logiques à l'intérieur d'un système d'axiomes, c'est comme si l'on était au tribunal. Il y a des pièces à conviction : ce sont les axiomes. La déduction logique s'opère à partir de ces axiomes. Si certains faits sont démontrables à l'intérieur du tribunal, ils sont automatiquement vrais. Mais l'inverse n'est pas vrai. Il se peut qu'un fait soit vrai sans être démontrable à l'intérieur du tribunal.

La Recherche : Donnez un exemple de proposition mathématique existentielle.

Alain Connes : Il existe un entier n qui est pair et n'est pas, la somme de deux nombres premiers. C'est l'inverse d'une proposition universelle. Or un théorème dit : si une proposition existentielle est vraie, elle est démontrable. Mais la réciproque est fausse. C'est la première chose que nous apprend le théorème de

†. Le logicien autrichien Kurt Gödel a démontré son célèbre théorème en 1931.

Gödel : il faut distinguer entre ce qui est démontrable au tribunal, dans le système déductif dans lequel on travaille, et la réalité.

La Recherche : Pouvez-vous donner un exemple parlant de proposition vraie non démontrable ?

Alain Connes : La fable du lièvre et de la tortue. Nous nous plaçons à l'intérieur d'un certain système d'axiomes, en l'occurrence les axiomes de Peano, ceux qui gouvernent l'arithmétique la plus simple. On prend un nombre au hasard, par exemple 9, et on l'écrit en base 2, c'est-à-dire en n'utilisant que des puissances de 2. Ainsi, 9 c'est $8 + 1$, or 8, c'est 2^3, donc $9 = 2^3 + 1$. On écrit aussi les 3 en base 2 : soit $2 + 1$. Donc $2^3 + 1$ s'écrit $2^{2+1} + 1$. Le lièvre arrive, et remplace tous les 2 par des 3. $2^{2+1} + 1$ devient $3^{3+1} + 1$, soit $81 + 1$. Le nombre obtenu est beaucoup plus grand, on a l'impression que le lièvre fait des bonds immenses. Puis la tortue arrive, et soustrait 1. Cela donne 81. Le lièvre revient, réécrit le nombre obtenu en base 3, donc 3^{3+1}, et remplace tous les 3 par des 4. Cela donne 4^{4+1}. La tortue arrive, elle soustrait 1. Le lièvre revient, réécrit le résultat en base 4, et remplace tous les 4 par des 5. Le résultat, vraiment étonnant, est que, quel que soit le nombre n, c'est la tortue qui gagne : bien qu'elle ne fasse que soustraire 1 chaque fois, au bout d'un nombre fini d'étapes on obtient zéro. Or cet énoncé est vrai, mais n'est pas démontrable dans l'axiomatique de Peano. Pour expliquer pourquoi, il faut sortir de l'axiomatique de Peano ; sortir de l'enceinte du tribunal. Ce qu'il faut bien comprendre, c'est qu'un tel énoncé n'a rien d'exceptionnel. Au contraire, on sait maintenant que la plupart des énoncés vrais sont non démontrables.

La Recherche : Voilà une forte assertion ! Qu'est-ce qui permet de l'avancer ?

Alain Connes : On peut l'expliquer par une analogie avec la notion de complexité d'un système. Voici un exemple permettant de saisir ce que signifie la complexité d'un système. Je veux transmettre en Australie deux types de renseignements : 1) les heures de lever et de coucher du soleil à Paris depuis dix ans ; 2) les résultats du Loto à Paris tous les jours depuis dix ans. Pour transmettre le premier résultat, il me suffit d'une petite formule avec les sinus et les cosinus. Tandis que pour transmettre les résultats du Loto depuis dix ans, il n'y a pas d'autre moyen que d'envoyer la liste. Personne ne trouvera jamais de formule pour simplifier la tâche. La complexité d'une information, c'est la longueur en bits du plus petit programme informatique qui la génère. Une suite comme celle des heures de lever et de coucher du Soleil est plus simple qu'une suite comme celle des résultats du Loto. Or si l'on considère l'ensemble de toutes les suites ayant un nombre donné de chiffres, on peut compter le nombre de ces suites et l'on démontre que les suites de complexité maximale font presque la totalité de l'ensemble. Le nombre de suites ayant une expression plus simple est négligeable.

La Recherche : Quel est le rapport avec une proposition vraie non démontrable ?

Alain Connes : On s'aperçoit que les énoncés qui sont démontrables dans un système formel sont comme les suites dont la complexité est réduite. Du coup, la plupart des énoncés vrais ne sont pas démontrables. Les propositions démontrables sont une conséquence relativement courte du système d'axiomes que l'on a au départ.

La Recherche : Revenons à la notion de réalité mathématique archaïque. Pourrait-on utiliser un autre mot qu'"archaïque" ?

Alain Connes : Oui, on pourrait par exemple parler de réalité mathématique primitive. L'essentiel est de comprendre qu'elle précède l'exploration qu'on va en faire - un peu comme la réalité extérieure. C'est la position platonicienne, renouvelée par le théorème de Gödel. A partir du moment où l'on comprend que la position structuraliste, formaliste, n'est pas tenable, il faut bien qu'on se rattache à une certaine réalité. La meilleure illustration de cette réalité, c'est l'arithmétique. Or un point saillant de la démonstration de Gödel est la possibilité de projeter tout raisonnement sur l'arithmétique.

La Recherche : Comment identifier les objets qui appartiennent à la réalité mathématique archaïque ?

Alain Connes : Chaque fois qu'on est devant une notion mathématique, il faut essayer d'analyser la portion qui fait référence à la réalité mathématique archaïque et la portion qui est conceptuelle. A ce sujet, il importe de saisir une autre distinction de nature qualitative, que je ne fais qu'évoquer dans le livre : l'inductif et le projectif. La démarche inductive laisse à chaque objet sa spécificité, son caractère unique ; la démarche projective opère sur des objets regroupés par classes. On le voit dans le langage courant. Le mot chaise désigne une classe, c'est un mot projectif ; Avignon désigne un lieu, c'est un mot inductif. Mais comme une notion mathématique, un mot n'est jamais entièrement inductif ou entièrement projectif, il est un peu l'un et un peu l'autre. De ce point de vue, la réalité mathématique archaïque apparaît de manière inductive, alors que les concepts, eux, découpent des classes. L'idéal se produit lorsqu'on a tellement bien découpé les classes qu'on se trouve devant un objet unique... que l'on connaît de manière à la fois inductive et projective.

La Recherche : Y-a-t-il des objets qui existent seulement de manière projective ?

Alain Connes : Les ultrafiltres[‡], par exemple. Jamais personne ne sera capable

‡. Dans la théorie des modèles, un ultrafiltre sur un ensemble non vide I est défini comme un ensemble D de sous-ensembles de I tel que :

1. l'ensemble vide n'appartient pas à D ;
2. si A, B sont en D, leur intersection l'est aussi ;
3. si A est un sous-ensemble de B, et si A est en D, alors B est en D ;
4. pour tout sous-ensemble A de I, soit A est en D soit I moins A est en D.

d'isoler un ultrafiltre. On sait qu'on ne peut nommer que des classes d'ultrafiltres. Lebesgue, qui a élaboré la théorie des fonctions mesurables, savait bien qu'on ne pourra jamais nommer une fonction non mesurable. C'est un objet chimérique, comme les ultrafiltres.

La Recherche : En quoi la réalité mathématique archaïque se distingue-t-elle de la réalité non mathématique ?

Alain Connes : Quoique non fondée principalement sur les cinq sens, la perception que nous avons de la réalité mathématique fait que celle-ci manifeste une résistance et une cohérence comparables à celles de la réalité extérieure. La différence essentielle, fondamentale, c'est qu'elle échappe à toute forme de localisation dans l'espace ou dans le temps. Si bien que lorsqu'on en dévoile ne serait-ce qu'une infime partie, on éprouve un sentiment d'éternité. Tous les mathématiciens le savent.

La Recherche : Qu'y a-t-il de moins objectif qu'un sentiment d'éternité ?

Alain Connes : Il y a là pourtant quelque chose d'objectif : une réalité non périssable. Une réalité dotée d'un aussi grand pouvoir de résistance que la réalité extérieure. Laquelle résiste aussi bien qu'un mur. Alors comment perçoit-on cette réalité ? Sans doute avec un sens distinct des autres sens, et plus élaboré. Nous sommes en présence d'une réalité et nous disposons d'un mode de perception de cette réalité.

La Recherche : Mais cette perception n'est-elle pas plutôt de l'ordre de l'intellect ?

Alain Connes : Toute perception passe par l'intellect. Ce qui me fait dire aussi qu'il existe un sens particulier au service de cette perception, c'est qu'il y a des mathématiciens qui, sans avoir reçu une éducation sophistiquée, ont une perception extraordinairement aiguë de cette réalité. Lichnerowicz lui-même fait observer que le mathématicien en action exerce un tel sens. Il concède : "si un mathématicien travaille, il réfléchit à un certain champ où, là, il y a des êtres mathématiques ; il finit par jouer avec eux, suffisamment pour les rendre familiers." Tous les mathématiciens sont d'accord là-dessus. C'est lorsqu'on leur demande de réfléchir à ce qu'ils font vraiment que les uns se disent formalistes, d'autres platoniciens.

La Recherche : En quoi les mathématiques ne sont-elles pas une discipline scientifique comme les autres ?

Alain Connes : Les autres sciences s'intéressent à l'organisation de la matière à diverses échelles. Comme les autres sciences, les mathématiques s'intéressent à l'organisation d'une réalité, sauf que celle-ci n'est pas matérielle.

La Recherche : Ce n'est pas une réalité matérielle, mais elle résiste comme la réalité extérieure, il y a ce mur auquel vous vous heurtez...

Alain Connes : Oui, bien sûr. De plus, cette réalité est une source inépuisable d'informations - comme le prouve le théorème de Gödel. De ce point de vue, je crois que la réalité mathématique nous réserve encore de grandes surprises. Je suis prêt à parier qu'on s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique.

La Recherche : Voilà une proposition ambitieuse !

Alain Connes : Oui. Je l'ai déjà plus ou moins évoquée à la fin de mon livre avec Changeux. Je crois qu'un des critères d'une vraie compréhension du monde physique extérieur, c'est notre capacité de comprendre sa position à l'intérieur du monde mathématique. On en est loin encore. Mais les indices abondent. Ainsi le tableau périodique des éléments. Il a été déduit par Mendeleïev à partir des résultats expérimentaux de la chimie, mais quand on comprend qu'il résulte en fait de mathématiques extrêmement simples, c'est impressionnant...

La Recherche : Là vous retournez aux racines du platonisme le plus profond !

Alain Connes : Tout à fait.

La Recherche : Voulez-vous dire que le monde des idéaux mathématiques précède la réalité physique ?

Alain Connes : Absolument. C'est une position extrême.

La Recherche : Qu'est-ce qui vous fait penser que cette idée va faire son chemin ?

Alain Connes : On ne cesse de progresser vers une simplification de la compréhension du monde extérieur et des lois de la physique. Je sais bien qu'il ne faut pas non plus être trop simplificateur, que des lois très simples comme les équations qui gouvernent le modèle standard du monde physique peuvent avoir des conséquences extrêmement difficiles à appréhender. Et que l'on ne peut rendre compte de la complexité des phénomènes observables qu'au prix de calculs pratiquement infaisables. Mais fondamentalement je pense qu'on ne peut pas du tout exclure la possibilité qu'en fin de compte les lois fondamentales soient incroyablement simples, bien plus simples que tout ce qu'on peut imaginer aujourd'hui.

La Recherche : Des lois très simples..., ce qui n'est pas incompatible avec l'idée du caractère inépuisable des deux types de réalité, physique et mathématique ?

Alain Connes : Le fait que tout repose en fin de compte sur une structure très simple n'est pas incompatible avec le caractère inépuisable de l'information contenue tant dans la physique que dans les mathématiques.

La Recherche : Une structure très simple, de nature mathématique ?

Alain Connes : Oui. Les grandes découvertes de la physique en témoignent. Les lois de Newton, la relativité expliquent des phénomènes extrêmement complexes avec des lois d'une simplicité désarmante. Des lois de nature mathématique, qui exploitent des outils trouvés par les mathématiciens.

La Recherche : Dans votre livre, Schützenberger dit que pour lui, le problème de l'efficacité des mathématiques est un problème non résolu. Etes-vous moins de cet avis ?

Alain Connes : Ce qui est vraiment surprenant c'est que l'on arrive à comprendre des pans entiers de la réalité extérieure grâce aux mathématiques développées pour leur logique interne. Un des exemples les plus merveilleux est la découverte de la géométrie non euclidienne, qui au départ était une réponse au problème posé par l'axiome de l'unique parallèle d'Euclide. Cette géométrie qui à l'origine n'était qu'un contre-exemple un peu ésotérique a engendré à travers la géométrie de Riemann, puis la relativité générale d'Einstein le meilleur modèle actuel de l'espace-temps. Lequel est testé avec une précision extraordinaire dans les pulsars binaires et a permis d'affiner le fonctionnement du système de positionnement GPS. Ce passage de la réflexion logique autour des axiomes d'Euclide à une application pratique est typique de la subtilité et de la richesse des relations entre physique et mathématiques.

Tintin, les maths et les extraterrestres
Alain Connes

Gai savoir. L'éminent mathématicien publie "Le spectre d'Atacama" (Odile Jacob). Une enquête captivante sur les énigmes de la science.

Propos recueillis par Sophie Pujas

C'est l'un des plus grands esprits mathématiques de notre temps. Professeur au Collège de France, où il est titulaire de la chaire Analyse et géométrie, il est membre de l'Académie nationale des sciences américaine et a reçu la médaille Fields en 1982, ainsi que la médaille d'or du CNRS en 2004. Mais Alain Connes se révèle aussi un lecteur passionné de Jules Verne et un tintinophile ; il évoque avec enthousiasme la possibilité de communiquer avec d'autres formes d'intelligence présentes dans l'Univers - via les mathématiques, bien sûr ! Cette érudition tous azimuts fait le sel du "Spectre d'Atacama", roman qu'il a écrit avec son épouse, Danye Chéreau, et son ancien directeur de thèse, Jacques Dixmier. On y croise Armand, un mathématicien qui sera amené à résoudre l'énigme posée par des spectres mystérieux captés par l'observatoire d'Alma, dans le désert d'Atacama, au Chili. Et si les maths devenaient une aventure ?

Le Point : Pourquoi passer par un roman d'aventures pour faire partager au lecteur des concepts mathématiques complexes ?

Alain Connes : Nous voulions montrer l'aspect des mathématiques qui appartient au rêve, au-delà de la dimension dogmatique qu'on leur prête parfois exclusivement. Ce n'est pas un livre difficile, il ne contient aucune formule. Nous avions envie de proposer une initiation, de faire passer un message scientifique et d'expliquer ce que signifie penser juste en mathématiques, mais à travers des aventures qui permettent plusieurs niveaux de lecture. Tintin et "Le secret de *La Licorne*" ne sont pas loin, Jules Verne non plus ! Nous pensons d'ailleurs avoir découvert un personnage qui a inspiré Hergé : l'aviateur allemand Günther Plüschow, dont nous reproduisons une photo où il est accompagné d'un chien qui ressemble beaucoup à Milou. Fait prisonnier pendant la première Guerre mondiale, il s'est échappé d'Angleterre en se cachant dans un canot de sauvetage, à la façon de Tournesol dans "Le trésor de Rackham le Rouge" !

Comment définir la musique des formes, concept dont vous faites le cœur de l'intrigue ?

Un problème mathématique passionnant consiste à se demander quels sont les invariants d'une forme donnée. Or un invariant essentiel, c'est que chaque objet possède une gamme musicale qui lui est propre et qui se traduit par un

Magazine Le Point, 08.02.2018, 2371, ©.

spectre. Pour connaître la forme de cet objet, il faut connaître cette gamme, mais aussi ses accords. Ainsi, comment pouvons-nous transmettre notre position dans l'Univers de manière invariante ? C'est une question qui s'est posée notamment quand nous avons envoyé des sondes dans l'espace.

Vous suggérez que les spectres seraient la voie pour communiquer avec une intelligence extraterrestre. Vous y croyez vraiment ?

Mais bien sûr, j'en suis convaincu ! La vraie communication, ce n'est pas le langage verbal. Les maths sont un langage, le seul qui soit universel, et pour moi, c'est le grand argument en leur faveur ! La merveille, c'est que les maths nous permettent d'expliquer les phénomènes physiques, de comprendre et de calculer les spectres des corps chimiques, par exemple. Cette constatation n'est probablement pas le seul fait des Terriens, mais existe sûrement ailleurs, dans d'autres civilisations, avec lesquelles les spectres seraient un moyen de communiquer.

Quel rôle joue l'intuition dans les découvertes scientifiques ?

Immense. Il me paraît très important de dire que, dans la recherche scientifique, il faut parfois saisir les opportunités en obéissant à son intuition. Combien de fois dans ma vie de chercheur me suis-je laissé guider par des coïncidences qui ne sont pas rationnelles ? Il serait illusoire de vouloir les rationnaliser. Un problème qui n'a pas été résolu pendant des années a souvent besoin d'un esprit hétérodoxe, parce qu'il faut se débarrasser d'une foule de présupposés, avoir parfois recours à une inspiration d'une nature plus poétique et difficile à cerner.

Vous vous méfiez des nouveaux outils informatiques. Ne permettent-ils pas de seconder utilement la recherche mathématique ?

Bien sûr, les machines sont efficaces, et je m'en sers moi-même tous les jours. Mais il faut résister à la tentation de se laisser complètement grignoter par les machines et l'intelligence artificielle. Il est vital de comprendre que ce qui fait la spécificité de l'homme, c'est aussi la création de concepts. C'est ce qui fonde nos civilisations - il s'agit donc de sauver nos âmes en privilégiant ce qui nous distingue des machines ! Ce qui m'effraie, c'est l'abandon de notre individualité. Les gens risquent de devenir des cellules dans un organisme très compliqué dont ils ne contrôleront plus la conscience. Prenez l'apprentissage profond : il fonctionne, mais on ne comprend pas pourquoi. C'est grave ! Nous troquons notre capacité à comprendre pour quelque chose d'efficace, mais dont nous ne maîtrisons pas les tenants et les aboutissants. Dès le premier chapitre, nous incitons le lecteur à comprendre par lui-même à travers un petit problème. Pour saisir les maths, il faut être actif. C'est comme pour la musique : on ne peut se prétendre musicien si on ne s'est pas colleté à un instrument.

Comment est née votre passion pour les maths ?

Au début, grâce au plaisir infini que j'avais à trouver le résultat de problèmes mathématiques qu'enfant mon père me faisait résoudre. J'aimais cette sécurité offerte par quelque chose qui vous appartient entièrement et qui, au lieu de dépendre d'un tas de connaissances extérieures, est fermé sur soi-même. Il suffisait de connaître sa table de multiplication pour pouvoir faire un tas de choses ! Je pense qu'on devient mathématicien à partir du moment où on parvient à penser par soi-même, à aboutir à des conclusions qui ne sont pas celles des autres et à en être sûr par la réflexion.

Cette science continue de vous émerveiller ?

Chaque jour ! Chercher la solution d'un problème mathématique, c'est un peu comme pratiquer l'escalade : il faut se maintenir en forme. Il faut être constamment capable d'essayer de résoudre de nouveaux problèmes, et j'adore qu'on m'en pose. C'est l'hygiène du mathématicien.

Cette dimension est-elle suffisamment enseignée à l'école ?

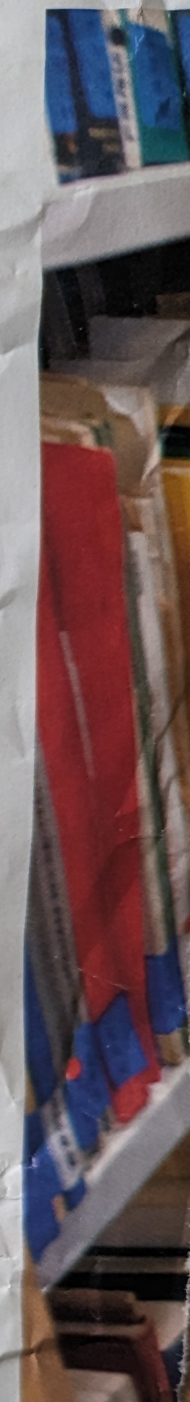
Je n'en suis pas sûr. Prenez un enfant de 4 ou 5 ans face à une difficulté, par exemple l'assemblage de deux objets. Vous pouvez avoir deux attitudes : le faire à sa place ou le laisser chercher. C'est cette dernière attitude qui est la bonne. Car on fait beaucoup plus de progrès si on résout par soi-même un problème en passant par l'erreur et le tâtonnement. Or de plus en plus souvent l'enseignement tend à donner des recettes, parce que c'est plus facile. Mais c'est quand on n'arrive pas à résoudre un problème qu'on fait des progrès, sinon cela signifie que c'était trop facile ! C'est un enjeu de société fondamental, car il s'agit de former les esprits.

Légende de la première photo :
Passeur. Alain Connes dans son bureau du Collège de France, à Paris. Dans son livre, le chercheur incite le lecteur à comprendre par lui-même à travers un petit problème.

Légendes de la seconde photo :
1) **"Chercher la solution d'un problème, c'est comme pratiquer l'escalade : il faut se maintenir en forme. C'est l'hygiène du mathématicien."**

2) **Spectres.** Le réseau d'antennes millimétriques de l'Atacama, Alma, le radiotélescope le plus puissant du monde, situé à San Pedro, au Chili. Dans son nouvel ouvrage, "Le spectre d'Atacama", Alain Connes imagine que les spectres seraient un moyen de communiquer avec une intelligence extraterrestre.

référence : "Le spectre d'Atacama", d'Alain Connes, Danye Chéreau et Jacques Dixmier (Odile Jacob, 320 p., 21 90).



Alain Connes

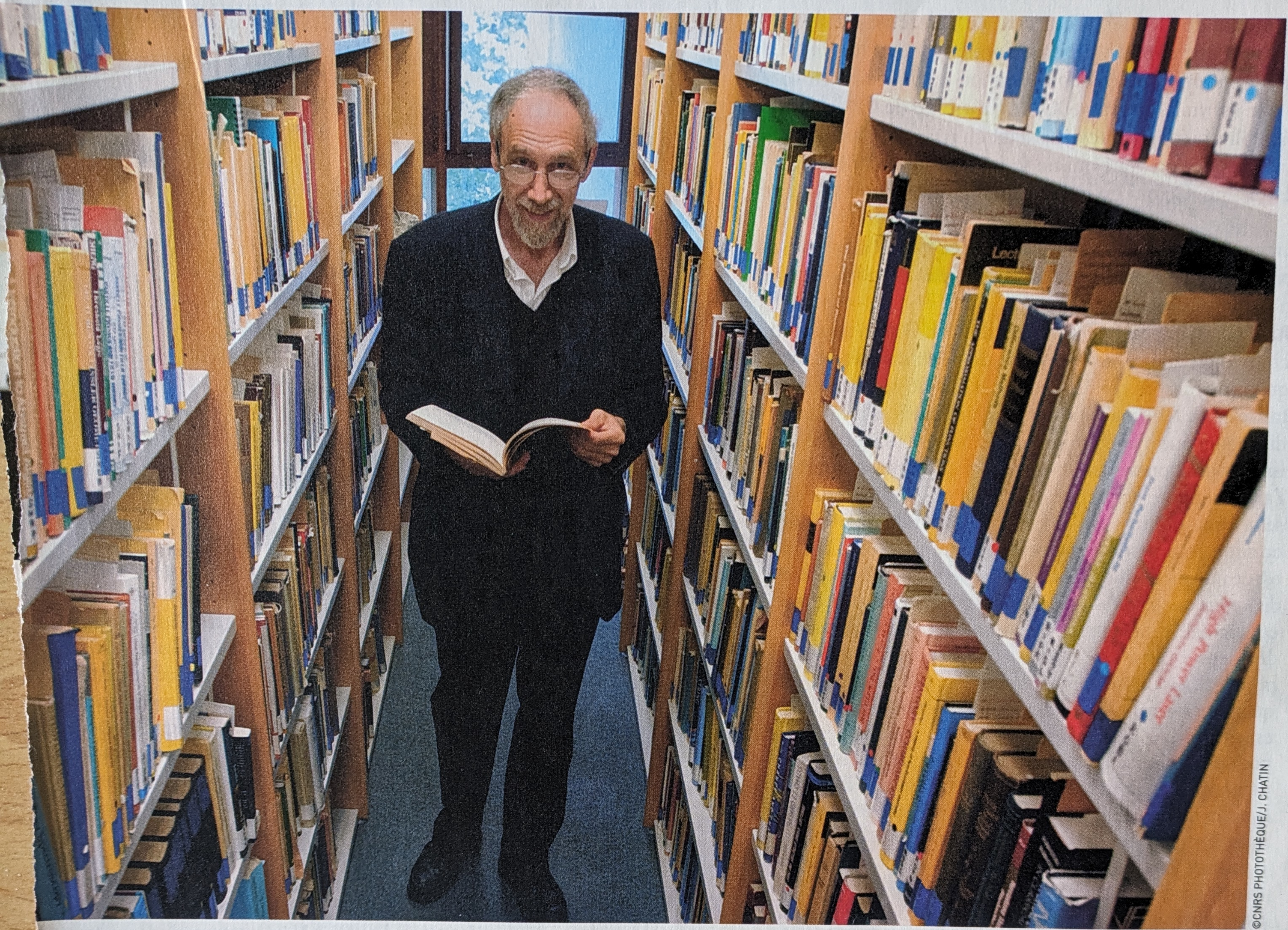
Une réalité mathématique archaïque précède les concepts

« La plupart des énoncés vrais sont non démontrables »

Bien que tous les mathématiciens ne le reconnaissent pas, il existe une « réalité mathématique archaïque ». Comme la réalité du monde extérieur, celle-ci est a priori non organisée, mais résiste à l'exploration et révèle une cohérence. Non matérielle, elle se situe hors de l'espace-temps. C'est le credo d'Alain Connes, qui nous entraîne aussi dans une réflexion sur le sens profond du théorème de Gödel.

LA RECHERCHE. **Dans votre livre *Triangle de pensées*, André Lichnerowicz dit : « *Les mathématiciens ont appris que l'être des choses sur lesquelles ils raisonnent n'était d'aucune importance pour eux.* » Il dit aussi : « *Dans les mathématiques, l'Être avec un grand E est mis entre parenthèses.* » Vous vous insurgez contre ce point de vue. Pourquoi ?**

ALAIN CONNES. Quelle est la nature de la réalité mathématique ? En simplifiant beaucoup, cette question génère deux types d'attitude. Celle de Lichnerowicz est en gros la position formaliste, ou structuraliste. Elle consiste à considérer les mathématiques comme un système de déductions logiques obtenues à l'intérieur d'un langage, à partir d'axiomes. Cette position conduit d'une certaine manière à nier le caractère ontologique* de la réalité mathématique. La question de la significa tion des objets mathématiques est évacuée. À l'opposé mon attitude et celle d'autres mathématiciens consist



©CNRS PHOTOTHÈQUE/J. CHATIN

Alain Connes, né en 1947, professeur à l'IHES, occupe depuis 1984 la chaire d'analyse et de géométrie au Collège de France. Ses recherches portent notamment sur la géométrie non commutative. Pour ses travaux, il a reçu à 35 ans la médaille Fields (1992), le prix de la fondation Clay (2000), le prix Crafoord (2001) et la médaille d'or du CNRS (2004). Certains de ses derniers articles traitent de la théorie de Yang et Mills, au centre de l'un des sept problèmes de la fondation Clay. Alain Connes a publié en 2000 *Triangle de pensées* avec André Lichnerowicz et Marcel-Paul Schützenberger (Éditions Odile Jacob).

à dire qu'il existe une réalité mathématique qui précède l'élaboration des concepts.

Vous soutenez qu'il existe une « *réalité mathématique archaïque* ». qu'entendez-vous par là ?

A. C. Je fais une distinction essentielle entre l'objet de l'étude, par exemple la suite des nombres premiers, et les concepts que l'esprit humain élabore pour comprendre cette suite. La réalité mathématique archaïque, c'est l'objet de l'étude. De même que la réalité extérieure perçue par les sens, elle est *a priori* inorganisée. Elle se distingue radicalement des concepts que l'esprit humain lentement élabore pour la comprendre, pour voir ce qu'elle a d'organisé.

En quoi cette réalité archaïque résiste-t-elle au formalisme ?

A. C. Les structuralistes n'ont jamais vraiment digéré le ▷

théorème de Gödel*. Pour eux, ce théorème dit simplement que dans un système donné il y aura toujours une proposition indécidable, dont on ne peut pas savoir si elle est vraie ou fausse. Or le théorème de Gödel est bien plus méchant que cela. Il dit qu'il y a aura toujours une proposition vraie qui ne sera pas démontrable dans le système. Ce qui est beaucoup plus dérangeant.

Les énoncés qui sont démontrables dans un système formel sont comme les suites dont la complexité est réduite.

Lichnerowicz dit : « *Je ne sais pas ce qu'est une proposition vraie non démontrable.* » Apparemment, vous n'êtes pas de cet avis ?

A. C. C'est un point relativement délicat. On n'a aucune chance de comprendre le sens de cette assertion tant qu'on ne fait pas certaines distinctions de nature qualitative entre les propositions mathématiques. Il faut ainsi distinguer entre une proposition de nature universelle et une proposition de nature existentielle. Tenons-nous en à l'arithmétique. Voici un exemple de proposition universelle : tout nombre entier n pair plus grand que 6 s'écrit comme somme de deux nombres premiers. Pourquoi est-ce une proposition de nature universelle ? Parce que je dis « *quel que soit n* », après quoi je donne un énoncé qui est décidable : si je prends le nombre 100, on va pouvoir décider si oui ou non il est la somme de deux nombres premiers. Or un théorème fondamental de la logique est que, si une proposition universelle est démontrable, elle est vraie. Mais la réciproque est fausse. Il existe des propositions universelles qui sont vraies mais qui ne sont pas démontrables. Pour le comprendre, faisons une analogie avec la réalité d'un tribunal. D'une certaine manière, quand on fait des raisonnements logiques à l'intérieur d'un système d'axiomes, c'est comme si l'on était au tribunal. Il y a des pièces à conviction : ce sont les axiomes. La déduction logique s'opère à partir de ces axiomes. Si certains faits sont démontrables à l'intérieur du tribunal, ils sont automatiquement vrais. Mais l'inverse n'est pas vrai. Il se peut qu'un fait soit vrai sans être démontrable à l'intérieur du tribunal.

Donnez un exemple de proposition mathématique existentielle.

A. C. Il existe un entier n qui est pair et n'est pas la somme de deux nombres premiers. C'est l'inverse d'une proposition universelle. Or un théorème dit : si une proposition existentielle est vraie, elle est démontrable. Mais la réciproque est fausse. C'est la première chose que nous apprend le théorème de Gödel : il faut distinguer entre ce qui est démontrable au tribunal, dans le système déductif dans lequel on travaille, et la réalité.

Pouvez-vous donner un exemple parlant de proposition vraie non démontrable ?

A. C. La fable du lièvre et de la tortue. Nous nous plaçons à l'intérieur d'un certain système d'axiomes, en l'occurrence les axiomes de Peano, ceux qui gouvernent l'arithmétique la plus simple. On prend un nombre au hasard, par exemple 9, et on l'écrit en base 2, c'est-à-dire en n'utilisant que des puissances de 2. Ainsi, 9 c'est 8 + 1, or 8, c'est 2^3, donc $9 = 2^3 + 1$. On écrit aussi les 3 en base 2 : soit 2 + 1. Donc $2^3 + 1$ s'écrit $2^{(2+1)} + 1$. Le lièvre arrive, et remplace tous les 2 par des 3. $2^{(2+1)} + 1$ devient $3^{(3+1)} + 1$, soit 81 + 1. Le nombre obtenu est beaucoup plus grand, on a l'impression que le lièvre fait des bonds immenses. Puis la tortue arrive, et soustrait 1. Cela donne 81. Le lièvre revient, réécrit le nombre obtenu en base 3, donc $3^{(3+1)}$, et remplace tous les 3 par des 4. Cela donne $4^{(4+1)}$. La tortue arrive, elle soustrait 1. Le lièvre revient, réécrit le résultat en base 4, et remplace tous les 4 par des 5. Le résultat, vraiment étonnant, est que, quel que soit le nombre n, c'est la tortue qui gagne : bien qu'elle ne fasse que soustraire 1 chaque fois, au bout d'un nombre fini d'étapes on obtient zéro. Or cet énoncé est vrai, mais n'est pas démontrable dans l'axiomatique de Peano. Pour expliquer pourquoi, il faut sortir de l'axiomatique de Peano ; sortir de l'enceinte du tribunal. Ce qu'il faut bien comprendre, c'est qu'un tel énoncé n'a rien d'exceptionnel. Au contraire, on sait maintenant que la plupart des énoncés vrais sont non démontrables.

Voilà une forte assertion ! Qu'est-ce qui permet de l'avancer ?

A. C. On peut l'expliquer par une analogie avec la notion de complexité d'un système. Voici un exemple permettant de saisir ce que signifie la complexité d'un système.
Je veux transmettre en Australie deux types de renseignement : 1) les heures de lever et de coucher du soleil à Paris depuis dix ans ; 2) les résultats du Loto à Paris tous les jours depuis dix ans. Pour transmettre le premier résultat, il me suffit d'une petite formule avec les sinus et les cosinus. Tandis que pour transmettre les résultats du Loto depuis dix ans, il n'y a pas d'autre moyen que d'envoyer la liste. Personne ne trouvera jamais de formule pour simplifier la tâche. La complexité d'une information, c'est la longueur en bits du plus petit programme informatique qui la génère. Une suite comme celle des heures de lever et de coucher du soleil est plus simple qu'une suite comme celle des résultats du Loto. Or si l'on considère l'ensemble de toutes les suites ayant un nombre donné de chiffres, on peut compter le nombre de ces suites et l'on démontre que les suites de complexité maximale font presque la totalité de l'ensemble. Le nombre de suites ayant une expression plus simple est négligeable.

*Le mot **ontologique** vient du grec *ontos*, « être » : qui concerne l'être des choses.

* Le logicien autrichien **Kurt Gödel** a démontré son célèbre théorème en 1931.

ALAIN CONNES lors de la remise de la médaille d'or du CNRS en 2004.
©HALEY/SIPA

Quel est le rapport avec une proposition vraie non démontrable ?

A. C. On s'aperçoit que les énoncés qui sont démontrables dans un système formel sont comme les suites dont la complexité est réduite.
Du coup, la plupart des énoncés vrais ne sont pas démontrables. Les propositions démontrables sont une conséquence relativement courte du système d'axiomes que l'on a au départ.

Revenons à la notion de réalité mathématique archaïque. Pourrait-on utiliser un autre mot qu'*« archaïque »* ?

A. C. Oui, on pourrait par exemple parler de réalité mathématique primitive. L'essentiel est de comprendre qu'elle précède l'exploration qu'on va en faire — un peu comme la réalité extérieure. C'est la position platonicienne, renouvelée par le théorème de Gödel.
À partir du moment où l'on comprend que la position structuraliste, formaliste, n'est pas tenable, il faut bien qu'on se rattache à une certaine réalité. La meilleure illustration de cette réalité, c'est l'arithmétique. Or un point saillant de la démonstration de Gödel est la possibilité de projeter tout raisonnement sur l'arithmétique.

Comment identifier les objets qui appartiennent à la réalité mathématique archaïque ?

A. C. Chaque fois qu'on est devant une notion mathématique, il faut essayer d'analyser la portion qui fait référence à la réalité mathématique archaïque et la portion qui est conceptuelle. À ce sujet, il importe de saisir une autre distinction de nature qualitative, que je ne fais qu'évoquer dans le livre : l'inductif et le projectif. La démarche inductive laisse à chaque objet sa spécificité, son caractère unique ; la démarche projective opère sur des objets regroupés par classes. On le voit dans le langage courant. Le mot *chaise* désigne une classe, c'est un mot projectif ; *Avignon* désigne un lieu, c'est un mot inductif. Mais comme une notion mathématique, un mot n'est jamais entièrement inductif ou entièrement projectif, il est un peu l'un et un peu l'autre. De ce point de vue, la réalité mathématique archaïque apparaît de manière inductive, alors que les concepts, eux, découpent des classes. L'idéal se produit lorsqu'on a tellement bien découpé les classes qu'on se trouve devant un objet unique… que l'on connaît de manière à la fois inductive et projective.

Y a-t-il des objets qui existent seulement de manière projective ?

A. C. Les ultrafiltres*, par exemple. Jamais personne ne sera capable d'isoler un ultrafiltre. On sait qu'on ne peut nommer que des classes d'ultrafiltres. Lebesgue, qui a élaboré la théorie des fonctions mesurables, savait bien qu'on ne pourra jamais nommer une fonction non mesurable. C'est un objet chimérique, comme les ultrafiltres.

En quoi la réalité mathématique archaïque se distingue-t-elle de la réalité non mathématique ?

A. C. Quoique non fondée principalement sur les cinq sens, la perception que nous avons de la réalité mathématique fait que celle-ci manifeste une résistance et une cohérence comparables à celles de la réalité extérieure. La différence essentielle, fondamentale, c'est qu'elle échappe à toute forme de localisation dans l'espace ou dans le temps. Si bien que lorsqu'on en dévoile ne serait-ce qu'une infime partie, on éprouve un sentiment d'éternité. Tous les mathématiciens le savent.

Qu'y a-t-il de moins objectif qu'un sentiment d'éternité ?

A. C. Il y a là pourtant quelque chose d'objectif : une réalité non périssable. Une réalité dotée d'un aussi grand pouvoir de résistance que la réalité extérieure. Laquelle résiste aussi bien qu'un mur. Alors comment perçoit-on cette réalité ? Sans doute avec un sens distinct des autres sens, et plus élaboré. Nous sommes en présence d'une réalité et nous disposons d'un mode de perception de cette réalité.

Mais cette perception n'est-elle pas plutôt de l'ordre de l'intellect ?

A. C. Toute perception passe par l'intellect. Ce qui me fait dire aussi qu'il existe un sens particulier au service ▷

*Dans la théorie des modèles, un **ultrafiltre** sur un ensemble non vide I est défini comme un ensemble D de sous-ensembles de I tel que
1) l'ensemble vide n'appartient pas à D ;
2) si A, B sont en D, leur intersection l'est aussi ;
3) si A est un sous-ensemble de B, et si A est en D, alors B est en D ;
4) pour tout sous-ensemble A de I, soit A est en D soit I moins A est en D.

Je suis prêt à parier qu'on s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique.

de cette perception, c'est qu'il y a des mathématiciens qui, sans avoir reçu une éducation sophistiquée, ont une perception extraordinairement aiguë de cette réalité. Lichnerowicz lui-même fait observer que le mathématicien en action exerce un tel sens.
Il concède : « *Si un mathématicien travaille, il réfléchit à un certain champ où, là, il y a des êtres mathématiques ; il finit par jouer avec eux, suffisamment pour les rendre familiers.* » Tous les mathématiciens sont d'accord là-dessus. C'est lorsqu'on leur demande de réfléchir à ce qu'ils font vraiment que les uns se disent formalistes, d'autres platoniciens.

En quoi les mathématiques ne sont-elles pas une discipline scientifique comme les autres ?

A. C. Les autres sciences s'intéressent à l'organisation de la matière à diverses échelles. Comme les autres sciences, les mathématiques s'intéressent à l'organisation d'une réalité, sauf que celle-ci n'est pas matérielle.

Ce n'est pas une réalité matérielle, mais elle résiste comme la réalité extérieure, il y a ce mur auquel vous vous heurtez...

A. C. Oui, bien sûr. De plus, cette réalité est une source inépuisable d'informations — comme le prouve le théorème de Gödel. De ce point de vue, je crois que la réalité mathématique nous réserve encore de grandes surprises. Je suis prêt à parier qu'on s'apercevra un jour que la réalité matérielle se situe en fait à l'intérieur de la réalité mathématique.

Voilà une proposition ambitieuse !

A. C. Oui. Je l'ai déjà plus ou moins évoquée à la fin de mon livre avec Changeux[1]. Je crois qu'un des critères d'une vraie compréhension du monde physique extérieur, c'est notre capacité de comprendre sa position à l'intérieur du monde mathématique. On en est loin encore. Mais les indices abondent. Ainsi le tableau périodique des éléments. Il a été déduit par Mendeleïev à partir des résultats expérimentaux de la chimie, mais quand on comprend qu'il résulte en fait de mathématiques extrêmement simples, c'est impressionnant...

Là vous retournez aux racines du platonisme le plus profond !

A. C. Tout à fait.

Voulez-vous dire que le monde des idéaux mathématiques précède la réalité physique ?

[1] Jean-Pierre Changeux et Alain Connes, *Matière à pensées*, Odile Jacob, rééd. 2000.

Cet entretien a été publié une première fois dans le n° 332 de *La Recherche*.

A. C. Absolument. C'est une position extrême.

Qu'est-ce qui vous fait penser que cette idée va faire son chemin ?

A. C. On ne cesse de progresser vers une simplification de la compréhension du monde extérieur et des lois de la physique. Je sais bien qu'il ne faut pas non plus être trop simplificateur, que des lois très simples comme les équations qui gouvernent le modèle standard du monde physique peuvent avoir des conséquences extrêmement difficiles à appréhender. Et que l'on ne peut rendre compte de la complexité des phénomènes observables qu'au prix de calculs pratiquement infaisables. Mais fondamentalement je pense qu'on ne peut pas du tout exclure la possibilité qu'en fin de compte les lois fondamentales soient incroyablement simples, bien plus simples que tout ce qu'on peut imaginer aujourd'hui.

Des lois très simples..., ce qui n'est pas incompatible avec l'idée du caractère inépuisable des deux types de réalité, physique et mathématique ?

A. C. Le fait que tout repose en fin de compte sur une structure très simple n'est pas incompatible avec le caractère inépuisable de l'information contenue tant dans la physique que dans les mathématiques.

Une structure très simple, de nature mathématique ?

A. C. Oui. Les grandes découvertes de la physique en témoignent. Les lois de Newton, la relativité expliquent des phénomènes extrêmement complexes avec des lois d'une simplicité désarmante. Des lois de nature mathématique, qui exploitent des outils trouvés par les mathématiciens.

Dans votre livre *Triangle de pensées*, Schützenberger dit que pour lui, le problème de l'efficacité des mathématiques est un problème non résolu. Êtes-vous moins de cet avis ?

A. C. Ce qui est vraiment surprenant c'est que l'on arrive à comprendre des pans entiers de la réalité extérieure grâce aux mathématiques développées pour leur logique interne. Un des exemples les plus merveilleux est la découverte de la géométrie non euclidienne, qui au départ était une réponse au problème posé par l'axiome de l'unique parallèle d'Euclide. Cette géométrie qui à l'origine n'était qu'un contre-exemple un peu ésotérique a engendré à travers la géométrie de Riemann, puis la relativité générale d'Einstein le meilleur modèle actuel de l'espace-temps. Lequel est testé avec une précision extraordinaire dans les pulsars binaires et a permis d'affiner le fonctionnement du système de positionnement GPS. Ce passage de la réflexion logique autour des axiomes d'Euclide à une application pratique est typique de la subtilité et de la richesse des relations entre physique et mathématiques. ■

Propos recueillis par Olivier Postel-Vinay

Le point de vue d'Alain Connes [1]

Dès que j'ai su compter, j'ai été fasciné par la clarté des nombres, et ce sentiment de sérénité a été amplifié à mesure que j'ai assimilé de nouvelles connaissances. Je n'ai toutefois jamais eu l'impression que les mathématiques étaient d'accès facile : ma démarche est assez lente... mais pugnace. En recherche, les mathématiciens dits «rapides», s'ils voient et formulent très vite la difficulté centrale d'un problème, ne le résolvent pas plus rapidement que les autres : une chose est d'arriver au pied du mur, une autre de le sauter. Ce qui m'attriste un peu dans la sélection par les mathématiques, c'est qu'elle est fondée sur la rapidité à résoudre des problèmes.

J'ai toujours eu le désir de vérifier mon aptitude à surmonter les difficultés ; mes collègues tenaces me sont plus sympathiques et me semblent plus productifs que ceux qui, bien que très rapides, abandonnent trop vite devant l'obstacle. J'ai résolu à 28 ans un problème sur lequel j'ai travaillé un an à temps plein et trois ans à temps partiel.

Bien sûr, il faut faire des gammes pour maîtriser la technique mathématique d'un domaine. La semaine qui suit un mois de vacances est difficile : on se sent «sale», on souffre de courbatures comme un sédentaire après un effort physique. À l'inverse, quand on est immergé dans un sujet, on en maîtrise la technique et on est à l'aise avec sa conscience de mathématicien.

La vie à Draguignan, puis à Marseille, où j'étais lycéen, me laisse un souvenir de soleil. J'aimais le baby-foot et le rugby, et je lisais assez peu : j'avais des préoccupations normales mais non supérieures. L'atmosphère parisienne me surprit : à Marseille, je n'étais pas beaucoup tracassé par mes possibilités

1. extrait d'un Dossier intitulé Les mathématiciens d'un ancien magazine Pour la Science.

intellectuelles ; à Normale et dans le milieu étudiant, tout le monde avait des préoccupations intellectuelles.

Je ne voudrais pas donner l'impression que mon enfance et mon adolescence n'ont pas été studieuses. Mes parents s'occupaient beaucoup de nous, nous faisaient réciter toutes nos leçons deux fois et ne nous accordaient, à mes frères et à moi, qu'un mois de vacances : en dehors de cette période, nous avions des devoirs à faire, ce qui créa entre nous une certaine connivence pour trouver les solutions corrigées des problèmes et les traductions des versions latines. Beaucoup de mes impressions de lycée sont des souvenirs de bon élève : l'affectueuse mais ferme discipline parentale ne laissait pas de place à l'échec. Un des problèmes actuels de l'éducation est que les parents se reposent peut-être trop sur l'école et sont trop stressés ou épuisés pour aider leurs enfants. C'est dans la disponibilité qu'il y a une inégalité sociale, plutôt que dans les capacités techniques des parents à aider les enfants. Comment s'étonner que les enfants laissés sans soutien réussissent mal ? Bien des difficultés à l'école sont d'ordre psychologique et affectif,la non-compréhension des mathématiques par exemple.

Mon examen d'entrée à l'École Normale a été picaresque : j'ai été paralysé d'incompréhension pendant la première épreuve, la composition principale de mathématiques, et j'ai rendu une feuille quasiment blanche ; j'étais obnubilé par un autre candidat qui couvrait à toute allure sa feuille de calculs. En sortant de la salle, je vis en un éclair ce que j'aurais dû faire, constatation qui acheva de me démoraliser. Si des amis ne m'avaient soutenu en m'emmenant à la plage et en me distrayant, je ne serais pas allé aux autres épreuves où je réussis suffisamment bien pour passer l'obstacle. Ainsi j'ai réussi grâce à mes copains ; nous sommes tous, un jour ou l'autre, exposés à un échec que nous surmontons plus facilement quand nous pouvons puiser dans un réservoir affectif.

Après l'École Normale, nous habitions dans la banlieue Nord de Paris, en dehors de tout. Mes beaux-parents m'avaient prêté un bureau où je travaillais tous les jours, seul. Je me promenais beaucoup et, pendant ces promenades, je réfléchissais au problème qui m'intéressait, et qui me battait dans la tête ; lorsque j'avais trouvé quelque chose, je revenais pour l'écrire dans un de mes cahiers de travail. Une fois par semaine, j'allais à un séminaire, et quand j'avais fait une petite avancée je l'expliquais à mon directeur de thèse, Jacques Dixmier. Je vivais cette journée comme un test de ma compréhension des mathématiques, mais j'avais besoin de l'isolement pour cultiver mon propre jardin mathématique qui combinait l'algèbre et l'analyse. Cette combinaison de sujets était difficile, car elle faisait appel à des sensibilités que les mathématiciens ne développent en général pas simultanément. J'ai bien aimé cette vie qui paraît monacale, car on forme ses outils en attaquant un problème difficile, en dehors de la mode du moment.

En taupe, je m'intéressais déjà à des techniques personnelles, en dehors des sentiers battus : je traduisais les propriétés différentielles en propriétés de différences finies ; j'ai rempli des cahiers de résultats et je regardais tout à partir de ce jardin privé. Quand je suis en voyage, une de mes distractions est d'acheter un cahier ; je le choisis avec un soin maniaque, puis je l'entrepose dans un tiroir, comme un souvenir, pour l'utiliser quelques années plus tard. J'ai ainsi accédé à ce que l'on appelle la réalité mathématique en m'appropriant un petit territoire que j'ai agrandi par la suite. Plus tard, à l'Institut des Hautes Études Scientifiques, j'ai élargi mon champ d'intérêt de manière naturelle, avec ma méthode personnelle et polarisée de voir les choses. Il y a des domaines des mathématiques qui sont simples, mais que je ne comprends pas, car ils ne s'insèrent pas dans mon domaine de recherches.

J'ai un souvenir précis des circonstances exactes de deux de mes découvertes. Pour la première, j'avais accompagné ma femme en voiture, au lycée où elle enseigne : en revenant, alors que je pensais, croyais-je, à tout autre chose, j'eus la certitude absolue, devant un feu rouge, que les calculs longs et pénibles que je faisais depuis six mois s'éclairaient à la lueur d'une astuce mathématique qui allait devenir classique, le *two by two matrix trick*. Je n'étais pas parvenu à la découverte par un raisonnement, tout s'était passé comme si mon inconscient s'était brutalement exprimé.

La seconde expérience se passe au Canada, où j'avais été envoyé au titre de la coopération. Je faisais régulièrement la même promenade sans progresser d'un millimètre dans mon problème, lorsqu'un jour j'eus l'impression que tout pouvait se débloquer, ce que je vérifiai à ma table de travail. J'eus alors le sentiment de ne pouvoir exprimer ma joie ; des éléments chaotiques et incontrôlables s'organisaient en un tout cohérent.

Le mois qui a suivi a été assez pénible, car je devais remplacer l'intuition par une démonstration rigoureuse et je naviguais d'épouvante en épouvante : ne me serais-je pas trompé ? Le résultat me comblait tellement que je ne pouvais laisser une erreur ou même un doute ; aussi je refaisais cette assez longue démonstration qui fondait mon résultat, dans le bus, quand j'étais invité à dîner, partout. Ensuite j'ai pu la montrer à des collègues. On reproche quelquefois aux mathématiciens d'être introvertis ; comment pourrait-il en être autrement, du moins pendant la période de leur vie où ils cherchent ? Pour naviguer ainsi à l'aveugle dans des zones inexplorées, il faut qu'ils soient persuadés qu'une petite lumière éclairera leurs travaux. Le parcours personnel semble métaphysique, mais il y a une différence fondamentale : la nature universelle de la réalité mathématique. Qu'est-ce que cette réalité mathématique ? En physique on peut définir de façon précise la réalité qui est perceptible par le grand public, même si certains objets de la physique, les particules élémentaires par exemple, ne sont pas directement accessibles aux sens. La réalité mathématique est d'assimilation plus difficile, elle s'acquiert par un sens que l'homme ne possède pas naturellement.

Pour expliquer cette réalité, il ne faut pas choisir un beau théorème car on rentre trop vite dans la technique ; je choisirai plutôt les contraintes qui établissent les limites de l'univers mathématique. Comme un enfant, qui apprend à se déplacer, perçoit les contraintes du monde extérieur en se heurtant à des obstacles, le mathématicien distingue le possible de l'impossible. Abel et Galois ont démontré qu'on ne pouvait résoudre les équations de degré supérieur à 4 avec des radicaux ; c'est par ces impossibilités que la réalité mathématique se manifeste et aussi par la structure harmonieuse que notre invention mathématique élabore. Ainsi la théorie des groupes rassemble en une structure une multitude d'objets et d'opérations mathématiques disparates.

À la différence de la métaphysique, la réalité mathématique est objective : elle n'est pas tangible, mais éternelle et immuable. C'est un monde virtuel non localisé dans l'espace ni dans le temps. La science la plus proche des mathématiques serait, à ce point de vue, la cosmologie qui étudie les propriétés de l'espace et d'un univers également immuable.

On peut se demander pourquoi les mathématiciens ont mis si longtemps pour résoudre des problèmes d'énoncés assez simples comme le théorème de Fermat. Je crois que c'est parce qu'ils ne s'intégraient pas de façon harmonieuse dans l'univers des mathématiques ou encore que l'on ne comprenait pas assez bien la signification du problème posé.

Distinguons, en recherche, les méthodes inductives et projectives ; le théorème de Fermat a été une constatation inductive, il est vérifié par tous les nombres que l'on essaie. Les mathématiciens élaborent des structures pour cerner la vérité de façon projective, établissant des résultats jusqu'à ce que les questions non résolues et pressenties de manière inductive tombent naturellement dans leur escarcelle. C'est alors qu'ils ont l'impression que la question est bien comprise, qu'elle s'insère bien dans le corpus des mathématiques.

Posts by Alain Connes in the blog http://noncommutativegeometry.blogspot.com

Sunday, February 25, 2007
Real and Complex
I would like to discuss the "next entry" in the parallel texts that Masoud was presenting in his post.

On the function theory side we are talking about "real and complex variables". A perfect book to get introduced to that is "real and complex analysis" by W. Rudin (McGraw-Hill). It is a classic and remains one of the best entrance doors to the subject. What one learns is the constant interplay between the "real variable" techniques such as the Lebesgue integral, differentiability almost everywhere, etc., and the "complex variable" techniques. There is a saying of André Weil like "The complex world is beautiful, the real world is dirty". One might then be tempted to ignore the "real world" and only work in the complex variable set-up where "any" function is holomorphic and hence infinitely differentiable etc... That's fine, and one can go some distance with that, except that most of the deep results in complex analysis do rely on real analysis. Now what about the next entry in the parallel text ? It is

Complex variable........................	Operator on Hilbert space
Real variable...............................	Self-adjoint operator

where I have slightly rewritten the previous entry

Functions $f : X \to C$	Operators on Hilbert space

of Masoud's post to stress that the right column gives an ideal model for what the loose notion of a "variable" is... The set of values of the variable is the spectrum of the operator, and the number of times a value is reached is the spectral multiplicity. Continuous variables (operators with continuous spectrum) coexist happily with discrete variables precisely because of non-commutativity of operators.

The holomorphic functional calculus gives a meaning to $f(T)$ for all holomorphic functions f on the spectrum of T, and a deep result controls the spectrum of $f(T)$. The really amazing fact is that while for general operators T in Hilbert space the only functions $f(z)$ that can be applied to T are the holomorphic ones (on the spectrum of T), the situation changes drastically when one deals with self-adjoint operators : for $T = T^*$ the operator $f(T)$ makes sense for any function f ! You can take a pencil and draw the graph of a function, it does not need to be continuous... nor even piecewise continuous, just anything you can name will do... (at the technical level the only requirement on f is that it is universally measurable but nobody can construct explicitly a function which does not fulfill this condition !)... Moreover a bounded operator is a function of T (ie is of the form $f(T)$) if and only if it shares all the symmetries of T (ie if it commutes with all operators that commute with T).

I remember that, at a very early stage of my encounter with mathematics, it is this very fact that convinced me of the power of the Hilbert space techniques in close relation with the adjoint operation $T \to T^*$. This was enough to resist the temptation of starting directly in the "complex world" of algebraic geometry which was attracting most beginners at that time, following the aura of Grothendieck, who described so well his first encounter with that world : "Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller..."

AC said...
"anonymous" the point is that the class of arbitrary functions (real analysis) is that which operates on self-adjoint operators, while only the holomorphic ones operate on general operators T. The case of normal operators ($[T, T^*] = 0$) is just "two real variables" and has nothing to do with complex analysis. When the class of functions is smaller you expect more properties, but that does not mean that it is "easier" (rather the opposite) so the analogy is not backwards...
February 26, 2007 at 8 :42 AM

Wednesday, March 7, 2007
Le rêve mathématique
I guess one possible use of a blog, like this one, is as a space of freedom where one can tell things that would be out of place in a "serious" math paper. The finished technical stuff finds its place in these papers and it is a good thing that mathematicians maintain a high standard in the writing style since otherwise one would quickly loose control of what is proved and what is just wishful thinking. But somehow it leaves no room for the more profound source, of poetical nature, that sets things into motion at an early stage of the mental process leading to the discovery of new "hard" facts.

Grothendieck expressed this in a vivid manner in *Récoltes et semailles* : "L'interdit qui frappe le rêve mathématique, et à travers lui, tout ce qui ne se présente pas sous les aspects habituels du produit fini, prêt à la consommation. Le peu que j'ai appris sur les autres sciences naturelles suffit à me faire mesurer qu'un interdit d'une semblable rigueur les aurait condamnées à la stérilité, ou à une progression de tortue, un peu comme au Moyen Age où il n'était pas question d'écornifler la lettre des Saintes Ecritures. Mais je sais bien aussi que la source profonde de la découverte, tout comme la démarche de la découverte dans tous ses aspects essentiels, est la même en mathématique qu'en tout autre région ou chose de l'Univers que notre corps et notre esprit peuvent connaitre. Bannir le rêve, c'est bannir la source - la condamner à une existence occulte".

I shall try to involve on the post of Masoud about tilings and give a heuristic description of a basic qualitative feature of noncommutative spaces which is perfectly illustrated by the space T of Penrose tilings of the plane. Given the two basic tiles : the Penrose kites and darts (or those shown in the pictures), one can tile the plane with these two tiles (with a matching condition on the colors of the vertices) but no such tiling is periodic. Two tilings are the same if they are carried into each other by an isometry of the plane. There are plenty of examples of tilings which are not the same.

The set T of all tilings of the plane by the above two tiles is a very strange set because of the following : "Every finite pattern of tiles in a tiling by kites and darts does occur, and infinitely many times, in any other tiling by the same tiles".

This means that it is impossible to decide locally with which tiling one is dealing. Any pair of tilings can be matched on arbitrarily large patches and there is no way to tell them apart by looking only at finite portions of each of them. This is in sharp contrast with real numbers for instance since if two real numbers are distinct their decimal expansions will certainly be different far enough. I remember attending quite long ago a talk by Roger Penrose in which he superposed two transparencies with a tiling on each and showed the strange visual impression one gets by matching large patches of one of them with the other... he expressed the intuitive feeling one gets from the richness of these "variations on the same point" as being similar to "quantum fluctuations". A space like the space T of Penrose tilings is indeed a prototype example of a noncommutative space. Since its points cannot be distinguished from each other locally one finds that there are no interesting real (or complex) valued functions on such a space which stands apart from a set like the real line R and cannot be analyzed by means of ordinary real valued functions. But if one uses the dictionary one finds out that the space T is perfectly encoded by a (non-commutative) algebra of q-numbers which accounts for its "quantum" aspect. See this book http://alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf for more details. In a comment to the post of Masoud on tilings the question was formulated of a relation between aperiodic tilings and primes. A geometric notion, analogous to that of aperiodic tiling, that indeed corresponds to prime numbers is that of a Q-lattice. This notion was introduced in our joint work with Matilde Marcolli and is simply given by a pair of a lattice L in R together with an additive map from Q/Z to QL/L. Two Q-lattices are commensurable when the lattices are commensurable (which means that their sum is still a lattice) and the maps agree (modulo the sum). The space X of Q-lattices up to commensurability comes naturally with a scaling action (which rescales the lattice and the map) and an action of the group of automorphisms of Q/Z by composition. Again, as in the case of tilings, the space X is a typical noncommutative space with no interesting functions. It is however perfectly encoded by a noncommutative algebra and the natural cohomology (cyclic cohomology) of this algebra can be computed in terms of a suitable space of distributions on X, as shown in our joint work with Consani and Marcolli.

There are two main points then, the first is that the zeros of the Riemann zeta function appear as an absorption spectrum (ie as a cokernel) from the representation of the scaling group in the above cohomology, in the sector where the group of automorphisms of Q/Z is acting trivially (the other sectors are labeled by characters of this group and give the zeros the corresponding L-functions).

The second is that if one applies the Lefschetz formula as formulated in the distribution theoretic sense by Guillemin and Sternberg (after Atiyah and Bott) one obtains the Riemann-Weil explicit formulas of number theory that relate the distribution of prime numbers with the zeros of zeta. A first striking feature is that one does not even need to define the zeta function (or L-functions), let alone its analytic continuation, before getting at the zeros which appear as a spectrum. The second is that the Riemann-Weil explicit formulas involve rather delicate principal values of divergent integrals whose formulation uses a combination of the Euler constant and the logarithm of 2π, and that exactly this combination appears naturally when one computes the operator theoretic trace, thus the equality of the trace with the explicit formula can hardly be an accident. After the initial paper an important advance was done by Ralf Meyer who showed how to prove the explicit formulas using the above functional analytic framework (instead of the Cauchy integral).

This hopefully will shed some light on the comment of Masoud which hinged on the tricky topic of the use of noncommutative geometry in an approach to RH. It is a delicate topic because as soon as one begins to discuss anything related to RH it generates some irrational attitudes. For instance I was for some time blinded by the possibility to restrict to the critical zeros, by using a suitable function space, instead of trying to follow the successful track of André Weil and develop noncommutative geometry to the point where his argument for the case of positive characteristic could be successfully transplanted. We have now started walking on this track in our joint paper with Consani and Marcolli, and while the hope of reaching the goal is still quite far distant, it is a great incentive to develop the missing noncommutative geometric tools. As a first goal, one should aim at translating Weil's proof in the function field case in terms of the noncommutative geometric framework. In that respect both the paper of Benoit Jacob and the paper of Consani and Marcolli that David Goss mentionned in his recent post open the way. I'll end up with a joke inspired by the European myth of Faust, about a mathematician trying to bargain with the devil for a proof of the Riemann hypothesis. This joke was told to me some time ago by Ilan Vardi and I happily use it in some talks, here I'll tell it in French which is a bit easier from this side of the atlantic, but it is easy to translate...

La petite histoire veut qu'un mathématicien ayant passé sa vie à essayer de résoudre ce problème se décide à vendre son âme au diable pour enfin connaître la réponse. Lors d'une première rencontre avec le diable, et après avoir signé les papiers de la vente, il pose la question “L'hypothèse de Riemann est-elle vraie ?” Ce à quoi le diable répond “Je ne sais pas ce qu'est l'hypothèse de Riemann” et après les explications prodiguées par le mathématicien “hmm, il me faudra du temps pour trouver la réponse, rendez-vous ici à minuit, dans un mois”. Un mois plus tard le mathématicien (qui a vendu son âme) attend à minuit au même endroit... minuit, minuit et demi... pas de diable... puis vers deux heures du matin alors que le mathématicien s'apprête à quitter les lieux, le diable apparaît, trempé de sueur, échevelé et dit “Désolé, je n'ai pas la réponse, mais j'ai réussi à trouver une formulation équivalente qui sera peut-être plus accessible !”.

Tuesday, March 20, 2007
Time
I will try to describe in loose terms the steps that lead to the emergence of time from noncommutativity in operator algebras. This hopefully will answer the questions of Paul and Sirix (at least in parts) and of Urs.

First I'll explain the basic formula due to Tomita that associates to a state L a one parameter group of automorphisms. The basic fact is that one can make sense of the map $x \to s(x) = LxL^{-1}$ as an (unbounded) map from the algebra to itself and then take its complex powers s^{it}. To define this map one just compares the two bilinear forms on the algebra given by $L(xy)$ and $L(yx)$. Under suitable non-degeneracy conditions on L both give an isomorphism of the algebra with its dual linear space and thus one can find a linear map s from the algebra to itself such that $L(yx) = L(xs(y))$ for all x and y.

One can check at this very formal level that s fulfills $s(ab) = s(a)s(b) : L(abx) = L(bxs(a)) = L(xs(a)s(b))$.

Thus still at this very formal level s is an automorphism of the algebra, and the best way to think about it is as $x \to LxL^{-1}$ where one respects the cyclic ordering of terms in writing $Lyx = LyL^{-1}Lx = LxLyL^{-1}$. Now all this is formal and to make it “real” one only needs the most basic structure of a noncommutative space, namely the measure theory. This means that the algebra one is dealing with is a von Neumann algebra, and that one needs very little structure to proceed since the von Neumann algebra of an NC-space only embodies its measure theory, which is very little structure. Thus the main result of Tomita (which was first met with lots of skepticism by the specialists of the subject, was then succesfully expounded by Takesaki in his lecture notes and is known as the Tomita-Takesaki theory) is that when L is a faithful normal state on a von Neumann algebra M, the complex powers of the associated map $s(x) = LxL^{-1}$ make sense and define a one parameter group of automorphism s_L of M.

There are many faithful normal states on a von Neumann algebra and thus many corresponding one parameter groups of automorphism s_L. It is here that the two by two matrix trick (Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, 274, 1972) enters the scene and shows that in fact the groups of automorphism s_L are all the same modulo inner automorphisms !

Thus if one lets $\mathrm{Out}(M)$ be the quotient of the group of automorphisms of M by the normal subgroup of inner automorphisms one gets a completely canonical group homomorphism from the additive group R of real numbers $\delta : R \to \mathrm{Out}(M)$ and it is this group that I always viewed as a tantalizing candidate for "emerging time" in physics.

Of course it immediately gives invariants of von Neumann algebras such as the group $T(M)$ of "periods" of M which is the kernel of the above group morphism. It is at the basis of the classification of factors and reduction from type III to type II + automorphisms which I did in June 1972 and published in my thesis (with the missing III_1 case later completed by Takesaki).

This "emerging time" is non-trivial when the noncommutative space is far enough from "classical" spaces. This is the case for instance for the leaf space of foliations such as the Anosov foliations for Riemann surfaces and also for the space of Q-lattices modulo scaling in our joint work with Matilde Marcolli.

The real issue then is to make the connection with time in quantum physics. By the computation of Bisognano-Wichmann one knows that the s_L for the restriction of the vacuum state to the local algebra in free quantum field theory associated to a Rindler wedge region (defined by $x_1 > \pm x_0$) is in fact the evolution of that algebra according to the "proper time" of the region. This relates to the thermodynamics of black holes and to the Unruh temperature. There is a whole literature on what happens for conformal field theory in dimension two. I'll discuss the above real issue of the connection with time in quantum physics in another post.

AC said... Urs : Yes, what happens in fact is that for any quantum system with infinitely many degrees of freedom the hamiltonian H does not belong to the algebra of observables. Thus the corresponding automorphisms are not inner. To see what happens it is simplest to take the case of a system of spins on a lattice. The algebra of observables is the inductive limit of the finite tensor products of matrix algebras one for each lattice site. The hamiltonian H is, even in the simplest non-interacting case, an infinite sum of the hamiltonians associated to each lattice site. Thus it does not belong to the algebra of observables and the corresponding one parameter group is not inner(both in the norm closure ie the C^*-algebra, and in the weak closure)... In QFT the situation is entirely similar and has of course infinitely many degrees of freedom from the start...
March 26, 2007 at 8 :53 AM

Dirac and integrality
In the first paper on "second quantization", namely the paper of Dirac called "The quantum theory of the emission and absorption of radiation" the process of second quantization is introduced and is related again to "integrality". This time it is not the Fredholm index that is behind the integrality but the following simple fact : if an operator a satisfies $[a, a^*] = 1$, then the spectrum of a^*a is contained in xN, the set of positive integers (as follows from the equality of the spectra of aa^* and a^*a except possibly for 0)... Second quantization is obtained simply by replacing the ordinary complex numbers a_j which label the Fourier expansion of the electromagnetic field by non-commutative variables fulfilling $[a_j, a_j^*] = 1$... (more precisely the 1 is replaced by $\hbar\nu$ where ν is the frequency of the Fourier mode). This example shows of course that integrality and non-commutativity are deeply related... While the Fredholm index is a good model of relative integers (positive or negative), the aa^* for $[a, a^*] = 1$ is a good model for positive integers...

Wednesday, April 25, 2007

Another very striking recent development was described in the talk of U. Haagerup on his joint work (I think it is with Magdalena Musat but am not sure, the paper is not out yet) on the classification of factors modulo isomorphism of the associated operator spaces. He gave an amazing necessary and sufficient condition for the class of the hyperfinite III_1 factor : that the flow of weights admits an invariant probability measure. (One knows that this holds for the von Neumann algebra of a foliation with non-zero Godbillon-Vey class). This special case suggests that the general necessary and sufficient condition should be the "commensurability" of the flow of weights, and the idea of Mackey of viewing an ergodic flow as a "virtual subgroup" of the additive group R should be essential in developing the appropriate notion of "commensurability" for ergodic flows. I was off at the beginning of the week for a short sobering trip in Sweeden (Atiyah's "Witten" talk always has a sobering effect) and heard a really interesting talk by Nirenberg which suggests that the Holder exponent $1/3$ which enters as the limit of regularity for the winding number formula of Kahane corresponds to the $3 = 2 + 1$ of the periodicity long exact sequence in cyclic cohomology. There is yet another conference taking place the whole week in paris, organized by Vincent Rivasseau.

Saturday, May 26, 2007

The Ascona meeting on Pauli and Jung

Thanks to Masoud for keeping the blog alive in the middle of all these trips to conferences. The last one I attended ended today and was dedicated to Pauli's philosophical ideas. It was quite interesting and gave me a great occasion to get a better knowledge of these ideas. An interesting talk was given by Rafael Nunez "Where does mathematics come from ? Pauli, Jung, and contemporary cognitive science" with a brave attempt to dismiss platonism (and in particular Pauli's view) using "contemporary cognitive science". The talk was very entertaining, in particular on the representation of the future as relative motion as in expressions of the form "winter is coming" or "we are arriving at the end of the year". Or when the infamous Chilian dictator, after the coup, said successively : "Communism has taken us at the edge of the abyss" and "today we took a big step forward". Unfortunately I missed the talk of Arthur Miller "When Pauli met Jung - and what happened next"... but I could talk to him directly and got very interested with these images Jung was showing to Pauli after hearing his dreams. I had to give a rather improvised talk on Wednesday morning (about the nature of mathematical reality and also the relations with physics) and barely made it in time, since my plane to Milan had been canceled the day before (strike of Air Control) and I had to go there by train. This took the whole day and the only possible way to reach Ascona in time was to rent a car in Milan and drive there in the middle of the night. I did it since I really hate to accept giving a talk somewhere and not be able to make it at the last moment, but there was definitely a kind of "Pauli effect" making it quite difficult to reach the place in time...

Jürg Fröhlich was prevented to come for family reasons and the talk on Pauli's work was given by Harald Atmanspacher who replaced Fröhlich at the last minute. What was really striking in this meeting was that all talks were followed by long and passionate discussions which usually lasted for almost half an hour and one could learn a lot just because there was so much interaction.

AC said...

Dear Nic, yes and this was a very nice point in the talk. I completely share this view that the past is the only thing we control and in fact I believe we just keep trying to rearange the past in order to cope with whatever the present gives us...

May 30, 2007 at 10 :09 AM

AC said...

Anonymous, the lecture of Arthur Miller was based on a book which is scheduled for publication next year. So one will have to wait for that one.

As far as I know it is true that Grothendieck has been writing a lot about dreams, but my information is not reliable and the only source is the "Grothendieck Circle" website at http://www.grothendieckcircle.org/ from which you can get better information.

May 30, 2007 at 4 :41 PM

AC said...

Dear Lieven

Thanks for your comment, it is quite difficult to "maintain" the blog just Masoud and me. We really

welcome comments like yours and would be happy to have you as a "guest" blogger.
One basic concern I have is to try and bridge the gap between the various aspects of NCG. I really like the purely algebraic aspect (and did a bit of work with Michel Dubois-Violette on that). Both the purely algebraic noncommutative geometry as well as the more "operator theoretic" differential noncommutative geometry are mature enough now not to be frightened to interact more openly. When a theory is at its beginning I believe it is important to leave it a chance to grow by itself and "protect" it somehow, but obviously time is ripe now for a broader perspective and attitude. That's pretty much what is going on with the new Journal and the organized meetings such as the Newton Institute program of last fall or precisely the Chicago meeting. Since I was there only briefly it is difficult for me to write a full report but I'll do what I can (after doing that for the vanderbilt meeting) and will try to get a "volunteer" to give a better account than my partial one (because of the small number of talks I could attend, being quite tired after the many classes I had to give in Vanderbilt).
June 6, 2007 at 8 :11 PM

Tuesday, July 3, 2007
Noncommutative spacetime
As I explained in a previous post, it is only because one drops commutativity that, in the calculus, variables with continuous range can coexist with variables with countable range. In the classical formulation of variables, as maps from a set X to the real numbers, we saw above that discrete variables cannot coexist with continuous variables.

The uniqueness of the separable infinite dimensional Hilbert space cures that problem, and variables with continuous range coexist happily with variables with countable range, such as the infinitesimal ones. The only new fact is that they do not commute.

One way to understand the transition from the commutative to the noncommutative is that in the latter case one needs to care about the ordering of the letters when one is writing. As an example, use the "commutative rule" to simplify the following cryptic message I received from a friend : "Je suis alençonnais, et non alsacien. Si t'as besoin d'un conseil nana, je t'attends au coin annales. Qui suis-je ?"

It is Heisenberg who discovered that such care was needed when dealing with the coordinates on the phase space of microscopic systems.

At the philosophical level there is something quite satisfactory in the variability of the quantum mechanical observables. Usually when pressed to explain what is the cause of the variability in the external world, the answer that comes naturally to the mind is just : the passing of time. But precisely the quantum world provides a more subtle answer since the reduction of the wave packet which happens in any quantum measurement is nothing else but the replacement of a "q-number" by an actual number which is chosen among the elements in its spectrum. Thus there is an intrinsic variability in the quantum world which is so far not reducible to anything classical. The results of observations are intrinsically variable quantities, and this to the point that their values cannot be reproduced from one experiment to the next, but which, when taken altogether, form a q-number. Heisenberg's discovery shows that the phase-space of microscopic systems is noncommutative inasmuch as the coordinates on that space no longer satisfy the commutative rule of ordinary algebra. This example of the phase space can be regarded as the historic origin of noncommutative geometry. But what about spacetime itself ? We now show why it is a natural step to pass from a commutative spacetime to a noncommutative one.

The full action of gravity coupled with matter admits a huge natural group of symmetries. The group of invariance for the Einstein-Hilbert action is the group of diffeomorphisms of the manifold and the invariance of the action is simply the manifestation of its geometric nature. A diffeomorphism acts by permutations of the points so that points have no absolute meaning.

The full group of invariance of the action of gravity coupled with matter is however richer than the group of diffeomorphisms of the manifold since one needs to include something called "the groupof gauge transformations" which physicists have identified as the symmetry of the matter part. This is defined as the group of maps from the manifold to some fixed other group, G, called the "gauge group", which as far as we known is : $G = U(1).SU(2).SU(3)$. The group of diffeomorphisms acts on the group of gauge transformations by permutations of the points of the manifold and the full group of symmetries of the action is the semi-direct product of the two groups (in the same way, the Poincaré group which is the invariance group of special relativity, is the semi-direct product of the group of translations by the group of Lorentz transformations). In particular it is not a simple group (a simple group is one which cannot be decomposed into smaller pieces, a bit like a prime number cannot be factorized into a product of smaller numbers) but is a "composite" and contains a huge normal subgroup.

Now that we know the invariance group of the action, it is natural to try and find a space X whose group of diffeomorphisms is simply that group, so that we could hope to interpret the full action as pure gravity on X. This is the old Kaluza-Klein idea. Unfortunately this search is bound to fail if one looks for an ordinary manifold since by a mathematical result, the connected component of the identity in the group of diffeomorphisms is always a simple group, excluding a semi-direct product structure as that of the above invariance group of the full action of gravity coupled with matter. But noncommutative spaces of the simplest kind readily give the answer, modulo a few subtle points. To understand what happens note that for ordinary manifolds the algebraic object corresponding to a diffeomorphism is just an automorphism of the algebra of coordinates ie a transformation of the coordinates that does not destroy their algebraic relations. When an involutive algebra A is not commutative there is an easy way to construct automorphisms. One takes a unitary element u of the algebra ie such that $uu^* = u^*u = 1$. Using u one obtains an automorphism called inner, by the formula $x \to uxu^*$.

Note that in the commutative case this formula just gives the identity automorphism (since one could then permute x and u^*). Thus this construction is interesting only in the noncommutative case. Moreover the inner automorphisms form a subgroup denoted $\mathrm{Int}(A)$ which is always a normal subgroup of the group of automorphisms of A.

In the simplest example, where we take for A the algebra of smooth maps from a manifold M to the algebra of matrices of complex numbers, one shows that the group $\mathrm{Int}(A)$ in that case is (locally) isomorphic to the group of gauge transformations ie of smooth maps from M to the gauge group $G = PSU(n)$ (quotient of $SU(n)$ by its center). Moreover the relation between inner automorphisms and all automorphisms becomes identical to the exact sequence governing the structure of the above invariance group of the full action of gravity coupled with matter.

It is quite striking that the terminology coming from physics : internal symmetries agrees so well with the mathematical one of inner automorphisms. In the general case only automorphisms that are unitarily implemented in Hilbert space will be relevant but modulo this subtlety one can see at once from the above example the advantage of treating noncommutative spaces on the same footing as the ordinary ones. The next step is to properly define the notion of metric for such spaces and we shall indulge, in the next post, in a short historical description of the evolution of the definition of the "unit of length" in physics. This will prepare the ground for the introduction to the spectral paradigm of noncommutative geometry.

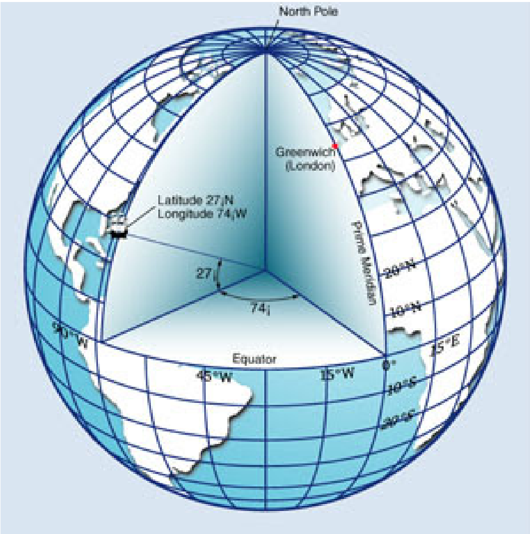
AC said...
Guy on the street, just try to permute some letters and get 4 times a name which is not so difficult to guess... what can you come up with starting with "non alsacien" for instance ?
July 4, 2007 at 6 :59 PM

AC said...
Dear Fabien
Your question is pertinent. The role of the finite space is now much better understood from the very recent papers with A. Chamseddine : "*Why the Standard Model*" (https://arxiv.org/pdf/0706.3688.pdf) and "*A dress for SM the beggar*" (https://pdfs.semanticscholar.org/765c/4b648502de8f1628258f79ca7bc7e61fe3fc.pdf) which are on the hep-th arXiv. My intention is to use this blog, this summer holidays, to explain their content in details, but one step at a time. So far I just wanted to explain why it is natural to consider NC spacetimes and not be so dependent on the "point-set" commutative view of spaces. So even if one cannot exclude that the finite space F is, as you suggest, a "remnant of a shrunk down ancestral continuous space" it will give us a lot more freedom to drop the dependence on the commutative view.
July 4, 2007 at 7 :10 PM

AC said...
I believe that the extension of the "symplectic" framework to the NC world is simply the notion of the first order term in a deformation of the NC-algebra. This is quite clear in the commutative case where a symplectic structure (or more generally Poisson structure) is just the first term in the expansion of the

deformed product. Thus it is a semi-classical form of the deformation. In the NC case there are many examples where it is natural to use a similar starting point for deformations (for instance in Rankin-Cohen brackets generalized to deformations of NC projective structures).
July 8, 2007 at 11 :35 AM

Tuesday, July 10, 2007
A brief history of the metric system



The next step is to understand what is the replacement of the Riemannian paradigm for noncommutative spaces. To prepare for that, and using the excuse of the summer holidays, let me first tell the story of the change of paradigm that already took place in the metric system with the replacement of the concrete “mètre-étalon” by a spectral unit of measurement.

The notion of geometry is intimately tied up with the measurement of length. In the real world such measurement depends on the chosen system of units and the story of the most commonly used system - the metric system - illustrates the difficulties attached to reaching some agreement on a physical unit of length which would unify the previous numerous existing choices. As is well known, the United States are one of the few countries that are not using the metric system and this lack of uniformity in the choice of a unit of length became painfully obvious when it entailed the loss of a probe worth 125 million dollars just because two different teams of engineers had used the two different units (the foot and the metric system). In 1791 the French Academy of Sciences agreed on the definition of the unit of length in the metric system, the “mètre”, as being the ten millionth part of the quarter of the meridian of the earth. The idea was to measure the length of the arc of the meridian from Barcelone to Dunkerque while the corresponding angle (approximately 9.5°) was determined using the measurement of latitude from reference stars. In a way this was just a refinement of what Eratosthenes had done in Egypt, 250 years BC, to measure the size of the earth (with a precision of 0.4 %).

Thus in 1792 two expeditions were sent to measure this arc of the meridian, one for the Northern portion was led by Delambre and the other for the southern portion was led by Méchain. Both of them were astronomers who were using a new instrument for measuring angles, invented by Borda, a French physicist. The method they used is the method of triangulation and of concrete measurement of the “base” of one triangle. It took them a long time to perform their measurements and it was a risky enterprize. At the beginning of the revolution, France entered in a war with Spain.

Just try to imagine how difficult it is to explain that you are trying to define a universal unit of length when you are arrested at the top of a mountain with very precise optical instruments allowing you to follow all the movements of the troops in the surrounding.

Both Delambre and Méchain were trying to reach the utmost precision in their measurements and an important part of the delay came from the fact that this reached an obsessive level in the case of Méchain. In fact when he measured the latitude of Barcelone he did it from two different close by locations, but found contradictory results which were discordant by 3.5 seconds of arc. Pressed to give his result he chose to hide this discrepancy just to “save the face” which is the wrong attitude for a Scientist. Chased from Spain by the war with France he had no second chance to understand the origin of the discrepancy and had to fiddle a little bit with his results to present them to the International Commission which met in Paris in 1799 to collect the results of Delambre and Méchain and compute the “mètre” from them. Since he was an honest man obsessed by precision, the above discrepancy kept haunting him and he obtained from the Academy to lead another expedition a few years later to triangulate further into Spain. He went and died from malaria in Valencia. After his death, his notebooks were analysed by Delambre who found the discrepancy in the measurements of the latitude of Barcelone but could not explain it. The explanation was found 25 years after the death of Méchain by a young astronomer by the name of Nicollet, who was a student of Laplace. Méchain had done in both of the sites he had chosen in Barcelone (Mont Jouy and Fontana del Oro) a number of measurements of latitude using several reference stars. Then he had simply taken the average of his measurements in each place. Méchain knew very well that refraction distorts the path of light rays which creates an uncertainty when you use reference stars that are close to the horizon. But he considered that the average result would wipe out this problem.

What Nicollet did was to ponder the average to eliminate the uncertainty created by refraction and, using the measurements of Méchain, he obtained a remarkable agreement (0.4 seconds ie a few meters) between the latitudes measured from Mont Jouy and Fontana del Oro. In other words Méchain had made no mistake in his measurements and could have understood by pure thought what was wrong in his computation. I recommend the book of Ken Adler (*The measure of all things : the seven-year odyssey and hidden error that transformed the world*, eds Little, Brown et compagny, 2003, ou *Mesurer le monde*, Flammarion, 2005) for a nice account of the full story of the two expeditions.

In any case in the meantime the International commission had taken the results from the two expeditions and computed the length of the ten millionth part of the quarter of the meridian using them. Moreover a concrete platinum bar with approximately that length was then realized and was taken as the definition of the unit of length in the metric system. With this unit the actual length of the quarter of meridian turns out to be 10 002 290 rather than the aimed for 10 000 000 but this is no longer relevant. In fact in 1889 the reference became another specific metal bar (of platinum and iridium) called “mètre-étalon”, which was deposited near Paris in the pavillon de Breteuil. This definition held until 1960.

Already in 1927, at the seventh conference on the metric system, in order to take into account the inevitable natural variations of the concrete called “mètre-étalon”, the idea emerged to compare it with a reference wave length (the red line of Cadmium). Around 1960 the reference to the called “mètre étalon” was finally abandoned and a new definition of the unit of length in the metric system (the “mètre) was adopted as 1650763.73 times the wave length of the radiation corresponding to the transition between the levels 2p10 and 5d5 of the Krypton 86Kr.

In 1967 the second was defined as the duration of 9192631770 periods of the radiation corresponding to the transition between the two hyperfine levels of Caesium-133. Finally in 1983 the “mètre” was defined as the distance traveled by light in 1/299792458 second. In fact the speed of light is just a conversion factor and to define the “mètre” one gives it the specific value of $c = 299792458$ m/s. In other words the “mètre” is defined as a certain fraction $9192631770/299792458 \sim 30.6633...$ of the wave length of the radiation coming from the transition between the above hyperfine levels of the Caesium atom.

The advantages of the new standard of length are many. First by not being tied up with any specific location, it is in fact available anywhere where Caesium is. The choice of Caesium as opposed to Helium or Hydrogen which are much more common in the universe is of course still debatable, and it is quite possible that a new standard will soon be adopted involving spectral lines of Hydrogen instead of Caesium. See this paper of Bordé for an update http://christian.j.borde.free.fr/ChB.pdf.

While it would be difficult to communicate our standard of length with other extraterrestrial civilizations if they had to make measurements of the earth (such as its size) the spectral definition can easily be encoded in a probe and sent out. In fact spectral patterns provide a perfect “signature” of chemicals, and a universal information available anywhere where these chemicals can be found, so that the wave length of a specific line is a perfectly acceptable unit, while if you start thinking a bit you will find out that we would be unable to just tell where the earth is in the universe...

Coordinates ? yes but whith respect to which system ? One possibility would be to give the sequence of redshifts to nearby galaxies, and in a more refined manner to nearby stars but it would be quite difficult to be sure that this would single out a definite place.

AC said...
Dear Apprenticing Physicist. First I do not know any real evidence of the variation in time of the constants of nature. Just look for instance at
http://www-cosmosaf.iap.fr/Cste%208%20mai%202004%20html.htm

In fact Dirac's large number idea of 1937, that was predicting a variation of G with time was not validated by experiment and one has an experimental upper bound of the order of $dG/G < 4\ 10^{-11}$ per year. Thus I am not sure that there is any convincing experimental evidence yet for what you say. If there were it would be interesting to discuss more precisely of which constant we are talking. For instance the spectral unit of length which I discussed in the post depends on the Rydberg constant and hence on the electron mass. In NCG that mass is tied up to the inverse size of the finite geometry F that will be discussed later in this blog. At least what can be said is that, in NCG, the "atomic units" are intimately tied up to the geometry of the finite space F while the astronomical units are tied up with the manifold M. The NCG model of space-time is the product M times F, but nothing prevents the geometry of F to vary over M.
July 13, 2007 at 10 :27 AM

Tuesday, July 17, 2007
Non Standard stuff
I am not sure I really know how to make use of a "blog" like this one. Recently I had to write a sollicited paper describing the perspective on the structure of space-time obtained from the point of view of noncommutative geometry. At first I thought that I could just be lazy and after the paper was written (it is available here https://alainconnes.org/docs/shahnlong.pdf) just use pieces of it to keep this blog alive during the summer vacations. However, when trying to do that, I realized that it was better (partly because of the impractical use of latex in the blog) to first make the paper available and then tell in the blog the additional things one would not "normally" write in a paper (even a non-technical general public paper such as the above). I am not keen on turning the blog into a place for controversies since it is unclear to me that one gains a lot in such discussions. The rule seems to be that, most often, people have prejudices against new stuff mostly because they don't know enough and take the lazy attitude that it is easier to denigrate a theory than to try and appreciate it. I am no exception and have certainly adopted that attitude with respect to supersymmetry or string theory. A debate will usually exhibit the strong opinions of the various sides and it is rare that one witnesses a real change taking place. So much for the "controversy" side. However I do believe that there are some points that can be quite useful to know and which, provided they are presented in a non-polemic manner can help a lot to avoid some pitfalls. I will discuss as an example the two notions of "infinitesimals" that I know and try to explain the relevance of both. This is not a "math paper" but rather an informal discussion.

When I was a student in Ecole Normale about 40 years ago, I fell in love with a new math topic called "nonstandard analysis" which was advocated by A. Robinson. Being a student of Gustave Choquet at that time, I knew a lot about ultrafilters. These maximal filters were (correct me if I am wrong) discovered by H. Cartan during a Bourbaki workshop. At that time Cartan had no name for the new objects but he had found the remarkable efficiency they had in any proof where a compactness and choice arguments were needed. So (this I heard from Cartan) the name he was using was "boum" ! ! ! Of course he knew that it gave a one line proof of the existence of Haar measure (boum...). And also that because of uniqueness of the latter it was in fact proving a rather strong convergence statement on the counting functions that approximate the Haar measure. He wanted to make sure, and wrote in a Compte-Rendu note the full details of a direct geometric argument proving the expected convergence. From ultrafilters to ultraproducts is an easy step. And I got completely bought by ultraproducts when I learnt (around that time) about the Ax-Cochen theorem : the ultraproduct of p-adic fields is isomorphic to the ultraproduct of local function fields with the same residue fields. Thus I started trying to work in that subject and obtained, using a specific class of ultrafilters called "selective", a construction of minimal models in nonstandard analysis. They are obtained as ultraproducts but the ultrafilters used are so special that, for instance, in order to know the element of the ultrapower of a set X, one does not need to care about the labels : the image ultrafilter in X is all that is needed. I wrote a paper explaining how to use ultraproducts and always kept that tool ready for use later on. I used it in an essential manner in my work on the classification of factors. So much for the positive side of the coin. However, quite early on I had tried in vain to implement one of the "selling adds" of nonstandard analysis, namely that it was finally giving the promised land for "infinitesimals". In fact the adds came with a specific example : a purported answer to the naive question "what is the probability "p" that a dart will land at a given point x of the target" in playing a game of darts. This was followed by 1) the simple argument why that positive number "p" was smaller than epsilon for any positive real epsilon 2) one hundred pages of logic 3) the identification of "p" with a "non-standard" number...

At first I attributed my inability to concretely get "p" to my lack of knowledge in logics, but after realizing that the models could be constructed as ultraproducts this excuse no longer applied. At this point I realized that there is some fundamental reason why one will never be able to actually "pin down" this "p" among non-standard numbers : from a non-standard number (non-trivial of course) one canonically deduces a non-measurable character of the infinite product of two element groups (the argument is simpler using a non-standard infinite integer "n", just take the map which to the sequence a_n (of 0 and 1) assigns its value for the index "n"). Now a character of a compact group is either continuous or non-measurable. Thus a non-standard number gives us canonically a non-measurable subset of $[0, 1]$. This is the end of the rope for being "explicit" since (from another side of logics) one knows that it is just impossible to construct explicitely a non-measurable subset of $[0, 1]$!

It took me many years to find a good answer to the above naive question about "p". The answer is explained in details here. It is given by the formalism of quantum mechanics, which as explained in the previous post on "infinitesimal variables" gives a framework where continuous variables can coexist with infinitesimal ones, at the only price of having more subtle algebraic rules where commutativity no longer holds. The new infinistesimals have an "order" (an infinitesimal of order one is a compact operator whose characteristic values μ_n are a big O of $(1/n)$. The novel point is that they have an integral, which in physics terms is given by the coefficient of the logarithmic divergence of the trace. Thus one obtains a new stage for the "calculus" and it is at the core of noncommutative differential geometry.

In Riemannian geometry the natural datum is the square of the line element, so that when computing the distance $d(A, B)$ between two points one has to minimize the integral from A to B along a continuous path of the square root of $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Now it is often true that "taking a square root" in a brutal manner as in the above equation is hiding a deeper level ofunderstanding. In fact this issue of taking the square root led Dirac to his famous analogue of the Schrödinger equation for the electron and the theoretical discovery of the positron. Dirac was looking for a relativistic invariant form of the Schröodinger equation. One basic property of that equation is that it is of first order in the time variable. The Klein-Gordon equation which is the relativistic form of the Laplace equation, is relativistic invariant but is of second order in time.

Dirac found away to take the square root of the Klein-Gordon operator using Clifford algebra. In fact (as pointed out to me by Atiyah) Hamilton had already written the magic combination of partial derivatives using his quaternions as coefficients and noted that this gave a square root of the Laplacian. When I was in St. Petersburg for Euler's 300'th, I noticed that Euler could share the credit for quaternions since he had explicitly written their multiplication rule in order to show that the product of two sums of 4 squares is a sum of 4 squares.

So what is the relation between Dirac's square root of the Laplacian and the above issue of taking the square root in the formula for the distance $d(A, B)$. The point is that one can use Dirac's solution and rewrite the same geodesic distance $d(A, B)$ in the following manner : one no longer measures the minimal length of a continuous path but one measures the maximal variation of a function : ie the absolute value of the difference $f(A) - f(B)$. Of course without a restriction on f this would give infinity, but one requires that the commutator $[D, f]$ of f with the Dirac operator is bounded by one.

Here we are in our "quantized calculus" stage, so that both the functions on our geometric space as well as the Dirac operator are all concretely represented in the same Hilbert space H. H is the Hilbert space of square integrable spinors and the functions act by pointwise multiplication. The commutator $[D, f]$ is the Clifford multiplication by the gradient of f so that when the function f is real, its norm is just the Sup norm of the gradient. Then saying that the norm of $[D, f]$ is less than one is the same as asking that f be a Lipschitz function of constant one ie that the absolute value of $f(A) - f(B)$ is less than $d(A, B)$ where the latter is the geodesic distance. For complex valued functions one only gets an inequality, but it suffices to show that the maximum variation of such f gives exactly the geodesic distance : ie we recover the geodesic distance $d(A, B)$ as Sup $f(A) - f(B)$ for norm of $[D, f]$ less than one.

Note that D has the dimension of the inverse of a length, ie of a mass. In fact in the above formula for distances in terms of a supremum the product of "f" by D is dimensionless and "f" has the dimension of a length since $f(A) - f(B)$ is a distance.

Now what is the intuitive meaning of D ? Note that the above formula measuring the distance $d(A, B)$ as a supremum is based on the lack of commutativity between D and the coordinates "f" on our space. Thus there should be a tension that prevents D from commuting with the coordinates. This tension is provided by the following key hypothesis "the inverse of D is an infinitesimal".

Indeed we saw in a previous post that variables with continuous range cannot commute with infinitesimals, which gives the needed tension. But there is more, because of the fundamental equation $\mathbf{ds} = 1/D$ which gives to the inverse of D the heuristic meaning of the line element. This change of paradigm from the $g_{\mu\nu}$ to this operator theoretic **ds** is the exact parallel of the change of the unit of length in the metric system to a spectral paradigm. Thus one can think of a geometry as a concrete Hilbert space representation not only of the algebra of coordinates on the space X we are interested in, but also of its infinitesimal line element **ds**. In the usual Riemannian case this representation is moreover irreducible. Thus in many ways this is analogous to thinking of a particle as Wigner taught us, ie as an irreducible representation (of the Poincaré group).

AC said...

Dear Arivero, thanks ! nice that Tao and myself are discussing the same thing. In fact my first compte rendu note (1970) was about selective ultrafilters and minimal nonstandard models constructed using ultraproducts. My belief is that the two points of view on infinitesimals are the reflection of the nuances existing already at the beginning of the invention of the calculus. The non-standard numbers in the sense of logics or ultrafilters are very close to the point of view of Leibniz.

July 17, 2007 at 7 :30 PM

AC said...

Dear Alon Levy

Yes, of course I am willing to put the post about nonstandard analysis on the carnival blog, thanks,

Alain

August 19, 2007 at 1 :57 PM

Friday, August 3, 2007

Paul's Seventies

I am just back from a very nice event around Paul Baum's seventies, which took place in Warsaw last Monday, thanks in particular to Piotr Hajac. I have known Paul since the summer of 1980 when we first met in Kingston. I really had, when I first met him, the impression of meeting l'"Homologie en personne". The more I got to know him through our very long collaboration, the better I enjoyed his clarity of mind and his relentless quest for simplicity and beauty. In many ways he succeeds indoing something very difficult, which Grothendieck advised in *Récoltes et Semailles*, namely to keep "une innocence enfantine" in front of mathematics. The dinner on monday night was comparable in intensity to the memorable one in Martin Walter's place, in Boulder, for Paul's sixties when the team Paul Baum - Raoul Bott forced Martin to search (again and again) his cellar for more bottles of wine to keep up with their drinking ability !.

Raoul Bott died in December 2005. Not long before, Paul went all the way to California to visit him and they talked together for an entire day. This type of faithfulness in friendship and understanding of what really matters, is an attitude towards life which Paul has and which I truly admire.

Monday, August 13, 2007
Harmonic mean
This "post" is mainly an attempt to see if one can manage to use formulas in the blog and discuss some real stuff somehow. The formulas should be really visible, a bit like with transparencies. So as a pretext, I'll start by discussing an issue related to the basic Ansatz :

$$\mathbf{ds} = D^{-1}$$

which gives the operator theoretic line element in terms of the Dirac operator in the general framework of "metric" noncommutative geometry. The kernel of the operator D is finite dimensional and one takes $\mathbf{ds}$ to vanish on that kernel. As was already discussed here, the knowledge of D gives back the metric. Moreover the noncommutative integral, in the form of the Dixmier trace, gives back the volume form. Thus the integral of a function f in dimension n is simply given by

$$⨍ f|\mathbf{ds}|^n$$

where the "cut" integral is the Dixmier trace ie the functional that assigns to an infinitesimal of order one the coefficient of the logarithmic divergency in the series that gives the sum of its eigenvalues.

I will not try to justify the heuristic definition of the line element any further. It is more interesting to put it to the test, to question it, and I will discuss an example of an issue which left me perplex for quite sometime but has a pretty resolution.

The point is to understand what happens when one takes the product of two noncommutative geometries. One gets the following relation for the squares of the corresponding Dirac operators :

$$D^2 = D_1^2 + D_2^2$$

where we abuse notations by removing the tensor product by the identity operator that normally goes with each of the operators D_j. Now this relation is quite different from the simple Pythagorean relation of the classical line elements whose square simply add up and it thus raises the question of reconciling the above Ansatz with the simple formula of addition of the squares of the Dirac operators. More generally, one can consider a bunch of NC spaces with Dirac operators D_μ and combine them as follows : One starts with a positive matrix of operators in Hilbert space :

$$g = (g^{\mu\nu}) \in M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$$

and one extends the above formula giving D^2 for a product of two spaces and forms the following sum :

$$D^2 = \sum_{\mu,\nu} D_\mu g^{\mu\nu} D_\nu^*$$

we make no commutativity hypothesis and even drop the self-adjointness of D_μ which is not needed. We want a formula for the inverse of the square of D ie for :

$$\mathbf{ds}^2 = D^{-2}$$

in terms of the inverse matrix :

$$g^{-1} = (g_{\mu\nu})$$

which plays a role similar to the $g_{\mu\nu}$ of Riemannian geometry, and of the operators

$$dz^\mu = D_\mu^{-1}$$

where the notation with z stresses the fact that we do not even assume self-adjointness of the various D_μ.

It sounds totally hopeless since one needs a formula for the inverse of a sum of noncommuting operators. Fortunately it turns out that there is a beautiful simple formula that does the job in full generality. It is reminiscent of the definition of distances as an infimum. It is given by :

$$\langle \xi, \mathbf{ds}^2 \xi \rangle = \operatorname{Inf} \sum_{\mu,\nu} \langle dz^\mu \xi^\mu, g_{\mu\nu} dz^\nu \xi^\nu \rangle$$

The infimum is taken over all decompositions of the given vector as a sum :

$$\sum_{\mu} \xi^{\mu} = \xi$$

Note that this formula suffices to determine the operator $\mathbf{ds}^2$ completely, since it gives the value of the corresponding positive quadratic form on any vector in Hilbert space. The proof of the formula is not difficult and can be done by applying the technique of Lagrange multipliers to take care of the above constraint on the free vectors ξ^{μ}.

AC said...
Dear Christophe
What I did was to embed small images inside the text, first I wrote a pdf file and then I extracted small portions of the pdf using adobe professional and saving them as jpeg.
September 7, 2007 at 4 :51 PM

Wednesday, September 5, 2007
News on K-front
Today the editorial board of the new Journal of K-theory put out a public statement, which we reproduce below : STATEMENT OF THE EDITORS OF THE "JOURNAL OF K-THEORY"

After several public statements and news articles regarding the Springer journal "K-theory" (KT), and the new "Journal of K-Theory" (JKT) to be distributed by Cambridge University Press (CUP), the mathematical community has become aware of ongoing changes. On behalf of the entire Editorial Board of the new JKT, we want to give as precise a picture of the situation as we can at the moment, especially to the authors. It is very important to us that the authors should not suffer as a result of the transition. Those authors who submitted papers to KT before August 2007, regardless of whether the paper has already been accepted or is just awaiting review, have three choices : 1) Choose another journal. 2) Maintain submission with KT for final review if necessary and publication if accepted. 3) Transfer their article to the new JKT. All authors who have not yet done so should please notify Professor Bak on the one hand, Professors Lueck and Ranicki on the other hand, about their choice, as soon as possible. For those who opt for choice 2, Professors Lueck and Ranicki have promised to take over the remaining editorial duties. We can guarantee that the authors who choose option (3) will have a smooth transition, with their articles progressing as if there has been no change. We will also do everything we can to help those who choose options (1) and (2). In particular, if the authors instruct us, we will be happy to forward to the journals of their choice the full information regarding the status of their articles. In 2004, because of growing dissatisfaction with Springer, the editorial board of KT authorized Prof. Anthony Bak, the Editor in Chief, to begin negotiations with other publishers. The editorial board was unhappy with the poor quality of the work done by Springer, for example the huge number of misprints in the published version of the articles, the long delay in publication and the high prices Springer was charging. The negotiations came to a conclusion in 2007. A new journal, entitled "Journal of K-theory" (JKT) will commence publication in late 2007. It will be printed by Cambridge University Press. Papers will appear earlier online, as "forthcoming articles". The title of JKT is currently owned by a private company. This situation is only meant as a temporary solution to restart publication of K-theory articles as soon as possible. It is the Board's intention to create a non-profit academic foundation and to transfer ownership of JKT to this foundation, as soon as possible, but no later than by the end of 2009, a delay justified by many practical considerations. This shift towards more academic control of journals is not new. We follow here a path opened by Compositio Mathematica, Commentarii Mathematici Helvetici, and others (see for instance the interesting paper of Gerard van der Geer which appeared in the Notices of the AMS in May 2004). We believe that such changes can help keep prices low. We trust in Prof. Bak's leadership for the launching of JKT and forming, together with the editorial board, the foundation to house the Journal. The statutes of the foundation will provide democratic rules governing the future course and development of the journal, including the election of the managing team. We hope to have provided a fair picture of the current situation, and we plan to issue another public statement when new developments come up. In case of further questions, please contact any of the signatories. Let us conclude from a broader perspective : The editorial board is committed to secure the journal's quality and long-term sustainability. Signatures : A. Bak, P. Balmer, S. Bloch, G. Carlsson, A. Connes, E. Friedlander, M. Hopkins, B. Kahn, M. Karoubi, G. Kasparov, A. Merkurjev, A. Neeman, T. Porter, J. Rosenberg, A. Suslin, Guoping Tang, B. Totaro, V. Voevodsky, C. Weibel, Guoliang Yu.

AC said...
Dear Peter
First I (ac) heard about this episode and checked its accuracy only now. If I had known earlier I would of course have done something.

What needs to be done for sure is to remove from all librairies the copy of the Journal with that terrible “data corruption”. As you say it is the responsibility of Springer to do that. They have been able to make the author sign an “excuse” as if any sensible person could believe that it was the intention of the author to have his paper appearing in that corrupted form ! ! !

Only Springer has the means to recall the volume and to replace it, and I am writing to them to ask that they do it. I don’t see what Kreck has to do with that, except if you consider that he represents Springer. The present crisis has its origin in innumerable printing problems since 2003-2004 (less serious than the above one fortunately), but just to quote examples nilpotent → impotent everywhere in a paper, 4 pages missing in the middle of a paper, the author of a ten pages paper spending more than a year of back and forth proofs with the publisher before getting a sensible version etc etc...

This resulted in permanent complaints of authors to Bak and no solution was found except to move to another publisher. The only sensible thing to do at this point is to move ahead, get the new JKT on the rails making sure that it will be ran in a democratic manner and stop all this sterile quarelling.
September 12, 2007 at 4 :31 PM

AC said... Good news !
I just got a positive answer from Catriona Byrne from Springer concerning the corrupted issue of K-theory which was discussed in this blog. I had sent an email asking if the corrupted volume could be destroyed and fortunately the answer is “yes” : “We agree. This is actually in the works right now. The corrected issue will have a covering note asking librarians to destroy the original issue, and pointing out that the online version is correct.”
September 13, 2007 at 7 :10 PM

AC said...
Update
I am really grateful to Catriona Byrne for her understanding of the situation and her help in removing the corrupted copy of K. I realise that the phrase :
“They have been able to make the author sign an “excuse” as if any sensible person could believe that it was the intention of the author to have his paper appearing in that corrupted form ! ! !” could be misunderstood and I would rather say “They have been able to publish an “excuse” of the author, as if any sensible person could believe that it was the intention of the author to have his paper appearing in that corrupted form ! ! !”

What I meant of course is that in my opinion the responsability for missing the “typos”, and in particular the disordered alphabetic listing of references, should be shared and not entirely endorsed by the author. What happened to the author in that case is something that could happen to any of us : some “data corruption” occured at some point in the publication process and he missed the typo in the proofreading process. Good typesetters ask us to update old bibliographical references and of course they double check things like the alphabetic ordering.
September 16, 2007 at 9 :12 AM

AC said...
A Scholarly Society Makes a Logical - and Symbolic - Move to Cambridge U. Press
By JENNIFER HOWARD
In scholarly-journal publishing, as in marriage, love can have very little to do with one’s decision to stay committed to a partner.

Lately, scholarly societies have been tempted to make alliances with well-heeled suitors. A commercial outfit like Springer or Wiley-Blackwell commands vast global marketing and distribution networks ; a specialized nonprofit publisher can offer publishing platforms and services that university presses may find hard to match. And such assets often help seal the deal.

The American Anthropological Association, for instance, announced in September that it would leave the

University of California Press for Wiley-Blackwell (The Chronicle, September 19).

And this year the American Astronomical Society abandoned the University of Chicago Press for IOP Publishing, part of the nonprofit Institute of Physics (The Chronicle, May 18).

But another society, the Association for Symbolic Logic, has reversed the trend and decided to ditch a commercial publisher for a university press. It has severed its ties to Springer, which owns and publishes the Journal of Philosophical Logic, a journal edited by the association, and formed an alliance with Cambridge University Press.

Together the association, which is known as ASL, and the press will start the Review of Symbolic Logic as a successor to the Springer-owned journal. Revenue from the new journal will be shared between the parties, while the association will retain editorial control.

All of the ASL editors of the Springer journal are switching over to the new journal, which will make its debut in June 2008, taking its place alongside the association's two other publications, The Journal of Symbolic Logic and The Bulletin of Symbolic Logic. (The group typesets those publications itself, and the American Mathematical Society handles printing and mailing.) Dues-paying members of the symbolic-logic group will receive the journal as a benefit of membership.

Those involved with the new Review say it will be broader in scope than its predecessor. The association brings together logicians who work in mathematics, philosophy, linguistics, computer science, cognitive science, and other fields. It envisions its new journal as a meeting place for work in several complementary areas, with an emphasis on philosophical logic and its applications, the history of philosophy of logic, and the philosophy and methodology of mathematics. Penelope Maddy, president of the association and a professor of logic and the philosophy of science at the University of California at Irvine, points to a number of "growth industries" that the Review will spotlight – for instance, how scholars in computational linguistics, game theory and decision theory, and cognitive science apply the tools and methods of philosophical logic. "It's all about logic," she says, "but you can come at logic from very different disciplinary perspectives."

"Different perspectives" would be a kind way to sum up the association's relationship with Springer. Thanks to the vicissitudes of corporate mergers, Springer is the latest in a line of commercial publishers to own the Journal of Philosophical Logic, which was founded in 1972. The association has edited it since 1987.

Working with Springer was a headache almost from the start, says G. Aldo Antonelli, coordinating editor of the journal and chairman of the department of logic and the philosophy of science at Irvine. Papers went missing, typesetting went awry. "Authors were up in arms," he says. The editors would submit clean manuscripts and "get page proofs back that were full of typos and errors."

The association even tried to buy the journal from Springer, but its offer was rebuffed. So in 2006, when Cambridge signed on to handle book projects for the group, talk quickly turned to a new journal as well.

Charles Erkelens, editorial director for the humanities at Springer, plays down the troubles in the relationship. "There has been an occasional article where things have gone wrong and we've fixed them again, but I have no bad relations with ASL in any way," he says.

The Journal of Philosophical Logic has done well for Springer, and the company will continue to publish it, with a new editorial board. "It's fine for philosophical logic to have more outlets for people to publish in," Mr. Erkelens says. "I still think the Journal of Philosophical Logic will remain the most important of those."

David Tranah, editorial director of mathematical sciences at Cambridge University Press, was matchmaker for both the books program and the new journal. Commercial publishers like Springer "have been vigorously courting learned societies," he says, but often "what they require is more than they can offer." Cambridge has vowed not to be so demanding. "We do not insist on ownership, we do not insist on retaining copyright," he says. "We want to explore possibilities for them. It's a different sort of partnership."

The union may be a meeting of minds, but both partners stand to gain in financial terms as well. Previously "we were putting in all this work and Springer was making pots of money," says Charles Steinhorn, the association's secretary-treasurer, who is a professor of mathematics at Vassar College. If Cambridge's calculations are correct, he says, "we should be able to support new scholarly activities" with the extra income - a graduate fellowship, perhaps, or research support. Meanwhile Cambridge has an incentive to be active on the journal's behalf, spreading the word through its networks of editors and marketers. The association's officers say they're over the moon. "We were nowhere near this with Springer," Ms. Maddy says. "Assuming the Review does as well as we think it will do, this is a great boon to the organization."

September 29, 2007 at 5 :01 PM
Anonymous said...
The reference for the story above is Chronicle of Higher Education, September 27, 2007.
October 5, 2007 at 10 :18 AM

Tuesday, September 18, 2007
Les motifs - ou le coeur dans le coeur
It is with this fascinating title that A. Grothendieck presents in *Récoltes et Semailles* (cfr. Promenade à travers une oeuvre ou l'Enfant et la Mère) the subject of motives : the deepest of the twelve research themes around which he developed his "long-run" research program that literally revolutionized the field of algebraic geometry in the decade 1958-68. Motives were envisaged as the "heart of the heart" of the new geometry (arithmetic geometry) that Grothendieck invented following a scientific strategy based on the introduction of a series of new concepts organized on a progressive level of generality : starting with schemes, topos and sites then continuing with the yoga of motives and motivic Galois groups and finally introducing anabelian algebraic geometry and Galois-Teichmuller theory.

If the notions of scheme and topos were the two crucial ideas which constituted the original driving force in the development of this new geometry – Grothendieck was evidently fascinated by the concepts of geometric point, space and symmetry – it is only with the notion of a motive that one eventually captures the deepest structure, the heart of the profound identity between geometry and arithmetic.

Grothendienck wrote very little about motives. The foundations are documented in his unpublished manuscript "Motifs" and were discussed on a seminar at the Institut des Hautes Études Scientifiques, in 1967. We know, by reading *Récoltes et Semailles*, that he started thinking about motives in 1963-64. J.P. Serre has included in his paper "Motifs" an extract from a letter that Grothendieck wrote to him in August 1964 in which he talks (rather vaguely, in fact) of the notions of motive, fiber functor, motivic Galois group and weights.

Motives were introduced with the ultimate goal to supply an intrinsic explanation for the analogies occurring among the various cohomological theories for algebraic varieties : they were expected to play the role of a universal cohomological theory (the motivic cohomology) and also to furnish a linearization of the theory of algebraic varieties, by eventually providing (this was Grothendieck's viewpoint) the correct framework for a successful attack to the Weil's Conjectures on the zeta function of an algebraic variety over a finite field.

Unlike in the framework of algebraic topology where the standard cohomological functor is uniquely characterized by the Eilenberg-Steenrod axioms in terms of the normalization associated to the value of the functor on a point, in algebraic geometry there is no suitable cohomological theory with integers coefficients, for varieties defined over a field k, unless one provides an embedding of k into the complex numbers. In fact, by means of such mapping one can form the topological space of the complex points of the original algebraic variety and finally compute the Betti (singular) cohomology. This construction however, does in general depend upon the choice of the embedding of k in the field of complex numbers. Moreover, Hodge cohomology, algebraic de-Rham cohomology, etale ℓ-adic cohomology furnish several examples of different cohomology functors which can be simultaneously associated to a given algebraic variety, each of which supplying a relevant information on the topological space.

Grothendieck theorized that this plethora of different cohomological data should be somewhat encoded systematically within a unique and more general theory of cohomological nature that acts as an internal "liaison" between algebraic geometry and the collection of available cohomological theories. This is the idea of the "motif", namely the common reason behind this multitude of cohomological invariants which governs and controls systematically all the cohomological apparatus pertaining to an algebraic variety or more in general to a scheme.

The original construction of a category M of (pure) motives over a field k starts with two preliminary considerations. The first consideration is that M should be the target of a natural contravariant functor connecting the category C of smooth, projective algebraic varieties over a field k to M. Such functor should map an object X in C to its associated motive $M(X)$. The second consideration is that this functor should, by construction, factor through any particular cohomological theory.

Now, keeping in mind this goal, one thinks about the axiomatizing process of a cohomological theory in algebraic geometry. This is done by introducing a contravariant functor $X \to H(X)$ from C to a graded abelian category, where the sets of morphisms between its objects form K-vector spaces (K is a field of characteristic zero, that for simplicity, I fix here equal to the rationals). One also would like that any correspondence $V \to W$ (an algebraic cycle in the cartesian product $V \times W$ that can be view as the graph of a multi-valued algebraic mapping) induces contravariantly, a mapping on cohomology and that the target category is suitably defined so that it contains among its objects any "Weil cohomological theory", namely a cohomology which satisfies among other axioms Poincaré duality and Künneth formula.

This preliminary disquisition helps one in formalizing the construction of the category of motives by following a three-steps procedure. One wishes to enlarges the category C in a precise way with the hope to produce also an abelian category. The three steps are shortly resumed as follows.

(1) One moves from C to a category with the same objects but where the sets of morphisms are the equivalence classes of rational correspondences. Here, the natural choice of the equivalence relation is the numerical equivalence relation as it is the coarsest one among the possible relations between algebraic cycles which can be seen to induce, via the cohomological axioms of any Weil cohomological theory, well-defined homomorphisms in cohomology.

(2) One enlarges the collection of objects of the category defined in (1), by formally adding kernels and images of projectors. This step is technically referred to as the "pseudo-abelian envelope" of the category defined in (1) and it is motivated by the expectation to define an abelian category of motives in which for instance, the Künneth formula can be applied.

(3) Finally, one considers the opposite of the category defined in (2).

Now, after having diligently applied all this abstract machinery, one would like to see a fruitful application of these ideas, in the form, for instance, of the proof of a major conjecture. However, one also perceives quite soon that a successful application of the yoga of motives is subordinated to a thorough knowledge of the theory of algebraic cycles, since the construction of the category M is centered on the idea of enlarging the sets of morphisms by implementing the notion of correspondence. It is for this reason that the Standard Conjectures (cohomological criteria for the existence of interesting algebraic cycles) were associated, since the beginning, to the theory of motives as they seem to play the "conditio sine qua non" a theory of motives has a concrete and successful application.

However, in order to put the Standard Conjectures in the right perspective and to avoid perhaps, an over-estimation of their importance, one should also record that Y. Manin gave in 1968, the first interesting application of these ideas on motives by producing an elegant proof of the Riemann-Weil hypothesis for non-singular three-dimensional projective unirational varieties over a finite field, without appealing to the Standard Conjectures. Moreover, we also know that the Weil's Conjectures have been proved by P. Deligne in 1974 without using neither the theory of motives nor the Standard Conjectures.

Almost forty years have passed since these ideas were informally discussed in the "Grothendieck's circle". An enlarged and in part still conjectural theory of mixed motives has in the meanwhile proved its usefulness in explaining conceptually, some intriguing phenomena arising in several areas of pure mathematics, such as Hodge theory, K-theory, algebraic cycles, polylogarithms, L-functions, Galois representations etc. Very recently, some new applications of the theory of motives to number-theory and quantum field theory have been found or are about to be developed, with the support of techniques supplied by noncommutative geometry and the theory of operator algebras.

In number-theory, a conceptual understanding of the interpretation proposed by A. Connes of the Weil explicit formulae as a Lefschetz trace formula over the noncommutative space of adèle classes, requires the introduction of a generalized category of motives which is inclusive of spaces which are highly singular from a classical viewpoint. Several questions arise already when one considers special types of zero-dimensional noncommutative spaces, such as the space underlying the quantum statistical dynamical system defined by J.B. Bost and Connes in their paper “Hecke algebras, type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking” (Selecta Math. (3) 1995). This space is a simplified version of the adèle classes and it encodes in its group of symmetries, the arithmetic of the maximal abelian extension of the rationals. A new theory of endomotives (algebraic and analytic) has been recently developed in “Noncommutative geometry and motives : the thermodynamics of endomotives” (to appear in Advances in Mathematics). The objects of the category of endomotives are noncommutative spaces described by semigroup actions on projective limits of Artin motives (these are among the easiest examples of pure motives, as they are associated to zero-dimensional algebraic varieties). The morphisms in this new category generalize the notion of (algebraic) correspondences and are defined by means of etale groupoids to account for the presence of the semigroup actions.

An open and interesting problem is connected to the definition of a higher dimensional theory of noncommutative motives and in particular the set-up of a theory of noncommutative elliptic motives and modular forms. A suitable generalization of the yoga of motives to noncommutative geometry has already produced some interesting results in the form, for example, of an analog in characteristic zero of the action of the Weil group on the etale cohomology of an algebraic variety. It seems quite exciting to pursue these ideas further : the hope is that the motivic techniques, once suitably transferred in the framework of noncommutative geometry may supply useful tools and produce even more substantial applications than those obtained in the classical commutative context.

1 comment :
AC said...
Dear Katia
Thanks for this beautiful post. Your question was left unanswered for sufficiently long now, and I’ll try (why not) to give some answer in a coming post. Of course it will be some (partial) answer from my own point of view and as such it will have zero pretence to being “the” answer.
October 4, 2007 at 1 :21 PM

Wednesday, October 31, 2007
HEART BIT 1
Katia’s last post ended with a provocative question motivated by Grothendieck’s description in *Récoltes et Semailles* of the “heart of the heart” of arithmetic geometry, namely the theory of motives. Her question was formulated like this :
——— What is the “heart of the heart” of noncommutative geometry ? ———
I’ll try to explain here that there is a definite “supplément d’âme” obtained in the transition from classical (commutative) spaces to the noncommutative ones. The main new feature is that “noncommutative spaces generate their own time” and moreover can undergo thermodynamical operations such as cooling, distillation etc.

This opens up completely new ways of handling geometric spaces and our work with Matilde Marcolli and Katia Consani is just one example of potential applications to number theory. It is closely related to the Riemann zeta function and is very close in spirit to Grothendieck’s ideas on motives so that it is not out of place in the present discussion of Katia’s question. The story starts by a qualitative distinction between spaces which comes from the classification (by von Neumann) of noncommutative algebras in types I, II and III. The commutative spaces are all of type I. When encoding a space X by an algebra A of (complex valued) functions on X one uses some structure on X to restrict the class of functions (e.g. to smooth functions on a smooth space) and the above distinction between types uses the coarsest possible structure which is the measure theory. The corresponding algebras (called von Neumann algebras) are quite simple to characterize abstractly : they are commutants in Hilbert space of some unitary representation. Since one can take the direct sum of algebras A and B, one can mix algebras of different types.

More precisely any von Neumann algebra decomposes uniquely as an integral of algebras which cannot be decomposed further and are called factors. A factor is a von Neumann algebra whose center is as small as it can be, namely is reduced to the complex numbers. The factors of type I are Morita equivalent to the complex numbers, and thus a type I factor really corresponds to the classical notion of “point” in a space X.

To understand geometrically what factors of type II and III look like, it is useful to describe the (von

Neumann) algebra A associated to the leaf space of a foliated manifold : (V, F). An element T of A assigns to each leaf an operator in the Hilbert space of square integrable functions on the leaf, and it makes sense to say that T is bounded, measurable, or zero almost everywhere. The algebraic operations are done leaf per leaf, and the algebra of bounded measurable elements modulo the negligible ones is a von Neumann algebra. The simplest example corresponds to the foliation whose leaf space is the noncommutative torus. It is the foliation of the two torus by the equation "$dy = a\ dx$" in flat coordinates. The corresponding von Neumann algebra is a factor when "a" is irrational and this factor is not of type I but of type II. To obtain type III examples one can take any codimension one foliation whose Godbillon-Vey invariant does not vanish. The integrable subbundle F defining a codimension one foliation is the orthogonal of a one form v and integrability gives dv as the wedge product of v by a one form w. The Godbillon-Vey invariant is the integral over V of the wedge product of w by dw when V is compact oriented of dimension three. In essence the form w is the logarithmic derivative of a transverse volume element and the GV invariant is an obstruction to finding a holonomy invariant tranverse volume element ie one which does not change when one moves along a leaf keeping track of the way the nearby leaves are developing.

More generally the factors of type II are those which possess a trace and those of type III are those which are neither of type I nor of type II. In the foliation context, a holonomy invariant tranverse volume element allows one to integrate the ordinary trace of operators and this yields a trace on the von Neumann algebra of the foliation.

Until the work of the Japanese mathematician Minoru Tomita, very few positive results existed on type III factors. The key result of Tomita is that a cyclic and separating vector v for a factor A in a Hilbert space H generates a one parameter group of automorphisms of A by the following recipee :

one considers the modulus square $S * S$ of the closable operator S which sends xv to $S(xv) = x * v$ for any x in A, and then raises it to the purely imaginary power "it". Tomita showed that the resulting unitary operator normalizes A and hence defines an automorphism of A. One obtains in this way a one parameter group of automorphisms of A associated to the choice of a cyclic and separating vector v. He also showed that the phase J of the above closable operator S yields an antiisomorphism of A with its commutant A' which coincides with JAJ. In his account of Tomita's work, Takesaki characterized the relation between the state defined by the cyclic and separating vector v and the one parameter group of automorphisms of Tomita as the Kubo-Martin-Schwinger (KMS) condition, which had been formulated in C^*-algebraic terms by the physicists Haag, Hugenholtz and Winnink.

The key result of my thesis (in 1972) is that the class modulo inner automorphisms of the Tomita automorphism group is in fact independent of the choice of the (faithful normal) state that is used in its construction. Needless to say it is this uniqueness that allows to define invariants of factors. The simplest is the subgroup $T(A)$ of R which is formed of the periods, namely the set of times t for which the corresponding automorphism is inner. This, together with the spectral invariant $S(A)$, led me to the classification of type III factors into subtypes III_s for s in $[0, 1]$ and the reduction from type III to type II and automorphisms done in my thesis except for the case III_1 which was later completed by Takesaki. All of this goes back to the beginning of the seventies and will suffice for this first heart beat. It is only the beginning of a long saga which is far from over hopefully, and whose main theme is this mysterious generation of an intrinsic "time" that emerges from the noncommutativity of a von Neumann algebra. Exactly as manifolds come with a natural "smooth" measure class, a noncommutative space X generally gives rise to a von Neumann algebra A which encodes the natural measure class on X. It is thus a totally new feature of the noncommutative world that the corresponding time evolution is well defined and gives a canonical homomorphism :

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathrm{Out}(A)$$
$$1 \to \mathrm{Int}(A) \to \mathrm{Aut}(A) \to \mathrm{Out}(A) \to 1$$

where the second line gives the definition of the group of outer automorphisms $\mathrm{Out}(A)$ of A as the quotient of the group $\mathrm{Aut}(A)$ of automorphisms by the normal subgroup $\mathrm{Int}(A)$ of inner automorphisms (which are obtained by conjugating by a unitary element of the algebra A).

AC said...
Dear Urs
What you need to understand is that all the interesting stuff here occurs when the number of degrees of freedom involved is infinite. A typical example is quantum statistical mechanics (such as a spin system

on a lattice). Systems occuring in quantum field theory, in the examples related to prime numbers are all involving infinitely many degrees of freedom and are most often of type III. Very simple quantum mechanical systems are of type I, of course and the deeper structure does not appear there. It has nothing to do with anomalies.

AC said...
Dear Urs
The time evolution is as "canonical" as it can be since any noncommutative algebra has inner automorphisms. Moreover one can show that the time evolution belongs to the center of $\mathrm{Out}(A)$!

If you take very simple examples as the lattice case you will find that an inner automorphism essentially ony affects what happens on finitely many lattice sites. In a simple translation invariant product situation, the hamiltonian (which generates the time evolution we are talking about) is an infinite sum of contributions of lattice sites and its essence is unaltered by a perturbation coming from finitely many terms in the sum. It is the fact that the sum is infinite and does not belong to the algebra of observables that creates the type III behavior.

You can slightly perturb this time evolution by an inner automorphism but its overall global action on the algebra of observables will remain essentially unaltered, since it will only be changed on finitely many of the degrees of freedom. Put in other words this "time evolution" of the algebra is taking place overall, on all degrees of freedom, whereas inner automorphisms only control a total of finitely many such degrees of freedom !

You need to carefully study various examples, including foliations, the set of primes, or the case of QFT to appreciate what is going on... (and I need to get some sleep at this point)...
October 31, 2007 at 10 :16 PM

AC said...
Dear Urs
It is not really nicely spelled out anywhere, so the best is to understand the basic idea in an example without entering in the technicalities. Consider the spin system on an infinite lattice.
The algebra of observables is the inductive limit of the finite dimensional algebras that come from tensor products of matrix algebras over finite subsets of the lattice. By construction these only involve finitely many lattice sites at a time. Thus an inner automorphism - since it is implemented by a unitary element of the algebra - really only "sees" finitely many degrees of freedom.
November 1, 2007 at 5 :49 PM

AC said...
Dear Anonymous
The space-time which allows to recover the Standard Model coupled to gravity is of type I, since it is the product of a manifold M by a finite space F ie a space whose algebra of coordinates is finite dimensional. It is not at this level that we expect to get "emergent time" but rather at the level of the algebra of observables in QG. The origin of this idea comes from Carlo Rovelli who - completely independently from the KMS story - had found by reflecting about basic philosophical issues in QG that the "time we feel" (as opposed to a time coordinate in space-time) should be of thermodynamical nature and should be tied up to a thermal state : the heat bath of the relic photon radiation which breaks naturally Lorentz invariance. The real thing now is to put one's hands on a good model for an algebra of spectral observables in QG. Some ingredients towards this are explained at the end of our forthcoming book with Matilde Marcolli. But I'd rather tell the story in one of the coming "heart beats" rather than explain it in a comment...
November 2, 2007 at 2 :42 PM

AC said...
Dear Anonymous
I don't like to be too negative in my comments. Li's paper is an attempt to prove a variant of the global trace formula of my paper in Selecta. The "proof" is that of Theorem 7.3 page 29 in Li's paper, but I stopped reading it when I saw that he is extending the test function h from ideles to adeles by 0 outside ideles and then using Fourier transform (see page 31). This cannot work and ideles form a set of measure 0 inside adeles (unlike what happens when one only deals with finitely many places).
July 3, 2008 at 7 :50 AM

AC said... 1/8/8
As an epilogue of this long-overview articles on the Workshop at Vanderbilt University we would like to thank all the speakers for their spontaneous and generous participation and for sharing their ideas with us about the field with one element and the new connection with NCG. We also would like to thank all the participants for coming to the talks and patiently listening to the discussions which were at times intense and certainly “very alive” and stimulating...

Monday, August 4, 2008
IRONY
In a rather ironical manner the first Higgs mass that is now excluded by the Tevatron latest results is precisely 170 GeV, namely the one that was favored in the NCG interpretation of the Standard Model, from the unification of the quartic Higgs self-coupling with the other gauge couplings and making the “big desert” hypothesis, which assumes that there is no new physics (besides the neutrino mixing) up to the unification scale. My first reaction is of course a profound discouragement, mixed with an enhanced curiosity about what new physics will be discovered at the LHC.
I'll end with these verses of Lucretius :
Suave, mari magno turbantibus aequora ventis,
e terra magnum alterius spectare laborem ;
non quia vexari quemquamst jucunda voluptas,
sed quibus ipse malis careas quia cernere suave est.

[Pleasant it is, when over a great sea the winds trouble the waters,
to gaze from shore upon another's tribulation :
not because any man's troubles are a delectable joy,
but because to perceive from what ills you are free yourself is pleasant.]

Tuesday, February 21, 2012
Galois
This is just a very short post for those interested in a basic talk about Galois, his relations with the French mathematicians of his time, and a general introduction to the “theory of ambiguity”. The talk is in French, available at http://www.alainconnes.org/fr/videos.php
Do not forget to click on the “HD” symbol on the screen to get a better quality of video..

Saturday, June 9, 2012
SAD NEWS
It is with profound sadness that we learn about the sudden death of Jean Louis Loday who fell by accident off his sailing boat on June 6th. We loose an outstanding mathematician with so many great achievements and a wonderful friend of many years.

Friday, August 10, 2012
A DRESS FOR THE BEGGAR ?

Since 4 years ago I thought that there was an unavoidable incompatibility between the spectral model and experiment. I wrote a post in this blog to explain the problem, on August 4 of 2008, as soon as the Higgs mass of around 170 GeV was excluded by the Tevatron. Now 4 years have passed and we finally know that the Brout-Englert-Higgs particle exists and has a mass of around 125 Gev.
In the meantime the problem of this discrepancy in the Higgs mass seemed very hard to resolve and this certainly slowed down quite a bit the interest in the spectral model since there seemed to be no easy way out and whatever one would try would not succeed in lowering the Higgs mass. The reason for this post today is that this incompatibility has now finally been resolved in a fully satisfactory manner in a joint work with my collaborator Ali Chamseddine, the paper is now on arXiv at http://fr.arxiv.org/pdf/1208.1030
What is truly remarkable is that there is no need to modify the spectral model in any way, it had already the correct ingredients and our mistake was to have neglected the role of a real scalar field which was already present and whose couplings (with the Higgs field in particular) were already computed in 2010 as one can see in http://fr.arxiv.org/pdf/1004.0464
This completely changes the perspective on the spectral model, all the more because the above scalar field has been independently suggested by several groups as a way for stabilizing the Standard Model in spite of the low experimental Higgs mass. So, after this fruitful interaction with experimental results, it is fair to conclude that there is a real chance that the spectral approach to high energy physics is on the right track for a geometric unification of all known forces including gravity.

A few words about the picture, the metaphor of the Standard Model as a beggar with a diamond inits pocket was suggested by Daniel Kastler a long time ago, so this explains the character on the right. The character on the left wears the symbols of NCG, ingredients of spectral nature which allow one to reconstruct the geometry from gravitational observables such as the spectrum of the Dirac operator, and to write down the action of the Standard Model coupled to gravity.

Tuesday, October 30, 2012
THE MUSIC OF SPHERES
The title of this post, the music of spheres, refers to a talk *The music of shapes* https://www.dailymotion.com/video/xuiyfo which I gave in Lille, on the 26th of September, on the occasion of a joint meeting with the Fields Institute. The talk is an introduction to the spectral aspect of noncommutative geometry and its implications in physics.

The starting point is the naive question "Where are we ?", or how is it possible to communicate to aliens our position in the Universe. This question leads, in the Riemannian framework of geometry, to that of determining a complete set of geometric invariants, both for a space and for a point in a space. The theme of Mark Kac, "Can one hear the shape of a drum ?" associates to a shape its musical scale which is the spectrum of the square root of the Laplacian, or better of the Dirac operator. After illustrating this familiar theme by many concrete examples we give a hint of the additional invariant which allows one to recover the geometric picture, namely the CKM invariant, and illustrate it, in a simplified form, in the simplest possible example of isospectral but non congruent shapes.

What about the relation with music ? One finds quickly that music is best based on the scale (spectrum) which consists of all positive integer powers q^n for the real number $q = 2^{1/12} \sim 3^{1/19}$. Due to the exponential growth of this spectrum, it cannot correspond to a familiar shape but to an object of dimension less than any strictly positive number. As explained in the talk, there is a beautiful space which has the correct spectrum : the quantum sphere of Poddles, Dabrowski, Sitarz, Brain, Landi et all. Its spectrum consists of a slight variant of the q^j where each appears with multiplicity $O(j)$. (See the original paper of Dabrowski and Sitarz
arXiv:math/0209048 (Banach Center Publications, 61, 49-58, 2003)
for the precise formula, and the paper of Brain and Landi
arXiv:math/1003.2150 for a variant and the many references to the mathematicians involved, my apologies to each of them for not puting the list here.)

We experiment in the talk with this spectrum and show how well suited it is for playing music. The new geometry which encodes such new spaces, is then introduced in its spectral form, it is noncommutative geometry, which is then confronted with physics. There the core is the spectral Standard Model of A. Chamseddine and the author which goes back to 1996. We tell the tale of the resilience of this model in its successive confrontations with experiments. Both the start and the end part of the talk are unusual. The previous talk was a talk by Alain Aspect on his recent experiments, with his collaborators, confirming experimentally the "delayed choice" Gedankenexperiment of John Wheeler. So the very beginning of my talk refers to Aspect's point about the subtelty of the concept of "reality" implied by the quantum. The thesis which I defend briefly is that the total lack of control that we have on the outcome of a quantum experiment (we control only the probabilities), is a "variability" which is more primordial than the classicalvariability governed by the passing of time (on which we have no control either). I also explain briefly why time will emerge from the quantum variability. The end part, in the question session, is also unusual, it is a long answer to a question which was posed by Alain Aspect.

The three speakers, Lille 9/26 : E. Ghys, A.Aspect, A. Connes
Update : The talk of Alain Aspect is now also available at the conference website
https://www.youtube.com/watch?v=vqEg4VnoCmc.

Sunday, November 9, 2014
PARTICLES IN QUANTUM GRAVITY
The purpose of this post is to explain a recent discovery that we did with my two physicists collaborators Ali Chamseddine and Slava Mukhanov. We wrote a long paper *Geometry and the Quantum : Basics* https://arxiv.org/abs/1411.0977 which we put on the arXiv, but somehow I feel the urge to explain the result in non-technical terms. The subject is the notion of particle in Quantum Gravity. In particle physics there is a well accepted notion of particle which is the same as that of irreducible representation of the Poincaré group. It is thus natural to expect that the notion of particle in Quantum Gravity will involve irreducible representations in Hilbert space, and the question is "of what ?".

What we have found is a candidate answer which is a degree 4 analogue of the Heisenberg canonical commutation relation $[p, q] = ih$. The degree 4 is related to the dimension of space-time. The role of the operator p is now played by the Dirac operator D. The role of q is played by the Feynman slash of real fields, so that one applies the same recipe to spatial variables as one does to momentum variables. The equation is then of the form $E(Z[D, Z]^4) = \gamma$ where γ is the chirality and where the E of an operator is its projection on the commutant of the gamma matrices used to define the Feynman slash.

Our main results then are that :

1) Every spin 4-manifold M (smooth compact connected) appears as an irreducible representation of our two-sided equation.

2) The algebra generated by the slashed fields is the algebra of functions on M with values in $A = M_2(H) \oplus M_4(C)$, which is exactly the slightly noncommutative algebra needed to produce gravity coupled to the Standard Model minimally extended to an asymptotically free theory.

3) The only constraint on the Riemannian metric of the 4-manifold is that its volume is quantized, which means that it is an integer (larger than 4) in Planck units.

The result 1) is a consequence of deep results in immersion theory going back to the work of Smale, and also to geometric results on the construction of 4-manifolds as ramified covers of the 4-sphere, where the optimal result is a result of Iori and Piergallini asserting that one can always assume that the ramification occurs over smooth surfaces and with 5 layers in the ramified cover. The dimension 4 appears as the critical dimension because finding a given manifold as an irreducible representation requires finding two maps to the sphere such that their singular sets do not intersect. In dimension n the singular sets can have (as a virtue of complex analysis) dimension as low as $n-2$ (but no less) and thus a general position argument works if $(n-2)+(n-2)$ is less than n, while $n=4$ is the critical value.

The result 2) is a consequence of the classification of Clifford algebras. When working in dimension 4, the sphere lives in five dimensional Euclidean space and to write its equation as the sum of squares of the five coordinates one needs 5 gamma matrices. The two Clifford algebras $Cliff(+,+,+,+,+)$ and $Cliff(-,-,-,-,-)$ are respectively $M_2(H) + M_2(H)$ and $M_4(C)$. Thus taking an irreducible representation of each of them yields respectively $M_2(H)$ and $M_4(C)$.

The result 3) comes from the index formula in noncommutative geometry. One shows that the degree 4 equation implies that the volume of the manifold (which is defined as the leading term of the Weyl asymptotics of the eigenvalues of the Dirac operator) is the sum of two Fredholm indices and is thus an integer. It relies heavily on the cyclic cohomology index formula and the determination of the Hochschild class of the Chern character. The great advantage of 3) is that, since the volume is quantized, the huge cosmological term which dominates the spectral action is now quantized and no longer interferes with the equations of motion which as a result of our many years collaboration with Ali Chamseddine gives back the Einstein equations coupled with the Standard Model.

The big plus of 2) is that we finally understand the meaning of the strange choice of algebras that seems to be privileged by nature : it is the simplest way of replacing a number of coordinates by a single operator. Moreover as the result of our collaboration with Walter van Suijlekom, we found that the slight extension of the SM to a Pati-Salam model given by the algebra $M_2(H) \oplus M_4(C)$ greatly improves things from the mathematical standpoint while moreover making the model asymptotically free ! (see Beyond the spectral standard model, emergence of Pati-Salam unification.) To get a mental picture of the meaning of 1), I will try an image which came gradually while we were working on the problem of realizing all spin 4-manifolds with arbitrarily large quantized volume as a solution to the equation.
"The Euclidean space-time history unfolds to macroscopic dimension from the product of two 4-spheres of Planckian volume as a butterfly unfolds from its chrysalis."

Les billets d'Alain Connes sur le blog http://noncommutativegeometry.blogspot.com

Dimanche 25 Février 2007
Réel et complexe
Je voudrais discuter d'une "autre entrée" dans les textes parallèles que Masoud a présentés dans son billet.

Du côté théorie des fonctions, on parle de "variables réelles et complexes". Un livre parfait d'introduction à cela est *"Analyse réelle et complexe"* de W. Rudin (McGraw-Hill). C'est un classique et cela reste l'une des meilleures entrées dans le sujet. Ce que l'on y apprend, c'est l'interaction constante entre les techniques à "variable réelle" comme l'intégrale de Lebesgue, la différentiabilité presque partout, etc., et les techniques à "variable complexe". Il y a une citation d'André Weil qui ressemble à "Le monde complexe est beau, le monde réel est sale". On pourrait être tenté d'ignorer le "monde réel" et de ne travailler que dans le paradigme à variable complexe dans lequel "toute" fonction est holomorphe et ainsi infiniment différentiable etc... C'est bien, et on peut parcourir quelque distance avec ça, si ce n'est que la plupart des résultats profonds d'analyse complexe reposent sur l'analyse réelle. Alors maintenant qu'en est-il de l'autre entrée dans le texte en parallèle ? C'est

Variable complexe......................	Opérateur sur l'espace de Hilbert
Variable réelle............................	Opérateur auto-adjoint

où j'ai légèrement réécrit l'entrée précédente en

Fonctions $f : X \to C$..................	Opérateurs sur l'espace de Hilbert

du billet de Masoud pour souligner que la colonne de droite fournit un modèle idéal de cette vaste notion qu'est la notion de "variable"... L'ensemble des valeurs de la variable est le spectre de l'opérateur, et le nombre de fois où la valeur est atteinte est la multiplicité spectrale. Les variables continues (les opérateurs à spectre continu) coexistent allègrement avec les variables discrètes précisément à cause de la non-commutativité des opérateurs.

Le calcul fonctionnel holomorphe donne un sens à $f(T)$ pour toute fonction holomorphe f sur le spectre de T, et un résultat profond contrôle le spectre de $f(T)$. Le fait vraiment incroyable est qu'alors que pour les opérateurs généraux T dans l'espace de Hilbert, les seules fonctions $f(z)$ qui peuvent être appliquées à T sont les fonctions holomorphes (sur le spectre de T), la situation change drastiquement quand on travaille sur des opérateurs auto-adjoints : pour $T = T^*$, l'opérateur $f(T)$ a du sens pour toute fonction f ! On peut prendre un crayon et dessiner le graphe d'une fonction, elle n'a pas besoin d'être continue... même pas continue par morceaux, on peut prendre n'importe quoi qui nous vient à l'esprit... (d'un point de vue technique, la seule contrainte sur f est qu'elle soit partout mesurable mais personne ne peut construire explicitement une fonction qui ne remplisse pas cette condition !)... De plus, un opérateur borné est une fonction de T (i.e. est de la forme $f(T)$) si et seulement s'il partage toutes les symétries de T (i.e. s'il commute avec tous les opérateurs qui commutent avec T).

Je me rappelle que très tôt, dans ma rencontre avec les mathématiques, c'est vraiment ce fait-là qui m'a convaincu du pouvoir des techniques de l'espace de Hilbert en proche relation avec l'opération d'adjonction $T \to T^*$. C'était suffisant pour résister à la tentation de commencer directement dans le "monde complexe" de la géométrie algébrique qui attirait les débutants à ce moment-là, qui suivaient l'aura de Grothendieck qui décrivait si bien sa première rencontre avec ce monde-là : *"Je me rappelle encore de cette impression saisissante (toute subjective certes), comme si je quittais des steppes arides et revêches, pour me retrouver soudain dans une sorte de "pays promis" aux richesses luxuriantes, se multipliant à l'infini partout où il plaît à la main de se poser, pour cueillir ou pour fouiller..."*

AC a dit...
"anonymous", le point est que la classe des fonctions arbitraires (d'analyse réelle) est la classe de celles qui opèrent sur des opérateurs auto-adjoints, alors que les fonctions holomorphes opèrent sur des opérateurs généraux T. Le cas des opérateurs normaux ($[T, T^*] = 0$) est juste "à deux variables" et n'a rien à voir avec l'analyse complexe. Quand la classe des fonctions est plus petite, on attend plus de propriétés, mais ça ne signifie pas que c'est "plus facile" (c'est plutôt le contraire) et donc l'analogie ne va pas en arrière...
Février 26, 2007 à 8 :42 AM

Mercredi 7 Mars 2007
Le rêve mathématique
J'imagine qu'une des utilités possible d'un blog tel que celui-ci, est que c'est un espace de liberté où l'on peut raconter des choses qui n'auraient pas leur place dans un papier de math "sérieux". Le bazar technique fini trouve sa place dans ces papiers et c'est une bonne chose que les mathématiciens maintiennent une exigence standard élevée dans le style d'écriture des articles car si ce n'était pas le cas, on perdrait vite le contrôle de la différence entre ce qui est effectivement prouvé et ce qui est juste un "souhait de vérité". Mais cependant, cette exigence ne laisse pas de place pour la source plus profonde, de nature poétique, qui met les choses en mouvement très tôt dans les étapes du processus mental, et qui amène à la découverte de nouveaux faits avérés ("durs").

Grothendieck a exprimé cela de manière très vive dans *Récoltes et semailles* : *"L'interdit qui frappe le rêve mathématique, et à travers lui, tout ce qui ne se présente pas sous les aspects habituels du produit fini, prêt à la consommation. Le peu que j'ai appris sur les autres sciences naturelles suffit à me faire mesurer qu'un interdit d'une semblable rigueur les aurait condamnées à la stérilité, ou à une progression de tortue, un peu comme au Moyen Age où il n'était pas question d'écornifler la lettre des Saintes Ecritures. Mais je sais bien aussi que la source profonde de la découverte, tout comme la démarche de la découverte dans tous ses aspects essentiels, est la même en mathématique qu'en tout autre région ou chose de l'Univers que notre corps et notre esprit peuvent connaitre. Bannir le rêve, c'est bannir la source - la condamner à une existence occulte".*

J'essaierai de réagir au billet de Masoud à propos des pavages et de donner une description heuristique d'une caractéristique qualitative de base des espaces non-commutatifs qui est parfaitement illustrée par les pavages de Penrose T du plan. Étant données deux tuiles de base, la fléchette et le cerf-volant de Penrose (ceux montrés sur le dessin), on peut paver le plan avec ces deux tuiles (avec une condition de concordance sur les couleurs des arêtes des pièces) mais aucun tel pavage n'est périodique. Deux pavages sont les mêmes si on peut les amener l'un sur l'autre par une isométrie du plan. Il y a plein d'exemples de pavages qui ne sont pas identiques.

L'ensemble T de tous les pavages du plan par les deux tuiles est un ensemble très étrange à cause du fait suivant : "Tout motif fini de tuiles dans un pavage par des fléchettes et des cerfs-volants apparaît, un nombre infini de fois, dans n'importe quel autre pavage contenant les mêmes tuiles".

Cela signifie qu'il est impossible de décider localement quel pavage on est en train de considérer. Les deux pavages de toute paire de pavages peuvent être mis en correspondance avec des grands morceaux arbitraires et il n'y a pas moyen de les différencier en regardant seulement des portions finies de chacun d'entre eux. Cela est en grand contraste avec les nombres réels puisque si deux nombres réels sont différents, leur expansion décimale sera différente suffisamment loin dans leurs chiffres. Je me rappelle avoir assisté il y a longtemps à un exposé de Roger Penrose dans lequel il superposait deux transparents contenant un pavage chacun et il montrait l'impression visuelle étrange obtenue en superposant des grandes parties de l'un sur l'autre... Il exprimait ainsi le sentiment intuitif qu'on a devant la richesse de ces "variations sur le même point" comme étant similaires aux "fluctuations quantiques". Un espace comme l'espace T des pavages de Penrose est en effet un exemple prototype d'un espace non-commutatif. Puisque ses points ne peuvent pas être distingués les uns des autres localement, on découvre qu'il n'y a pas de fonction à valeurs réelles ou complexes intéressantes sur un tel espace qui s'avère ainsi différent d'un espace comme la droite réelle R et que cet espace ne peut pas être analysé au moyen des fonctions à valeurs réelles ordinaires. Mais si on utilise le dictionnaire, on trouve que cet espace T est parfaitement codé par une algèbre (non-commutative) de q-nombres qui rend compte de son aspect "quantique". Voir le livre http://alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf pour davantage de détails.

Dans un commentaire au billet de Masoud sur les pavages, la question a été posée de la relation entre les pavages apériodiques et les nombres premiers. La notion géométrique, analogue à celle de pavage apériodique, qui correspond en effet à celle de nombres premiers est celle de Q-treillis. Cette notion a été introduite dans notre travail commun avec Matilde Marcolli et est simplement donnée par le couple d'un réseau L dans R avec une application additive de Q/Z dans QL/L. Deux Q-treillis sont commensurables quand leurs treillis le sont (ce qui signifie que leur somme est encore un treillis) et quand les applications s'accordent (modulo la somme). L'espace X des Q-treillis à commensurabilité près est naturellement doté d'une action de mise à l'échelle (qui affecte le treillis et l'application) et d'une action du groupe des automorphismes de Q/Z par composition. À nouveau, comme dans le cas des pavages, l'espace X est un espace non-commutatif typique qui n'a pas de fonctions intéressantes. Il est cependant parfaitement encodé par une algèbre non-commutative et la cohomologie naturelle (la cohomologie cyclique) de cette algèbre peut être calculée en fonction d'un espace adéquat des distributions sur X, comme on a pu le montrer dans notre travail joint avec Consani et Marcolli.

Il y a deux points principaux alors, le premier est que les zéros de la fonction zêta de Riemann apparaissent comme un spectre d'absorption (i.e. comme un conoyau) de la représentation du groupe des fonctions de mise à l'échelle dans la cohomologie ci-dessus, dans le secteur où le groupe des automorphismes de Q/Z agit trivialement (les autres secteurs sont étiquetés par des caractères de ce groupe et ils fournissent les zéros des fonctions L correspondantes).

Le second point est que si l'on applique la formule de Lefschetz comme elle a été formulée au sens théorique des distributions par Guillemin et Sternberg (après Atiyah et Bott), on obtient les formules explicites de Riemann-Weil de la théorie des nombres qui relie la distribution des nombres premiers aux zéros de zêta. Un premier fait incroyable est que l'on n'a même pas besoin de définir la fonction zêta (ou les fonctions L), mais seulement son prolongement analytique, pour obtenir les zéros qui apparaissent comme un spectre. Le second est que les formules explicites de Riemann-Weil font intervenir des valeurs principales délicates d'intégrales divergentes dont la formulation utilise la constante d'Euler et le logarithme de 2π, et que cette combinaison apparaît exactement quand on calcule l'opérateur trace théorique, et ainsi l'égalité de la trace avec la formule explicite peut difficilement être un accident. Après le papier initial, une avancée importante a été effectuée par Ralf Meyer qui a montré comment prouver les formules explicites en utilisant le paradigme fonctionnel analytique ci-dessus (plutôt que l'intégrale de Cauchy).

Cela éclairera je l'espère le commentaire de Masoud sur le sujet rusé de l'utilisation de la géométrie non-commutative dans une approche vers RH. C'est un sujet délicat parce que dès que quelqu'un commence à discuter de n'importe quoi en lien avec RH, cela engendre des attitudes irrationnelles. Par exemple, j'ai été un temps aveuglé par la possibilité de se restreindre aux zéros critiques, en utilisant un espace de fonctions adéquat, plutôt que d'essayer de suivre la trace réussie d'André Weil et de développer la géométrie non-commutative jusqu'au point où son argument dans le cas des caractéristiques positives pourrait être transplanté. Nous avons maintenant commencé à marcher sur cette trace dans notre papier commun avec Consani et Marcolli, et alors que l'espoir d'atteindre le but est encore plutôt lointain, c'est une grande motivation que de développer les outils manquants de la géométrie non-commutative. Comme premier but, on devrait avoir comme objectif de traduire la preuve de Weil dans le cas des corps de fonctions dans le paradigme de la géométrie non-commutative. Relativement à ce but, et le papier de Benoit Jacob et celui de Consani et Marcolli que David Goss a mentionné dans son récent billet ouvrent la voie. Je terminerai par une plaisanterie inspirée du mythe européen de Faust, à propos d'un mathématicien qui essaie de faire une bonne affaire avec le Diable pour une preuve de l'hypothèse de Riemann. Cette blague m'a été racontée il y a quelque temps par Ilan Vardi et je l'utilise avec joie dans des exposés parfois, ici je vais la raconter en français car c'est plus facile de ce côté de l'Atlantique, mais elle est facile à traduire...

La petite histoire veut qu'un mathématicien ayant passé sa vie à essayer de résoudre ce problème se décide à vendre son âme au Diable pour enfin connaître la réponse. Lors d'une première rencontre avec le Diable, et après avoir signé les papiers de la vente, il pose la question "L'hypothèse de Riemann est-elle vraie ?" Ce à quoi le Diable répond "Je ne sais pas ce qu'est l'hypothèse de Riemann" et après les explications prodiguées par le mathématicien "hmm, il me faudra du temps pour trouver la réponse, rendez-vous ici à minuit, dans un mois". Un mois plus tard le mathématicien (qui a vendu son âme) attend à minuit au même endroit... minuit, minuit et demi... pas de Diable... puis vers deux heures du matin alors que le mathématicien s'apprête à quitter les lieux, le Diable apparaît, trempé de sueur, échevelé et dit "Désolé, je n'ai pas la réponse, mais j'ai réussi à trouver une formulation équivalente qui sera peut-être plus accessible !".

Mardi 20 Mars 2007
Temps
Je vais essayer de décrire à grands traits les étapes qui ont amené l'émergence du temps de la non-commutativité dans les algèbres d'opérateurs. Cela répondra je l'espère aux questions de Paul et Sirix (au moins en partie) et à celles d'Urs.

D'abord j'expliquerai la formule basique due à Tomita qui associe à un état L un groupe à un paramètre d'automorphismes. Le fait de base est qu'on donne du sens à l'application $x \to s(x) = LxL^{-1}$ comme application (non-bornée) de l'algèbre dans elle-même puis on prend ses puissances complexes s^{it}. Pour définir cette application, on compare juste les deux formes bilinéaires sur l'algèbre donnée par $L(xy)$ et $L(yx)$. Sous certaines conditions de non-dégénérescence sur L cela donne un isomorphisme de l'algèbre avec son espace linéaire dual et ainsi on peut trouver une application s de l'algèbre dans elle-même telle que $L(yx) = L(xs(y))$ pour tout x et y.

On peut vérifier à ce niveau très formel que s vérifie $s(ab) = s(a)s(b)$:
$L(abx) = L(bxs(a)) = L(xs(a)s(b))$.

Ainsi toujours à ce niveau très formel, s est un automorphisme de l'algèbre, et la meilleure façon de la considérer, c'est de la voir comme $x \to LxL^{-1}$ où on respecte l'ordre cyclique des termes en écrivant $Lyx = LyL^{-1}Lx = LxLyL^{-1}$. Maintenant, tout ceci est formel et pour le rendre "réel", on a seulement besoin de la structure la plus basique d'espace non-commutatif, c'est-à-dire de la théorie de la mesure. Cela signifie que l'algèbre qu'on étudie est une algèbre de von Neumann, et qu'on a besoin de très peu de structure pour travailler puisque l'algèbre de von Neumann d'un espace non-commutatif contient seulement sa théorie de la mesure, ce qui constitue très peu de structure en fait. Ainsi, le principal résultat de Tomita (qui a d'abord rencontré beaucoup de scepticisme de la part des spécialistes du sujet, a été ensuite exposé avec succès par Takesaki dans ses notes de cours et est appelé la théorie de Tomita-Takesaki) est que quand L est un état fidèle normal sur une algèbre de von Neumann M, les puissances complexes de l'application associée $s(x) = LxL^{-1}$ ont du sens et définissent un groupe à un paramètre d'automorphismes s_L de M.

Il y a de nombreux états normaux fidèles sur une algèbre de von Neumann et du coup, beaucoup de groupes s_L d'automorphismes à un paramètre qui lui correspondent. C'est ici que le truc des matrices 2×2 entre en scène (Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, 274, 1972, voir AC-biblio10.pdf) et montre qu'en fait, les groupes d'automorphismes s_L sont tous les mêmes modulo les automorphismes intérieurs !

Ainsi, si on appelle $\mathrm{Out}(M)$ le quotient du groupe des automorphismes de M par le sous-groupe normal des automorphismes intérieurs, on obtient un groupe complètement canonique d'automorphismes du groupe additif des nombres réels $R : \delta : R \to \mathrm{Out}(M)$ et c'est ce groupe que j'ai toujours vu comme un candidat extrêmement alléchant pour le "temps émergent" en physique.

Bien sûr cela donne immédiatement des invariants des algèbres de von Neumann tels que le groupe $T(M)$ des "périodes" de M qui est le noyau du morphisme de groupes ci-dessus. Ceci est la base de la classification des facteurs et de la réduction du type III au type II + automorphismes que j'ai effectuée en Juin 1972 et publié dans ma thèse (avec le cas III_1 manquant complété plus tard par Takesaki).

Ce "temps émergent" est non trivial quand les espaces non-commutatifs considérés sont loin d'être "'classiques". C'est par exemple le cas pour l'espace des feuilles de feuilletages tels que les feuilletages d'Anosov pour les surfaces de Riemann et également pour l'espace des Q-treillis modulo le facteur d'échelle dans notre travail conjoint avec Matilde Marcolli.

Le véritable problème alors est d'établir le lien avec le temps de la physique quantique. Par les calculs de Bisognano-Wichmann, on sait que les s_L pour la restriction de l'état vide à l'algèbre locale en théorie quantique des champs associée à une région de coin de Rindler (définie par $x_1 > \pm x_0$) est en fait l'évolution de cette algèbre selon le "temps propre" de la région. Cela est lié à la thermodynamique des trous noirs et à la température d'Unruh. Il y a toute une littérature sur ce qui se passe en théorie des champs conformes en dimension 2. Je discuterai du problème réel ci-dessus de la connexion avec le temps en physique quantique dans un autre billet.

AC a dit... Urs : Oui, ce qui se passe en fait c'est que pour tout système quantique à un nombre infini de degrés de liberté, l'hamiltonien H n'appartient pas à l'algèbre des observables. Ainsi, les automorphismes correspondant ne sont pas intérieurs. Pour voir ce qui se passe, il est plus simple de prendre le cas d'un système de spins sur un réseau. L'algèbre des observables est la limite inductive des produits tensoriels finis des algèbres de matrices, une pour chaque site du réseau. L'halmitonien H est, même dans le cas le plus simple sans interaction, une somme infinie d'hamiltoniens associés à chaque site du réseau. Ainsi, il n'appartient pas à l'algèbre des observables et le groupe à un paramètre correspondant n'est pas intérieur (à la fois dans la fermeture de la norme i.e. la C^*-algèbre, et également dans la fermeture faible)... En théorie quantique des champs, la situation est complètement similaire et a bien sûr une infinité de degrés de liberté dès le départ...

26 Mars 2007 à 8 :53 AM

Dirac et le fait d'être entier

Dans le premier article sur la "seconde quantisation", i.e. dans l'article "La théorie quantique de l'émission et de la radiation", le processus de seconde quantisation est introduit et est à nouveau lié au caractère "entier". Cette fois, ce n'est pas l'index de Fredholm qui est derrière l'intégralité (le fait d'être entier) mais le simple fait suivant : si un opérateur a satisfait $[a, a^*] = 1$, alors le spectre de a^*a est contenu dans $N*$, l'ensemble des entiers positifs (comme cela découle de l'égalité entre les spectres de aa^* et de a^*a excepté potentiellement pour 0)... La seconde quantisation est simplement obtenue en remplaçant les nombres complexes ordinaires a_j qui étiquettent l'expansion de Fourier ordinaire du champ électromagnétique par les variables non-commutatives vérifiant $[a_j, a_j^*] = 1$... (plus précisément, le 1 est remplacé par $\hbar\nu$ où ν est la fréquence du mode de Fourier). Cet exemple montre bien sûr que l'intégralité (caractère d'être entier) et que la non-commutativité sont étroitement reliés... Alors que l'index de Fredholm est un bon modèle pour les entiers relatifs (positifs ou négatifs), le aa^* pour $[a, a^*] = 1$ est un bon modèle pour les entiers positifs...

Mercredi 25 Avril 2007

Un autre développement récent très surprenant a été décrit dans l'exposé d'U. Haagerup sur son travail conjoint (je pense que c'est avec Magdalena Musat mais je n'en suis pas sûr, cet article n'est pas encore sorti) sur la classification des facteurs modulo les isomorphismes des espaces d'opérateurs associés. Il a donné une surprenante condition nécessaire et suffisante pour la classe des facteurs hyperfinis de type III_1 : que le flot des poids admette une mesure invariante de probabilité. (On sait que c'est le cas pour l'algèbre de von Neumann d'un feuilletage à classe de Godbillon-Vey non nulle). Ce cas particulier suggère que la condition nécessaire et suffisante devrait être la "commensurabilité" des flots de poids et l'idée de Mackey de voir un flot ergodique comme un "sous-groupe virtuel" du groupe additif R serait essentiel pour développer la notion appropriée de "commensurabilité" des flots ergodiques.

J'étais absent au début de la semaine à cause d'un ennuyeux voyage cours en Suède (les exposés "Witten" d'Atiyah sont toujours ennuyeux) et j'ai entendu un exposé vraiment intéressant de Nirenberg qui suggère que l'exposant de Holder 1/3 qui entre comme limite de régularité dans la formule du nombre d'enroulement de Kahane correspond au $3 = 2 + 1$ de la séquence longue exacte de périodicité en cohomologie cyclique. Il y a également une autre conférence qui a lieu toute la semaine à Paris, organisée par Vincent Rivasseau.

Samedi 26 Mai 2007

Meeting à Ascona sur Pauli et Jung

Merci à Masoud de maintenir le blog en vie au milieu de tous ces voyages pour des conférences. La dernière à laquelle j'ai assisté s'est terminée aujourd'hui et était dédiée aux idées philosophiques de Pauli. C'était assez intéressant et cela m'a donné l'occasion d'avoir une meilleure connaissance de ces idées. Un exposé intéressant a été donné par Rafael Nunez "D'où viennent les mathématiques ? Pauli, Jung, et la science cognitive comtemporaine" avec une tentative courageuse de rejeter le platonisme (et en particulier le point de vue de Pauli) en utilisant la "science cognitive contemporaine". L'exposé était vraiment intéressant, en particulier dans la représentation du futur comme un mouvement relatif dans des expressions de la forme "l'hiver arrive" or "nous arrivons à la fin de l'année", ou bien dans l'exemple d'un infâme dictateur qui a successivement dit : "Le communisme nous a amenés au bord du goufre" et "aujourd'hui nous avons fait un grand pas en avant". Malheureusement, j'ai raté l'exposé d'Arthur Miller "Quand Pauli a rencontré Jung - et ce qui est arrivé ensuite"... Mais j'ai pu lui parler directement et j'ai été très intéressé par ces images que Jung montrait à Pauli après avoir entendu ses rêves. J'ai dû donner un exposé plutôt improvisé mercredi matin (à propos de la nature de la réalité mathématique et également de ses relations avec la physique) et ai pu tout juste le faire à temps, parce que mon avion vers Milan avait été annulé la veille (grève du contrôle aérien) et que j'avais dû y aller en train. Cela m'a pris toute la journée et le seul moyen possible pour atteindre Ascona à temps a été de louer une voiture à Milan et de rouler jusque-là au milieu de la nuit. J'ai fait ça parce que je déteste vraiment accepter de donner un exposé et ne pas être capable de le faire au dernier moment mais il y avait là une sorte d'"effet Pauli" qui a rendu difficile mon atteinte du lieu à temps...

Jürg Fröhlich était absent et l'exposé sur le travail de Pauli a été fait par Harald Atmanspacher qui a remplacé Fröhlich au pied levé. Ce qui était vraiment incroyable dans ce meeting, c'est que les exposés étaient suivis de longues et passionnantes discussions qui duraient habituellement plus d'une demi-heure et qu'on en apprenait beaucoup, juste par ces si nombreuses interactions.

AC a dit...
Cher Nic, oui et c'était un point très plaisant de l'exposé. Je partage complètement ce point de vue que le passé est la seule chose que nous contrôlons et en fait, je crois que nous essayons seulement de réarranger le passé de manière à ce qu'il colle avec ce que le présent nous donne...

30 Mai 2007 à 10 :09 AM
AC a dit...
Anonymous, l'exposé d'Arthur Miller était basé sur un livre dont la publication est programmée l'année prochaine. On devra donc attendre pour celui-là.

Autant que je le sache, c'est vrai que Grothendieck a beaucoup écrit au sujet des rêves, mais mon information n'est pas fiable et la seule source est le site du "Grothendieck Circle" ici http://www.grothendieckcircle.org/ où vous pouvez obtenir de meilleures informations.
Mai 30, 2007 at 4 :41 PM

AC a dit...
Cher Lieven
Merci pour votre commentaire, c'est assez difficile pour Masoud et moi seuls de "maintenir" le blog. Nous accueillons agréablement des commentaires tels que les vôtres et serions contents de vous avoir comme blogger "invité".

L'un des objectifs de base que j'ai est d'essayer de combler le fossé entre les différents aspects de la NCG[1]. J'aime vraiment les aspects purement algébriques (et ai un peu travaillé avec Michel Dubois-Violette sur ces sujets). Aussi bien la géométrie non-commutative purement algébrique que la géométrie non-commutative différentielle plus "théorie des opérateurs" sont assez mûres maintenant pour ne pas avoir peur d'interagir plus ouvertement. Quand une théorie est à son début, je crois qu'il est important de lui laisser ses chances de grandir par elle-même et de la "protéger" en quelque sorte, mais il est clair que le temps est mûr maintenant pour avoir une perspective et une attitude plus larges. C'est à peu près ce qui est en train de se produire avec le nouveau Journal et les rencontres organisées comme celle du programme de l'Institut Newton de l'automne dernier ou précisément le colloque de Chicago. Comme je n'y étais que brièvement, il est difficile pour moi d'en écrire un rapport complet mais je ferai ce que je peux (après l'avoir fait pour la rencontre à Vanderbilt) et essaierai de trouver un "volontaire" pour donner un meilleur compte-rendu que le mien qui sera partiel (à cause du peu d'exposés auxquels j'ai pu assister, étant assez fatigué après les cours que j'ai donnés à Vanderbilt).
6 Juin 2007 à 8 :11 PM

Mardi 3 Juillet 2007
Espace-temps non-commutatif
Comme je l'ai expliqué dans un billet précédent, c'est uniquement parce qu'on laisse tomber la commutativité que, dans le calcul, les variables de domaines continus peuvent coexister avec des variables de domaines discrets. Dans la formulation classique des variables, du fait de la définition des applications d'un ensemble X vers l'ensemble des nombres réels, nous avons vu ci-dessus que les variables discrètes ne peuvent pas coexister avec des variables continues.

L'unicité de l'espace de Hilbert de dimension infinie séparable résout ce problème, et les variables de domaines continus coexistent avec bonheur avec des variables de domaines dénombrables, telles que les infinitésimaux. Le le seul fait nouveau est qu'ils ne commutent pas.

Une façon de comprendre la transition du commutatif au non-commutatif est que dans ce dernier cas, il faut se soucier de l'ordre des lettres quand on écrit. À titre d'exemple, utilisez la règle de commutativité entre les lettres pour simplifier le message cryptique suivant, que j'ai reçu d'un ami : "Je suis alençonnais, et non alsacien. Si t'as besoin d'un conseil nana, je t'attends au coin Annales. Qui suis-je ?"

C'est Heisenberg qui a découvert qu'un tel soin était nécessaire lors du traitement des coordonnées de l'espace des phases des systèmes microscopiques.

1. Géométrie non-commutative

Au niveau philosophique, il y a quelque chose de tout à fait satisfaisant dans la variabilité des observables de la mécanique quantique. Habituellement, lorsqu'on cherche à expliquer quelle est la cause de la variabilité de monde, la réponse qui vient naturellement à l'esprit est juste : le temps qui passe. Mais précisément le monde quantique fournit une réponse plus subtile depuis la réduction du paquet d'onde qui se produit dans toute mesure quantique n'est rien d'autre que le remplacement d'un "nombre q" par un nombre réel qui est choisi parmi les éléments de son spectre. Il y a donc une variabilité intrinsèque dans le monde quantique, et qui jusqu'à présent ne se réduit à rien de classique. Les résultats des observations sont intrinsèquement des quantités variables, et ce au point que leurs valeurs ne peuvent être reproduites d'une expérience à l'autre, mais que, prises ensemble, elles forment un nombre q. La découverte de Heisenberg montre que l'espace des phases des systèmes microscopiques est un espace noncommutatif dans la mesure où les coordonnées sur cet espace ne satisfont plus les règles commutatives de l'algèbre ordinaire. Cet exemple de l'espace des phases peut être considéré comme l'origine de la géométrie non-commutative. Mais qu'en est-il de l'espace-temps lui-même ? Nous montrons maintenant pourquoi l'étape permettant de passer d'un espace-temps commutatif à un espace-temps non-commutatif est une étape très naturelle.

La pleine action de la gravité couplée à la matière admet un énorme groupe naturel de symétries. Le groupe d'invariance pour l'action d'Einstein-Hilbert est le groupe des difféomorphismes de la variété et l'invariance de l'action n'est que la manifestation de sa nature géométrique. Un difféomorphisme agit par permutations des points de sorte que les points n'ont pas de signification absolue.

Le groupe complet d'invariance de l'action de la gravité couplée à la matière est cependant plus riche que le groupe de difféomorphismes de la variété car il faut inclure quelque chose appelé "le groupe des transformations de jauge" que les physiciens ont identifié comme la symétrie de la partie matière. Ceci est défini comme le groupe des applications de la variété vers un autre groupe fixe, G, appelé le "groupe de jauge", dont nous savons qu'il est tel que : $G = U(1).SU(2).SU(3)$. Le groupe de difféomorphismes agit sur le groupe des transformations de jauge par permutations des points de la variété et le groupe complet de symétries de l'action est le produit semi-direct des deux groupes (de la même manière, le groupe de Poincaré, qui est le groupe d'invariance de la relativité restreinte, est le produit semi-direct du groupe de traductions par le groupe des transformations de Lorentz). En particulier, ce n'est pas un groupe simple (un groupe simple est un groupe qui ne peut pas être décomposé en plus petits morceaux, un peu comme un nombre premier ne peut pas être factorisé en un produit de nombres plus petits que lui mais est un "composé" et contient un énorme sous-groupe normal.

Maintenant que nous connaissons le groupe d'invariance de l'action, il est naturel d'essayer de trouver un espace X dont le groupe des difféomorphismes est simplement ce groupe, afin que nous puissions espérer interpréter l'action complète comme de la gravité pure sur X. C'est la vieille idée de Kaluza-Klein. Malheureusement, cette recherche est vouée à l'échec si l'on cherche une variété ordinaire puisque par un résultat mathématique, les composantes connexes de l'identité dans le groupe des difféomorphismes forment toujours un groupe simple, à l'exclusion d'une structure de produit semi-direct comme celui cidessus du groupe d'invariance de la pleine action de la gravité couplée à la matière. Mais les espaces non-commutatifs du type le plus simple donnent facilement la réponse, modulo quelques points subtils. Pour comprendre ce qui se passe, notez que pour les variétés ordinaires, l'objet algébrique correspondant à un difféomorphisme n'est qu'un automorphisme de l'algèbre des coordonnées, c'est-à-dire une transformation des coordonnées qui ne détruit pas leurs relations. Lorsqu'une algèbre involutive A n'est pas commutative, il est facile de construire des automophismes. On prend un élément unitaire u de l'algèbre c'est-à-dire tel que $uu^* = u^*u = 1$. En utilisant u on obtient un automorphisme appelé intérieur, par la formule $x \to uxu^*$.

Notez que dans le cas commutatif, cette formule donne juste l'automorphisme d'identité (car on pourrait alors permuter x et u^*). Cette construction n'est donc intéressante que dans le cas non-commutatif. De plus, les automorphismes intérieurs forment un sous-groupe noté $\mathrm{Int}(A)$ qui est toujours un sous-groupe normal du groupe des automorphismes de A.

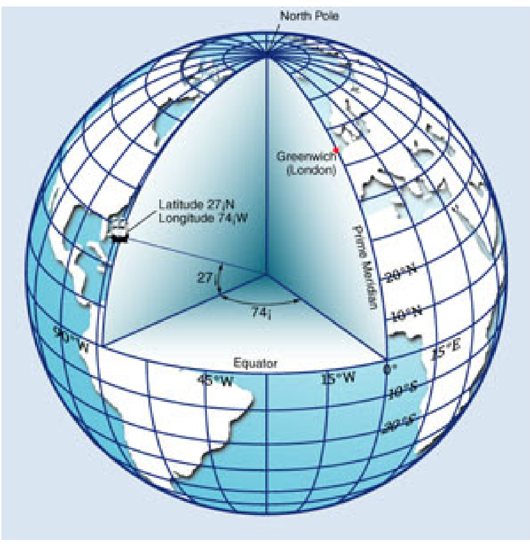
Dans l'exemple le plus simple, où nous prenons pour A l'algèbre des applications lisses d'une variété M à l'algèbre de matrices sur les nombres complexes, on montre que le groupe $\mathrm{Int}(A)$ dans ce cas est (localement) isomorphe au groupe de transformations de jauge, c'est-à-dire des applications lisses de M au groupe de jauge $G = PSU(n)$ (quotient de $SU(n)$ par son centre). De plus, la relation entre les automorphismes internes et tous les automorphismes devient identique à la séquence exacte régissant la structure du groupe d'invariance ci-dessus de la pleine action de la gravité couplée à la matière.

Il est assez frappant de constater que la terminologie issue de la physique : les symétries internes, s'accordent si bien avec les mathématiques des automorphismes intérieurs. Dans le cas général, seuls les automorphismes qui sont unitairement mis enœuvre dans l'espace Hilbert seront pertinent mais modulo cette subtilité on peut voir à la fois à partir de l'exemple qui précède l'avantage de traiter les espaces non-commutatifs sur le même pied que les espaces ordinaires. La prochaine étape consistera à définir correctement la notion de métrique pour ces espaces et nous nous livrerons, dans le prochain billet, à une brève description historique de l'évolution de la définition de "l'unité de longueur" en physique. Cela préparera le terrain pour l'introduction au paradigme spectral de la géométrie non-commutative.

AC a dit...
Mec de la rue, essayez juste de permuter quelques lettres et obtenez 4 fois un nom qui n'est pas si difficile à deviner... que pouvez-vous trouver en commençant par "non alsacien" par exemple ?
4 Juillet 2007 à 6 :59 PM
AC a dit...
Cher Fabien Votre question est pertinente. Le rôle de l'espace fini est maintenant beaucoup mieux compris à partir du tout récent article avec A. Chamseddine : "*Pourquoi le modèle standard*"[2] et "*Un habit pour Modèle standard le mendiant* "[3] qui sont sur le he-th arXiv. Mon intention est d'utiliser ce blog, ces vacances d'été, pour expliquer leur contenu dans les détails, mais une étape à la fois. Jusqu'à présent, je voulais juste expliquer pourquoi il est naturel de considérer les espaces-temps non-commutatifs et ne pas être aussi dépendants de la vue commutative "ponctuelle" des espaces. Donc même si on ne peut pas exclure que l'espace fini F soit, comme vous le suggérez, un "vestige d'un continu ancestral rétréci, l'espace" cela nous donnera beaucoup plus de liberté pour abandonner la dépendance au point de vue commutative.
4 Juillet 2007 à 7 :10 PM

AC a dit...
Je crois que l'extension du cadre "symplectique" au monde NC est simplement la notion de terme de premier ordre dans une déformation de l'algèbre NC. Ceci est assez clair dans le cas commutatif où une structure symplectique (ou plus généralement une structure de Poisson) n'est que le premier terme dans l'expansion de la déformation du produit. Il s'agit donc d'une forme semi-classique de déformation. Dans le cas NC, il existe de nombreux exemples où il est naturel d'utiliser un point de départ similaire pour les déformations (par exemple, des crochets de Rankin-Cohen généralisés aux déformations des structures projectives NC).
8 Juillet 2007 à 11 :35 AM

Mardi 10 Juillet 2007
Une brève histoire du système métrique



2. https://arxiv.org/pdf/0706.3688.pdf
3. https://pdfs.semanticscholar.org/765c/4b648502de8f1628258f79ca7bc7e61fe3fc.pdf

L'étape suivante consiste à comprendre quel est le remplacement du paradigme riemannien par les espaces non-commutatifs. Pour me préparer à cela, et en utilisant l'excuse des vacances d'été, permettez-moi d'abord de raconter l'histoire du changement de paradigme qui a déjà eu lieu dans le système métrique avec le remplacement du solide "mètre-étalon" par une unité spectrale de mesure.

La notion de géométrie est intimement liée à la mesure de la longueur. Dans le monde réel, la mesure dépend du système d'unités choisi et l'histoire du système le plus couramment utilisé - le système métrique - illustre les difficultés liées à la conclusion d'un accord sur une unité physique de longueur qui unifierait les nombreux choix existants. Comme on le sait, les États-Unis sont l'un des rares pays qui n'utilisent pas le système métrique et ce manque d'uniformité dans le choix d'un unité de longueur est devenue douloureusement évident lorsqu'il a entraîné la perte d'une sonde d'une valeur de 125 millions de dollars seulement parce que deux équipes différentes d'ingénieurs avaient utilisé les deux unités différentes (le pied et le système métrique).

En 1791, l'Académie française des sciences a convenu de la définition de l'unité de longueur dans le système métrique, le "mètre", comme étant la dix millionième partie du quart du méridien de la Terre. L'idée était de mesurer la longueur de l'arc du méridien de Barcelone à Dunkerque tandis que l'angle correspondant (environ 9,5°) a été déterminé en utilisant la mesure de la latitude à partir des étoiles de référence. Dans un sens ce n'était qu'un raffinement de ce qu'Ératosthène avait fait en Égypte, 250 ans avant JC, pour mesurer la taille de la terre (avec une précision de 0,4%).

Ainsi, en 1792, deux expéditions furent envoyées pour mesurer cet arc du méridien, une pour la portion nord était dirigée par Delambre et l'autre pour la partie sud était dirigée par Méchain. Tous deux ont été des astronomes qui utilisaient un nouvel instrument de mesure des angles, inventé par Borda, un physicien français. La méthode qu'ils ont utilisée est la méthode de triangulation et de mesure concrète de la "base" d'un triangle. Il leur a fallu beaucoup de temps pour effectuer leurs mesures et c'était une entreprise risquée. Au début de la révolution, la France entre en guerre avec l'Espagne.

Essayez d'imaginer à quel point il est difficile d'expliquer que vous essayez de définir une unité universelle de longueur lorsque vous êtes arrêté au sommet d'une montagne avec des instruments optiques très précis vous permettant de suivre tous les mouvements des troupes dans les environs.

Delambre et Méchain essayaient tous deux d'atteindre la plus grande précision dans leurs mesures et une partie importante du retard est due au fait que cette quête a atteint un niveau obsessionnel dans le cas de Méchain. En fait, quand il a mesuré la latitude de Barcelone, il l'a fait à partir de deux endroits proches, mais ils ont trouvé des résultats contradictoires discordants de 3,5 secondes d'arc. Pressé de donner son résultat, il a choisi cacher cette divergence juste pour "sauver la face", ce qui est une mauvaise attitude pour un scientifique. Chassé d'Espagne par la guerre avec la France, il n'a pas eu une seconde chance de comprendre l'origine de l'écart et a dû jouer un peu avec ses résultats pour les présenter à la Commission internationale qui s'est réunie Paris en 1799 pour recueillir les résultats de Delambre et Méchain et en déduire la longueur du "mètre". Depuis ce jour, comme Méchain était un honnête homme obsédé par la précision, l'écart ci-dessus le hantait et il a obtenu de l'Académie de diriger une autre expédition quelques années plus tard pour trianguler plus loin en Espagne. Il est parti en Espagne et est mort du paludisme à Valence. Après sa mort, ses cahiers ont été analysés par Delambre qui a trouvé l'écart dans les mesures de la latitude de Barcelone mais n'a pas pu l'expliquer. L'explication a été trouvée 25 ans après la mort de Méchain par un jeune astronome du nom de Nicollet, qui était un élève de Laplace. Méchain avait fait dans les deux sites qu'il avait choisis à Barcelone (Mont Jouy et Fontana del Oro) un certain nombre de mesures de latitude en utilisant plusieurs étoiles de référence. Puis il avait simplement pris la moyenne de ses mesures à chaque endroit. Méchain savait très bien que la réfraction fausse le chemin des rayons lumineux, ce qui crée une incertitude lorsque vous utilisez des étoiles de référence proches de l'horizon. Mais il a estimé que le résultat moyen éliminerait ce problème.

Ce que Nicollet a fait, c'est de réfléchir à la moyenne pour éliminer l'incertitude créée par la réfraction et, en utilisant les mesures de Méchain, il a obtenu un accord remarquable (0,4 seconde soit quelques mètres) entre les latitudes mesurées depuis le Mont Jouy et Fontana del Oro. En d'autres termes, Méchain n'a commis aucune erreur pour prendre ses mesures et il aurait pu comprendre par pure pensée ce qui n'allait pas dans son calcul. Je recommande le livre de Ken Adler (*La mesure de toutes choses : l'odyssée de sept ans et l'erreur cachée qui a transformé le monde*, eds Little, Brown et compagnie, 2003, ou sa traduction *Mesurer le monde*, Flammarion, 2005) pour un joli compte rendu de l'histoire complète des deux expéditions.

En tout cas, entre-temps, la commission internationale avait pris les résultats des deux expéditions et calculé la longueur de la dix millionième partie du quart du méridien les utilisant. De plus, une barre de platine d'environ cette longueur a ensuite été réalisée et a été prise comme définition de l'unité de longueur dans le système métrique. Avec cette unité, la longueur réelle du quart de méridien se révèle être 10 002 290 plutôt que l'objectif de 10 000 000 mais ce n'est plus pertinent. En réalité en 1889, la référence est devenue une autre barre métallique spécifique (de platine et d'iridium) appelée "mètre-étalon", déposé près de Paris dans le pavillon de Breteuil. Cette définition a perduré jusqu'en 1960.

Déjà en 1927, lors de la septième conférence sur le système métrique, afin de prendre en compte les inévitables variations naturelles du platine appelé "mètre-étalon", l'idée est apparue de le comparer à une longueur d'onde de référence (la ligne rouge du cadmium). Vers 1960, la référence au dénommé "mètre-étalon" a finalement été abandonnée et une nouvelle définition de l'unité de longueur dans le système métrique (le "mètre") a été adoptée comme 1650763,73 fois la longueur d'onde du rayonnement correspondant à la transition entre les niveaux 2p10 et 5d5 du Krypton 86Kr.

En 1967, la seconde a été définie comme la durée de 9192631770 périodes de rayonnement correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfin de Césium-133. Enfin, en 1983, le "mètre" a été défini comme la distance parcourue par la lumière en 1/299792458 seconde. En fait, la vitesse de la lumière n'est qu'un facteur de conversion et pour définir le "mètre" on lui donne la valeur spécifique de $c = 299792458$m/s. En d'autres termes, le "mètre" est défini comme étant une certaine fraction 9192631770/299792458 $\sim$ 30.6633... de la longueur d'onde du rayonnement provenant de la transition entre les niveaux hyperfins ci-dessus de l'atome de césium.

Les avantages du nouveau standard de longueur sont nombreux. D'abord en n'étant lié à aucun emplacement, il est en fait disponible partout où il y a du césium. Le choix du césium par opposition à l'hélium ou l'hydrogène qui sont beaucoup plus communs dans l'univers est bien sûr encore discutable, et il est tout à fait possible qu'une nouvelle norme soit bientôt adoptée impliquant des raies spectrales de l'hydrogène plutôt que du césium. Voir cet article de Bordé pour une mise à jour http://christian.j.borde.free.fr/ChB.pdf.

Même s'il serait difficile de communiquer notre standard de longueur avec d'autres civilisations extraterrestres s'ils devaient effectuer des mesures de la Terre (telles que sa taille), la définition spectrale peut facilement être encodée dans une sonde et envoyée. En fait, les motifs spectraux fournissent une parfaite "signature" des produits chimiques, et une information universelle disponible partout où ces produits chimiques peuvent être trouvés, de sorte que la longueur d'onde d'une ligne spécifique est une unité parfaitement acceptable, alors que si vous commencez à réfléchir un peu, vous découvririez que nous serions incapables de dire où se trouve la Terre dans l'univers...

Coordonnées ? oui mais avec quel système ? Une possibilité serait de donner la séquence de décalages vers les galaxies voisines, et d'une manière plus raffinée vers les étoiles proches, mais ce serait assez difficile à expliciter pour être sûr que cela permette d'aboutir à un endroit précis.

AC a dit...
Cher physicien apprenti.
Tout d'abord, je ne connais aucune preuve réelle de la variation dans le temps des constantes de nature. Regardez par exemple
http://www-cosmosaf.iap.fr/Cste%208%20mai%202004%20html.htm
En fait l'idée de grand nombre de Dirac de 1937, qui prédit une variation de G avec le temps n'a pas été validée par expérience et on a une borne supérieure expérimentale de l'ordre de $dG/G < 4\ 10^{-11}$ par an. Donc je ne suis pas sûr qu'il existe encore des preuves expérimentales convaincantes de ce que vous dites. S'il y en avait, ce serait intéressant de discuter plus précisément de la constante dont nous parlons. Par exemple, le spectre unité de longueur dont j'ai parlé dans le billet dépend de la constante de Rydberg et donc de la masse de l'électron. Dans NCG, cette masse est liée à la taille inverse de la géométrie fine F qui sera discutée plus loin dans ce blog. Au moins, on peut dire que, dans le NCG, les "unités atomiques" sont intimement liées à la la géométrie de l'espace fin F, tandis que les unités astronomiques sont liées à la variété M. Le modèle de l' espace-temps en NCG est le produit M fois F, mais rien n'empêche la géométrie de F de varier dans M.
Juillet 13, 2007 at 10 :27 AM

Mardi 17 Juillet 2007
Truc non standard
Je ne suis pas sûr de vraiment savoir comment utiliser un “blog” comme celui-ci. Récemment j’ai été sollicité et j’ai dû écrire un article décrivant la perspective sur la structure de l’espace-temps obtenue du point de vue de la géométrie non-commutative. Au début, je pensais que je pouvais être paresseux et après avoir rédigé le document (il est disponible ici https://alainconnes.org/docs/shahnlong.pdf), que je pourrais simplement utiliser des morceaux du document pour garder ce blog vivant pendant les vacances d’été. Cependant, en essayant de faire ça, j’ai réalisé que c’était mieux (en partie à cause de l’utilisation peu pratique du Latex dans le blog) de mettre d’abord le papier à disposition puis de dire dans le blog les choses supplémentaires que l’on n’écrirait pas “normalement” dans un article (même un article grand public non technique comme celui ci-dessus). Je n’ai pas envie de transformer le blog en lieu de controverses car il n’est pas clair pour moi que l’on gagne beaucoup dans de telles discussions. La règle semble être que, le plus souvent, les gens ont des préjugés contre de nouvelles choses principalement parce qu’ils ne les connaissent pas suffisamment et ils optent pour l’attitude paresseuse qu’il est plus facile de dénigrer une théorie que d’essayer de l’apprécier. Je ne suis pas une exception et j’ai certainement adopté cette attitude en ce qui concerne la supersymétrie ou la théorie des cordes. Un débat montrera généralement les opinions bien arrêtées des différentes parties et il est rare qu’un vrai changement ait lieu. Voilà pour le côté “controverse”. Cependant, je crois qu’il existe certains points qui peuvent être assez utiles à connaître et qui, à condition d’être présentés de manière non polémique, peuvent beaucoup aider à éviter certains pièges. Je vais discuter à titre d’exemple les deux notions d’“infinitésimaux” que je connais et essayer d’expliquer la pertinence des deux. Ce n’est pas un “papier mathématique” mais plutôt une discussion informelle.

Quand j’étais étudiant à l’Ecole Normale il y a environ 40 ans, je suis tombé amoureux d’un nouveau sujet de mathématiques appelé “Analyse non standard” qui a été créée par A. Robinson. Être étudiant de Gustave Choquet à ce moment-là fait que je savais beaucoup de choses sur les ultrafiltres. Ces filtres maximaux ont été (corrigez-moi si je me trompe) découverts par H. Cartan lors d’un atelier Bourbaki. À cette époque, Cartan n’avait pas de nom pour ces nouveaux objets mais il avait découvert l’efficacité remarquable qu’ils avaient dans toute preuve où une compacité et des arguments de choix étaient nécessaires. Donc (ce que j’ai entendu de Cartan) le nom qu’il utilisait était “boum”!!! Bien sûr, il savait que cette notion permettait de fournir une preuve d’une ligne de l’existence de la mesure de Haar (boum ...). Et aussi qu’en raison de l’unicité de cette dernière, il s’agit en fait d’une déclaration de convergence assez forte sur les fonctions de comptage à proximité de la mesure de Haar. Il voulait en être sûr et il a écrit dans une note aux Comptes-Rendus tous les détails d’un argument géométrique direct prouvant la convergence attendue. Passer des ultrafiltres aux ultra-produits est une étape facile. Et j’ai été complètement charmé par les ultraproduits quand j’ai appris (à cette époque) le théorème d’Axe-Cochen : l’ultraproduit des corps p-adiques est isomorphe à l’ultraproduit des corps fonctionnels locaux avec les mêmes corps de résidus. J’ai donc commencé à travailler sur ce sujet et j’ai obtenu, en utilisant un classe d’ultrafiltres dite “sélective”, une construction de modèles minimaux en analyse non standard. Ils sont obtenus comme ultraproduits mais les ultrafiltres utilisés sont si particuliers que, par exemple, pour connaître les éléments de l’ultra-puissance d’un ensemble X, on n’a pas besoin de se soucier des étiquettes : l’ultrafiltre image en X est tout ce qui est nécessaire. J’ai écrit un article expliquant comment utiliser les ultraproduits et j’ai toujours gardé cet outil prêt pour une utilisation ultérieure. Je l’ai utilisé de manière essentielle dans mon travail sur la classification des facteurs. Tant pour le côté positif de la pièce. Cependant, très tôt, j’ai essayé en vain de mettre en œuvre l’une des plus-values de l’analyse non standard, à savoir qu’elle donnait enfin la terre promise pour les “infinitésimaux”. En fait, les ajouts sont venus avec un exemple spécifique : une prétendue réponse à la question naïve “quel est la probabilité “p” qu’une fléchette atterrisse à un point donné x de la cible” lors d’une partie de fléchettes. C’était suivi par 1) l’argument simple pour lequel ce nombre positif “p” était plus petit que ε pour tout ε un réel positif 2) cent pages de logique 3) l’identification de “p” avec un nombre “non standard”...
Au début, j’ai attribué mon incapacité à obtenir concrètement “p” à mon manque de connaissances en logique, mais après avoir réalisé que les modèles pourraient être construits comme des ultra-produits, cette excuse ne s’applique plus. À ce moment-là, je me suis rendu compte qu’il y avait une raison fondamentale pour laquelle on ne serait jamais capable de trouver “p” parmi les nombres non standard : à partir d’un nombre non standard (non trivial bien sûr), on déduit canoniquement un caractère non mesurable du produit infini de deux groupes d’éléments (l’argument est plus simple en utilisant un entier infini non standard “n”, il suffit de prendre l’application qui à la séquence a_n (de 0 et 1) assigne sa valeur pour l’indice “n”). Désormais, le caractère d’un groupe compact est soit continu, soit non mesurable. Ainsi, un nombre non standard nous donne canoniquement un sous-ensemble non mesurable de $[0\ ,\ 1]$. C’est la fin

de la corde pour être "explicite" puisque (d'un point de vue logique) on sait qu'il est tout simplement impossible de construire explicitement un sous-ensemble non mesurable de $[0\ ,\ 1]$!

Il m'a fallu de nombreuses années pour trouver une bonne réponse à la question naïve ci-dessus concernant "p". La réponse est expliquée ici en détail https://alainconnes.org/docs/2000.pdf. Elle est donnée par le formalisme de la mécanique quantique, qui, comme expliqué dans le billet précédent sur les "variables infinitésimales" donne un cadre où les variables continues peuvent coexister avec les variables infinitésimales, au seul prix d'avoir des règles algébriques plus subtiles où la commutativité n'est plus forcément vérifiée. Les nouveaux infinitésimaux ont un "ordre" (un infinitésimal d'ordre un est un opérateur compact dont les valeurs caractéristiques μ_n sont un grand O de $(1/n)$). Le fait nouveau est qu'ils ont une intégrale qui en termes physiques est donnée par le coefficient de la divergence logarithmique de la trace. On obtient ainsi un nouvelle étape pour le "calcul" et elle est au cœur de la géométrie différentielle non-commutative.

En géométrie riemannienne, la donnée naturelle est le carré de l'élément de longueur, de sorte que lors du calcul de la distance $d(A,B)$ entre deux points, il faut minimiser l'intégrale de A à B le long d'un chemin continu de la racine carrée de $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Maintenant, il est souvent vrai que "prendre une racine carrée" de manière brutale comme dans l'équation ci-dessus cache un niveau plus profond de compréhension. En fait, cette question de prendre la racine carrée a conduit Dirac à sa célèbre équation analogue de l'équation de Schrödinger pour l'électron et à la découverte théorique du positron. Dirac cherchait une forme invariante relativiste de l'équation de Schrödinger. La propriété de base de cette équation est qu'elle est que la variable de temps y apparaît au premier ordre. L'équation de Klein-Gordon qui est la forme relativiste de l'équation de Laplace, est invariante relativiste mais de second ordre dans le temps.

Dirac a trouvé cette idée de prendre la racine carrée de l'opérateur de Klein-Gordon en utilisant l'algèbre de Clifford. En fait (comme me l'a fait remarquer Atiyah) Hamilton avait déjà écrit la combinaison magique des dérivées partielles en utilisant ses quaternions comme coefficients et il avait noté que cela donnait une racine carrée du laplacien. Quand j'étais à Saint-Pétersbourg pour le 300e d'Euler, j'ai remarqué qu'Euler pouvait partager les honneurs pour les quaternions puisqu'il avait explicitement écrit leur règle de multiplication afin de montrer que le produit de deux sommes de 4 carrés est une somme de 4 carrés.

Quelle est donc la relation entre la racine carrée de Dirac du Laplacien et la question ci-dessus de prendre le racine carrée dans la formule de la distance $d(A,B)$. Le fait est que l'on peut utiliser la solution de Dirac et réécrire la même distance géodésique $d(A,B)$ de la manière suivante : on ne mesure plus la longueur minimum d'un chemin continu mais on mesure la variation maximale d'une fonction : i.e. la valeur absolue de la différence $f(A) - f(B)$. Bien sûr, sans restriction sur f, cela donnerait l'infini, mais il faut que le commutateur $[D,f]$ de f avec l'opérateur de Dirac soit borné par 1.

Nous voici dans notre étape de "calcul quantifié", de sorte que les fonctions de notre espace géométrique comme l'opérateur de Dirac sont toutes concrètement représentées dans le même espace de Hilbert H. H est l'espace de Hilbert des spineurs de carrés intégrables et les fonctions agissent par multiplication point par point. Le commutateur $[D,f]$ est la multiplication de Clifford par le gradient de f de sorte que lorsque la fonction f est réelle, sa norme est juste la norme Sup du gradient. Dire ensuite que la norme de $[D,f]$ est inférieure à 1 revient à demander que f soit une fonction de Lipschitz de la constante 1, c'est-à-dire que la valeur absolue de $f(A) - f(B)$ soit inférieure à $d(A,B)$ où cette dernière distance est la distance géodésique. Pour les fonctions de valeur complexes, on obtient seulement une inégalité, mais il suffit de montrer que la variation maximale de tels f donne exactement la distance géodésique : c'est-à-dire qu'on récupère la distance géodésique $d(A,B)$ comme Sup $f(A)-f(B)$ pour une norme de $[D,f]$ inférieure à 1.

Notez que D a la dimension de l'inverse d'une longueur, c'est-à-dire d'une masse. En fait, dans la formule ci-dessus pour des distances en termes de supremum le produit de "f" par D est sans dimension et "f" a la dimension d'une longueur puisque $f(A)-f(B)$ est une distance.

Maintenant, quelle est la signification intuitive de D ? Notez que la formule ci-dessus mesurant la distance $d(A,B)$ comme un supremum est basée sur le manque de commutativité entre D et les coordonnées "f" sur notre espace. Donc il devrait y avoir une tension qui empêche D de commuter avec les coordonnées. Cette tension est fournie par l'hypothèse clé suivante "l'inverse de D est un infinitésimal".

En effet, nous avons vu dans un article précédent que les variables à domaine continu ne peuvent pas commuter avec des variables infinitésimales, ce qui donne la tension nécessaire. Mais il y a plus, en raison de l'équation fondamentale $\mathbf{ds} = 1/D$ qui donne à l'inverse de D la signification heuristique de l'élément de longueur. Ce changement de paradigme de $g_{\mu\nu}$ à cet opérateur théorique **ds** est le parallèle exact du changement de l'unité de longueur dans le système métrique à un paradigme spectral.

Ainsi, on peut considérer une géométrie comme une représentation concrète de l'espace de Hilbert non seulement de l'algèbre de coordonnées sur l'espace X qui nous intéresse, mais aussi de son élément de longueur infinitésimal **ds**. Dans le cas riemannien habituel cette représentation est d'ailleurs irréductible. Ainsi, à bien des égards, cela est analogue à penser une particule comme nous l'a appris Wigner, c'est-à-dire comme une représentation irréductible (du groupe de Poincaré).

AC a dit...
Cher Arivero, merci ! C'est bien que Tao et moi discutions de la même chose. En fait ma première note aux Comptes Rendus (1970) portait sur les ultrafiltres sélectifs et les modèles non standards minimaux construits en utilisant des ultraproduits. Ma conviction est que les deux points de vue sur les infinitésimaux sont le reflet des nuances existant déjà au début de l'invention du calcul. Les nombres non standards au sens de la logique ou les ultrafiltres sont très proches du point de vue de Leibniz.
17 Juillet 2007 à 7 :30 PM

AC a dit...
Cher Alon Levy
Oui, bien sûr, je suis d'accord pour mettre le billet sur l'analyse non standard sur le blog du carnaval, merci,
Alain
19 Août 2007 à 1 :57 PM

Vendredi 3 Août 2007
70 ans de Paul
Je reviens tout juste d'un très bel événement autour des 70 ans de Paul Baum, qui s'est déroulé à Varsovie lundi, merci en particulier à Piotr Hajac. Je connais Paul depuis l'été 1980, lorsque nous nous sommes rencontrés à Kingston. J'ai vraiment eu, lors de ma première rencontre, l'impression de rencontrer l'"homologie en personne". Plus je l'ai connu grâce à notre très longue collaboration, plus j'ai apprécié sa clarté d'esprit et sa quête incessante de simplicité et de beauté. À bien des égards, il réussit devant un problème difficile à faire ce que Grothendieck conseillait dans *Récoltes et Semailles*, c'est-à-dire à garder "une innocence enfantine" devant les mathématiques. Le dîner du lundi soir était d'une intensité comparable à celle du mémorable dîner organisé par Martin Walter, à Boulder, pour les 60 ans de Paul lorsque l'équipe Paul Baum - Raoul Bott avait forcé Martin à chercher (encore et encore) dans sa cave plus de bouteilles de vin pour suivre leur capacité à boire !

Raoul Bott est décédé en décembre 2005. Peu de temps auparavant, Paul est allé jusqu'en Californie pour lui rendre visite et ils ont parlé ensemble pendant une journée entière. Ce type de fidélité dans l'amitié et la compréhension de ce qui compte vraiment, c'est une attitude envers la vie que Paul a et que j'admire vraiment.

Lundi 13 Août 2007
Moyenne harmonique
Ce "billet" est principalement une tentative de voir si l'on peut réussir à utiliser des formules dans le blog et

discuter de vrais trucs en quelque sorte. Les formules doivent être vraiment visibles, un peu comme avec les transparents. Donc, comme prétexte, je vais commencer par discuter d'un problème lié à l'Ansatz de base :

$$\mathbf{ds} = D^{-1}$$

qui donne l'élément de longueur théorique de l'opérateur en termes de l'opérateur de Dirac dans le cadre général de la géométrie non-commutative "métrique". Le noyau de l'opérateur D est de dimension finie et on prend **ds** qui s'évanouit sur ce noyau. Comme cela a déjà été discuté ici, la connaissance de D retourne la métrique. De plus l'intégrale non-commutative, sous la forme de la trace de Dixmier, redonne la forme volumique. Ainsi l'intégrale d'une fonction f de dimension n est simplement donnée par

$$⨍ f|\mathbf{ds}|^n$$

où l'intégrale "coupée" est la trace de Dixmier c'est-à-dire la fonctionnelle qui assigne à un infinitésimal d'ordre 1 le coefficient de la divergence logarithmique dans la série qui donne la somme de ses valeurs propres.

Je n'essaierai pas de justifier davantage la définition heuristique de l'élément de longueur. Il est plus intéressant de le mettre à l'épreuve, de le remettre en question, et je vais discuter d'un exemple d'un problème qui m'a laissé perplexe assez longtemps parfois mais qui a une jolie résolution.

Il s'agit de comprendre ce qui se passe quand on prend le produit de deux géométries non-commutatives. On obtient la relation suivante pour les carrés des opérateurs de Dirac correspondants :

$$D^2 = D_1^2 + D_2^2$$

où nous abusons des notations en éliminant le produit tensoriel par l'opérateur d'identité qui va normalement avec chacun des opérateurs D_j. Maintenant, cette relation est très différente de la simple relation de Pythagore des éléments de longueur classiques dont le carré s'additionne et pose donc la question de savoir comment concilier la formule d'Ansatz au-dessus avec la formule simple d'addition des carrés des opérateurs de Dirac. Plus généralement, on peut considérer un tas d'espaces NC avec les opérateurs de Dirac D_μ et les combiner comme suit : on commence avec une matrice positive d'opérateurs dans l'espace de Hilbert :

$$g = (g^{\mu\nu}) \in M_n(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$$

et on étend la formule ci-dessus donnant D^2 pour un produit de deux espaces et on forme la somme suivante :

$$D^2 = \sum_{\mu,\nu} D_\mu g^{\mu\nu} D_\nu^*$$

où la notation avec z souligne le fait que nous ne supposons même pas l'auto-adjonction des différents D_μ qui n'est pas nécessaire. Nous voulons une formule pour l'inverse du carré de D i.e. pour :

$$\mathbf{ds}^2 = D^{-2}$$

en fonction de la matrice inverse :

$$g^{-1} = (g_{\mu\nu})$$

qui joue un rôle similaire au $g_{\mu\nu}$ de la géométrie Riemannienne, et des opérateurs

$$dz^\mu = D_\mu^{-1}$$

Cela semble totalement désespéré, car il faut une formule pour l'inverse d'une somme d'opérateurs non-commutants. Heureusement, il s'avère qu'il existe une belle formule simple qui fait le travail en toute généralité. Il s'agit de se rappeler de la définition d'une distance comme un minimum. Elle est donnée par :

$$\langle \xi, \mathbf{ds}^2 \xi \rangle = \mathrm{Inf} \sum_{\mu,\nu} \langle dz^\mu \xi^\mu, g_{\mu\nu} dz^\nu \xi^\nu \rangle$$

L'infimum est repris par toutes les décompositions du vecteur donné comme une somme :

$$\sum_\mu \xi^\mu = \xi$$

Notez que cette formule suffit pour déterminer complètement l'opérateur $\mathbf{ds}^2$, car elle donne la valeur de la forme quadratique positive correspondant à n'importe quel vecteur de l'espace de Hilbert. La preuve de la formule n'est pas difficile et peut être effectuée en appliquant la technique des multiplicateurs de Lagrange pour faire respecter la contrainte qui précède sur les vecteurs libres ξ^μ.

AC a dit...
Dear Christophe
Ce que j'ai fait, c'est d'incorporer de petites images dans le texte, j'ai d'abord écrit un fichier pdf, puis j'ai extrait des petites parties du pdf en utilisant Adobe Professional et en les enregistrant au format JPEG.
7 Septembre 2007 à 4 :51 PM

Mardi 18 Septembre 2007
Les motifs - ou le coeur dans le coeur
C'est avec ce titre fascinant que A. Grothendieck présente dans *Récoltes et Semailles* (cf. Promenade à travers une œuvre ou l'Enfant et la Mère) le sujet des motifs : le plus profond des douze thèmes de recherche autour desquels il a développé son programme de recherche "à long terme" qui a littéralement révolutionné le domaine de la géométrie algébrique dans la décennie 1958-68. Les motifs étaient envisagés comme le "cœur dans le cœur" d'une nouvelle géométrie (la géométrie arithmétique) que Grothendieck a inventée en suivant une stratégie scientifique basée sur l'introduction d'une série de nouveaux concepts organisés sur un plan de généralité progressive : à commencer par les schémas, topos et sites puis en poursuivant par le yoga des motifs et les groupes de Galois motiviques et enfin par l'introduction de la géométrie algébrique anabelienne et de la théorie de Galois-Teichmuller.

Si les notions de schéma et de topos étaient les deux idées cruciales qui constituaient le moteur originel dans le développement de cette nouvelle géométrie - Grothendieck était évidemment fasciné par les concepts de point géométrique, espace et symétrie - ce n'est qu'avec la notion de motif que l'on finit par capter la structure la plus profonde, le cœur de l'identité profonde entre la géométrie et l'arithmétique.

Grothendienck a très peu écrit sur les motifs. Les fondations sont documentées dans son document inédit. "Motifs" et ont été discutés lors d'un séminaire à l'Institut des Hautes Études Scientifiques, en 1967. On sait, en lisant *Récoltes et Semailles*, qu'il a commencé à penser aux motifs en 1963-64. J.-P. Serre a inclus dans son article "Motifs" un extrait d'une lettre que Grothendieck lui a écrite en août 1964 dans laquelle il parle (plutôt vaguement, en fait) des notions de motif, foncteur fibré, groupes de Galois motiviques et poids.

Les motifs ont été introduits dans le but ultime de fournir une explication intrinsèque aux analogies entre les différentes théories cohomologiques des variétés algébriques : ils devaient jouer le rôle d'une théorie cohomologique universelle (la cohomologie motivique) et aussi fournir une linéarisation de la théorie des variétés algébriques, en finissant par fournir (c'était le point de vue de Grothendieck) le bon cadre pour une attaque réussie des Conjectures de Weil sur la fonction zêta d'une variété algébrique sur un corps fini.

Contrairement à la topologie algébrique où le foncteur cohomologique standard est uniquement caractérisé par les axiomes d'Eilenberg-Steenrod en termes de normalisation associée à la valeur du foncteur en un point, en géométrie algébrique il n'existe pas de théorie cohomologique appropriée à coefficients entiers, pour les variétés définies sur un corps k, à moins que l'on ne prévoie une intégration de k dans les nombres complexes.

En fait, au moyen d'une telle cartographie, on peut former l'espace topologique des points complexes de la variété algébrique originale et enfin calculer sa cohomologie de Betti (singulière). Cependant, cette construction dépend généralement du choix de l'incorporation de k dans le domaine des nombres complexes. De plus, la cohomologie de Hodge, la cohomologie algébrique de de-Rham, la cohomologie ℓ-adique étale fournissent plusieurs exemples de foncteurs de cohomologie pouvant être associés simultanément à une variété algébrique donnée, dont chacun fournit une information pertinente sur l'espace topologique.

Grothendieck a émis l'hypothèse que cette pléthore de données cohomologiques différentes devrait être quelque peu codée systématiquement dans une théorie unique et plus générale de la nature cohomologique qui agit comme une "liaison" entre la géométrie algébrique et l'ensemble des théories cohomologiques disponibles. C'est l'idée du "motif", à savoir la raison commune derrière cette multitude d'invariants cohomologiques qui régit et contrôle systématiquement tous les appareils cohomologiques appartenant à une variété algébrique ou plus généralement à un schéma.

La construction originale d'une catégorie M de motifs (purs) sur un corps k commence par deux considérations préliminaires. La première considération est que M devrait être la cible d'un foncteur contravariant naturel reliant la catégorie C de variétés algébriques projectives lisses, sur un corps k à M. Un tel foncteur devrait associer à un objet X de C son motif $M(X)$. La deuxième considération est que ce foncteur devrait, par construction, prendre en compte chaque théorie cohomologique particulière.

Maintenant, en gardant à l'esprit cet objectif, on pense au processus axiomatisant une théorie cohomologique en géométrie algébrique. Cela se fait en introduisant un foncteur contravariant $X \to H(X)$ de C vers une catégorie abélienne graduée, où les ensembles de morphismes entre ses objets forment des K-espaces vectoriels (K est un corps de caractéristique zéro, que pour simplifier, je fixe ici égal aux rationnels). On aimerait aussi que toute correspondance $V \to W$ (un cycle algébrique dans le produit cartésien $V \times W$ qui peut être vu comme le graphe d'une application algébrique à valeurs multiples) induise a contrario, une application sur la cohomologie et que la catégorie cible soit convenablement définie de façon à contenir parmi ses objets toute "théorie cohomologique de Weil", à savoir une cohomologie qui satisfait entre autres axiomes la dualité de Poincaré et la formule de Künneth.

Cette présentation préalable aide à formaliser la construction de la catégorie des motifs suivant une procédure en trois étapes. On souhaite élargir la catégorie C de manière précise dans l'espoir de produire également une catégorie abélienne. Les trois étapes sont brièvement reprises comme suit :

(1) On passe de C à une catégorie avec les mêmes objets mais où les ensembles de morphismes sont les classes d'équivalence de correspondances rationnelles. Ici, le choix naturel de la relation d'équivalence est le relation d'équivalence numérique car elle est la plus grossière parmi les relations possibles entre cycles algébriques qui peuvent être considérés comme induisant, via les axiomes cohomologiques de toute théorie cohomologique de Weil, les homomorphismes définis en cohomologie.

(2) On agrandit la collection d'objets de la catégorie définie en (1), en ajoutant formellement des noyaux et images de projecteurs. Cette étape est appelée techniquement "enveloppe pseudo-abélienne" de la catégorie définie en (1) et elle est motivée par le besoin de définir une catégorie abélienne de motifs pour lesquels, par exemple, la formule de Künneth peut être appliquée.

(3) Enfin, on considère l'opposé de la catégorie définie en (2).

Maintenant, après avoir appliqué avec diligence toutes ces machines abstraites, on aimerait voir une application fructueuse de ces idées, sous la forme, par exemple, de la preuve d'une conjecture majeure. Cependant, on perçoit également très tôt qu'une application réussie du yoga des motifs est subordonnée à une connaissance approfondie de la théorie des cycles algébriques, puisque la construction de la catégorie M est centrée sur l'idée d'élargir les ensembles de morphismes en mettant en œuvre la notion de correspondance. C'est pour cette raison que les Conjectures Standard (critères cohomologiques pour l'existence de cycles algébriques intéressants) ont été associées, depuis le début, à la théorie des motifs car elles semblent remplir la "conditio sine qua non" une théorie des motifs a une application concrète et réussie.

Cependant, afin de mettre les Conjectures Standard dans la bonne perspective et pour éviter peut-être une surestimation de leur importance, il convient également de noter que Y. Manin a été en 1968, le premier à appliquer ces idées sur les motifs en produisant une preuve élégante de l'hypothèse de Riemann-Weil pour les variétés unirationnelles projectives tridimensionnelles non singulières sur un corps fini, sans faire appel aux Conjectures Standard. De plus, nous savons également que les Conjectures de Weil ont été prouvées par P. Deligne en 1974 sans utiliser ni la théorie des motifs ni les Conjectures Standard.

Près de quarante ans se sont écoulés depuis que ces idées ont été discutées de manière informelle dans le "cercle de Grothendieck". Une théorie élargie et en partie encore conjecturale des motifs mixtes a entre-temps prouvé son utilité pour expliquer conceptuellement certains phénomènes intrigants qui se produisent dans plusieurs domaines des mathématiques pures, tels que la théorie de Hodge, la théorie K, les cycles algébriques, les polylogarithmes, les fonctions L, les représentations de Galois, etc.

Très récemment, de nouvelles applications de la théorie des motifs à la théorie des nombres et à la théorie quantique des champs ont été trouvés ou sont sur le point d'être développés, avec le soutien de techniques fournies par la géométrie non-commutative et la théorie des algèbres d'opérateurs.

En théorie des nombres, une compréhension conceptuelle de l'interprétation proposée par A. Connes des formules explicites de Weil en tant que formule de trace de Lefschetz sur l'espace non-commutatif des classes d'adèles, nécessite l'introduction d'une catégorie généralisée de motifs qui comprend des espaces très singuliers d'un point de vue classique. Plusieurs questions se posent déjà quand on considère des espaces non-commutatifs de dimension zéro de types spéciaux, tels que l'espace sous-jacent au système statistique quantique dynamique défini par J.-B. Bost et Connes dans leur article "Algèbres de Hecke, facteurs de type III et transitions de phase avec rupture spontanée de symétrie"(Selecta Math. (3) 1995). Cet espace est une version simplifiée des classes d'adèles et il encode dans son groupe de symétries l'arithmétique de l'extension abélienne maximale des rationnels. Une nouvelle théorie des endomotifs (algébrique et analytique) a été récemment développée dans "Géométrie non-commutative et motifs : la thermodynamique des endomotifs" (à paraître dans Advances in Mathematics). Les objets de la catégorie des endomotifs sont des espaces non-commutatifs décrits par des actions de semi-groupe sur les limites projectives des motifs d'Artin (ce sont parmi les exemples les plus simples de motifs purs, car ils sont associés aux variétés algébriques de dimension zéro). Les morphismes de cette nouvelle catégorie généralisent la notion de correspondances (algébriques) et sont définis au moyen de groupoïdes étales pour tenir compte de la présence des actions du semi-groupe.

Un problème ouvert et intéressant est lié à la définition d'une théorie dimensionnelle supérieure des motifs commutatifs et en particulier la mise en place d'une théorie des motifs elliptiques et formes modulaires non-commutatifs. Une généralisation appropriée du yoga des motifs à la géométrie non-commutative a déjà produit des résultats intéressants sous la forme, par exemple, d'un analogue pour la caractéristique zéro de l'action du groupe de Weil sur la cohomologie étale d'une variété algébrique. Il semble assez excitant de poursuivre ces idées : l'espoir est que les techniques motiviques, une fois convenablement transférées dans le cadre de la géométrie non-commutative, puissent fournir des outils utiles et produire des applications encore plus substantielles que celles obtenues dans le contexte commutatif classique.
1 commentaire :
AC a dit...
Chère Katia
Merci pour ce beau billet. Votre question est restée sans réponse depuis assez longtemps maintenant, et je vais essayer (pourquoi pas) de donner une réponse dans un prochain billet. Bien sûr, ce sera une réponse (partielle), il s'agira de mon point de vue et en tant que tel, elle n'aura aucune prétention à être "la" réponse.
4 Octobre 2007 à 1 :21 PM

Mercredi 31 Octobre 2007
Battement de cœur 1
Le dernier billet de Katia s'est terminé par une question provocatrice motivée par la description de Grothendieck dans *Récoltes et Semailles* du "cœur dans le cœur" de la géométrie arithmétique, à savoir la théorie des motifs. Sa question a été formulée comme ceci :
——— Qu'est-ce que le "cœur du cœur" de la géométrie non-commutative ? ———
J'essaierai d'expliquer ici qu'il existe un "supplément d'âme" certain, obtenu lors du passage de la classe des espaces commutatifs aux espaces non-commutatifs. La principale nouveauté est que "les espaces non-commutatifs génèrent leur propre temps "et peuvent en outre subir des opérations thermodynamiques telles que le refroidissement, la distillation etc.

Cela ouvre de nouvelles façons de gérer les espaces géométriques et notre travail avec Matilde Marcolli et Katia Consani http://alainconnes.org/docs/ccm.pdf n'est qu'un exemple d'applications potentielles à la théorie des nombres. Il est étroitement lié à la fonction zêta de Riemann et est très proche dans l'esprit des idées de Grothendieck sur les motifs, ce qui ne le rend pas hors de propos dans la discussion présente de la question de Katia. L'histoire commence par une distinction qualitative entre espaces issus de la classification (par von Neumann) des algèbres non-commutatives des types I, II et III. Les espaces commutatifs sont tous de type I. Lors du codage d'un espace X par une algèbre A de fonctions (à valeurs complexes) sur X, on utilise une certaine structure sur X pour restreindre la classe de fonctions (par exemple pour lisser les fonctions sur un espace lisse) et la distinction ci-dessus entre les types utilise la structure la plus grossière possible qui est la théorie de la mesure. Les algèbres correspondantes (appelées algèbres de von Neumann) sont assez simples à caractériser de façon abstraite : ce sont des commutants dans l'espace de Hilbert d'une certaine représentation unitaire. Alors on peut prendre la somme directe des algèbres A et B, on peut mélanger des algèbres de différents types. Plus précisément, toute algèbre de von Neumann se décompose de amnière unique comme une intégrale d'algèbres qui ne peuvent pas être décomposés davantage et qu'on appelle facteurs. Un facteur est une algèbre de von Neumann dont le centre est aussi petit qu'il peut l'être, à savoir qu'il se réduit aux nombres complexes. Les facteurs de type I sont équivalents au sens de Morita aux nombres complexes, et donc un facteur de type I correspond bien à la notion classique de "point" dans un espace X .

Pour comprendre géométriquement à quoi ressemblent les facteurs de type II et III, il est utile de décrire l'algèbre (de von Neumann) A associée à l'espace des feuilles d'une variété feuilletée : (V, F). Un élément T de A assigne à chaque feuille un opérateur dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur la feuille, et il est logique de dire que T est borné, mesurable ou nul presque partout. Les opérations algébriques se font feuille par feuille, et l'algèbre des éléments mesurables bornés modulo les éléments négligeables est une algèbre de von Neumann. L'exemple le plus simple correspond au feuilletage dont l'espace des feuilles est le tore non-commutatif.

C'est un feuilletage de deux tores par l'équation "$dy = a\ dx$" en coordonnées plates. L'algèbre de von Neumann correspondante est un facteur lorsque "a" est irrationnel et ce facteur n'est pas de type I mais de type II. Pour obtenir des exemples de type III on peut prendre n'importe quel feuilletage de codimension un dont l'invariant de Godbillon-Vey ne s'évanouit pas. La sous-variété intégrable F définissant un feuilletage de codimension un est l'orthogonal d'une forme v et l'intégration donne dv comme le produit extérieur de v par une unique forme w. L'invariant de Godbillon-Vey est l'intégrale sur V du produit extérieur de w par dw lorsque V est compact orienté de dimension trois. Par essence la forme w est la dérivée logarithmique d'un élément de volume transversal et l'invariant GV est une obstruction à la recherche d'un élément de volume transversal invariant par holonomie, c'est-à-dire qui ne change pas quand on se déplace le long d'une feuille en gardant une trace de la façon dont les feuilles voisines se développent. Plus généralement les facteurs de type II sont ceux qui possèdent une trace et ceux de type III sont ceux qui ne sont ni de type I ni de type II. Dans le contexte des feuilletages, un élément de volume transversal invariant par holonomie permet d'intégrer la trace ordinaire des opérateurs et cela donne une trace sur l'algèbre de von Neumann du feuilletage.

Jusqu'au travail du mathématicien japonais Minoru Tomita, très peu de résultats positifs existaient sur les facteurs de type III. Le résultat clé de Tomita est qu'un vecteur v cyclique et séparateur pour un facteur A dans l'espace de Hilbert H génère un groupe à un paramètre d'automorphismes de A par la recette suivante : on considère le module carré $S \times S$ de l'opérateur fermable S qui envoie xv sur $S(xv) = x * v$ pour tout x dans A, puis on l'élève à la puissance purement imaginaire "it". Tomita a montré que l'opérateur unitaire normalise A et définit donc un automorphisme de A. On obtient ainsi un groupe à un seul paramètre d'automorphismes de A associés au choix d'un vecteur cyclique et séparateur v. Il a également montré que la phase J de l'opérateur fermable S ci-dessus donne un anti-isomorphisme de A avec son commutant A qui coïncide avec JAJ. Dans son récit du travail de Tomita, Takesaki a caractérisé la relation entre l'état défini par le vecteur cyclique et séparateur v et le groupe de paramètres d'automorphismes de Tomita comme condition de Kubo-Martin-Schwinger (KMS), qui avait été formulée en termes C^*-algébriques par les physiciens Haag, Hugenholtz et Winnink.

Le résultat clé de ma thèse (en 1972) est que la classe modulo les automorphismes intérieurs du groupe d'automorphismes de Tomita est en fait **indépendante** du choix de l'état (normal fidèle) utilisé pour sa construction. Il va sans dire que c'est cette unicité qui permet de définir des **invariants** de facteurs. Le plus simple est le sous-groupe $T(A)$ de R qui est formé des **périodes**, à savoir l'ensemble des temps t pour lesquels l'automorphisme correspondant est intérieur. Ceci, avec l'invariant spectral $S(A)$, m'a conduit à la classification des facteurs de type III en sous-types III_s pour s dans $[0, 1]$ et la réduction du type III au type II et les automorphismes réalisés dans ma thèse https://alainconnes.org/docs/THESE.pdf à l'exception du cas III_1 qui a ensuite été complété par Takesaki. Tout cela remonte au début des années 70 et suffira pour ce premier battement de cœur. C'est seulement le début d'une longue saga qui est loin d'être terminée et dont le thème principal est cette mystérieuse génération d'un "temps" intrinsèque qui émerge de la non-commutativité d'une algèbre de von Neumann.

Exactement comme les variétés sont livrées avec une classe de mesure "lisse" naturelle, un espace non-commutatif X donne généralement lieu à une algèbre de von Neumann A qui code la classe de mesure naturelle sur X. C'est donc une caractéristique totalement nouvelle du monde non-commutatif que l'évolution temporelle correspondante soit bien définie et donne un homomorphisme canonique :

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathrm{Out}(A)$$
$$1 \to \mathrm{Int}(A) \to \mathrm{Aut}(A) \to \mathrm{Out}(A) \to 1$$

où la deuxième ligne donne la définition du groupe des automorphismes extérieurs $\mathrm{Out}(A)$ de A comme quotient du groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des automorphismes par le sous-groupe normal $\mathrm{Int}(A)$ des automorphismes intérieurs (qui sont obtenus par conjugaison par un élément unitaire de l'algèbre A).

AC a dit...
Cher Urs
Ce que vous devez comprendre, c'est que toutes les choses intéressantes se produisent ici lorsque le nombre de degrés de liberté impliqué est infini. Un exemple typique est la mécanique statistique quantique (comme un système de spin sur un réseau). Les systèmes qu'on trouve dans la théorie quantique des champs, les exemples liés aux nombres premiers impliquent tous une infinité de degrés de liberté et sont le plus souvent de type III. Les systèmes de mécanique quantique très simples sont bien sûr de type I et la structure plus profonde n'y apparaît pas. Ça n'a rien à voir avec les anomalies.

AC a dit...
Chers Urs

L'évolution temporelle est aussi "canonique" que possible car toute algèbre non-commutative a des automorphismes intérieurs. De plus on peut montrer que l'évolution temporelle appartient au centre de $\mathrm{Out}(A)$!

Si vous prenez des exemples très simples comme le cas de réseau, vous constaterez qu'un automorphisme intérieur affecte ce qui se passe sur un nombre fini d'endroits du réseau. Dans une situation simple de translation invariante par produit, l'hamiltonien (qui génère l'évolution temporelle dont nous parlons) est une somme infinie de contributions des endroits du treillis et son essence est inchangée par une perturbation provenant d'un nombre fini de terme dans la somme. C'est le fait que la somme soit infinie et n'appartienne pas à l'algèbre des observables qui crée le comportement de type III.

Vous pouvez légèrement perturber cette évolution temporelle par un automorphisme intérieur mais son action globale sur l'algèbre des observables restera essentiellement inchangée, car elle ne sera modifiée que sur un nombre fini de degrés de liberté. En d'autres termes, cette "évolution temporelle" de l'algèbre se déroule globalement, sur tous les degrés de liberté, alors que les automorphismes internes ne contrôlent qu'un nombre fini de nombreux degrés de liberté ! Vous devez étudier attentivement divers exemples, y compris les feuilletages, l'ensemble des nombres premiers ou le cas de QFT pour apprécier ce qui se passe... (et je dois dormir un peu maintenant)...
31 Octobre 2007 à 10 :16 PM

AC a dit...
Cher Urs
Ce n'est pas vraiment bien expliqué nulle part, donc le mieux est de comprendre l'idée de base sur un exemple sans entrer dans les détails techniques. Considérez le système de spin sur un réseau infini.

L'algèbre des observables est la limite inductive des algèbres de dimension finie qui proviennent du produit tensoriel des algèbres matricielles sur des sous-ensembles finis du réseau. Par construction, ils impliquent seulement un nombre fini d'endroits du treillis à un instant donné. De ce fait, un automorphisme intérieur - puisqu'il est implémenté par un élément unitaire de l'algèbre - ne "voit" vraiment qu'un nombre fini de degrés de liberté.
1er Novembre 2007 à 5 :49 PM

AC a dit...
Cher Anonymous
L'espace-temps qui permet de récupérer le modèle standard couplé à la gravité est de type I, car c'est le produit d'une variété M par un espace fini F c'est-à-dire un espace dont l'algèbre de coordonnées est de dimension finie. Ce n'est pas à ce niveau que nous nous attendons à obtenir du "temps émergent" mais plutôt au niveau de l'algèbre des observables dans QG. L'origine de cette idée vient de Carlo Rovelli qui - complètement indépendamment de l'histoire de KMS - avait trouvé en réfléchissant aux questions philosophiques de base dans QG que le "temps que nous ressentons" (par opposition à une coordonnée temporelle

dans l'espace-temps) doit être de nature thermodynamique et doit être lié à un état thermique : le bain de chaleur du reliquat de rayonnement photonique qui rompt naturellement l'invariance de Lorentz. La vraie chose maintenant est de mettre la main sur un bon modèle pour une algèbre d'observables spectraux dans QG. Quelques ingrédients pour cela sont expliqués à la fin de notre prochain livre avec Matilde Marcolli. Mais je préfère raconter l'histoire dans l'un des "battements de cœur" à venir plutôt que de l'expliquer dans un commentaire ...
2 Novembre 2007 à 2 :42 PM

AC a dit...
Cher anonymous
Je n'aime pas être trop négatif dans mes commentaires. Le document de Li est une tentative de prouver une variante de la formule de trace de mon papier dans Selecta. La "preuve" est celle du Théorème 7.3 page 29 du document de Li, mais je me suis arrêté de le lire quand j'ai vu qu'il étend la fonction de test h des idèles aux adèles par 0 à l'extérieur des ideles puis en utilisant la transformée de Fourier (voir page 31). Cela ne peut pas fonctionner et les ideles forment un ensemble de mesure 0 à l'intérieur des adèles (contrairement à ce qui se passe quand on ne traite qu'un nombre de places fini).
3 Juillet 2008 à 7 :50 AM

AC a dit...
1er août 2008
En tant qu'épilogue de ces longs articles sur l'atelier de l'Université Vanderbilt, nous aimerions remercier tous les intervenants pour leur participation spontanée et généreuse et pour avoir partagé leurs idées avec nous sur le corps à un élément et sa nouvelle connexion avec NCG. Nous remercions également tous les participants pour avoir assisté aux échanges et avoir écouté patiemment les discussions qui étaient parfois intenses et certainement "très vivantes" et stimulantes...

Lundi 4 Août 2008
IRONIE
De manière assez ironique, la première masse de Higgs qui est maintenant exclue par les derniers résultats de Tevatron est précisément 170 GeV, à savoir celle qui était privilégiée dans l'interprétation NCG du modèle standard, de l'unification de l'auto-couplage quartique de Higgs avec les autres couplages de jauge et en faisant l'hypothèse du "grand désert", qui suppose qu'il n'y a pas de nouvelle physique (à part le mélange des neutrinos) jusqu'à l'échelle d'unification. Ma première réaction est bien sûr un découragement profond, mélangé à la curiosité de savoir quelle nouvelle physique sera découverte au LHC.

Je termine avec ces vers de Lucrèce :
Suave, mari magno turbantibus aequora ventis,
e terra magnum alterius spectare laborem ;
non quia vexari quemquamst jucunda voluptas,
sed quibus ipse malis careas quia cernere suave est.

[Il est plaisant, lorsque les vents troublent les eaux d'une immense mer,
De regarder depuis le rivage les épreuves infligées à un autre,
Non pas parce que les malheurs de quiconque procurent une joie délectable,
Mais parce qu'il est plaisant de ne pas être dans ce malheur qu'un autre subit.]

Mardi 21 Février 2012
Galois
Ceci est juste un très court message pour ceux qui seraient intéressés par un exposé simple au sujet de Galois, ses relations avec les mathématiciens français de son temps, et une introduction générale à la "théorie de l'ambiguïté". La conférence est en français, disponible sur http://www.alainconnes.org/fr/videos.php
N'oubliez pas de cliquer sur le symbole "HD" à l'écran pour obtenir une meilleure qualité de la vidéo.

Samedi 9 Juin 2012
TRISTE NOUVELLE
C'est avec une profonde tristesse que nous apprenons la mort subite de Jean-Louis Loday, tombé par accident de son voilier le 6 juin. Nous perdons un mathématicien exceptionnel qui a produit tant de grandes réalisations et un merveilleux ami de longue date.

Vendredi 10 Août 2012
UNE ROBE POUR LE MENDIANT ?

Depuis 4 ans, je pensais qu'il y avait une incompatibilité inévitable entre le modèle spectral et l'expérience. J'ai écrit un article dans ce blog pour expliquer le problème, le 4 août 2008, dès qu'une masse d'environ 170 GeV pour le Higgs avait été exclue par le Tevatron. Maintenant, 4 ans se sont écoulés et nous savons enfin que la particule de Brout-Englert-Higgs existe et a une masse d'environ 125 Gev.

Pendant tout ce temps, le problème de cet écart dans la masse de Higgs semblait très difficile à résoudre et cela a certainement ralenti un peu l'intérêt pour le modèle spectral car il ne semblait pas y avoir de moyen facile et tout ce que l'on essaierait ne réussirait pas à réduire la masse de Higgs. La raison de ce billet est que cette incompatibilité a finalement été résolue de manière pleinement satisfaisante dans un travail conjoint avec mon collaborateur Ali Chamseddine, l'article est maintenant sur arXiv ici http://fr.arxiv.org/pdf/1208.1030

Ce qui est vraiment remarquable, c'est qu'il n'est pas nécessaire de modifier le modèle spectral, en aucune façon, il avait déjà les bons ingrédients et notre erreur a été d'avoir négligé le rôle d'un véritable champ scalaire qui était déjà présent et dont les couplages (avec le champ de Higgs notamment) avaient déjà été calculés en 2010 comme on peut le voir sur http://fr.arxiv.org/pdf/1004.0464

Cela change complètement la perspective sur le modèle spectral, d'autant plus que le champ scalaire ci-dessus a été indépendamment suggéré par plusieurs groupes comme un moyen de stabiliser le modèle standard malgré la faible masse expérimentale de Higgs. Donc, après cette interaction fructueuse avec les résultats expérimentaux, il est juste de conclure qu'il y a de fortes chances que l'approche spectrale de la physique des hautes énergies soit la bonne piste pour une unification géométrique de toutes les forces connues, y compris la gravité.

Quelques mots sur l'image, la métaphore du modèle standard en mendiant avec un diamant dans la poche a été suggérée par Daniel Kastler il y a longtemps, donc cela explique le personnage de droite. Le personnage de gauche porte les symboles issus de la NCG, les ingrédients de nature spectrale qui permettent de construire la géométrie à partir des observables gravitationnels, tels que le spectre de l'opérateur de Dirac, et d'écrire l'action du modèle standard couplé à la gravité.

Mardi 30 Octobre 2012
LA MUSIQUE DES SPHERES
Le titre de cet article, la musique des sphères, fait référence à un exposé *La musique des formes* https://www.dailymotion.com/video/xuiyfo que j'ai donné à Lille, le 26 septembre, à l'occasion d'une réunion conjointe avec le Fields Institute. La conférence est une introduction à l'aspect spectral de la géométrie non-commutative et à ses implications en physique.

Le point de départ est la question naïve “Où sommes-nous ?”, ou comment est-il possible de communiquer avec des extraterrestres notre position dans l'Univers. Cette question conduit, dans le cadre riemannien de la géométrie, à celle de déterminer un ensemble complet d'invariants géométriques, à la fois pour un espace et pour un point dans un espace. Le thème de Mark Kac, “Peut-on entendre la forme d'un tambour ?” associe à une forme son échelle musicale qui est le spectre de la racine carrée du laplacien, ou mieux de l'opérateur de Dirac. Après avoir illustré ce thème familier par de nombreux exemples concrets, nous donnons un indice de l'invariant supplémentaire qui permet de récupérer l'image géométrique, à savoir l'invariant CKM, et l'illustrer, sous une forme simplifiée, pour l'exemple le plus simple possible de formes isospectrales mais non congruentes. Et la relation avec la musique ? On constate rapidement que la musique est plutôt basée sur l'échelle (spectre) qui se compose de l'ensemble des puissances entières positives q^n pour le nombre réel $q = 2^{1/12} \sim 3^{1/19}$. En raison de la croissance exponentielle de ce spectre, il ne peut correspondre à une forme familière mais plutôt à un objet de dimension moindre que tout nombre strictement positif. Comme expliqué dans l'exposé, il y a un bel espace qui a le bon spectre : c'est la sphère quantique de Poddles, Dabrowski, Sitarz, Brain, Landi et all. Son spectre se compose d'une légère variante des q^j où chacune apparaît avec multiplicité $O(j)$. (Voir le papier original de Dabrowskiet Sitarz arXiv:math/0209048 (Banach Center Publications, 61, 49-58, 2003)
pour la formule précise, et le papier de Brain et Landi arXiv:math/1003.2150 pour une variante et les nombreuses références aux mathématiciens impliqués, mes excuses à chacun d'eux pour ne pas en avoir mis la liste ici.)

Nous expérimentons en interagissant avec ce spectre et montrons à quel point il est adapté pour jouer de la musique. La nouvelle géométrie qui encode ces nouveaux espaces, est ensuite introduite sous sa forme spectrale, c'est la géométrie non-commutative, qui est alors confrontée à la physique. Là, le noyau est le modèle standard spectral de A. Chamseddine et l'auteur, modèle qui remonte à 1996. Nous racontons l'histoire de la résilience de ce modèle dans ses confrontations successives aux expériences. Le début et la fin de l'exposé sont inhabituels. La conférence précédente était une conférence d'Alain Aspect sur ses récentes expériences, avec ses collaborateurs, confirmant expérimentalement le “choix différé” Gedankenexperiment de John Wheeler. Donc, le tout début de mon exposé fait référence au point souligné par Aspect sur la subtilité du concept de “réalité” impliquée par le quantique. La thèse que je défends brièvement est que le manque total de contrôle que nous avons sur le résultat d'une expérimentation quantique (nous ne contrôlons que les probabilités), est une “variabilité” plus primordiale que la variabilité classique régie par le temps qui passe (sur lequel nous n'avons aucun contrôle non plus). J'explique aussi brièvement pourquoi le temps émerge de la variabilité quantique. La partie finale, dans la session de questions, est également inhabituelle, c'est une longue réponse à une question posée par Alain Aspect.

Les trois intervenants, Lille 26 septembre : E. Ghys, A.Aspect, A. Connes
Mise à jour : Le discours d'Alain Aspect est désormais également disponible sur le site de la conférence https://www.youtube.com/watch?v=vqEg4VnoCmc.

Dimanche 9 Novembre 2014
PARTICULES EN GRAVITE QUANTIQUE
Le but de cet article est d'expliquer une découverte récente que nous avons faite avec mes deux collaborateurs physiciens Ali Chamseddine et Slava Mukhanov. Nous avons écrit un long article *Geometry and the Quantum : Basics* https://arxiv.org/abs/1411.0977 que nous avons mis sur l'arXiv, mais en quelque sorte je ressens le besoin d'expliquer le résultat en termes non techniques.

Le sujet est la notion de particule dans la gravité quantique. En physique des particules, il existe une notion bien acceptée de particule qui est la même que celle de représentation irréductible du Groupe de Poincaré. Il est donc naturel de penser que la notion de particule dans la gravité quantique impliquera des représentations irréductibles dans l'espace de Hilbert, et la question est "de quoi ?".

Ce que nous avons trouvé est une réponse candidate qui est un analogue de degré 4 de la relation de commutation canonique de Heisenberg $[p, q] = ih$. Le degré 4 est lié à la dimension de l'espace-temps. Le rôle de l'opérateur p est maintenant joué par l'opérateur de Dirac D. Le rôle de q est joué par la barre oblique de Feynman, de sorte que l'on applique la même recette aux variables spatiales qu'on le fait aux variables de moment. L'équation est alors de la forme $E(Z[D, Z]^4) = \gamma$ où γ est la chiralité et où le E d'un opérateur est sa projection sur le commutant des matrices gamma utilisées pour définir la barre oblique de Feynman.

Nos principaux résultats sont alors les suivants :

1) Chaque 4-variété M de spins (compact lisse connexe) apparaît comme une représentation irréductible de notre équation bilatérale.

2) L'algèbre générée par les champs coupés est l'algèbre des fonctions sur M avec des valeurs dans $A = M_2(H) \oplus M_4(C)$, qui est exactement l'algèbre légèrement non-commutative nécessaire pour produire la gravité couplée au modèle standard étendu au minimum à une théorie asymptotiquement libre.

3) La seule contrainte sur la métrique riemannienne de la 4-variété est que son volume est quantifié, ce qui signifie qu'il s'agit d'un entier (supérieur à 4) en unités de Planck.

Le résultat 1) est la conséquence de résultats profonds dans la théorie de l'immersion remontant aux travaux de Smale, mais aussi aux résultats géométriques sur la construction de 4-variétés comme couvertures ramifiées de la 4-sphère, où le résultat optimal est le résultat d'Iori et Piergallini affirmant que l'on peut toujours supposer que la ramification se produit sur des surfaces lisses et à 5 couches dans la couverture ramifiée. La dimension 4 apparaît comme la dimension critique car trouver une variété donnée comme une représentation irréductible nécessite de trouver deux cartes de la sphère de telle sorte que leurs ensembles singuliers ne se croisent pas. Dans la dimension n, les ensembles singuliers peuvent avoir (en vertu de l'analyse complexe) une dimension aussi petite que $n - 2$ (mais pas moins) et donc un argument de position générale fonctionne si $(n - 2) + (n - 2)$ est inférieur à n, tandis que $n = 4$ est la valeur critique.

Le résultat 2) est une conséquence de la classification des algèbres de Clifford. Lorsque vous travaillez en dimension 4, la sphère vit dans l'espace euclidien à cinq dimensions et pour écrire son équation comme la somme des carrés des cinq coordonnées, on a besoin de 5 matrices gamma. Les deux algèbres de Clifford $Cliff(+, +, +, +, +)$ et $Cliff(-, -, -, -, -)$ sont respectivement $M_2(H) + M_2(H)$ et $M_4(C)$. Ainsi prendre une représentation irréductible de chacune d'elles donne respectivement $M_2(H)$ et $M_4(C)$.

Le résultat 3) provient de la formule d'index en géométrie non-commutative. On montre que l'équation de degré 4 implique que le volume de la variété (qui est défini comme le terme principal des asymptotes de Weyl des valeurs propres de l'opérateur de Dirac) est la somme de deux indices de Fredholm et est donc un entier. Il s'appuie fortement sur la formule de l'indice de cohomologie cyclique et la détermination de la classe de Hochschild du caractère de Chern. Le grand avantage de 3) est que, comme le volume est quantifié, l'énorme terme cosmologique qui domine l'action spectrale est maintenant quantifié et n'interfère plus avec les équations de mouvement qui, c'est un résultat de notre collaboration de longue date avec Ali Chamseddine, ramènent aux équations d'Einstein couplées au modèle standard.

Le gros plus de 2) est que l'on comprend enfin le sens de l'étrange choix des algèbres qui semble être privilégié par nature : c'est le moyen le plus simple de remplacer un certain nombre de coordonnées par un seul opérateur. De plus, suite à notre collaboration avec Walter van Suijlekom, nous avons constaté que la légère extension du Modèle standard à un modèle de Pati-Salam donné par l'algèbre $M_2(H) \oplus M_4(C)$ améliore considérablement les choses du point de vue mathématique tout en rendant le modèle asymptotiquement libre ! (voir Au-delà du spectral modèle standard, émergence de l'unification Pati-Salam http://www.alainconnes.org/docs/beyond.pdf). Pour avoir une image mentale de la signification de 1), je vais essayer une image qui est venue progressivement pendant que nous travaillions sur le problème de la réalisation de toutes les 4-variétés à spin avec un volume quantifié arbitrairement grand comme solution à l'équation.

"*L'histoire euclidienne de l'espace-temps se déroule à la dimension macroscopique à partir du produit de deux 4-sphères du volume planckien tandis qu'un papillon se déploie de sa chrysalide.*"

Annexe : Section extraite des *Récoltes et semailles* de Grothendieck

Les motifs - ou le cœur dans le cœur

Le thème du topos est issu de celui des schémas, l'année même où sont apparus les schémas - mais en étendue il dépasse largement le thème-mère. C'est le thème du topos, et non celui des schémas, qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde", où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Si le thème des schémas est comme le cœur de la géométrie nouvelle, le thème du topos en est l'enveloppe, ou la demeure. Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres, provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques.

Ce thème du topos est très loin pourtant d'avoir connu la fortune de celui des schémas. Je m'exprime à ce sujet en diverses occasions dans Récoltes et Semailles, et ce n'est pas le lieu ici de m'attarder sur les vicissitudes étranges qui ont frappé cette notion. Deux des maîtres-thèmes de la géométrie nouvelle sont pourtant issus de celui du topos, deux "théories cohomologiques" complémentaires, conçues l'une et l'autre aux fins de fournir une approche vers les conjectures de Weil : le thème étale (ou "ℓ-adique"), et le thème cristallin. Le premier s'est concrétisé entre mes mains en l'outil cohomologique ℓ-adique, qui dès à présent apparaît comme un des plus puissants outils mathématiques du siècle. Quant au thème cristallin, réduit après mon départ à une existence quasi-occulte, il a finalement été exhumé (sous la pression des besoins) en juin 1981, sous les feux de la rampe et sous un nom d'emprunt, dans des circonstances plus étranges encore que celles autour des topos.

L'outil cohomologique ℓ-adique a été, comme prévu, l'outil essentiel pour établir les conjectures de Weil. J'en ai démontré moi-même un bon paquet, et le dernier pas a été accompli avec maestria, trois ans après mon départ, par Pierre Deligne, le plus brillant de mes élèves "cohomologistes".

J'avais d'ailleurs dégagé, vers l'année 1968, une version plus forte et surtout, plus "géométrique" des conjectures de Weil. Celles-ci restaient "entachées" (si on peut dire !) d'un aspect "arithmétique" apparemment irréductible, alors pourtant que l'esprit même de ces conjectures est d'exprimer et de saisir "l'arithmétique" (ou "le discret") par la médiation du "géométrique" (ou du "continu")[4]. En ce sens, la version des conjectures que j'avais dégagée me paraît plus "fidèle" que celle de Weil lui-même à la "philosophie de Weil" - à cette philosophie non écrite et rarement dite, qui a été peut-être la principale motivation tacite dans l'extraordinaire essor de la géométrie au cours des quatre décennies écoulées[5]. Ma reformulation a consisté, pour l'essentiel, à dégager une sorte de "quintessence" de ce qui devait rester valable, dans le cadre des variétés algébriques dites "abstraites", de la classique "théorie de Hodge", valable pour les variétés algébriques "ordinaires"[6]. J'ai appelé "conjectures standard" (pour les cycles algébriques) cette nouvelle version, entièrement géométrique, des fameuses conjectures.

Dans mon esprit, c'était là un nouveau pas, après le développement de l'outil cohomologique ℓ-adique, en direction de ces conjectures. Mais en même temps et surtout, c'était aussi un des principes d'approche possibles vers ce qui m'apparaît encore comme le thème le plus profond que j'aie introduit en mathématique[7] : celui des motifs (lui-même né du "thème cohomologique ℓ-adique"). Ce thème est comme le cœur ou l'âme, la partie la plus cachée, la mieux dérobée au regard, du thème schématique, qui lui-même est

4. (A l'intention du mathématicien) Les conjectures de Weil sont subordonnées à des hypothèses de nature "arithmétique", du fait notamment que les variétés envisagées doivent être définies sur un corps fini. Du point de vue du formalisme cohomologique, cela conduit à donner une place à part à l'endomorphisme de Frobenius associé à une telle situation. Dans mon approche, les propriétés cruciales (type "théorème de l'index généralisé") concernent les correspondances algébriques quelconques, et ne font aucune hypothèse de nature arithmétique sur un corps de base préalablement donné.

5. Il y a eu cependant, après mon départ en 1970, un mouvement de réaction très nette, lequel s'est concrétisé par une situation de stagnation relative, que j'ai occasion plus d'une fois d'évoquer dans les lignes de Récoltes et Semailles.

6. "Ordinaire" signifie ici : "définie sur le corps des complexes". La théorie de Hodge (dite "des intégrales harmoniques") était la plus puissante des théories cohomologiques connues dans le contexte des variétés algébriques complexes.

7. C'est le thème le plus profond, tout au moins dans la période "publique" de mon activité de mathématicien, entre 1950 et 1969, c'est-à-dire jusqu'au moment de mon départ de la scène mathématique. Je considère le thème de la géométrie algébrique anabélienne et de la théorie de Galois-Teichmüller, développé à partir de 1977, comme étant d'une profondeur comparable.

au cœur de la vision nouvelle. Et les quelques phénomènes-clef dégagés dans les conjectures standard[8] peuvent être vus comme formant une sorte de quintessence ultime du thème motivique, comme le "souffle" vital de ce thème subtil entre tous, de ce "cœur dans le cœur" de la géométrie nouvelle.

Voici en gros de quoi il s'agit. Nous avons vu, pour un nombre premier p donné, l'importance (en vue notamment des conjectures de Weil) de savoir construire des "théories cohomologiques" pour les "variétés (algébriques) de caractéristique p". Or, le fameux "outil cohomologique ℓ-adique" fournit justement une telle théorie, et même une infinité de théories cohomologiques différentes, à savoir une associée à tout nombre premier différent de la caractéristique p. Il y a là encore visiblement, une "théorie qui manque", qui correspondrait au cas d'un ℓ qui serait égal à p. Pour y pourvoir, j'ai imaginé tout exprès une autre théorie cohomologique encore à laquelle il a été déjà fait allusion tantôt), dite "cohomologie cristalline". D'ailleurs, dans le cas important où p est infini, on dispose de trois autres théories cohomologiques encore[9] - et rien ne prouve qu'on ne sera conduit, tôt ou tard, à introduire encore de nouvelles théories cohomologiques, ayant des propriétés formelles toutes analogues. Contrairement à ce qui se passait en topologie ordinaire, on se trouve donc placé là devant une abondance déconcertante de théories cohomologiques différentes. On avait l'impression très nette qu'en un sens qui restait d'abord assez flou, toutes ces théories devaient "revenir au même", qu'elles "donnaient les mêmes résultats"[10]. C'est pour parvenir à exprimer cette intuition de "parenté" entre théories cohomologiques différentes, que j'ai dégagé la notion de "motif" associé à une variété algébrique. Par ce terme, j'entends suggérer qu'il s'agit du "motif commun" (ou de la "raison commune") sous-jacent à cette multitude d'invariants cohomologiques différents associés à la variété, à l'aide de la multitude de toutes les théories cohomologiques possibles à priori. Ces différentes théories cohomologiques seraient comme autant de développements thématiques différents, chacun dans le "tempo", dans la "clef" et dans le "mode" ("majeur" ou "mineur") qui lui est propre, d'un même "motif de base" (appelé "théorie cohomologique motivique"), lequel serait en même temps la plus fondamentale, ou la plus "fine", de toutes ces "incarnations" thématiques différentes (c'est-à-dire, de toutes ces théories cohomologiques possibles). Ainsi, le motif associé à une variété algébrique constituerait l'invariant cohomologique "ultime", "par excellence", dont tous les autres (associés aux différentes théories cohomologiques possibles) se déduiraient, comme autant d'"incarnations" musicales, ou de "réalisations" différentes. Toutes les propriétés essentielles de "la cohomologie" de la variété se "liraient" (ou s'"entendraient") déjà sur le motif correspondant, de sorte que les propriétés et structures familières sur les invariants cohomologiques particularisés (ℓ-adique ou cristallins, par exemple), seraient simplement le fidèle reflet des propriétés et structures internes au motif[11].

8. (A l'intention du lecteur géomètre algébriste) Il y a lieu, éventuellement, de reformuler ces conjectures. Pour des commentaires plus circonstanciés, voir "Le tour des chantiers" (ReS IV note n° 178, p. ... (chercher Chantier 6)) et la note de b. de p. dans "Conviction et connaissance" (ReS III, note n° 162).

9. (A l'intention du lecteur mathématicien) Ces théories correspondent respectivement à la cohomologie de Betti (définie par voie transcendante, à l'aide d'un plongement du corps de base dans le corps des complexes), à la cohomologie de Hodge (définie par Serre) et à la cohomologie de De Rham (définie par moi), ces deux dernières remontant déjà aux années cinquante (et celle de Betti, au siècle dernier).

10. (A l'intention du lecteur mathématicien) Par exemple, si f est un endomorphisme de la variété algébrique X, induisant un endomorphisme de l'espace de cohomologie $H^i(X)$, le "polynôme caractéristique" de ce dernier devait être à coefficients entiers, ne dépendant pas de la théorie cohomologique particulière choisie (par exemple : ℓ-adique, pour ℓ variable). Itou pour des correspondances algébriques générales, quand X est supposée propre et lisse. La triste vérité (et qui donne une idée de l'état de lamentable abandon de la théorie cohomologique des variétés algébriques en caractéristique $p > 0$, depuis mon départ), c'est que la chose n'est toujours pas démontrée à l'heure actuelle, même dans le cas particulier où X est une surface projective et lisse et $i = 2$. En fait, à ma connaissance, personne après mon départ n'a encore daigné s'intéresser à cette question cruciale, typique de celles qui apparaissent comme subordonnées aux conjectures standard. Le décret de la mode, c'est que le seul endomorphisme digne d'attention est l'endomorphisme de Frobenius (lequel a pu être traité à part par Deligne, par les moyens du bord...).

11. (A l'intention du lecteur mathématicien) Une autre façon de voir la catégorie des motifs sur un corps k, c'est de la visualiser comme une sorte de "catégorie abélienne enveloppante" de la catégorie des schémas séparés de type fini sur k. Le motif associé à un tel schéma X (ou "cohomologie motivique de X", que je note $H^*_{mot}(X)$) apparaît ainsi comme une sorte d'"avatar" abélianisé de X. La chose cruciale ici, c'est que, tout comme une variété algébrique X est susceptible de "variation continue" (sa classe d'isomorphie dépend donc de "paramètres" continus, ou "modules"), le motif associé à X, ou plus généralement, un motif "variable", est lui aussi susceptible de variation continue. C'est là un aspect de la cohomologie motivique, qui est en contraste frappant avec ce qui se passe pour tous les invariants cohomologiques classiques, y compris les invariants ℓ-adique, à la seule exception de la cohomologie de Hodge des variétés algébriques complexes. Ceci donne une idée à quel point la "cohomologie motivique" est un invariant plus fin, cernant de façon beaucoup plus serrée la "forme arithmétique" (si j'ose hasarder cette expression) de X, que les invariants purement topologiques traditionnels. Dans ma vision des motifs, ceux-ci constituent une sorte de "cordon" très caché et très délicat, reliant les propriétés algébro-géométriques d'une variété algébrique, à des propriétés de nature "arithmétique" incarnées par son motif. Ce dernier peut être considéré comme un objet de nature "géométrique" dans son esprit même, mais où les propriétés "arithmétiques" subordonnées à la géométrie se trouvent, pour ainsi dire, "mises à nu". Ainsi, le motif m'apparaît comme le plus profond "invariant de la forme" qu'on a su associer jusqu'à présent à une variété algébrique, mis à part son "groupe fondamental motivique". L'un et l'autre invariant représentent pour moi comme les "ombres" d'un "type d'homotopie motivique" qui resterait à décrire (et sur lequel je dis quelques mots en passant dans la note "Le tour des chantiers - ou outils et vision" (ReS IV, n° 178, voir chantier 5 (Motifs),

C'est là, exprimé dans le langage non technique d'une métaphore musicale, la quintessence d'une idée d'une simplicité enfantine encore, délicate et audacieuse à la fois. J'ai développé cette idée, en marge des tâches de fondements que je considérais plus urgentes, sous le nom de "théorie des motifs" ou de "philosophie (ou "yoga") des motifs", tout au long des années 1963-69. C'est une théorie d'une richesse structurale fascinante, dont une grande partie est restée encore conjecturale[12].

Je m'exprime à diverses reprises dans Récoltes et Semailles au sujet de ce "yoga des motifs", qui me tient particulièrement à cœur. Ce n'est pas le lieu de revenir ici sur ce que j'en dis ailleurs. Qu'il me suffise de dire que les "conjectures standard" découlent le plus naturellement du monde de ce yoga des motifs. En même temps elles fournissent un principe d'approche pour une des constructions en forme possibles de la notion de motif.

Ces conjectures m'apparaissaient, et m'apparaissent aujourd'hui encore, comme l'une des deux questions les plus fondamentales qui se posent en géométrie algébrique. Ni cette question, ni l'autre question tout aussi cruciale (celle dite de la "résolution des singularités") n'est encore résolue à l'heure actuelle. Mais alors que la deuxième de ces questions apparaît, aujourd'hui comme il y a cent ans, comme une question prestigieuse et redoutable, celle que j'ai eu l'honneur de dégager s'est vue classer par les péremptoires décrets de la mode (dès les années qui ont suivi mon départ de la scène mathématique, et tout comme le thème motivique lui-même[13]) comme aimable fumisterie grothendieckienne. Mais encore une fois j'anticipe...

et notamment p. ...)). C'est ce dernier objet qui me semble devoir être l'incarnation la plus parfaite de l'élusive intuition de "forme arithmétique" (ou "motivique") d'une variété algébrique quelconque.

12. J'ai expliqué ma vision des motifs à qui voulait l'entendre, tout au long de ces années, sans prendre la peine de rien publier à ce sujet noir sur blanc (ne manquant pas d'autres tâches au service de tous). Cela a permis plus tard à certains de mes élèves de piller plus à l'aise, sous l'œil attendri de l'ensemble de mes anciens amis, bien au courant de la situation (Voir note de b. de p. qui suit.).

13. En fait, ce thème a été exhumé en 1982 (un an après le thème cristallin), sous son nom d'origine cette fois (et sous une forme étriquée, dans le seul cas d'un corps de base de caractéristique nulle), sans que le nom de l'ouvrier ne soit prononcé. C'est là un exemple parmi un nombre d'autres, d'une notion ou d'un thème enterré aux lendemains de mon départ comme des fantasmagories grothendieckiennes, pour être exhumés l'un après l'autre par certains de mes élèves au cours des dix ou quinze années suivantes, avec une fierté modeste et (est-il besoin encore de le préciser) sans mention de l'ouvrier...

TABLE DES MATIÈRES

Chapter 1

The principle of uncertainty

This is to retrace a scientific journey, in this case the mine, but it's sort of secondary. What matters before everything is meetings, and above all scientific fields is concerned.

After entering the École Normale Supérieure, I decided not to pass the aggregation because I didn't want to start over cram. I had started, at the School, to do research in math but I really did find a topic that interested me only after getting out, with Quantum mechanics.

I always had with me the little book published by Heisenberg in 1930 (The Physical Principles of Quantum Theory) and I had been extremely inspired by the way he explained how he had discovered the mechanics of matrices which underlies the Quantum mechanics. I start there, because this discovery of Heisenberg played, throughout my journey, an absolutely essential role.

Before Heisenberg's discovery, there was a model for the atom, which was called "Bohr's atom" and which postulated electrons in stable circular orbit around the nucleus. And there were completely ad hoc rules, which had no conceptual justification but allowed to find, for example, how the spectrum of hydrogen was made. Heisenberg was taking care to calculate spectra of atoms, i.e. to determine mathematically the set of wavelengths present in the light emitted by the atom in question. By a contest of circumstances - chance plays an important role in science - he had been sent by his university to the island of Helgoland, in the North sea, to treat a serious hay fever: at the time, the only remedy was to take refuge in a place totally sheltered from pollens. It is a very small island, where he was staying with an old lady and had plenty of time to think and make calculations. He had developed his new mechanics but his theory seemed to him contradictory: energy conservation, which plays an essential role in classical formalism, posed a problem and had to remain true in its new formalism. So he made calculations with the system that he had created and he finally realized that the energy was well preserved! He describes this moment very vividly in his autobiography. It was then 3 or 4 in the morning, and he said that at that instant, he had a landscape in front of him that almost frightened him by its immensity. Instead of going to sleep, he climbed one of the peaks that borders the island and waited there for sunrise.

This discovery of Heisenberg was my starting point. When I graduated from the École normale, I was a student of Gustave Choquet and he had the idea to make me learn physics by sending me to Les Houches summer school, in 1970. There were Oscar lectures of Lanford, who explained what von Neumann had done after Heisenberg. What Heisenberg found was that when you do physics calculations for microscopic systems, like an atom interacting with light, a phenomenon quite extraordinary happens: you can no longer have the freedom you have usually to swap the order of terms in an equation. When we write $E = mc^2$, we might as well write $E = c^2m$, the result would be the same: this is the essential algebra rule that we say "of commutativity", which means that if we swap the two terms of a product, the result is unchanged. But Heisenberg found that, when working with a microscopic system and multiplying observable quantities, for example the position of a particle by its speed, or more precisely by its moment (its speed multiplied by its mass), we can no longer swap freely the terms of the product. The corollary is very well known: this is the Heisenberg's uncertainty principle, who says there is a limit to the precision with which we can simultaneously know two properties of the same particle associated with observables which do not commute. For example, if the more we know with great precision is its position, the less we know precisely is its speed, and conversely.

This is the physical part of what is going on, we will come back to it.

Consequence: there is a kind of permanent novelty, of freedom, in mechanics which means that when we repeat certain experiments at the microscopic level, we don't get the same result. For example, if we send an electron through a slit whose size is of the order of the electron wavelength, it arrives at a target placed beyond the slit, at a specific location.

But we cannot reproduce the experiment in such a way that the electron arrives again at this same precise place. All that we know, it's the probability that it will arrive at such and such a place. There is no way, it's the

Heisenberg's uncertainty principle that says, repeat the experiment so that the electron arrives exactly in the same place. So there is a kind of fantasy of the quantum that manifests itself at all times, every time we do such an experiment at the microscopic level.

Mathematically, it's a different story, because the discovery of Heisenberg taught physicists that they needed to be careful when handling these observable quantities in the framework of what has become quantum mechanics, that is to say the mechanics of microscopic systems. This may seem confusing but this is actually a phenomenon we are accustomized to: it manifests itself every day when we write. If we swap the letters used between them, like when we make anagrams, we change the meaning of the sentences: thus gravitational waves "includes the same letters but does not have the same meaning that" the distant stormy wind.

Both have the same value when working in Commutative algebra, where you can swap letters. For that, the sentences do not lose their meaning, we understood that we must do pay attention to the order of the letters in a sentence. And Heisenberg has shown that when we work at the microscopic level, we no longer have the right to simplify as we simplify in physics calculations ordinary. It's a major discovery because it has a considerable impact, not only in physics, but also in mathematics. As far as I'm concerned, I spent most of my existence of scientist to exploit it mathematically.

Max Born and Pascual Jordan understood that the calculations that Heisenberg made were what are called, in mathematics, calculations of matrices. No need to know what a matrix is. Which is essential is that matrices have this property, compared to ordinary numbers, not to switch between them. The product of two matrices in the order "ab" will generally have a different result of the product "ba". Born and Jordan understood that Heisenberg had rediscovered the matrices, but in a natural form, from observations.

Chapter 2

Specters

In common parlance, specters are ghosts or in any case report strange things. In physics, the word spectrum denotes a reality, just like in mathematics. One of the miracles which happened in the XX$^{\text{th}}$ century is that the spectra of physics have could be calculated as spectra in the mathematical sense in the most important physical examples.

The physical meaning of the spectra is understood in the way next: when, following Newton, we take the light that comes from the Sun and we pass it through a prism, it gives, once decomposed by its passage through the prism, a rainbow, that is, it breaks down into simpler elements which each correspond to one of the colors of the rainbow. But in refining this experience, we realized that we were watching at a place of the rainbow a black line, which is called the black line sodium. We considered this line as an isolated element, until what the German optician Fraunhofer had in the XIX$^{\text{th}}$ century the idea extraordinary to watch the rainbow obtained after the passage of the sunlight through a prism with a microscope. They are then saw that there was not a single black stripe, but did listed about five hundred. They are what physicists call an “absorption spectrum”, which looks a bit like a barcode. Years later, Robert Bunsen and Gustav Kirchhoff, among others, have noticed that by heating certain bodies, like sodium, you could get the same configuration, not with black stripes on a rainbow background, but with stripes bright on a black background. We then understood that these lines were a kind of signature of the chemical body in question, and succeeded in reproduce, with different chemical bodies, a number of lines that appeared in the spectrum of the Sun.

So these barcodes, these “absorption spectra”, appear like black lines when we look at the sunlight at through a prism, with the extraordinary precision that a microscope. But we observe lines that we do not manage to relate to a known item. This is where physicists and chemists stepped in to say they might be the ones of an unknown chemical body. And, as it comes from the Sun, we have it called “helium”.

Then occurs, at the beginning of the XX$^{\text{th}}$ century, the eruption of Vesuvius. With the same spectrometric processes, we analyzed the light from its lavas and helium was found there. That’s wonderful. That explains what what are spectra in the sense of physics, it gives their meaning and their importance: each of them is a signature. Each body different chemical has different signature, barcode different. When the chemical body is pure, its signature is not a superimposition of different signatures, it is also pure.

Obviously, we immediately tried to understand what was the nature of this signature. We looked for the available body on simpler, hydrogen, because it was more difficult for helium. We have took a while to figure out that if we looked at a general spectrum, not in wavelengths, but in frequencies, this one had a remarkable structure. It was actually a specter formed by the differences A - B between any elements A, B of a simpler set of frequencies. That is to say, you had to index frequencies that appear in a general spectrum by two indices like (a, b) or (c, d). Of course, if we take the difference (A - B) between A and B and that we add it to the difference (B - C), between B and C, this gives the difference between A and C.

This gave a general rule of composition for frequencies that appear in a spectrum called the “rule of Ritz-Rydberg composition”. Heisenberg’s genius is having builds its mechanics from this rule. He understood the thing following: if classical mechanics had been valid for a body microscopic, we wouldn’t have had this rule of composition but the rule of a group, that is to say that two frequencies u and v of spectrum add up to give a new frequency u + v of spectrum. We would have obtained, by a mathematical process that we called the Fourier transform, the algebra of observables.

Heisenberg had this wonderful idea of saying that these are the physics, the Ritz-Rydberg principle and chemistry which must prevail.

As this is what we find experimentally, we will base the observable algebra on this Ritz-Rydberg rule.

It was Born and Jordan who explained to Heisenberg that the mathematical structure he had found was well known to mathematicians, who call it matrices. A matrix is not nothing but an array, and instead of being indexed as a sequence by a single letter, it is indexed by two letters. When we multiply two matrices, we use the Ritz-Rydberg rule.

Shortly after this discovery of Heisenberg, Schrödinger made a another not extremely important. Thanks to him, we made the link between the spectra that appeared in physics and those that appeared in mathematics. Because, and it is remarkable, the word "spectrum" was already known in mathematics, by the Hilbert school for example, and known because of what are called operators and the spectrum operators. There is no question of explaining it precisely here, but it is something that has a perfectly defined mathematical meaning.

Schrödinger was the first to calculate the spectrum associated with hydrogen by mathematical calculation, while physicists apprehended him by measures. What is extraordinary is that Schrödinger's theory and Heisenberg's theory are the same, which gave rise to a formalism carried out by one of the greatest mathematicians of the time, who was not only mathematician: John von Neumann.

Von Neumann understood that there is a mathematical formalism existing, developed by the school of Hilbert, and which uses as a framework common mathematics what is called Hilbert space. This space, consider it as a kind of abstract, unique joker, which will play an essential role in everything that follows. There is only one Hilbert's only space and it's going to be the seat of mechanics quantum. This is the most suitable framework that we know up to present.

We know the Euclidean space, the plane, we also know the space of dimension 3. To go to Hilbert space, you have to do some not difficult, and even if we do not understand all the details, it is necessary know that it exists. The first step is to move from a space real to a complex space, which is not too difficult yet understand. We are very used to real numbers, but they are not not very flexible and easy to manipulate to do physics. We had need to add to the real numbers another number, baptized "Pure imaginary number", which checks that its square is equal to 1. he is very valuable for physics and in particular for electromagnetism.

The next step is much more difficult to accept: the Hilbert space has an infinity of dimensions. It is thanks to this that an incredible number of wonders will appear.

The first of these wonders is that there is a coincidence between Heisenberg's point of view (which is extremely practical, extremely concrete, because the observables he discovered become operators, that is, something that acts in this Hilbert space) and that of Schrödinger (who discovered how we could calculate the spectrum of a chemical element, which also manifested by an operator in Hilbert space). That seems very mysterious, but if we understood something about the nature, on reality, on quantum mechanics, it's good that the corresponding mathematical scene is that of Hilbert space and that the actors are the operators in this space.

Chapter 3

Operator algebras

This very beginning of history took place from 1925 to the 1930s.

Von Neumann then gave his formalism to quantum mechanics. But he didn't stop there. He asked himself the question, absolutely fundamental, concerning subsystems of a quantum system. He understood that ordinary quantum mechanics is formalized through Hilbert space. With a collaborator, Murray, he tried to understand what it meant to have a subsystem, that is, not knowing all the information about a quantum system. This is what we called algebras of operators, and with them that my mathematical existence has begun.

For recall, it was after having gone to the summer school of Les Houches, in 1970, that I was spotted by an American organization as a "promising young mathematician". Therefore, they invited me the following year to Seattle for a conference. I was so young married man and we took this opportunity to visit the United States.

We didn't really like the plane, so we decided to join Seattle by train, crossing Canada, four or five days across large, somewhat monotonous plains. I looked for first stop at Princeton to buy a math book to read during the trip and ended up spotting one from a Japanese author who seemed interesting to me. I only took this one and reading it absolutely fascinated me. Arrived in Seattle, I went to the Battelle Institute to learn about the program. What did I read ? The author of the book was there and gave a series of lectures!

Because of this, then, I applied what Brutus said in Julius Caesar of Shakespeare:

> *There is a tide in the affairs of men,*
> *Which, taken at the flood, leads on to fortune;*
> *Omitted, all the voyage of their life*
> *Is bound in shallows and in miseries.*

I decided that I would not go to any other conference than this Japanese's one and that I will work on the subject he exposed. Returned in France, I went in September to the only seminar that existed on operator algebras: the one of Jacques Dixmier. This one has explained that, that year, his seminar would be on another subject, which a priori had nothing to do with that of the Japanese. He asked who among the audience wanted to make a presentation. I carried myself voluntary, and he gave me to read an article on tensor products infinite. When I got home, by train, I realized that there was an extraordinary link between the article Dixmier had given to me and the works of the Japanese, and it was this confluence that was the point of departure of my thesis.

I wrote a small letter to Dixmier, half a page. He had me replied that what I had written was incomprehensible and that it was necessary that I give details. I gave them to him, then went to see him, and he said to me, “Go for it!” "That's how I happened engaged. Ultimately, the starting point of my career, it is this link with the work of the Japanese. Which, in fact, was two. The one who found the theory in question, which is called the theory of modular algebras, was called Tomita. But deaf since the age of two years old, he had trouble communicating, and it's Takesaki, another Japanese mathematician, who shaped and communicated his theory. It was the latter who spoke in Seattle.

I immediately linked Tomita's theory to work on type III factors made by Araki and Woods. What I found, a few months after defining general invariants using the theory of Tomita is that there is a phenomenon quite miraculous of independence which makes it possible to calculate these invariants.

The evolution over time does not depend on the choice of a state of algebra, provided that we work modulo interior automorphisms: there is automatically an evolution over time which is not completely canonical, but canonical modulo these interior automorphisms! A von Neumann algebra is precisely an algebra like the one Heisenberg had discovered, that is to say non-commutative, in the sense that we no longer have the right to swap between them the terms of a product. To summarize, when you don't know all the information about the quantum system, this partial knowledge is at the origin of an evolution which miraculously emerges from the very fact that our knowledge is imperfect. It allowed me not only to write my thesis, but to completely decanulate all these algebras which seemed extremely mysterious, and to understand their structure. Something was still missing: how did this miraculous appearance of time could be related to physics.

It was totally mysterious in my work, which was purely mathematical. I was missing this element and that would come much later.

Chapter 4

Mille-feuille cake

So I found these results, then, after my thesis, I found others results, very important, on the same algebras. Then I was invited to the Institute of Advanced Scientific Studies (IHES) in Bures-sur- Yvette. And there, I was shocked: I had worked on a subject when even quite specialized and I did not know at all the extent of the rest of math. When I got to IHES, people were talking about things that I didn't understand. I was immersed in a totally different environment from the specialized environment I was used to. My situation was a little embarrassing because I wanted to absolutely participate in this development of mathematics, which seemed so important - and it was.

Grothendieck has already left, but someone at IHES played a crucial role for me: Dennis Sullivan. He had this particularity quite extraordinary to ask newcomers about their research in math or physics with extremely naive questions. One had the impression that he hardly understood. But after a while, his interlocutor realized that it was him-self who didn't understand what he was talking about. His power was absolutely incredible, and it was he who taught me the differential geometry. I understood at that time that I had a considerable asset: there was a way to fabricate the algebras that I had classified, those of von Neumann, from objects of well-known differential geometry called foliations.

What I had done so far could be illustrated with objects that people doing differential geometry could perfectly understand.

What is a foliation pastry? A mountain can have a stratified appearance, that is, strata of smaller dimensions make it up. Another typical example of a mille-feuille foliation pastry, which results from a stack of sheets. The structure of a mille-feuille cake is very simple. It is made up of two parts: leaves themselves, and the set of all those leaves. A set of sheets, in a notebook for example, is very simple since it is simply indexed by the page number. But in math, a foliation can have a structure much more complicated, like a spool of thread in which the thread, instead to be rolled up so that after a finite number of turns it comes back on itself, is rolled up in an irrational way. That is say it never comes back on itself it will keep on wrapping indefinitely. What is extraordinary is that, whatever the flipping, the resulting algebra is always non-commutative.

There are other examples. In a conference I attended in the 1980s, Roger Penrose explained that he had discovered very explicit quasi-periodic tiling. Because if it is relatively simple to pave a space with hexagonal tiles, for example, since you can give a tiler the recipe to do it, the quasi-periodic tiling is more complicated, and in particular has the next peculiarity: they can have a pentagonal symmetry that no classic paving can have. What explained Penrose, it was that these tiling has a quantum side: when we takes two, we can superimpose parts as large as we wants, although they are not identical. This kind of almost coincidence, but never complete, has a quantum aspect that it had well felt intuitively. I realized at that time that the Penrose paving space had the same characteristics typical of the leaf space of a foliation, and that, thanks to the associated von Neumann algebra, it really corresponded to the Quantum mechanics.

Chapter 5

Non-commutative geometry

So that's kind of the starting point for non-commutative geometry. It is an almost direct consequence of Heisenberg's discovery.

Descartes explained that one can makes the geometry of plane entirely algebraic. For example, if we want to demonstrate that the three medians of a triangle intersect, we can use the axioms of geometry. But there is another way to demonstrate this theorem: algebraic calculations. It is then a question of calculating the barycenter of three points, using the coordinates of each of them in the plane, and the theorem is immediately demonstrated.

What is the advantage of transforming a geometric problem into an algebraic problem? For example, demonstrate geometrically in dimension 5 the analog of the fact that the medians intersect will be difficult, while the calculation is immediate. We calculate the barycenter, and the demonstration is made.

It was Descartes's idea, these coordinates, and that was the basis of algebraic geometry for years. These coordinates called "Cartesian" commute. But the coordinates in what we calls the phase space, which corresponds to the microscopic system, they no longer switch: it is the Heisenberg's discovery. This is what led me to develop the geometry for spaces whose coordinates no longer commute and which are therefore calls non-commutative geometry.

One would think, and it would be normal, that to generalize the geometry to a case where the coordinates no longer commute would feasible. It's actually quite tricky and finds its justification essentially by quantum mechanics. But if there had only been that, it would not have been enough for me. What motivated me is what I found in my thesis, i.e. the fact that such spaces have something extraordinary: they generate their own time. They are not static like ordinary spaces, but dynamic: they evolve over time.

After this initial discovery, I told myself that this extraordinary property of generating its own time made this geometry was necessarily extremely different from classic geometry, and all the more interesting. After the foliation finding, I had enough examples and when we try to develop a new theory, besides a good reason, you must have a large amount of examples. Indeed, if we have too much little, we risk developing a completely formal theory which will make no sense. The meaning is given by the variety of examples.

From the start, I understood that the most famous foliation gave the most exotic factors. I also understood that the associated von Neumann algebra only perceived one side relatively crude of the non-commutative space in question. The fact that these leaf spaces came from geometry gave them many other structures from differential geometry and that it was necessary to understand the non-commutative case.

It was the starting point for a whole development during the 1980s, in which one of the most important contributions was the cyclic cohomology, which I found, and which now plays an essential role in many other areas.

This made it possible to understand and develop the analog of the differential geometry in the non-commutative framework, to find the analog of de Rham's complex, cohomology etc. There have been all kinds of surprises, for example the Godbillon-Vey invariant appeared miraculously in this completely different setting. However, I still had this frustration of not knowing how to link this emergence of time with physics.

Chapter 6

Emergence of time and thermodynamics

In the meantime, I have always continued, as a hobby, as a somewhat parallel task, getting interested in physics, about which I read a lot. But not just any physics: quantum physics of course but beyond that, what's called the field theory. Around 1994, I was invited for several months at the Newton Institute in England at a session whose subject was gravitation. I went there because I wanted to complete my knowledge. On the spot, I got a little bored because there had almost no collective activity. One day I saw an ad for a conference whose title seemed to me extremely pretentious: We know what quantum space-time is. As we do not know, in fact, still not what it is, I got stuck with the speaker a bit. The conference was by Carlo Rovelli. We then discussed at length and I glimpse that he had an extraordinarily philosophical point of view.

I thought it was great, because in our community, people are overwhelmed by technique, by their specialization, and that there is ultimately very few philosophical discussions, unlike the time of Einstein and Heisenberg. I dared to explain to him what I found in my thesis: this extraordinary emergence of the time. He then left me without saying anything to return a few minutes later with two articles he had written the year previous. For purely philosophical reasons based on his thinking about what would happen if we tried to quantify gravitation, he placed himself at a level called "semi-classical", that is to say say not yet quantum. His idea was that when we write the Wheeler-De Witt equations, we find that when we try to quantify gravitation, time disappears. And it disappears because what's called the Hamiltonian, which normally generates evolution over time, is one of the constraints. We do not know more what we talk about when we talk about time.

Carlo had tackled this problem and, by mere philosophical reflection, he had an idea: the only way that time can emerge, it's from thermodynamics, because we let's bathe in a kind of thermodynamic bath, a bath of the 3 degree Kelvin radiation from the Big Bang. The idea is therefore not completely abstract, it relates to something very concrete. And it is this heat bath which would have caused the passage of the time.

His idea was very attractive because the passage of time such as we know wears us out. When time goes by, what we collide, it is wear and tear. And this wear comes from the temperature, because we're in a thermodynamic bath.

To implement his idea, he wrote an equation, and I recognized it right away when he showed it to me, the semi-classical limit of the equation used to have this magic flow intervening in the quantum. It was then that the junction was made. I had tried to understand how this emerging time could be related to physics. I tried to do it using quantum fields theory, but I didn't get there because the real where it happens, it's not in field theory, but in gravitation, when we try to quantify it.

We wrote an article in common, but it has neither Carlo Rovelli's philosophical qualities, nor my mathematical qualities. It was more to take a date to show that we had recognized these equations, but we haven't gone far enough in interpretation of the result.

This interpretation, I will try to explain it, because it has played an essential role in the development of non-commutative geometry. The paradigm I had arrived at in the years 1980 for non-commutative geometry can be explained very simply from quantum precisely and what is producting there.

Chapter 7

Variability

The idea, almost easier to explain, and more fundamental than the coincidence found with Carlo Rovelli, is as follows: the quantum has this extraordinary fantasy, this extraordinary imaginative power, which means that every time we repeat an experience microscopic, we get a response that we can neither predict nor reproduce. We are touching on a central problem which I will call "variability problem".

Normally if you ask someone about what the fundamental variability, everyone, not just the physicists, responds that the only variability is the passage of time.

Any variability can be reduced to the fact that time is passing. If we look carefully, we realize that almost all of physics is written in terms of what is called a differential equation, i.e. that we write that the derivative of a physical quantity with respect to the time is given by a certain relation with other quantities.

All of physics is written on this paradigm, and all of understanding that we have of variability is thought in these terms.

Let's do a little math excursion to try to understand how mathematicians have sought to formulate this that it is only a variable and how this formulation was dethroned by the quantum. When you ask a mathematician what is a real variable, he will say this: it is a set and an application of this set in real numbers. It may seem a little obscure, but that's the standard answer. We can then point out to the mathematician that there are variables that take only discrete values, for example the age of a person, that will be expressed only as an integer, and others who take continuous variables. The two cases are quite different.

There can be no coexistence in mathematics between a discrete variable and a continuous variable. Indeed, a discrete variable takes only a countable number of values (we can enumerate them one by one) while a continuous variable takes a not countable number of values so the set where it takes its source cannot be the same as that associated with a discrete variable. It is a fact. The first wonder is that formalism of quantum mechanics that von Neumann has developed solves this paradox of the non-coexistence of the discrete and the continuous. It is resolved, as I said above, because Schrödinger found that the spectra were spectra of operators in the space of Hilbert. In this same Hilbert space, on the same stage in somehow, some operators will have a discrete spectrum, like the integers, and others a continuous spectrum, that is to say that they can take all the real values between zero and infinity. The only nuance is that the two operators cannot switch.

Thus, the formalism of the operators in Hilbert space solves the paradox.

This formalism provides the framework for non-commutative geometry.

And it is thanks to it that we will be able to try to understand the emergence of time.

Chapter 8

Length unit

How does this formalism generalize the geometry in such a way that it absorbs everything that quantum has brought us? This is where the link with physics absolutely appears fundamental.

At the time of the French Revolution, there were in France as many definitions of unit of length as cities, or almost. There must have been about a thousand. At the entrance of a village, we found something about a meter which defined the unit of length in use at this location. The fabric of a merchant be a multiple of this length to be able to be sold there. It was very annoying.

We then sought to unify the unit of length, for France in particular. Scientists were first asked to give one valid definition which is not dependent on the place. They reflected, and took the biggest object at their disposal: the Earth. They have considered the circumference and then defined the unit of length as being a portion of this circumference: the forty millionth part. Since it is impossible to directly measure the entire circumference of the Earth they used an angle by pointing some stars. They knew very precisely the angle having summits the center of the Earth, Dunkirk and Barcelona, it was their so easy to calculate the total length from the measurement of the distance between Barcelona and Dunkirk, which had to be measured directly. They sent a team of scientists, Delambre and Méchain, to make these measurements. The expedition was adventurous, the France and Spain being in conflict. While they were at the top of a hill, equipped with a telescope to make measurements by triangulation, they had a lot of trouble explaining to the soldiers enemies that they weren't spying on. But they had success. The result was a platinum bar supposed to be exactly the length of the forty millionth part of the Earth circumference. It was deposited near Paris, in Sèvres.

This unit of length, as such, was not very practical.

Difficult to measure a bed by comparing it to this bar. A lot of replicas were therefore made. And then it happened, in the 1920s, a completely fabulous phenomenon, a phenomenon that is the exact parallel of the transition from ordinary geometry to non-commutative geometry.

A physicist made very precise measurements by comparing the platinum bar with the wavelength of a spectral line of the krypton, and he realized that the unit of length... was changing length! It is very annoying to have a unit that is not stable! It was therefore decided, after a fairly long time, to use what had allowed to see the change as a new unit: the line krypton orange. But it was not practical. It would have been better to take a unit that is in the order of microwaves, which have been incidentally discovered by accident (people who worked on the radar noticed that their chocolate bar had melted). There is fortunately a chemical body, cesium, which has what is called a hyperfine transition: in the outer layer of a cesium atom, there are two states so close that their energies are very close too. This means that the correspondent transition, the one I was talking about Heisenberg, between the two energy levels indexed by two indices, is such that its frequency is very small and, therefore, that the associated wavelength is big. For this transition, we get a wavelength of about 3 centimeters, that is to say it takes about 33 times more to get 1 meter. We will therefore have a measuring instrument which will be able to make precise measurements on a fabulous routine basis.

There is now a commercially available device, based on this wavelength, which measures a length with twelve decimal places given.

On the other hand, if we want to unify the metric system throughout the Galaxy, this will be a problem because cesium is not necessarily present on other star systems. A chemical body with a sufficiently high atomic number is indeed produced only in supernovae, and even super-supernovae. I think that one day or another we will be able to base the unit of length, not on cesium, but on hydrogen or helium. Why ? Because they are present practically everywhere in the Universe.

Chapter 9

Infinitesimals

What is happening at the mathematical level? Exactly the same thing. The geometry was based by Riemann on a measurement of lengths which exactly corresponds to the way of measuring of Delambre and Méchain. It consists, when we take two points in a geometric space, to consider the shortest path between these two points. In doing so, we do not need to measure this length, that of the element of infinitesimal length, which we call ds, whose Riemann gives the formula only for the square, what we call ds^2 .

What we call geometry in the Riemannian form is so a geometry based on the element of infinitesimal length, which is expressed in the form of what is called g, μ, ν. Mathematical content doesn't matter, what should be remembered is that it is something extremely concrete and which corresponds exactly to the way of measuring of Delambre and Méchain.

In physics, we had to replace the paradigm of unit of length given by the standard meter by the spectral paradigm, which precisely corresponds to a spectrum. The way it happened in non-commutative geometry is exactly parallel: the infinitesimals have their place among operators in the space of Hilbert. Some operators are infinitesimal. They have a discrete spectrum, but which decreases towards zero, and corresponds exactly to the definition Newton gave of infinitesimals.

What is new is that infinitesimals can no longer switch with continuous variables. The crucial point is that there are an infinitesimal which is characteristic of a geometry. This infinitesimal was introduced by physicists when they founded field theory and quantum theory, this is what they call the "propagator" for fermions. Physicists therefore have developed in their theory an entity which is an operator in the space of Hilbert and who has all the properties to embody the element of infinitesimal length. We can clearly see the gain both in physics and in mathematics. In physics, this allows for a system of length measurement, based on the spectrum of hydrogen, which is really universal. We can exchange with a visitor from another stellar system without having to bring him to Sèvres for showing him the stallion.

In mathematics, it's exactly the same thing. When we takes the propagator of fermions as the length element of a geometry, as it doesn't switch with coordinates, since coordinates are of continuous value, it has the property of not being able to be located and to be present everywhere. It is no longer located somewhere. If it had switched with the coordinates, the fact that it is infinitesimal, it would have been somewhere. But the fact that it doesn't switch allows him to be everywhere.

This gives a new geometry of spectral nature, that is to say it manifests as a spectrum. It's very new since usually when we talk about a geometric space, we think of it as a whole with a distance, a structure, which are given to it locally. It's not like that a space of non-commutative geometry will manifest. He will manifest by its spectrum.

Chapter 10

The music of forms

A new phenomenon appears: this manifestation by a spectrum can be understood musically. If I take any shape, a drum, a sphere or any other, we know since the XIX$^{\text{th}}$ century thanks to Helmholtz that a range is associated to it. And since Mark Kac and his famous talk *"Can we hear the shape of a drum?"*, it is formalized in mathematics. What does this mean ? You might think that when you hit a drum, the sound product will always be the same. It is a serious mistake. In the XVIII$^{\text{th}}$ century, the vibrations of the drum were observed by putting sand underneath.

When the drum vibrates, the sand is concentrated where the vibration is the smallest. We thus observe that the vibration of the drum is of this or that shape depending on where it was struck.

Two parameters actually qualify this vibration exactly: how many oscillations if we start from the center towards the circumference? and how much when we go around the drum? If we know these two parameters, for example three oscillations from the center towards the circumference and four when we go around, the vibration is then perfectly defined. It will produce a particular frequency. The simplest vibration produces the lowest frequency. And, at each time the value of the parameters is increased, the vibration becomes more acute. We can calculate the frequency of these vibrations mathematically. We get a range. We finally realize that each form has a range. They are not always different. Some forms, different, however have the same range. So we lose a bit of information. But, basically, we essentially knows an object from its range.

A space is manifested by a range, and this is the starting point of noncommutative geometry. It includes space from its range. There is an additional invariant, which must be known to really understand the whole space: what are the agreements possible? A point in space gives more information than the scale, it gives an agreement on the notes of this one. If we know all agreements, we recognize the space.

When I found this result, I gave a lecture at the Collège de France on the link that there was between forms and music.

I called it “music of forms”. In preparing this conference, I asked myself a question: there are many different forms (sphere, disc, square, rectangle, etc.), would there be one who allows us to make music as we know it? I tried different forms and I realized that it was a disaster. For example, if you want to play Au clair de la Lune, none of the forms I have mentioned gives convincing results.

Why ? The ear is sensitive to multiplication by two. If you double the frequency of a note, the ear will hear something nice, a resonance between the two frequencies. And that corresponds to something very concrete: it’s the transition to the octave.

The ear is also very sensitive to tripling.

As it is sensitive to doubling, we can also multiply by three halves, which is like playing a C and a G.

Now let’s think a bit about it. To fall back on my feet, I would like to multiply by two enough times to be the same thing as to multiply by three a certain number of times. It is impossible, because when we take a power of two we always have an even number, and when we take a power of three, we always have an odd number. Which is true and amazing, and this is the basis of music as we know it is that multiply nineteen times twice, it’s almost the same as multiplying twelve times by three. There is a better way to say it: the twelfth root of two is almost equal to the nineteenth root of three.

How does it manifest? This is what I call the guitar spectrum. On the neck of a guitar there are the frets, these lines perpendicular to the neck that produce a sound specific. They are not regularly spaced. It’s not at all an arithmetic progression. These are the powers of this number: $2^{1/12}$. By taking this number, we get exactly the frets positions on the neck of a guitar.

The spectrum of the space we are looking for is therefore given to us by the guitar spectrum. Could it be a sphere of dimension 2? No, because mathematical theorems say how the range of a shape develops when we take more and more notes, and the dimension of the space we are looking at is intimately linked to the way notes develop. On the spectrum of the guitar, a little mathematical calculation indicates that the dimension of the corresponding space must be zero. More specifically, it must be smaller than any positive number. Therefore we cannot find it among the spaces we know. And it is a non-commutative space; this is called the non-commutative sphere, which was found by physicists. So we see where non-commutative geometry gives freedom to find spaces far more extraordinary than the one we have with ordinary spaces.

Danye Chéreau, my wife, Jacques Dixmier and I have written a book, *The Specter of Atacama*, which evokes the spectrum received by the large Atacama Desert Observatory (ALMA: Atacama Large Millimeter Array) and who seeks to understand what this spectrum represents. And we still haven't understood. It is connected to one of the most difficult conjectures in mathematics. It's fascinating to see that a space as we know it produces a spectrum. But there are examples where space is perceived by its spectrum, and we don't know what this space is; it remains mysterious.

All this geometric side has been considerably developed and allowed us, with my collaborators Ali Chamseddine and Walter van Suijlekom, to understand why, in physical reality, there is not only gravitation, but also the standard model; why are there other forces of physics that appear naturally. In the context of non-commutative geometry, we may, by purely geometric reasoning, fall by miracle that it's easier to describe space-time, the geometric space in which we are, by non-commutative variables. This simpler way of describing it requires other forces beyond gravitation than pure gravity in this new space. These other forces correspond exactly to what we are measuring, i.e. the forces of the standard model.

It is a very elaborate theory and extremely satisfactory in aesthetic and conceptual level. A part is missing on which we are working: it exists at the level of what is called the first quantified, and does not yet reach the level of what is called the quantum gravitation, that is to say in which we would really quantify fields.

But back to the essence of quantum. It's something absolutely fundamental, which is not yet fully understood.

Chapter 11

The ticking of the Divine clock

We human beings reduce any variability to the passage of time. And we are still looking to write a story. It is one of the ways we understand things, and a story is of course written over time.

But when we try to understand quantum, we are faced with paradoxes. The most typical is what we calls in French entanglement. Einstein never accepted the quantum, although it was he who practically initiated it with the photoelectric effect. In one of his poems, Alfred Brendel tells Einstein arriving in heaven, realizing that God is playing dice and then asking for the address of hell. Because Einstein never accepted the random side of quantum and he gradually built a number of counterexamples, paradoxes. The first one gave rise to a wonderful story. Einstein imagines a Swiss cuckoo hanging from a spring. The cuckoo must emit a photon to a precise moment. Thus, it will indicate the exact time when it issued it. In weighing the cuckoo before and after the emission of the photon, we would know exactly its mass, and therefore that of the emitted photon, or rather its energy, since energy is equal to mass. So, as we will know the energy of the photon emitted with limitless precision, we will contradict Heisenberg's uncertainty principle, which says that we cannot know time and energy simultaneously. That gave place to an extraordinary episode, with a triumphant Einstein who explains its paradox. And Bohr who follows him with an absolutely confused mine because Einstein's argument seemed unstoppable to him. But the story did not end there.

What was Einstein's idea? Since we were going to measure cuckoo's mass (before and after), the gravitational constant would be involved in calculating mass from weight. So it was impossible for the Planck constant to stand out by itself as the principle of uncertainty requires it, it seemed impossible to eliminate the constant of gravitation! Bohr did not sleep overnight, and returned in the morning with a wonderful response. He showed that one obtained exactly the Heisenberg's uncertainty principle in using Einstein's theory of gravitation! According to this theory, and it has been measured since, time does not pass in the same way when we change altitude and this change involves again the gravitational constant. If we do the math, we realize that the two gravitational constants are eliminated. Only Planck's constant remains, and we get the principle of uncertainty as stated by Heisenberg.

This episode was a defeat for Einstein, but it didn't confessed defeated. Five or six years later, he wrote an article with Podolsky and Rosen, an article that was almost never cited at first, now its quotes are growing exponentially. It was the first time that quantum entanglement appeared. Einstein proposed to create two particles at a given location, these two particles having exactly, by conservation of the moment, opposite moments. These particles propagate. We measure the position of one and the moment of the other. As they are causally separated, these two measures are independent. So we get a contradiction with the principle of uncertainty since, on the one hand, we measures the position, on the other side, the speed and by symmetry we deduct position and speed for both: it's won.

This paradox is much deeper and much more difficult to eliminate than the one Bohr had solved. Basically, what people say, is that when you take a measurement on one side, there is an action, which Einstein called *spooky action at a distance*, which affects the other side almost instantly, and therefore goes much faster than the speed of light. Alain Aspect has had experiences that showed that the action spreads at least ten thousand times faster than the speed of light, which is incredible.

We think we are solving the paradox by saying that, if there is indeed an action, we cannot transmit information with it, but we're still hungry. What I claim is that the reason of this paradox is that we try to write a story in relation to the time. And when we try to write a story over time, we necessarily get a contradiction. Why ? Because the fact that one is outside the cone of light shows that there is no causal relationship between the two measures, this means that, depending on the benchmark that we are going to take, one event occurs before the other or the other before the one. There can therefore be no causal relationship between both. It is strictly impossible. What I claim is that the real meaning of quantum entanglement is that the quantum hazard on one side and the quantum hazard on the other are not completely independent.

The basic idea that has not yet been realized is to try to understand how the quantum hazard generates the passage of time. In *The Quantum Theater*, our first book with Danye Chéreau and Jacques Dixmier, we had found a sentence which should be remembered simply because it well expresses the problem: “The hazard of quantum is the ticking of the Divine clock”. That means that true variability does not come from the passage of time, but from this fantasy, this constant imagination, the quantum. It’s here that things vary, and time is just an emerging phenomenon.

We should have a much more precise philosophical reflection, much deeper, which would say that the hazard of quantum is not completely random, not completely independent, when one takes distant points, but that there are going to be correlations between the hazard of quantum at one point and the hazard at another point when there is quantum entanglement. We should be able to define correctly the quantum hazard, and we have the mathematical tool which allows us to make time emerging. This tool is what I found in my thesis from what the two Japanese men had done.

So we have the tools. But it lacks a philosophical reflection, exercise little appreciated by physicists in our time. Back to Einstein, Dirac, Heisenberg, Schrödinger, philosophical reflection was an essential ingredient of the discipline. For instance, Heisenberg and Dirac had the extraordinary chance to do a boat trip from California to Japan and they were able to chat indefinitely. Our time is very crowded by all kinds of external disturbances. We no longer know boredom which was fundamental in creative power. We now know the extraordinary success of Einstein’s theory or quantum theory. And there is still stagnation. We live in a period where we are constantly disturbed, by fifteen daily mails or such report to make. We no longer have time to be bored, and we no longer have the will to do it. *The Specter of Atacama* is a praise of boredom, in a way. The hero of the book is faced with this spectrum that he doesn’t understand and, instead of staying at the observatory, he fled to the far south to live on an island almost deserted for a while. And he manages to find this fundamental state of the soul, which is that of boredom.

It is a difficult state to appreciate these days. It must be admitted that the CNRS is one of the rare institutions that allows find. So Vincent Lafforgue, who just had a very big price, does exactly that. He is able to isolate himself to think about a problem for years, practically in underwater state. This ability gives it the necessary depth to make great discoveries. It is a miracle that the CNRS allows. It is a very different system from that of ERC (European Research Council) or NSF in the United States. Young people are there constantly writing articles, and must constantly show that they are productive. It is a perversion which has for consequence of creating scientific feudalities and which does not authorize the diversity. We must preserve this incredible chance which allows some to isolate themselves and find this state of fundamental research so important, so creative and so impossible to appreciate, to judge in the short term. What's terrible about these selection methods on project is that researchers are asked to say, in advance, what they will find. It's ridiculous, in physics like in math. If we knew what we were going to find, discipline would lose interest. Which is really interesting, which is really exciting, it's just to look at a problem and then, at the bend of a path, to find something that we were absolutely not waiting.

I recently had to give a talk at the Collège de France on the mathematical language. I was wondering what I was going to talk about. And then finally I chose to talk about Morley's theorem. Morley has found this result by accident. He was looking for more complicated things, and he fell on it! The wording is very simple.

We take any triangle. We cut each of its angles in three equal parts. And then we intersect the lines two by two corresponding. Morley's theorem says that the triangle obtained in such a way is equilateral.

It's a shame to corset research in a more and more administrative straight jacket, because, ultimately, it encourages researchers to confine themselves to small problems in which they can make small strides, and in no way favors large discoveries.

Petite note pour mémoire d'août 2020
Denise Vella-Chemla

Cette petite note est destinée à garder trace d'une expérience de programmation de la preuve par Alain Connes du théorème de Morley par un fichier texte plutôt que par le contenu d'un blog, vite enfoui par sédimentation dans les limbes de la toile.

Selon le célèbre titre de l'opus de Donald E. Knuth (*The Art Of Computer Programming*), la programmation des ordinateurs est un art. Certains informaticiens sont des artistes en effet.

La démonstration par Alain Connes du théorème de Morley est une démonstration géométrique utilisant les affixes complexes des sommets d'un triangle. On trouvera sa traduction dans l'item 47) de la liste Transcriptions AC.

Inspiré par un tableau visible à cette adresse Johnson-Smithsonian, le tableau de Crockett Johnson de 1969 intitulé CJ69, représentant le théorème de Morley, un artiste de la programmation[1] a écrit un programme esthétique en asymptote, programme dont le résultat est cette belle image jctM.jpg.

Le programme en asymptote est consultable ici : Morley-asymptote.pdf.

On peut coller[2] le code fourni juste ci-dessus à cette adresse pour l'exécuter :Asymptote en ligne.

Ici une version dynamique en geogebra : on peut modifier les positions des sommets du triangle et on peut également modifier la position du point M, laissé invariant par le produit des cubes des symétries par rapport aux côtés du triangle initial :

Théorème de Morley - démonstration d'Alain Connes en geogebra.

[1] Jacques Chemla

[2] Faire un Copier (Ctrl+C), Coller (Ctrl+V) du code dans la fenêtre de code à gauche et cliquer sur le bouton Execute, le résultat du programme apparaît dans la fenêtre de droite.