Reprise-résumé[1] *de la traduction de la section 6 de l'article "Positivité de Weil et formule de trace, la place archimédienne" d'Alain Connes et Caterina Consani, juin 2020, cette section traitant du calcul du spectre*

L'idéal serait de programmer en python les résultats de l'article en utilisant les dpss (pour discrete prolate spheroidal frequences) du package scipy.

1 Calcul du spectre de l'opérateur compact $\mathbf{K}_I$

Alain Connes cherche à calculer un opérateur dont les valeurs propres seraient les zéros de la fonction zeta de Riemann, noté $\mathbf{K}_I$. Il avait introduit cet opérateur en 1998 dans un célèbre article.

$$\langle \eta \mid \mathbf{K}_I(\xi)\rangle = \frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)}\xi(x+v)(Q\epsilon)(\exp(|v|))dxdv, \tag{1}$$

avec $I = \left[-\frac{\log 2}{2}, \frac{\log 2}{2} \right]$.

$$Q\epsilon(\rho) = \sum \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}} T_n(\rho), \tag{2}$$

Une première difficulté concerne le calcul d'une certaine fonction $T_n(\rho)$ nécessaire pour pouvoir calculer l'opérateur. Elle utilise des fonctions sphéroïdales prolates et leurs dérivées (qui interviennent dans le calcul de spectre d'ellipsoïdes allongées).

$$T_n(\rho) = \rho^{1/2} \int_{\rho^{-1}}^{1} (D_u\xi_n)(x)(D_u\zeta_n)(\rho x)dx + \rho^{-1/2}(D_u\xi_n)(\rho^{-1})\zeta_n(1) - \rho^{1/2}\xi_n(1)(D_u\zeta_n)(\rho) \tag{3}$$

C'est la décroissance rapide qui permet le calcul et on peut s'arrêter aux 11 premiers termes pour le calcul de $Q\epsilon(\rho)$ (démontré dans l'appendice qui traite des problèmes de convergence).

$$|\lambda(n)| \leqslant \frac{2^{2n}\pi^{2n+\frac{1}{2}}((2n)!)^2}{(4n)!\Gamma\left(2n+\frac{3}{2}\right)} \sim (4n+1)^{-2n-\frac{1}{2}}(e\pi)^{2n+\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

La seconde difficulté est de gérer la dimension *infinie* de l'espace de Hilbert sur lequel l'opérateur $\mathbf{K}_I$ agit. On remplace le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$ par le sous-groupe discret $q^{\mathbb{Z}}$, et on approxime l'espace de dimension infinie par celui de dimension *finie* où l'intervalle I (en notation additive) est remplacé par l'ensemble fini I_q de taille $N \sim \log 2/\log q$, des multiples entiers de $\omega = \log q$ qui appartiennent à I. La discrétisation $\mathbf{N}_I$ de l'opérateur $\mathbf{K}_I$ est une matrice de Toeplitz et on peut rechercher numériquement son spectre pour voir comment il varie, quand $q \to 1$. Ce qu'on découvre, c'est que l'écart à la plus grande valeur propre reste toujours plus petit que 1 ! (*note de la programmeuse* : et peut-être que c'est cela qui permet d'obtenir les entiers les uns après les autres, en prenant le floor des réels obtenus). On approxime le spectre en calculant les valeurs propres d'une matrice de Toeplitz remplie de racines n-ièmes de l'unité, et le fait d'étudier cette approximation par matrice de Toeplitz va permettre de "deviner" comment approximer $Q\epsilon(\rho)$.

La preuve du théorème principal (Théorème 10) peut être trouvée dans l'article original[2].

1.1 Approximation discrète des intervalles variables

L'espace est discrétisé en remplaçant $\mathbb{R}_+^*$ par $q^{\mathbb{Z}}$, où $q > 1$ et en faisant tendre $q \to 1$. En posant $\omega = \log q$, on remplace l'intervalle $I = [0, a]$ par ses intersections finies avec le réseau $\omega\mathbb{Z}$, dont les éléments $j\omega$ sont

1. parfois dit "fascicule (de résultats)" par les Bourbakistes ou bien en franglais "cover version", pour la reprise d'une chanson.
trad. Denise Vella-Chemla, 12 novembre 2020.
L'article original en anglais est à lire ici : https://arxiv.org/pdf/2006.13771.pdf.
2. https://arxiv.org/pdf/2006.13771.pdf, section 6.7.

étiquetés par $j \in \{0, \dots, N\}$, où N est la partie entière de a/ω. On remplace les intégrales par des sommes et on considère dans $\ell^2(\{0, \dots, N\})$ [3], la forme quadratique suivante qui est la version discrétisée de (7)

$$\mathcal{Q}_q(\xi) := \omega \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=-j}^{N-j} \overline{\xi(j)}\xi(j+k)(Q\epsilon)(q^{|k|}). \tag{5}$$

En suivant la proposition

Soit $I \subset [-\log 2, \log 2]$ un intervalle de longueur $\leqslant \log 2$.
(i) L'égalité suivante définit un opérateur borné $\mathbf{N}_I$ dans l'espace de Hilbert $L^2(I, dx)$

$$\langle \eta \mid \mathbf{N}_I(\xi) \rangle = E_+(Q_+ f), \quad f = \eta^* * \xi, \quad f(v) = \int \overline{\eta(x)}\xi(x+v)dx. \tag{6}$$

(ii) On a $\mathbf{N}_I = -2\epsilon'(1_+)\,(Id - \mathbf{K}_I)$, où $\mathbf{K}_I$ est l'opérateur compact défini par

$$\langle \eta \mid \mathbf{K}_I(\xi) \rangle = \frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)}\xi(x+v)(Q\epsilon)(\exp(|v|))dxdv, \tag{7}$$

on doit comparer $\mathcal{Q}_q$ avec le produit intérieur $2\epsilon'(1_+) \sum_{j=0}^{N} \overline{\xi(j)}\xi(j)$.

On remplace (5) par

$$\mathcal{Q}_q(\xi) = \omega \langle \xi \mid \mathcal{T}_q \xi \rangle, \tag{8}$$

où la matrice de Toeplitz $\mathcal{T}_q$ est de la forme

$$\mathcal{T}_q = \begin{pmatrix} Q\epsilon(1) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(q^2) & Q\epsilon(q^3) & \dots & Q\epsilon(q^N) \\ Q\epsilon(q) & Q\epsilon(1) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(q^2) & \dots & Q\epsilon(q^{N-1}) \\ Q\epsilon(q^2) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(1) & Q\epsilon(q) & \dots & Q\epsilon(q^{N-2}) \\ Q\epsilon(q^3) & Q\epsilon(q^2) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(1) & \dots & Q\epsilon(q^{N-3}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q\epsilon(q^N) & Q\epsilon(q^{N-1}) & Q\epsilon(q^{N-2}) & Q\epsilon(q^{N-3}) & \dots & Q\epsilon(1) \end{pmatrix} \tag{9}$$

Puis on compare la plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$ avec 1 puisque cela teste la positivité de $\mathrm{Id} - \mathbf{K}_I$.

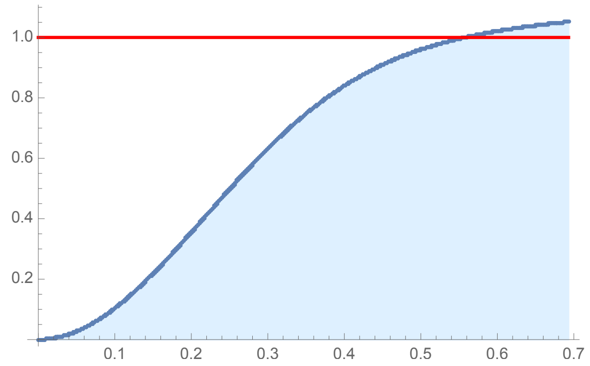


FIGURE 1 : Plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$, pour $a \in [0, \log 2]$ et $q = \exp(10^{-3})$.

La figure 1 montre que, pour $\omega = 10^{-3}$ et $q = \exp(10^{-3})$, la plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$, *i.e.* $\lambda \sim 1.05177$, excède légèrement 1 quand on considère l'intervalle complet $[0, \log 2]$.

3. espace de Hilbert de dimension finie.

1.2 Approximation discrète et matrices de Toeplitz

On fixe $I = [-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2]$. On constate un gros écart entre les deux premières valeurs propre $\implies$ le manque de positivité de $\mathrm{Id} - \mathbf{K}_I$ est dû à un seul vecteur propre ζ.

Il y a un résultat intéressant de la théorie matrices de Toeplitz qui est que le vecteur propre de valeur propre maximale d'une matrice auto-adjointe de Toeplitz est d'une forme très spéciale : l'équation polynomiale associée a ses racines de module 1. Notations :

$$z \in \mathbb{C} \ \&\ \tilde{\zeta}(z) = 0 \implies |z| = 1. \tag{10}$$

Avec le choix symétrique de $I = [-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2]$, le nombre fini N d'éléments dans $I \cap \omega\mathbb{Z}$ est impair $N = 2m + 1$ et le calcul montre que les N racines de $\tilde{\zeta}(z) = 0$ ressemblent aux racines $N + 1$-ièmes non triviales de l'unité, *i.e.* toutes sauf $z = 1$. Puisqu'elles sont symétriques, ces racines peuvent être mieux écrites sous la forme

$$z_j^{\pm} = \exp\left(\pm\frac{2\pi i \alpha_j}{N+1}\right), \quad j = 1, \ldots m, \tag{11}$$

et il s'avère que $z = -1$ est aussi une racine et qu'ainsi, elle devrait être ajoutée à cette liste de $2m$ éléments.

Les valeurs α_j se stabilisent quand $q \to 1$ et sont de plus en plus proches des entiers correspondant. Premières valeurs rangées dans l'ordre croissant :

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_1 = 1.33371 & \alpha_2 = 2.10964 & \alpha_3 = 3.07018 & \alpha_4 = 4.0524 & \alpha_5 = 5.04184 \\
\alpha_6 = 6.03484 & \alpha_7 = 7.02984 & \alpha_8 = 8.0261 & \alpha_9 = 9.0232 & \alpha_{10} = 10.0209 \\
\alpha_{11} = 11.019 & \alpha_{12} = 12.0174 & \alpha_{13} = 13.016 & \alpha_{14} = 14.0149 & \alpha_{15} = 15.0139 \\
\alpha_{16} = 16.013 & \alpha_{17} = 17.0123 & \alpha_{18} = 18.0116 & \alpha_{19} = 19.011 & \alpha_{20} = 20.0104 \\
\alpha_{21} = 21.0099 & \alpha_{22} = 22.0095 & \alpha_{23} = 23.0091 & \alpha_{24} = 24.0087 & \alpha_{25} = 25.0083 \\
\alpha_{26} = 26.008 & \alpha_{27} = 27.0077 & \alpha_{28} = 28.0074 & \alpha_{29} = 29.0072 & \alpha_{30} = 30.007 \\
\alpha_{31} = 31.0067 & \alpha_{32} = 32.0065 & \alpha_{33} = 33.0063 & \alpha_{34} = 34.0061 & \alpha_{35} = 35.006 \\
\alpha_{36} = 36.0058 & \alpha_{37} = 37.0056 & \alpha_{38} = 38.0055 & \alpha_{39} = 39.0053 & \alpha_{40} = 40.0052 \\
\alpha_{41} = 41.0051 & \alpha_{42} = 42.005 & \alpha_{43} = 43.0048 & \alpha_{44} = 44.0047 & \alpha_{45} = 45.0046 \\
\alpha_{46} = 46.0045 & \alpha_{47} = 47.0044 & \alpha_{48} = 48.0043 & \alpha_{49} = 49.0043 & \alpha_{50} = 50.0042 \\
\alpha_{51} = 51.0041 & \alpha_{52} = 52.004 & \alpha_{53} = 53.0039 & \alpha_{54} = 54.0039 & \alpha_{55} = 55.0038 \\
\alpha_{56} = 56.0037 & \alpha_{57} = 57.0037 & \alpha_{58} = 58.0036 & \alpha_{59} = 59.0035 & \alpha_{60} = 60.0035
\end{array} \tag{12}$$

Le second résultat-clef classique : décomposition de la matrice : rappel : λ est la plus grande valeur propre, elle est simple[4]. $\omega = 1/5000$.

$$\begin{aligned} S &= \lambda\,\mathrm{Id} - \tfrac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q \\ &= \lambda \sum d(j) e(z_j), \qquad \{z_j\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \tilde{\zeta}(z) = 0\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Les $d(j)$ convergent vers une valeur fixe ? (0.999... ?)

$$\begin{array}{lllll}
d(1) = 1.17111 & d(2) = 1.12443 & d(3) = 1.05904 & d(4) = 1.03248 & d(5) = 1.02052 \\
d(6) = 1.01414 & d(7) = 1.01033 & d(8) = 1.00787 & d(9) = 1.00619 & d(10) = 1.005 \\
d(11) = 1.00411 & d(12) = 1.00344 & d(13) = 1.00292 & d(14) = 1.00251 & d(15) = 1.00217 \\
d(16) = 1.0019 & d(17) = 1.00167 & d(18) = 1.00148 & d(19) = 1.00132 & d(20) = 1.00119 \\
d(21) = 1.00107 & d(22) = 1.00097 & d(23) = 1.00088 & d(24) = 1.0008 & d(25) = 1.00073 \\
d(26) = 1.00067 & d(27) = 1.00062 & d(28) = 1.00057 & d(29) = 1.00052 & d(30) = 1.00048 \\
d(31) = 1.00045 & d(32) = 1.00042 & d(33) = 1.00039 & d(34) = 1.00036 & d(35) = 1.00034 \\
d(36) = 1.00031 & d(37) = 1.00029 & d(38) = 1.00027 & d(39) = 1.00026 & d(40) = 1.00024 \\
d(41) = 1.00022 & d(42) = 1.00021 & d(43) = 1.0002 & d(44) = 1.00018 & d(45) = 1.00017 \\
d(46) = 1.00016 & d(47) = 1.00015 & d(48) = 1.00014 & d(49) = 1.00013 & d(50) = 1.00013 \\
d(51) = 1.00012 & d(52) = 1.00011 & d(53) = 1.0001 & d(54) = 1.0001 & d(55) = 1.00009 \\
d(56) = 1.00008 & d(57) = 1.00008 & d(58) = 1.00007 & d(59) = 1.00007 & d(60) = 1.00006
\end{array} \tag{14}$$

4. Cela signifie que sa multiplicité est égale à 1, elle n'est racine qu'une fois.

Pour obtenir un bon contrôle de l'opérateur compact $\mathbf{K}_I$, on doit approximer la fonction $(Q\epsilon)(\exp(x))$ pour tout $x \in [0, \log 2]$, et non juste seulement pour un ensemble fini de multiples de ω.

Dans la prochaine section, on montre comment la décomposition de la matrice de Toeplitz permet de deviner une approximation efficace de la fonction $(Q\epsilon)(\exp(x))$ par une somme trigonométrique finie.

Cette approximation permet, par un calcul par ordinateur, d'obtenir le contrôle souhaité.

1.3 L'approximation de base de $(Q\epsilon)(\exp(x))$

La matrice de Toeplitz $T_q = \frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$ peut être réécrite ainsi

$$T_q = \lambda\left(\mathrm{Id} - \sum d(j)e(z_j)\right) \tag{15}$$

où les $e(z_j)$ sont les matrices de projections sur une dimension obtenues en conjuguant la projection à une dimension sur la fonction constante par les opérateurs unitaires

$$(U(\alpha)\xi)(x) := \exp\left(\frac{i2\pi\alpha x}{\log 2}\right)\xi(x). \tag{16}$$

Cela suggère que l'on peut approximer la fonction $\chi(x) := (Q\epsilon)(\exp(x))/(2\epsilon'(1_+))$ dans $[0, \log 2]$ par une expression trigonométrique de la forme

$$\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x) := \frac{2\lambda}{\log 2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\left(\cos\frac{2\pi n x}{\log 2} - d(n)\cos\frac{2\pi\alpha_n x}{\log 2}\right)\right). \tag{17}$$

Le fait suivant est vérifié :

La distance dans $L^1([0, \log 2], dx)$ de la fonction $\chi(x) := (Q\epsilon)(\exp(|x|))/(2\epsilon'(1_+))$ à la fonction $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ de (17) (pour $m = 1732$, et avec les valeurs des angles α_j et des coefficients $d(j)$ fixés ci-dessus) vérifie

$$2\int_0^{\log 2} |\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x) - \chi(x)|dx \sim 0.00122. \tag{18}$$

1.4 L'approximation de $\mathbf{K}_I$ par un opérateur de rang fini T

A cause de la théorie des opérateurs de Toeplitz, on peut obtenir

$$\langle \eta \mid \mathbf{e}_\alpha(\xi)\rangle = \frac{1}{\log 2}\int_{-\log 2}^{\log 2}\int \overline{\eta(x)}\xi(x+v)\exp\left(\frac{-2\pi i\alpha v}{\log 2}\right)dxdv. \tag{19}$$

Considérons alors l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2([-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2], dx)$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous appelons

$$\xi_\alpha(x) := (\log 2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{2\pi i\alpha x}{\log 2}\right), \qquad \forall x \in [-\tfrac{1}{2}\log 2, \tfrac{1}{2}\log 2] \tag{20}$$

et $\mathbf{e}_\alpha = |\xi_\alpha\rangle\langle\xi_\alpha|$ la projection orthogonale associée,

$$\mathbf{e}_\alpha(\xi) = \xi_\alpha\langle\xi_\alpha \mid \xi\rangle, \qquad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

On a alors pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, en utilisant la forme spéciale (34) du vecteur ξ_α

$$\langle \eta \mid \mathbf{e}_\alpha(\xi)\rangle = \langle \eta \mid \xi_\alpha\rangle\langle\xi_\alpha \mid \xi\rangle = \frac{1}{\log 2}\int_{I\times I}\overline{\eta(x)}\exp\left(\frac{2\pi i\alpha x}{\log 2}\right)\xi(y)\exp\left(\frac{-2\pi i\alpha y}{\log 2}\right)dxdy$$

de telle façon que l'on obtient

$$\langle \eta \mid \mathbf{e}_\alpha(\xi) \rangle = \frac{1}{\log 2} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) \exp\left(\frac{-2\pi i \alpha v}{\log 2}\right) dx dv. \tag{21}$$

Le lemme suivant joue un rôle crucial dans le processus d'approximation.

Lemme 1. *Appelons $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ une approximation de la fonction $\chi(x)$ de telle façon que la norme L^1 de la différence $\tau(\lambda, \alpha, d, m) - \chi$ soit $\leqslant \epsilon$. Alors l'opérateur compact $\mathbf{K}_I$ de (7), pour $I = [-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2]$, est à une distance normée moindre que ϵ de l'opérateur de rang fini*

$$T = \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathbf{e}_n - d(|n|)\mathbf{e}_{\alpha_n}). \tag{22}$$

Ici, on définit $\alpha_{-n} = -\alpha_n$ $\forall n$ et $d(0) = 0$; alors que pour $n > m$, on définit $\alpha_n = n$ et $d(n) = 1$ de telle façon que tous les termes dans la somme ci-dessus pour $|n| > m$ s'évanouissent.

1.5 Le vecteur propre de valeur propre maximale

Pour comprendre l'opérateur de rang fini T de (22), on considère d'abord le produit infini

$$h(z) := \prod_{n>0} \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_n^2}\right) \tag{23}$$

qui est convergent comme le produit définissant $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ et est, par construction, le produit de $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ par une fraction rationnelle dont le rôle est de remplacer les zéros $\pm n$ pour $n \in \{1, \ldots, m\}$, par les $\pm\alpha_n$.

Lemme 2. *La transformée de Fourier $\psi(x) = \dfrac{1}{\log 2}\widehat{h}(\dfrac{x}{\log 2})$ de $h(z\log 2)$ a son support dans l'intervalle $I = [-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2]$. On a $T\psi = \lambda\psi$ et (en utilisant les conventions du Lemme 1)*

$$\langle \xi_0 \mid \psi \rangle = (\log 2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \langle \xi_{\alpha_n} \mid \psi \rangle = 0, \qquad \forall n \neq 0. \tag{24}$$

Notons que la fonction ψ n'est pas normalisée. Le calcul des normes L^2 donne

$$\|\psi\|_2 = (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \|h\|_2, \quad \|h\|_2 \sim 1.05143, \quad \text{pour } m = 1732 \tag{25}$$

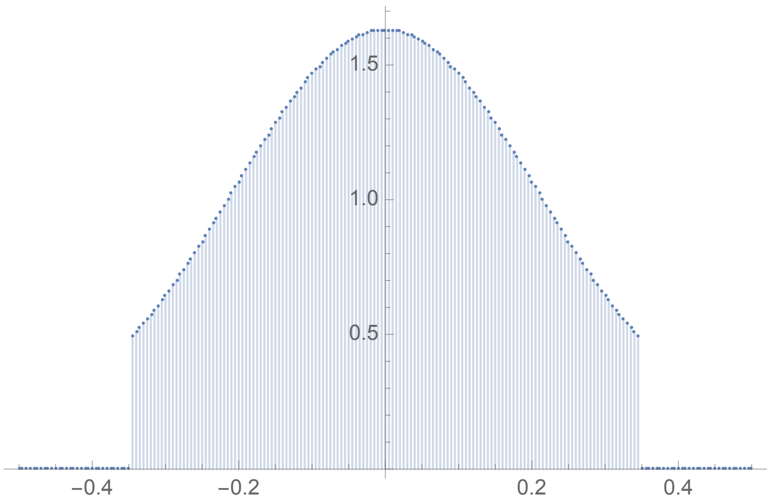


FIGURE 4 : Graphe de $\zeta(x) = \psi(x)/\|\psi\|_2$ dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

L'important fait numérique est que :

$$\textit{Pour } m = 1732, \textit{ on a : } \langle \xi_0 \mid \zeta \rangle \sim 0.94865, \textit{ où } \zeta(x) = \psi(x)/\|\psi\|_2. \tag{26}$$

1.6 Calcul du spectre de T

a) **Méthode 1** : pour calculer le spectre de l'opérateur T de (22), on approxime cet opérateur de rang fini en utilisant la projection orthogonale $P(n)$ sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs ξ_j, pour $|j| < n$. Nous utilisons l'expression suivante du carré de la norme $\|\xi_\alpha - P(n)\xi_\alpha\|^2$.

Lemme 3. *Soit* $(\log\Gamma)^{(2)}$ *la dérivée logarithmique de la fonction* Γ*, alors on a*[5]

$$\|\xi_\alpha - P(n)\xi_\alpha\|^2 = \pi^{-2}\sin^2(\pi\alpha)\left((\log\Gamma)^{(2)}(n-\alpha) + (\log\Gamma)^{(2)}(\alpha+n)\right), \qquad \forall\alpha \in [-n, n] \tag{27}$$

L'égalité

$$P(n)\mathbf{e}_\alpha(P(n)\xi) = \langle\xi_\alpha \mid P(n)\xi\rangle P(n)\xi_\alpha = \langle P(n)\xi_\alpha \mid \xi\rangle P(n)\xi_\alpha \tag{28}$$

donne l'estimation simple de la norme de l'opérateur

$$\|P(n)\mathbf{e}_\alpha P(n) - \mathbf{e}_\alpha\| \leqslant 2\|\xi_\alpha - P(n)\xi_\alpha\|. \tag{29}$$

Cela permet de contrôler la norme de la différence $T - P(m)TP(m)$ comme suit

$$\|T - P(m)TP(m)\| \leqslant 2\lambda \sum_{|n|<m} d(|n|)\|\xi_{\alpha_n} - P(m)\xi_{\alpha_n}\|. \tag{30}$$

En utilisant (27) et le comportement asymptotique

$$(\log\Gamma)^{(2)}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x}\right)^3, \tag{31}$$

on obtient un premier contrôle de $\|T - P(m)TP(m)\|$. Alors, on peut calculer les valeurs propres de la matrice de dimension finie $P(m)TP(m)$. Nous l'avons fait pour $m = 1733$[6], après avoir divisé par λ, pour vérifier que la plus grande valeur propre était bien 1. On peut alors obtenir la liste de ses valeurs propres ; les premières d'entre elles, ordonnées selon un ordre décroissant sont les suivantes

$$\{1., \quad 0.652824, \quad 0.027475, \quad 0.000290146, \quad 0.0000877245, \quad 0.0000756436\}. \tag{32}$$

Seules les trois premières valeurs propres se démarquent comme valeurs propres positives stables pour T/λ. Après multiplication par λ, elles deviennent[7]

$$\lambda = 1.05158, \quad \lambda_2 = 0.686494, \quad \lambda_3 = 0.0288921. \tag{33}$$

5. *Note de la traductrice* : Appelée fonction digamma et souvent noté Ψ, si l'on considère la fonction gamma (Γ) comme une généralisation de la factorielle aux complexes, la fonction digamma (Ψ) serait une généralisation des nombres harmoniques aux complexes. Sur la toile, on trouve comme asymptote de digamma $log\ z - 1/2\ z - 1/12\ z^2$...
6. *Note de la traductrice* : différent du $m = 1732$ des autres cas. $1732 = 2^2 \times 433$ tandis que 1733 est un nombre premier.
7. *Note de la traductrice* : Pour λ_2, $0.652824 \times 1.05158 = 0.686496662$.

On peut aussi obtenir les composantes c_n, sur la base des ξ_n, du vecteur propre associé à la valeur propre λ. Ces composantes sont plus petites que 10^{-4} pour $n > 30$ et leur graphe pour n proche de 0 (et pour n allant un peu plus loin) est reproduit ci-dessous.

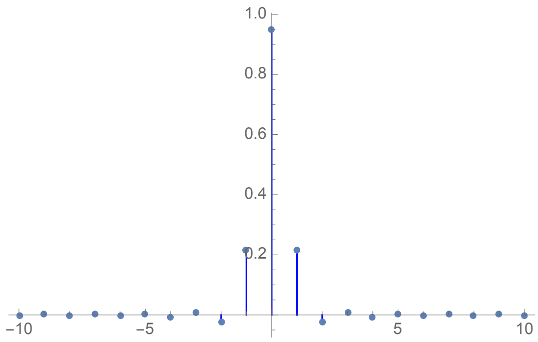


FIGURE 5 : Graphe des composantes c_n pour $|n| < 10$.

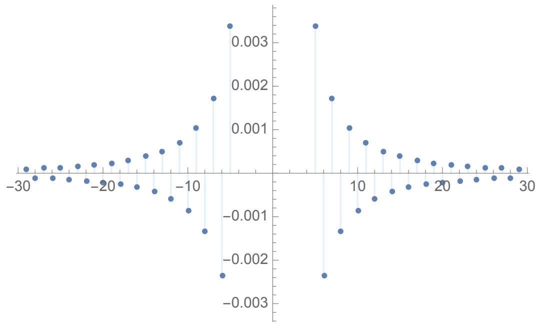


FIGURE 6 : Graphe des composantes c_n pour $7 < |n| < 30$.

On vérifie aussi que le graphe (Figure 7) de la fonction reconstruite $\sum c_n \xi_n$ coïncide avec le graphe (Figure 4) du vecteur propre théorique du §1.5.

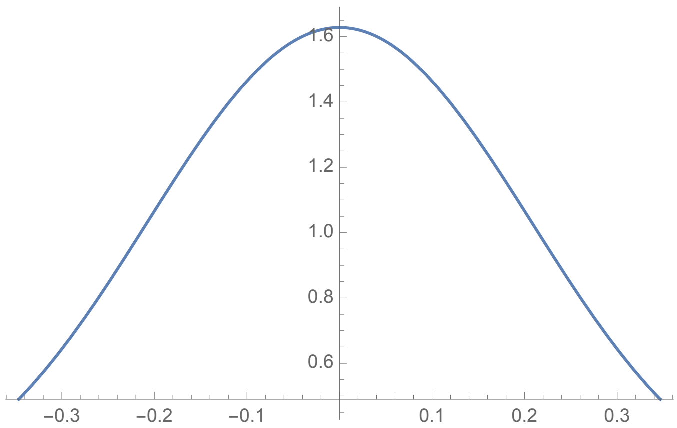


FIGURE 7 : Graphe de la fonction reconstruite $\sum c_n \xi_n$.

Le fait important est que la première composante $c_0 \sim 0.951067$ est très proche de 1.

Pour nos objectifs, l'estimation (30) ne garantit pas suffisamment de précision dans le calcul du spectre de T et de plus, le besoin d'entrer la somme (22) rend les calculs très lents.

b) **Méthode 2 :** cette seconde méthode améliore la précision pour calculer le spectre de T[8].

On considère une nouvelle base (ζ_n) de $\mathcal{H} = L^2([-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2], dx)$ qui n'est plus orthonormée. Plus précisément, on pose[9]

$$\zeta_0 = \zeta, \qquad \zeta_k = \begin{cases} \xi_k, & \text{pour } |k| > m, \\ \xi_{-\alpha_{|k|}} & \text{pour } -m \leqslant k \leqslant -1, \\ \xi_{\alpha_k} & \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant m. \end{cases} \tag{35}$$

8. *Note de la rédactrice* : la fonction ci-dessous n'est pas définie sur $]-1,1[$?
9. avec la notation de

$$\xi_\alpha(x) := (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i \alpha x}{\log 2}\right), \qquad \forall x \in [-\tfrac{1}{2}\log 2, \tfrac{1}{2}\log 2] \tag{34}$$

Lemme 4. *(i) Le spectre de l'opérateur T de (22) est $\{\lambda_{\max}(1-\beta_j)\}$, où les variables β_j sont les valeurs propres de la matrice A : $A_{n,k} := d(|k|)\langle\zeta_n \mid \zeta_k\rangle$.*

(ii) Prenons $N > m$. Les valeurs propres de la matrice A sont approximées par les valeurs propres de la matrice $A^{(N)}$ définie par : $A^{(N)}_{i,j} = A_{i,j}$ si $|i| \leqslant N$, $|j| \leqslant N$ et $A^{(N)}_{i,j} = \delta_{i,j}$ sinon, à une erreur près de $11\,\epsilon(N)$ où

$$\epsilon(N) = \max(e(N), e'(N)), \qquad e(N)^2 = \sum_{|j|\leqslant N} \epsilon(j,N), \quad e'(N)^2 = \sum_{|j|\leqslant N} d(|j|)^2 \epsilon(j,N) \tag{36}$$

avec

$$\epsilon(j,N) := \pi^{-2}\sin^2(\pi\alpha_j)\left((\log\Gamma)^{(2)}(N-\alpha_j) + (\log\Gamma)^{(2)}(\alpha_j+N)\right). \tag{37}$$

(iii) Le spectre de T est contenu dans $\{\lambda_{\max}\} \cup [-2, \lambda_2]$, où $\lambda_2 \leqslant 0.772216$.

1.7 Preuve du théorème 1 de l'article original

Voici comment on transfère les résultats obtenus pour T à $\mathbf{K}_I$:

$$\|\mathbf{K}_I - T\| \leqslant \epsilon_1, \qquad |\lambda_n(\mathbf{K}_I) - \lambda_n(T)| \leqslant \epsilon_1. \tag{38}$$

Le prochain lemme montre comment restaurer la positivité d'une forme quadratique qui est positive sur un sous-espace de codimension 1, en lui ajoutant une forme quadratique de rang 1.

Lemme 5. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ les vecteurs unitaires et P_ϕ la projection orthogonale sur $\phi^\perp := \{\eta \in \mathcal{H} \mid \langle\phi \mid \eta\rangle = 0\}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Alors la forme quadratique suivante sur $\mathcal{H}$*

$$B(\xi) := -b|\langle\phi \mid \xi\rangle|^2 + a|\langle\psi \mid \xi\rangle|^2 + c\|P_\phi(\xi)\|^2 \tag{39}$$

est positive si et seulement si

$$a + c \geqslant b, \qquad b(a+c) \leqslant a(b+c)|\langle\phi \mid \psi\rangle|^2. \tag{40}$$

Quand (47) est vérifiée, on a : $B(\xi) \geqslant \epsilon\|\xi\|^2$ $\forall\xi \in \mathcal{H}$, où

$$2\epsilon = a - b + c - \left((a+b+c)^2 - 4a(b+c)|\langle\phi \mid \psi\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{41}$$

Lemme 6. *Soit $\mathbf{N}_I = -2\epsilon'(1_+)\,(Id - \mathbf{K}_I)$ l'opérateur dans $\mathcal{H} = L^2(I)$, $I = [-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2]$ qui représente la forme quadratique associée à $E_+ \circ Q_+$ comme dans la Proposition 1.1. Alors, avec $\gamma \sim 2.94355$,*

$$\langle\xi \mid \mathbf{N}_I(\xi)\rangle \leqslant \gamma|\langle\xi_0 \mid \xi\rangle|^2, \quad \forall\xi \in \mathcal{H}. \tag{42}$$

Nous pouvons finalement établir notre résultat principal :

Théorème 7. *Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ une fonction lisse à support dans l'intervalle $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$ et dont la transformée de Fourier s'évanouit en $-\frac{i}{2}$. Soit $\mathbf{S}$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})_{\rm ev}$ sur le sous-espace des fonctions paires qui s'évanouissent ainsi que leur transformée de Fourier dans l'intervalle $[-1,1]$. Alors*

$$W_\infty(g * g^*) \geqslant \mathrm{Tr}(\vartheta(g)\,\mathbf{S}\,\vartheta(g)^*) - c\,|\widehat{g}(0)|^2, \qquad c = \frac{4\gamma}{\log 2}. \tag{43}$$

1) Les trois plus grandes valeurs propres de T sont fournies par (33) :

$$\lambda_{\max} = 1.05158, \quad \lambda_2 = 0.686494, \quad \lambda_3 = 0.0288921.$$

2) Le produit intérieur de ζ avec la fonction constante [10] ξ_0 est ~ 0.94865.

Appelons P_ζ la projection orthogonale sur $\zeta^\perp := \{\eta \in \mathcal{H} \mid \langle \zeta \mid \eta \rangle = 0\}$. La décomposition spectrale

$$T = \lambda_{\max} |\zeta\rangle\langle\zeta| + R, \qquad R \leqslant \lambda_2 P_\zeta \tag{44}$$

montre que la forme quadratique associée à $\mathrm{Id} - T$ est donnée, en utilisant $\mathrm{Id} = |\zeta\rangle\langle\zeta| + P_\zeta$, par

$$\langle \xi \mid (\mathrm{Id} - T)\xi \rangle = (1 - \lambda_{\max}) |\langle \zeta \mid \xi \rangle|^2 + \langle P_\zeta \xi \mid (P_\zeta - R)\xi \rangle \tag{45}$$

et puisque $R \leqslant \lambda_2 P_\zeta$, le dernier terme vérifie

$$\langle P_\zeta \xi \mid (P_\zeta - R)\xi \rangle \geqslant (1 - \lambda_2) \|P_\zeta \xi\|^2. \tag{46}$$

Le prochain lemme montre comment restaurer la positivité d'une forme quadratique qui est positive sur un sous-espace de codimension 1, en lui ajoutant une forme quadratique de rang 1.

Lemme 8. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ les vecteurs unitaires et P_ϕ la projection orthogonale sur $\phi^\perp := \{\eta \in \mathcal{H} \mid \langle \phi \mid \eta \rangle = 0\}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Alors la forme quadratique suivante sur $\mathcal{H}$*

$$B(\xi) := -b|\langle \phi \mid \xi \rangle|^2 + a|\langle \psi \mid \xi \rangle|^2 + c\|P_\phi(\xi)\|^2$$

est positive si et seulement si

$$a + c \geqslant b, \qquad b(a + c) \leqslant a(b + c)|\langle \phi \mid \psi \rangle|^2. \tag{47}$$

Quand (47) est vérifiée, on a : $B(\xi) \geqslant \epsilon \|\xi\|^2 \ \forall \xi \in \mathcal{H}$, où

$$2\epsilon = a - b + c - \left((a + b + c)^2 - 4a(b + c)|\langle \phi \mid \psi \rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{48}$$

Lemme 9. *Soit $\mathbf{N}_I = -2\epsilon'(1_+)\,(Id - \mathbf{K}_I)$ l'opérateur dans $\mathcal{H} = L^2(I)$, $I = [-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2]$ qui représente la forme quadratique associée à $E_+ \circ Q_+$ comme dans la Proposition 1.1. Alors, avec $\gamma \sim 2.94355$,*

$$\langle \xi \mid \mathbf{N}_I(\xi) \rangle \leqslant \gamma |\langle \xi_0 \mid \xi \rangle|^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}. \tag{49}$$

Résultat principal : le

Théorème 10. *Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ une fonction lisse à support dans l'intervalle $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$ et dont la transformée de Fourier s'évanouit en $-\frac{i}{2}$. Soit $\mathbf{S}$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})_{\mathrm{ev}}$ sur le sous-espace des fonctions paires qui s'évanouissent ainsi que leur transformée de Fourier dans l'intervalle $[-1, 1]$. Alors*

$$W_\infty(g * g^*) \geqslant \mathrm{Tr}(\vartheta(g)\,\mathbf{S}\,\vartheta(g)^*) - c\,|\widehat{g}(0)|^2, \qquad c = \frac{4\gamma}{\log 2}. \tag{50}$$

Remarque 8 : [11] La meilleure constante c vérifiant (50) est telle que $13 < c < 17$.

10. normalisée pour être de norme 1.

11. *Note de la rédactrice* : Peut-être à rapprocher de la constante κ_3 du théorème 3.3 égale à 14 de l'article de Aline Bonami et Abderrazed Karoui, *Bornes uniformes des fonctions d'ondes sphéroïdales et décroissance des valeurs propres*, C. R. A. S., Paris, Ser. 1, 352, 2014, p. 229-234

Sont rassemblées des inégalités qui assurent la convergence de $T_n(\rho)$.

Lemme 11. (i) *La série* (3) *de la proposition* P *de l'appendice est convergente et le reste (après avoir remplacé la somme infinie par la somme des* N *premiers termes) est majoré comme suit*

$$|Q\epsilon(\rho) - \sum_0^N \frac{\lambda(k)}{\sqrt{1-\lambda(k)^2}} T_k(\rho)| \leqslant \sum_{N+1}^{\infty} \frac{2^{2n+2}\pi^{2n+\frac{3}{2}} p(n)((2n)!)^2}{(4n)!\Gamma\left(2n+\frac{3}{2}\right)} \tag{51}$$

où $p(n) = 16n^2 + 8(1+3\pi)n + (4+\sqrt{2})\sqrt{4n+1} + 32\pi^2 + 24\pi + 2.$

(ii) *Pour* $N = 10$*, le reste est inférieur à* 2.366×10^{-12} *pour tout* $\rho \in [1,2]$ *:*

$$|Q\epsilon(\rho) - \sum_0^{10} \frac{\lambda(k)}{\sqrt{1-\lambda(k)^2}} T_k(\rho)| \leqslant 2.366 \times 10^{-12}, \qquad \forall \rho \in [1,2]. \tag{52}$$

Annexe : Rappels

Rappel du Théorème 1 de l'article initial d'Alain Connes ([1]) fournissant la formule de trace pour les zéros de la fonction zeta de Riemann de 1998.

Soient :
$K = \{g \in C_k \ ; \ |g| = 1\}$,

N, le domaine de la mesure $|\ | \subset \mathbb{R}_+^*$
($N = \mathbb{R}_+^*$ pour des corps de nombres,
$N \simeq \mathbb{Z}$ est le sous-groupe $q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_+^*$pour des corps de caractéristique nulle.)

$C_k \simeq K \times N$.

L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ se scinde en une somme directe canonique de sous-espaces orthogonaux 2 à 2,

$$\mathcal{H} = \oplus_{\chi \in \widehat{K}} \mathcal{H}_\chi \ , \ \mathcal{H}_\chi = \{\xi \ ; \ W(g)\,\xi = \chi\,(g)\,\xi \ , \ \forall\, g \in K\}$$

où χ parcourt le groupe dual de Pontrjagin K, qui est le groupe abélien discret $\widehat{K}$ des caractères de K.

Quand la caractéristique de k est nulle, on travaille avec une action de $\mathbb{R}_+^* \sim \mathbb{R}$ sur $\mathcal{H}_\chi$ et cette représentation est engendrée par un opérateur clos non-borné D_χ à spectre purement imaginaire.

Théorème 1. *Soient* $\chi \in \widehat{K}$*,* $\delta > 1$*,* $\mathcal{H}_\chi$ *et* D_χ *comme ci-dessus. Alors* D_χ *a un spectre discret,* $\operatorname{Sp} D_\chi \subset i\,\mathbb{R}$ *est l'ensemble des parties imaginaires des zéros de la fonction* L *à Grössencharakter* $\widetilde{\chi}$ *de partie réelle* $\frac{1}{2}$ *;* $\rho \in \operatorname{Sp} D \Leftrightarrow L\left(\widetilde{\chi}, \frac{1}{2}+\rho\right) = 0$ *et* $\rho \in i\,\mathbb{R}$*, où* $\widetilde{\chi}$ *est l'unique extension de* χ *à* C_k *qui est égale à* 1 *sur* N*. De plus, la multiplicité des* ρ *dans* $\operatorname{Sp} D$ *est égale au plus grand entier* $n < \frac{1+\delta}{2}$*,* n *étant inférieur à la multiplicité de* $n \leqslant \frac{1}{2} + \rho$ *comme zéro de* L*.*

Explicitation du **triplet spectral** et de son alternative dans le présent article :

l'algèbre : $\mathcal{A}$: algèbre des fonctions paires sur $I = [-L/2, L/2]$ *exemple :* $I = [-\frac{\log\ 2}{2}, \frac{\log\ 2}{2}]$	$\mathcal{A}'$: algèbre des fonctions paires sur $I' = [\exp(L)^{-1/2}, \exp(L)^{1/2}]$ *exemple :* $I' = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$
l'espace de Hilbert : $\mathcal{H} = L^2(I, \mathrm{d}x)$	$\mathcal{H}' = L^2(I', \mathrm{d}^*\lambda)$
l'opérateur : $D = \partial_r + P'$	$D' = \lambda\partial_\lambda + P$

Référence

[1] A. Connes, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function. Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.

Liens vers la géométrie non-commutative (DV, 23/2/2015)

Je voudrais par cette note exprimer ma gratitude à Alain Connes, pour les conférences et articles dans lesquels il présente le domaine qu'il a développé, la géométrie non-commutative, ainsi que pour ce qu'il a dit du processus même de recherche, et qui m'a constamment aidée à ne pas me décourager.

Je n'ai rien compris aux exposés et notes présentant la géométrie non-commutative ; cependant, j'ai le sentiment que leur écoute et lecture, malgré mon incompréhension, m'ont aiguillée comme il convenait depuis le début de ces recherches.

J'ai cité l'article de vulgarisation d'Alain Connes au sujet de la résolution des équations algébriques d'un magazine Pour la Science en février 2006 alors que j'avais commencé ce travail en septembre 2005. Je n'ai pas abandonné cette idée d'utiliser la résolution d'équations algébriques pour comprendre la conjecture de Goldbach binaire pendant 9 ans. J'ai lu en diagonale, n'étant pas capable de faire plus, les écrits d'Abel et Galois à l'été 2006 et quelques années plus tard, Alain Connes ayant donné plusieurs conférences au sujet de Galois, j'ai essayé avec acharnement de comprendre ses présentations (cf une note du 5 février 2013). Je n'ai jamais réussi à avoir une compréhension détaillée de ce qu'il présentait, juste des idées générales et synthétiques, que l'on peut considérer comme trop générales pour présenter un intérêt, mais qui me semblent cependant concentrer l'essentiel : l'idée du codage d'éléments par des lettres, caractéristique de l'algèbre, l'idée d'obtenir des liens entre les solutions en permutant des lettres. Ces notions de codage, de fonctions, résonnent avec ma formation initiale, qui est une formation de recherche en informatique (plus spécifiquement en intelligence artificielle).

AC parle lors d'une interview de la manière de lire du chercheur. Il feuillette un article et soudain, focalise son attention sur un point dont il a le sentiment qu'il s'agit d'une sorte de "noeud de compréhension". La lecture en diagonale a vraiment été constante et intensive tout au long de ce travail : je n'ai pas du tout *compris* au sens entendu par AC ci-dessus ; je m'arrête souvent sur les figures, sur quelques formules simples ; cela engendre dans l'esprit une sorte d'impression d'ensemble, une sorte de bain de langage, qui est très important d'une part parce qu'il fait que les sens et le cerveau sont constamment actifs et d'autre part, parce qu'il remplit la mémoire de nombreux éléments, d'images mentales, qui pourront ensuite être mis en relation les uns avec les autres. Je prends des bribes, qui vont conforter mes intuitions et cheminements, me donner un peu d'assurance, et c'est important parce que dans cette recherche, j'étais constamment perdue, c'est un peu inquiétant. Les bribes sont comme des bouts de bois auxquels se raccroche la naufragée, lors des moments de découragement. Dans le but d'encourager les jeunes à s'engager dans la recherche, AC insiste sur deux points : le fait d'une part que ça peut être normal de ne rien comprendre à une conférence, et qu'il ne faut pas se décourager pour autant, les éléments de compréhension se dégageront peut-être un jour. Il explique d'autre part que c'est lorsqu'on a l'impression d'être la plus perdue qu'on avance alors que lorsqu'on est sur des éléments bien maîtrisés, le cerveau n'est pas en mouvement. Caché derrière cela, il y a également la notion de prise de risque et d'acceptation du ridicule, qu'on retrouve dans les écrits de Galois. Ce n'est pas glorieux que de ne pas se mettre en danger et de ne montrer qu'une belle façade de maîtrise, en cachant tous les moments où l'on a douté. Il n'y a pas de honte à montrer ses doutes et faiblesses, s'ils n'ont pas comme conséquence un blocage total de l'activité mentale, par perte totale de l'estime de soi. Il faut également réussir, et c'est difficile quand on a un naturel un rien obsessionnel, à se détendre et se détourner de son objectif, pour mieux le retrouver ensuite, l'esprit moins englué.

Il y a par exemple un petit élément qui à un moment m'a donné du courage. AC a expliqué en conférence que les algèbres non-commutatives si complexes qu'ils étudiaient pouvaient trouver leur illustration dans la très simple structure de monoïde. La structure de monoïde est enseignée en général au tout début d'un cursus informatique. On suit des cours de Théorie des langages, qui sont vraiment des cours de base. On y étudie la notion de langage, de mots, de concaténation. La concaténation des mots est une des opérations non-commutatives les plus simples. La structure de chaîne de caractères (*string*) est une structure de données essentielle en informatique et toutes les autres opérations sur les chaînes de caractères (reconnaissance de sous-chaînes, comptage de lettres, etc) sont des concepts sous-jacents à la programmation informatique.

En mai 2013, j'ai lu *Le théâtre quantique*, écrit conjointement par Alain Connes, Danye Chéreau et Jacques Dixmier. Il y est question d'anagrammes et j'en ai alors cherché beaucoup, parce que ça m'amusait. AC présente cette idée de permutation des lettres des mots à de multiples reprises en conférences, par une anecdote marrante au sujet d'une carte postale pleine d'anagrammes que lui avait envoyée un ami ; dans *Le* *théâtre quantique* est citée l'anagramme de Jacques Perry-Salkow de *L'horloge des anges ici-bas*. Le goût des mots peut être aussi une seconde nature quand on cotoie des cruciverbistes, quand on pratique souvent dans son enfance des jeux de lettres ou mots (Diamino, Scrabble, culture familiale du calembour). Il s'agit de développer une certaine attention aux permutations de lettres qui font sens, d'acquérir des réflexes de comptages de lettres qui permettent ou pas d'obtenir certains mots étant donné tel ou tel ensemble de lettres. Le jeu télévisé des chiffres et des lettres a développé ces capacités pour nombre d'entre nous.

Une idée souvent reprise en conférence par AC est l'idée de rébellion, de décision de s'aventurer tout seul, sans suivre les chemins tracés. C'est une idée développée par Galois également. En fait, mon acte salutaire de rébellion a consisté à prendre la décision de revenir aux fondamentaux informatiques que j'avais le sentiment de maîtriser du fait de mon expérience en recherche et ingéniorat à Noël 2013 (la programmation, les instructions, les variables, les booléens, les invariants de Hoare) quand j'ai vraiment réalisé que malgré toute ma bonne volonté, je ne comprendrais jamais rien aux tenants et aboutissants de la géométrie non-commutative. La compréhension d'articles de recherche actuels nécessite d'être titulaire d'une thèse et d'avoir passé une vingtaine d'années à pratiquer intensivement la recherche au plus haut niveau (suivi constant et régulier de tout ce qui se fait dans un domaine donné et bien circonscrit des mathématiques, participation / animation de colloques et conférences, discussions régulières et intensives avec d'autres chercheurs).

Je voudrais également évoquer une notion fondamentale en géométrie non-commutative qui a été très importante dans cette quête et qui est la notion de points géométriques. Ce qui a été extraordinaire, c'est le fait de m'être focalisée 8 ans durant, jusqu'à février 2014, sur des espaces géométriques qui me semblaient pertinents pour l'étude de la conjecture de Goldbach binaire et qui consistaient en des produits cartésiens de corps premiers. Je crois que ces points commutaient. Mais brutalement, en février 2014, s'est imposée à moi l'idée de "tout écraser du point de vue de l'information", en me concentrant sur de simples booléens qui agrégeaient cette information en leur sein en postulant que, comme dans le domaine de la compression d'images, je ne perdrais pas d'information ce-faisant. Ce choix a engendré la découverte de règles de réécriture, au nombre de 16. L'opération travaillant sur deux doublons de booléens ne commutait pas et les règles de réécriture semblaient suivre un principe physique qui s'appelle le principe de Ritz-Rydberg. Tout ça me confortait dans une conviction qu'il ne fallait pas lâcher ce fil pertinent d'idées. Un autre élément renforçait encore cette conviction : j'avais en quelque sorte deux droites de booléens, fonctions de la droite des entiers, qui codaient le caractère de primalité des entiers successifs, et que je devais mettre tête-bêche, ce que j'appelais avoir une copie de mon espace. Et j'ai alors lu dans le livre de géométrie non-commutative qu'AC avait lui aussi eu l'idée de cette copie d'espace mais dans un tout autre domaine : pour son travail en physique, pour représenter l'espace-temps. C'était d'ailleurs le fil conducteur de l'une de ses conférences très importante, qui s'appelle *Espace-temps et nombres premiers, deux défis pour la géométrie*. Il y présente son paradigme de la géométrie non-commutative comme permettant d'adresser tout à la fois les deux graals des scientifiques contemporains que sont la représentation de l'espace-temps et celle de l'espace de l'ensemble des nombres premiers. Tous ces petits éléments de réassurance, même s'ils étaient parfois totalement infondés, ont vraiment été d'une grande aide pour que j'avance. Je peux cependant illustrer par un exemple que si ces éléments me rassuraient, j'étais parfois très loin à côté de la plaque : par exemple, j'ai interprété certains restes modulo 8, correspondant à la KO-dimension, comme des codages par des 1 et -1 de spins et j'ai trouvé un pont entre mon espace de lettres et ce qu'on appelle en physique un espace de Yang-Mills. J'interprétais tout pour conforter ma conviction que mes intuitions étaient bonnes et ceux à qui j'en parlais n'avaient aucune hésitation à me dire que je nageais en plein délire, leur attitude me ramenant brutalement au sol. Il est aussi aisé de trouver de nombreux interlocuteurs, qui vous prouvent par $a + b$ que toutes vos tentatives seront de toute façon vouées à l'échec. Ces personnes nous repositionnent correctement face au réel et si leur pessimisme n'est pas bloquant de la pensée, il peut aider aussi. Ce côté obsessionnel totalement délirant peut faire craindre pour sa santé mentale et il est toujours le signe qu'il est temps d'aller se balader.

Il se trouve également que j'avais trouvé de petites représentations graphiques sympathiques de mes règles de réécriture, qui me permettaient d'avoir un oeil neuf sur une représentation graphique des décompositions de Goldbach binaires sous la forme d'un maillage, dont j'avais ressenti au début de mes recherches la découverte comme une illumination parce qu'il était un beau moyen de présenter graphiquement la conjecture. Cette représentation graphique, bien que toute simple, me fait penser aux petits schémas de Richard Feynman, toutes proportions gardées. Elle condense des assertions logiques triviales qui lient les décompositions en somme de deux impairs de n et $n + 2$. J'avais ainsi un nouveau regard sur mon travail comme se situant dans la lignée, à très modeste échelle, du travail de Galois : les lettres utilisées dans l'approche proposée représentent des nombres d'assertions logiques existentielles de solutions d'équations plutôt que des solutions d'équations elles-mêmes.

La preuve que j'ai proposée est résolument algorithmique ; j'explique par de multiples raisonnements par récurrence, correspondant aux différents cas à envisager, comment on ne perd pas l'une au moins des décompositions de Goldbach, lors du passage d'un entier pair à l'entier pair suivant.

Tout récemment seulement, j'ai lu que les algèbres de Boole, que je ne connaissais que de manière utilitaire, pour leur utilisation en programmation, avaient des propriétés particulières, ces propriétés pouvant peut-être être utilisées pour présenter mon travail d'une manière plus statique, en termes de structures. J'ai par exemple appris qu'une algèbre de Boole obéissait au principe d'idempotence, tel que $x^2 = x$, une formule qui n'arrête pas d'apparaître dans le livre et dans de nombreuses notes d'AC. J'ai aussi lu un court paragraphe concernant le principe de dualité vérifié par une algèbre de Boole : tout théorème demeure vrai quand on échange le *et logique* ($\wedge$) et le ou ($\vee$) d'une part, et le 0 et le 1 d'autre part. $x \wedge \neg x = 0$ devient par ce changement $x \vee \neg x = 1$. Cette symétrie tendrait à faire croire que les deux valeurs de vérité ne sont en fait que les deux faces d'une même pièce, et rappelle les deux faces d'espace vues plus haut.

Je formule ce souhait que mon approche informatique de la conjecture de Goldbach binaire puisse être un jour totalement décrite en utilisant le paradigme de la géométrie non-commutative et j'imagine que lorsqu'elle le sera, la profondeur que je ne fais que pressentir de ce modèle de représentation des espaces en allègera considérablement la formulation.

La petite fonction qui envoie les parties imaginaires des zéros non triviaux de ζ vers des nombres "presque" successifs
Denise Vella-Chemla
26 décembre 2024

On teste par le programme suivant, pour les 2 millions de premiers zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann, que les parties imaginaires de ces zéros sont bien envoyées par la fonction de comptage vers les nombres "presque" successifs, i.e. des nombres réels séparés chacun du suivant par un écart compris entre 0 et 1 [1].

La fonction de comptage a, à une constante près, pour définition :

$$f(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{T}{2\pi\, e}\right)\right)$$

```
import math
from math import pi,log,e

with open("zeros2millions", 'r') as f:
     lines = f.readlines()
     zeros = [float(line) for line in lines]

for n in range(len(zeros)-1):
     print(n,' ',zeros[n],' ',(zeros[n+1]/(2*pi))*log(zeros[n+1]/(2*pi*e)))
```

Ci-dessous le résultat de ce programme jusqu'à 100 [2] .

n	$\mathfrak{Im}(\zeta_n)$	$f(\mathfrak{Im}(\zeta_{n+1}))$	n	$\mathfrak{Im}(\zeta_n)$	$f(\mathfrak{Im}(\zeta_{n+1}))$
0	14.134725142	0.694895689662535	10	52.970321478	10.7392197558459
1	21.022039639	1.51833268588623	11	56.446247697	11.7644535438555
2	25.01085758	2.79584647536906	12	59.347044003	12.2980090797995
3	30.424876126	3.44206964858738	13	60.831778525	13.8681602815966
4	32.935061588	4.71837876181937	14	65.112544048	14.6049466761078
5	37.586178159	5.6899670378981	15	67.079810529	15.5416859568015
6	40.918719012	6.4192280671934	16	69.546401711	16.5133799857929
7	43.327073281	7.89568039084821	17	72.067157674	17.9401819521021
8	48.005150881	8.47320303179638	18	75.704690699	18.5128358719339
9	49.773832478	9.54208818578511	19	77.144840069	19.3928547789907

[1] En fait, l'écart entre les images de deux parties imaginaires de deux zéros successifs (rangés dans l'ordre croissant des parties imaginaires) a été au maximum égal à 3.3 environ pour les 2 millions de premiers zéros, et non pas à 1, mais dans tous les cas, l'écart reste toujours très très petit par rapport au nombre considéré.

[2] et à cet adresse

https://denisevellachemla.eu/entre0et1.txt ,

l'exécution avec les zéros non triviaux de ζ de partie imaginaire inférieure à 2 millions fournis par Odlyzsko.

n	$\mathfrak{Im}(\zeta_n)$	$f(\mathfrak{Im}(\zeta_{n+1}))$	n	$\mathfrak{Im}(\zeta_n)$	$f(\mathfrak{Im}(\zeta_{n+1}))$
20	79.33737502	20.8475020524276	61	167.184439978	61.6984559369902
21	82.910380854	21.600069144213	62	169.094515416	62.1271444444692
22	84.735492981	22.7205417605702	63	169.911976479	63.9694035692432
23	87.425274613	23.3021589295633	64	173.41153652	64.6792079573964
24	88.809111208	24.8665888629723	65	174.754191523	65.5735076120176
25	92.491899271	25.7948264335012	66	176.441434298	66.6028057110773
26	94.651344041	26.322413725083	67	178.377407776	67.4234734608378
27	95.870634228	27.6136597251497	68	179.91648402	68.6487411487072
28	98.831194218	28.7091385850354	69	182.207078484	70.0813332073192
29	101.317851006	29.7790866652396	70	184.874467848	70.4714073780431
30	103.72553804	30.5493808703319	71	185.598783678	71.350947873569
31	105.446623052	31.3245538549383	72	187.228922584	72.5346151339257
32	107.168611184	33.078495631911	73	189.416158656	73.9525970335719
33	111.029535543	33.4652954705481	74	192.026656361	74.5262116161171
34	111.874659177	34.5902881052207	75	193.079726604	75.719672958394
35	114.320220915	35.4730710131554	76	195.26539668	76.6018838013679
36	116.226680321	36.6682086217569	77	196.876481841	77.2267590641179
37	118.790782866	37.879337085695	78	198.015309676	79.0154396127439
38	121.370125002	38.623986107933	79	201.264751944	79.6940486909973
39	122.946829294	39.2451198593009	80	202.493594514	80.6326289177557
40	124.256818554	40.8002822690803	81	204.189671803	81.3008329480505
41	127.51668388	41.790866980748	82	205.394697202	82.6971391696362
42	129.5787042	42.5190899316302	83	207.906258888	83.6283945340186
43	131.087688531	43.6878796199309	84	209.576509717	84.8102971609292
44	133.497737203	44.3011014007152	85	211.690862595	85.7389266964766
45	134.756509753	45.9468415556906	86	213.34791936	86.4122057823626
46	138.116042055	46.7451839583626	87	214.547044783	87.3248925751132
47	139.736208952	47.4312561383973	88	216.169538508	88.9599243352489
48	141.123707404	48.4181040360562	89	219.067596349	89.8920390429968
49	143.111845808	49.8599978194783	90	220.714918839	90.2976677989138
50	146.000982487	50.5729251200248	91	221.430705555	91.7606662793508
51	147.422765343	51.8978090115362	92	224.007000255	92.3163259969592
52	150.053520421	52.3384532843791	93	224.98332467	93.7068816956505
53	150.925257612	53.4029529442674	94	227.42144428	94.8025556889906
54	153.024693811	54.97711765745	95	229.337413306	95.8989445808808
55	156.112909294	55.7373818516436	96	231.2501887	96.3220875071878
56	157.597591818	56.3804305894168	97	231.987235253	97.3030374373686
57	158.849988171	57.5855873368141	98	233.693404179	98.9349673409935
58	161.188964138	58.538351594387	99	236.524229666	99.6547445742907
59	163.030709687	59.8402435745758	100	237.769820481	100.688414763251
60	165.537069188	60.699241612539			

Référence

[1] Alain Connes, Henri Moscovici, *The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta*, PNAS, Vol. 119, nº 22, 24 mai 2022. https://doi.org/10.1073/pnas.2123174119, et article en ligne https://www.pnas.org/doi/epub/10.1073/pnas.2123174119.

Pour se faire une autre idée, on note ci-dessous une petite fonction qui trouve "presque" les valeurs des parties imaginaires des zéros non triviaux de ζ en prenant "certains" multiples de $\dfrac{\pi}{4}$.

```
from math import pi

with open('zeros30', 'r') as f:
     lines = f.readlines()
     zeros = [float(line) for line in lines]

combien = [18,28,32,39,42,48,52,56,62,63,67,72,76,77,83,86,89,92,96,99,101,105,108,
           112,113,118,120,122,125]
for k in range(29):
     print(':2.9f :3d :2.9f'.format(zeros[k],combien[k],combien[k]*pi/4))
```

k	$\zeta[k]$	k'	$k'\frac{\pi}{4}$
1	14.134725142	18	14.137166941
2	21.022039639	28	21.991148575
3	25.010857580	32	25.132741229
4	30.424876126	39	30.630528373
5	32.935061588	42	32.986722863
6	37.586178159	48	37.699111843
7	40.918719012	52	40.840704497
8	43.327073281	56	43.982297150
9	48.005150881	62	48.694686131
10	49.773832478	63	49.480084294
11	52.970321478	67	52.621676948
12	56.446247697	72	56.548667765
13	59.347044003	76	59.690260418
14	60.831778525	77	60.475658582
15	65.112544048	83	65.188047562
16	67.079810529	86	67.544242052
17	69.546401711	89	69.900436542
18	72.067157674	92	72.256631033
19	75.704690699	96	75.398223686
20	77.144840069	99	77.754418176
21	79.337375020	101	79.325214503
22	82.910380854	105	82.466807157
23	84.735492981	108	84.823001647
24	87.425274613	112	87.964594301
25	88.809111208	113	88.749992464
26	92.491899271	118	92.676983281
27	94.651344041	120	94.247779608
28	95.870634228	122	95.818575934
29	98.831194218	125	98.174770425

Bourbaki : 1945-75, Dialogue organisé par la Fondation Hugot du Collège de France, entre Jean-Pierre Serre, Pierre Cartier, Jacques Dixmier et Alain Connes, Juin 2019.

Au sujet de la correspondance Serre-Grothendieck, Jean-Pierre Serre et Alain Connes.

Entre deux, temps et vérité, Alain Connes et Daniel Sibony.

Bourbaki : 1945-75
Dialogue organisé
par la Fondation Hugot
du Collège de France,
entre Jean-Pierre Serre, Pierre Cartier,
Jacques Dixmier et Alain Connes
Juin 2019

Alain Connes : Donc nous sommes réunis pour parler de Bourbaki, mais de Bourbaki dans la période qu'on appelle l'âge d'or de Bourbaki et, en discutant avec Jacques, on a situé cet âge d'or disons sur 30 ans, entre 1945 et 1975. Je ne tiens pas à des limites précises bien entendu. Donc mon rôle sera simplement le rôle de modérateur dans la discussion et j'insisterai surtout bien sûr sur des témoignages personnels et non pas sur les généralités qu'on trouve dans la littérature, etc. Ce qui m'intéresse vraiment, c'est d'avoir des témoignages personnels et je commencerai à dire simplement que ce qui force l'admiration, quand on regarde cette période-là, c'est surtout, enfin d'abord, c'est l'effacement des ego dans cette tâche...

Jean-Pierre Serre : L'effacement des... ? [*]

Alain Connes : Des ego, des individualités.

Jean-Pierre Serre : Ah !

Alain Connes : L'effacement des ego, c'est-à-dire le fait que dès le départ, il était convenu qu'aucun des membres de Bourbaki n'attacherait son nom à ce qui était produit et en fait, je pense que ce n'est pas du tout étranger, ce fait qu'il y ait cet effacement des ego, avec ce que ça a engendré, bien sûr, on en parlera, au niveau mathématique, les réussites extraordinaires que ça a engendré, mais aussi, ça a engendré un esprit de fraternité, je dirai, dans la communauté mathématique, et cet esprit de fraternité est visible, pas seulement bien sûr à l'intérieur de Bourbaki, mais en fait, je pense qu'il a débordé de Bourbaki en soi et bien sûr, c'était dû... on ne peut pas dire que

∗. Transcription : Denise Vella-Chemla, 21.6.2019.

Bourbaki a pris le pouvoir, mais on peut dire qu'il y avait une telle panoplie de talents dans Bourbaki qu'en fait, je veux dire, ils ont été le modèle de toute une génération de mathématiciens, pas seulement français, mais aussi à l'étranger puisqu'il y a eu des étrangers qui ont participé à Bourbaki. Donc en fait, ça, c'est mon point de départ et la manière que j'ai envie d'utiliser pour vous faire participer, c'est de faire des tours de table sur des sujets assez spécifiques, mais, comme je le disais, j'ai envie de sujets qui n'ont pas leur réponse déjà dans la littérature, ou dans ce qu'on trouve sur internet, etc., mais qui auront des réponses tout à fait personnalisées. Donc, simplement pour voir si le tour de table marche et puis pour se chauffer, le premier sujet, c'est un sujet qui est assez simple, c'est la question suivante, "est-ce que vous connaissiez Bourbaki avant d'avoir été recruté ? Comment avez-vous été recruté ? Et quels sont vos souvenirs du premier congrès Bourbaki ?" Voilà. Donc je pense... Je ne sais pas dans quel ordre on peut procéder *(tendant la main vers Jean-Pierre Serre).*

Jean-Pierre Serre : Je pense qu'on pourrait répondre dans l'ordre dans lequel on a été pris, tu vois ? Or là, j'ai été pris en premier.

Alain Connes : Tu as été pris en premier ? D'accord.

Jean-Pierre Serre : En 49. Alors là, je peux répondre à toutes ces questions-là... parce que... la façon dont j'ai connu Bourbaki : alors, bien sûr, j'avais regardé les livres de Bourbaki ; il n'y en avait pas beaucoup. Il y avait la Topologie générale, chapitres 1 et 2, je crois, et il y avait Algèbre 1, je crois. Algèbre 2 n'était même pas sorti.

Alain Connes : Il y avait les fondements aussi ? *(rire de JD)*

Jean-Pierre Serre : Non, non, non, il n'y avait rien de tout ça.

Jacques Dixmier : Il y avait le fascicule de Résultats des ensembles.

Jean-Pierre Serre : Il y avait le fascicule de Résultats. Ca, c'était très utile d'ailleurs. Et alors, personnellement, ce qui s'est passé, c'est que j'ai passé l'agrégation et il y avait une épreuve d'analyse, bon, que j'avais plus ou moins comprise, pas beaucoup, du coup, et puis je rentre à l'Ecole Normale et là, Bourbaki avait un congrès qui était dans une salle et je suis rentré par hasard dans cette salle...

Alain Connes : Ah, d'accord, tu es rentré par hasard dans cette salle, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Et puis j'ai vu qu'ils discutaient de questions qui étaient très voisines, tu vois, de celles qui étaient dans mon problème d'agrégation. Et du coup, ça m'a intrigué. Et j'ai appris comme ça par accident que le prochain congrès Bourbaki trois mois après, ça c'était tu vois, c'était en juin ou juillet 48, qu'en octobre ou novembre, il y aurait comme ça une réunion Bourbaki, à Nancy.

Alain Connes : A Nancy.

Jean-Pierre Serre : Rue de la Craffe. Alors à l'époque en question, j'étais avec ma femme à Auxerre, parce qu'elle avait été professeur à Auxerre, et j'ai rien demandé à personne, j'ai pris un billet de train et je suis parti pour Nancy...

Alain Connes : Bien sûr *(rires)*.

Jean-Pierre Serre : Oh, eh bien pour moi, il était normal que les maths ce soit ouvert, tu vois, je n'avais pas la moindre idée de politesse, qu'il fallait demander, non, non, je suis allé à Nancy, et là, il y avait un amphithéâtre et je me suis assis dans l'amphithéâtre ; ils discutaient de théorie des corps, je me souviens très bien, il y avait une proposition de Chevalley un peu extraordinaire qui était de supprimer la théorie de Galois *(rires)*, qu'il a transformée en un choix "ou bien vous la mettez, mais dans ce cas-là, vous mettez aussi les algèbres de Lie..."

Alain Connes : Première apparition des algèbres de Lie par Chevalley.

Jean-Pierre Serre : Du coup, ils ont eu le bon sens de lui dire oui. Et je crois que je suis intervenu, parce que je pouvais intervenir tu vois, et je crois que je suis intervenu pour dire une bêtise dont je me souviendrai jusqu'à la fin de ma vie qui était que la théorie de Galois ne servait à rien, tu vois *(rires de tous)*. Et ça, ça m'a frappé, parce que tout le reste de ma vie, je m'en suis servi. Là, le bon Dieu ne m'a pas raté. Alors, ils ont été contents des commentaires que je faisais sur les espaces vectoriels topologiques, des trucs faciles, comme ça, ils m'ont invité alors cette fois-ci pour le congrès d'après. Donc ça devait être en janvier, ou en février-mars.

Pierre Cartier : Ca devait être en 49.

Jean-Pierre Serre : En 50, euh, en 49. Au congrès d'après, ils m'ont dit "on te prend". Voilà, c'est comme ça que je suis rentré.

Alain Connes : Et qui il y avait à l'époque ? Donc il y avait Cartan, Dieudonné, Chevalley... ?

Jean-Pierre Serre : Non, mais j'ai forcé la porte de Bourbaki en quelque sorte.

Alain Connes : Oh, très bien, tu l'as ouverte, et elle est restée ouverte !

Jean-Pierre Serre, s'adressant à Jacques Dixmier : Alors voyons, alors, ensuite, je crois que c'est toi qu'on a pris ? On t'a pris en quelle année toi ?

Jacques Dixmier : Attends, avant toi, il y a eu Godement et Schwartz, qui ont été recrutés juste avant.

Jean-Pierre Serre : Mais oui, mais *(désignant AC)* il disait parmi nous trois.

Jacques Dixmier : Ah, parmi nous trois. Alors oui, après, c'est moi, oui.

Jean-Pierre Serre : C'est quelle année, toi ?

Jacques Dixmier : En 49. Tu as même été... vous étiez chargés, Samuel et toi, de me recruter.

Jean-Pierre Serre : Pour savoir si tu acceptais.

Jacques Dixmier : Et vous n'avez eu aucun effort à faire parce que, j'étais *(rires)*... Je dois... Avouons, j'étais flatté, et puis intéressé.

Jean-Pierre Serre : Oui, mais ça te changeait les idées, quand-même aussi un petit peu.

Jacques Dixmier : Comment, ça me changeait les idées ?...

Jean-Pierre Serre : Par rapport aux espaces de Hilbert.

Jacques Dixmier : Et puis, ah oui, ça m'a énormément changé les idées, oui, alors là ! Et même tout de suite, je me suis rendu compte que ça m'intéressait plus que mes propres travaux, là, alors, immédiatement.

Alain Connes : Et le premier congrès alors ? Vas-y, raconte...

Jacques Dixmier : Le premier congrès, alors, en 49, mais alors à quel endroit c'était, je ne me rappelle pas. Attends, je reviens sur autre chose, on est un peu libres ? Sur ton introduction, parce qu'il y a un point sur lequel je ne suis pas d'accord, enfin, je veux me désolidariser, c'est que tu appelles ça l'âge d'or de Bourbaki. Alors ça l'est peut-être, je n'en sais rien, comme justement j'ai perdu complètement contact avec Bourbaki, ça m'embête de dire "c'est l'âge d'or de Bourbaki", alors que je ne sais rien de ce qui se passe ou presque rien de ce qui se passe depuis. Tu comprends que c'est prendre une position de supériorité qui est un peu déplaisante quand-même. Pour moi en tout cas.

Pierre Cartier : Je crois que c'est l'opinion générale hein.

Jean-Pierre Serre : (*désignant Alain Connes*) Disons que c'est son opinion à lui, parce que par exemple,

Jacques Dixmier : (*s'adressant à Alain Connes*) Bon, d'accord, c'est ton opinion à toi, d'accord.

Alain Connes : Pas seulement, c'est ce qui est écrit dans les livres qui parlent de Bourbaki, c'est tout. On va pas s'éterniser là-dessus.

Jean-Pierre Serre : Ca sera pas écrit, de toute façon *(s'adressant à Alain Connes)*, tu l'as dit de toute façon, on ne peut pas le supprimer.

Alain Connes : Je l'ai dit, j'en prends la responsabilité.

Jean-Pierre Serre : Mais effectivement, j'étais un peu agacé quand Cartier a fait des laïus, et par écrit, lui, sur la mort de Bourbaki, que c'était fini parce qu'il n'était plus à Bourbaki, du coup, Bourbaki était mort.

Alain Connes : Eh bien, la mort de Bourbaki a été annoncée, comme vous le savez, en 1968.

Tous ensemble : C'était un canular.

Jean-Pierre Serre : C'était un canular stupide.

Jacques Dixmier : Oh, stupide, il était pas plus idiot que beaucoup de canulars.

Jean-Pierre Serre : Non mais c'est beaucoup dire, ça, déjà *(rires)*.

Jean-Pierre Serre : Bon donc ça, c'est ton entrée dans Bourbaki. *(Se tournant vers Pierre Cartier)* Et toi Cartier, c'est un peu plus compliqué, parce que tu es rentré deux fois en quelque sorte ?

Pierre Cartier : Oui, oui, bon alors, comment est-ce que je connaissais Bourbaki ? Eh bien, évidemment, les livres de Bourbaki, je les connaissais. Je les ai découverts quand j'étais potache vers 16 ans parce que mon parrain qui était prof à Henri IV a voulu me faire un cadeau pour je sais plus pour quelle occasion, il m'a emmené chez Hermann, il m'a laissé là, tout l'après-midi dans la boutique, et quand il est revenu, il a sorti le chèque qu'il avait rédigé d'avance et le libraire avait calculé exactement, il lui avait dit d'avance... Bon et je me souviens, je crois que j'avais choisi la topologie générale de Bourbaki parmi d'autres livres, il y avait aussi les livres de Lichné[†]. Et mon parrain me dit “Tu sais qui est Bourbaki ?”, “Ah non, pas du tout”, “Tu sais qui est Simone Weil ?”, j'ai dit “Tu m'en as beaucoup parlé !”. Parce qu'ils avaient été normaliens ensemble. “Elle a un frère, André Weil, qui a fondé un groupe qui s'appelle Bourbaki et peut-être qu'un jour, tu les connaitras.”. Alors je

†. Lichnerowicz

me suis précipité, j'ai passé tout mon été à essayer de le lire. La difficulté, c'est que je n'avais pas le fascicule de résumés de théorie des ensembles. Et donc toutes ces notations, je ne les connaissais pas. Et donc j'ai eu du mal à les reconstituer.

Alain Connes : Et qu'est-ce qu'il y avait comme chapitres de topologie générale, 1 et 2 ?

Pierre Cartier : 1 et 2, 1 et 2.

Alain Connes : 1 et 2 seulement, il n'y avait pas les nombres réels.

Jean-Pierre Serre : Mais y avait pas mal de choses quand-même.

Jean-Pierre Serre : Il y avait les compacts, par exemple.

Alain Connes : Il y avait les structures uniformes.

Pierre Cartier : Il y avait des choses, mais la terminologie des ensembles n'était pas réexpliquée. C'est ça qui m'a posé difficulté. Alors bon, donc, voilà comment j'en avais entendu parler. Et puis, comment est-ce que ça s'est passé. Eh bien, ma première année à l'école, il y avait un séminaire Cartan où Eilenberg était, Samuel Eilenberg était là.

Jean-Pierre Serre : C'est quelle année ça ?

Pierre Cartier : C'est 50. Moi, je suis rentré en 50. Il y a un séminaire 50-51, un des grands séminaires de Cartan, Eilenberg avait parlé de la cohomologie, ensuite il y avait les faisceaux, enfin il y avait beaucoup de choses. Et Eilenberg avait fait un cours en parallèle là-dessus auquel j'ai assisté bon et j'avoue que j'étais très bon, on s'est très bien entendus Eilenberg et moi et je pense que c'est lui qui a dit à Cartan "Tu devrais l'inviter, on devrait l'inviter", alors j'étais comme cobaye en juin 51. Et je suis arrivé, alors Cartan avait une petite réserve parce que je devais passer je ne sais plus quel examen de licence et je l'ai séché en promettant à Cartan que je le passerais en septembre et que je l'aurais *(rires)*. Et je l'ai eu, enfin bon. Alors je suis arrivé et c'était à Pelvoux-le-Pouët, lieu historique, je suis arrivé là, et j'ai vu tout le monde. Il y avait Cartan bien sûr, il y avait Schwartz, je me souviens fort bien de Schwartz, je me souviens de Dieudonné, je me souviens de Godement, enfin, de tout ça, tout ça était très très agité. Cet endroit, Pelvoux-le-Pouët, on y est allés un certain nombre de fois, il y avait une petite auberge sympathique et la légende veut, je ne peux plus la garantir, la légende veut qu'un jour Weil et Dieudonné se soient tellement engueulés que la patronne du restaurant, de l'auberge, a eu peur et qu'elle a dit à son fils "Va donc chercher les gendarmes." et quelqu'un l'a rassurée "Mais non, mais non, il ne se passera rien, rassurez-vous, on va pas s'étriper.". Donc ça, c'était mon premier congrès, et je me souviens qu'on a discuté des groupes de Lie, bon, il y avait un rapport de Schwartz sur les groupes de Lie.

Alain Connes : De Schwartz pas de Chevalley alors ?

Jean-Pierre Serre : Il y a eu aussi Weil après mais enfin, Weil, c'était pas les groupes de Lie, c'était les variétés, c'était pas les groupes de Lie, si, c'est Schwartz.

Pierre Cartier : Schwartz avait fait les groupes de Lie et je me souviens qu'il y avait l'abréviation Pass.Ad. Je ne sais plus pourquoi. *(S'adressant à JPS)* Pass. et Ad., Ad. adjoint, je ne sais plus ce que ça voulait dire, ça avait fait rire tout le monde, évidemment, passade. C'est là que j'ai appris par exemple, là, il y avait une chose qui m'a beaucoup inspiré, c'était un théorème de Schwartz que *l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'un groupe, c'était l'algèbre des distributions ayant pour support l'origine pour la convolution.* Et ça, ça m'a énormément inspiré ensuite, ça. J'ai démarré, ma thèse a démarré là-dessus, sur ces idées-là. Bon qu'est-ce qui s'est passé. On a fait une expédition au glacier blanc.

Jacques Dixmier : Pas moi.

Pierre Cartier : Mais il y a encore des photos qui traînent un peu partout sur cette expédition, on est tous photographiés, et alors Weil nous avait persuadés, ou le guide nous avait persuadés qu'il fallait porter un béret de chasseur alpin. On ne pouvait pas faire une expédition de montagne sans mettre un béret de chasseur alpin. Et Weil était très fier de son béret de chasseur alpin et *(s'adressant à JPS)* il me semble que tu avais fait un dévissage d'ailleurs là ?!...

Jean-Pierre Serre : Et que je n'avais pas de béret non plus ! Mais par contre, j'ai dévalé une pente, ils ont été un petit peu inquiets, en particulier Cartan, de me voir dégringoler. Et puis je me suis arrêté au bas de la pente et puis voilà.

Pierre Cartier : Tu as quand-même dévissé de 50 ou 100 mètres hein ?

Jean-Pierre Serre : Oui mais c'était une pente qui n'était pas verticale, elle était inclinée suffisamment pour que ça continue, tu vois *(mines impressionnées de AC et JD)* oui mais ça se terminait par le glacier tu vois, c'était pas...

Pierre Cartier : Et alors, je me souviens aussi que c'est là que j'ai fait la connaissance de Chevalley par exemple. Et Chevalley, il était là avec sa fille, parce qu'il venait de se remarier et il était là avec sa fille Catherine qui avait 2 ans. Tout ça, ce sont mes souvenirs de ce premier congrès.

Jean-Pierre Serre : Ca c'est le second ou c'est le premier congrès, ça ? Parce que tu n'as pas été pris à ce moment-là ?

Pierre Cartier : J'ai été pris plusieurs années après, en 54.

Alain Connes : Ah, tu as été pris plusieurs années après, d'accord.

Jacques Dixmier : *(s'adressant à PC)* Sauf erreur, mais je ne me fie pas trop à ma mémoire, j'étais chargé de te recruter, ainsi que Bruhat. Mais est-ce que ça concorde avec tes propres souvenirs ?

Pierre Cartier : Oui, oui, on a été recrutés, Bruhat et moi, à peu près au même moment, je sais.

Jacques Dixmier : Ah non, non, non, on n'a pas été recrutés au même moment. Moi c'était en 49 et toi, tu dis en 54.

Alain Connes : Non, non, il parle de Bruhat et lui.

Jacques Dixmier : Oui, Bruhat et toi, enfin, dans mon souvenir, Bourbaki m'a dit "recrute-les", enfin, "dis-leur qu'on les recrute", c'était pas moi qui recrutais, c'était Bourbaki bien sûr.

Pierre Cartier : Est-ce que tu te souviens du recrutement de Koszul ?

Jean-Pierre Serre : Oui, j'allais en parler aussi parce que ça avait été assez rigolo.

Jacques Dixmier : Non mais alors, on sort de nous trois, là.

Alain Connes : Non, non mais bien sûr, allez-y, allez-y.

Jean-Pierre Serre : Alors Koszul, on avait décidé de le prendre, et on avait chargé Cartan de le "contacter". Et alors à un congrès suivant, on a demandé à Cartan "Alors, tu as contacté Koszul ?" "Oui, enfin non, il a rien dit, enfin...". Au bout de 6 mois, *(s'adressant à Jacques Dixmier)* enfin, tu t'en souviens sans doute.

Jacques Dixmier : Les dates, les durées, non, je ne me souviens pas des durées, non, la morale, je me souviens.

Jean-Pierre Serre : Au bout d'un an, enfin, au bout d'un certain temps quand-même on s'est dit "Quelqu'un d'autre..." *(à JD)* toi, peut-être ?

Jacques Dixmier : Non, c'est pas moi.

Jean-Pierre Serre : C'est pas moi. Je sais plus qui d'entre nous a dit "Va demander à Koszul". On a demandé à Koszul qui a dit instantanément oui et on lui a demandé "Mais Cartan ne t'a pas demandé ?" "Non, j'avais pas compris...". Cartan avait été si discret, tu vois, que Koszul n'avait pas compris qu'il était invité *(rires)*.

Pïerre Cartier : C'était ça le truc.

Jacques Dixmier : Faut dire que Cartan était le patron de thèse de Koszul, peut-être que ça rendait les relations un tout petit peu plus formelles.

Pierre Cartier : Cartan était le patron de thèse de pratiquement tout le monde, au moins officiellement.

Jean-Pierre Serre : Il n'était pas formel mais il était...

Jacques Dixmier : Il n'était pas bon directeur de thèse.

Jean-Pierre Serre : Il était très poli, quand-même, il pouvait...

Alain Connes : C'est sûr, il était très poli, donc peut-être qu'effectivement...

Jean-Pierre Serre : Où est-ce que c'est, je crois que c'est dans Proust, qu'il y a comme ça, tout à fait au début, il y a une histoire en effet d'une tante, qui demande...

Alain Connes : Mais bien sûr ! Non, mais qui veut remercier Swan pour avoir donné des bouteilles de vin.

Jean-Pierre Serre : Remercier Swan, c'est ça, elles le font d'une façon si discrète...

Alain Connes : Elles le font de manière tellement discrète que finalement...

Jean-Pierre Serre : ... que personne ne s'en rend compte.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr, j'avais envie d'en parler de ce passage de Proust, parce que ça m'évoquait exactement ça, exactement.

Jean-Pierre Serre : Cartan s'est comporté comme ça.

Alain Connes : Bon, alors donc je vois que le tour de table marche bien. Donc on va maintenant aborder une question un peu plus délicate.

Jacques Dixmier : Attends, si tu parles des recrutements alors, on parle des recrutements ou pas ? On a parlé de nos recrutements à nous trois.

Alain Connes : Tu peux parler de recrutements.

JACQUES DIXMIER : On vient de parler de celui de Koszul. Il y a d'autres recrutements, par exemple Grothendieck, le recrutement de Grothendieck.

ALAIN CONNES : Ca a été fait en quelle année, le recrutement de Grothendieck ?

JACQUES DIXMIER : C'était à Nancy, Grothendieck est allé comme jeune élève.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah non non, il n'était pas du tout dans Bourbaki quand il était à Nancy, il a été pris nettement après tu vois.

JACQUES DIXMIER : Enfin c'est lié quand-même, écoute, il est allé à Nancy tout de suite après ses études en faculté, il a...

JEAN-PIERRE SERRE : Non il a été élève de membres de Bourbaki mais c'est pas pareil.

ALAIN CONNES : De Schwartz et Dieudonné.

JACQUES DIXMIER : Il était élève de Schwartz et Dieudonné, c'est ça, mais Schwartz et Dieudonné ont dit tout de suite "il est formidable" alors...

JEAN-PIERRE SERRE, ALAIN CONNES, ENSEMBLE : Ah mais c'est pas pareil ! !

JEAN-PIERRE SERRE : *(poursuivant)* C'est tout-à-fait différent : on n'a pas pensé du tout à le prendre comme membre du groupe Bourbaki tout de suite, ça, je suis presque sûr.

JACQUES DIXMIER : Alors là, mes souvenirs ne sont pas assez précis, je peux rien dire, ça m'étonne un peu mais enfin, bon... Moi je dirais qu'il a été recruté en 55, par là.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, moi aussi.

JACQUES DIXMIER : *(désignant Pierre Cartier)* C'est-à-dire juste après toi, tout au moins, ton recrutement officiel.

Pierre Cartier : A peu près au même moment, à peu près au même moment.

Jean-Pierre Serre : Non mais on ne va pas passer en revue les membres de Bourbaki.

Jacques Dixmier : Ben je n'sais pas...

Pierre Cartier : Non, il y a les archives qui permettent de savoir.

Jean-Pierre Serre : On va revenir, revenons à nous, plutôt.

Jacques Dixmier : Les recrutements des membres postérieurs à nous font partie de nos souvenirs personnels.

Jean-Pierre Serre : Il y en a eu des tas d'un peu bizarres, tu vois, par exemple, Atiyah a été invité une fois, et il n'est pas revenu.

Alain Connes : Mac Lane est venu une fois aussi.

Jean-Pierre Serre : Alors lui, il était même pas, c'est pas pareil, il était venu comme visiteur tu vois, c'est pas pareil.

Jacques Dixmier : Non mais le recrutement de Borel, par exemple, là, tu dois avoir des souvenirs. Et c'est intéressant parce que ça doit être un des premiers non-normaliens qu'on a recrutés.

Alain Connes : Etranger tu veux dire.

Pierre Cartier : Et un des premiers étrangers en plus.

Alain Connes : Et Eilenberg non ? Eilenberg avait été recruté avant.

Pierre Cartier : Eilenberg, c'est en 50.

Jean-Pierre Serre : Je ne sais pas quand c'était, Eilenberg, c'était en 50 ?

Pierre Cartier : Si j'en suis certain, c'était en 50.

Alain Connes : Donc, c'est Eilenberg le premier étranger à avoir été recruté.

Pierre Cartier : C'est quand il est venu à Paris, l'année qu'il a passée à Paris.

Alain Connes : Et Tate alors, quand est-ce qu'il a été recruté ?

Jean-Pierre Serre : C'est nettement plus tard, mais effectivement, il est venu plusieurs fois. Ca a pas été du tout illusoire, comme Atiyah, tu vois, non.

Alain Connes : Atiyah est venu une fois, alors ?

Jean-Pierre Serre : Une fois, et puis ça ne lui a pas plu, quoi, ça ne correspondait pas...

Pierre Cartier : A sa manière de faire, c'est certain.

Alain Connes : Alors je vais aborder une autre question, la question suivante. C'est une question qui a à voir avec les maths de Bourbaki, mais pour être beaucoup plus spécifique que ça, la question que je voudrais vous poser, c'est "comment est-ce que vous conciliiez votre propre travail de recherche avec le travail que vous aviez à faire pour Bourbaki, les rédactions, etc., et est-ce qu'il y avait des relations dans un sens et dans l'autre, c'est-à-dire, est-ce que le travail pour Bourbaki vous influençait pour votre propre travail et inversement. Ca, pour moi, c'est une question capitale.

Jean-Pierre Serre : Il faudrait que tu choisisses un ordre, parce que...

Alain Connes : Eh bien, on peut respecter le même ordre que tout à l'heure puisque ça permet de...

Jean-Pierre Serre : Je commence alors.

Alain Connes : Oui tu commences.

Jean-Pierre Serre : C'est difficile à dire. J'ai toujours eu un grand plaisir à travailler pour Bourbaki.

Alain Connes : Ah bon ?

Jean-Pierre Serre : Moi, c'était un grand plaisir.

Pierre Cartier : Un grand... plaisir ?

Jean-Pierre Serre : Plaisir parce que à la fois, j'essayais de le rédiger aussi bien que possible mais en même temps, je savais que quelqu'un d'autre le reprendrait après, et le corrigerait.

Alain Connes : Donc tu étais tranquille, oui, d'accord, je comprends.

Jean-Pierre Serre : Alors je pouvais me laisser aller, tu vois.

Alain Connes : Tu avais une sécurité, tu veux dire.

Jean-Pierre Serre : Et alors le style de Bourbaki évidemment me convenait parfaitement. Pour rédiger mes propres articles, si possible, je suivais le style de Bourbaki, je faisais comme si je rédigeais pour Bourbaki, en expliquant un petit peu.

Alain Connes : Mais dans quel sens c'est allé, je veux dire, quand tu écrivais des articles après avoir, puisque tu as commencé très tôt avec Bourbaki, donc en fait, tu as suivi ce style-là dès que tu as commencé à écrire.

Jean-Pierre Serre : C'était mon style spontané en fait, curieusement. Dès que j'ai commencé, je rédigeais naturellement dans ce style-là.

Alain Connes : D'accord, et tu tapais à la machine, comment tu faisais ?

Jean-Pierre Serre : Je tapais, oui, j'avais une machine à écrire, et puis à l'époque, on tapait très facilement parce que quand ça n'allait pas, on tapait des X sur ce qu'on voulait effacer, on faisait des lettres à la main s'il le fallait, c'était épatant ça. Alors, point de vue influence...

ALAIN CONNES : Oui point de vue influence, dans les deux sens, voilà, c'est ça qui m'intéresse.

JEAN-PIERRE SERRE : Oh, hummf, j'ai peut-être influencé Bourbaki un peu, c'est difficile, une personne déterminée, à part Weil, n'influençait pas vraiment Bourbaki, quand-même.

PIERRE CARTIER : Sauf l'algèbre commutative, quand-même.

JACQUES DIXMIER : C'est lui qui parle, mais on pourra corriger après.

ALAIN CONNES : Tu corrigeras après, bien sûr. Non parce que...

JEAN-PIERRE SERRE : Non, je ne crois pas que j'aie poussé, bon, en algèbre commutative, j'ai poussé un petit peu, j'ai aidé. J'avais le sentiment d'aider, et puis surtout, j'avais ce sentiment sur Bourbaki, que c'est une œuvre, quelque-chose de salut public, d'espace public.

ALAIN CONNES : C'est ce que j'essayais de dire au début.

JEAN-PIERRE SERRE : Que c'est fait pour rendre service. Ca, les gens ne l'ont absolument pas compris ça, les gens qui commentent Bourbaki... Et également, ça je l'avais bien compris, parce que dans la discussion, c'était clair, que ce qui est fait dans Bourbaki, c'étaient pas les maths spécialement intéressantes, c'étaient les maths utiles pour faire des choses intéressantes.

ALAIN CONNES : Pour faire des maths intéressantes, bien sûr.

JEAN-PIERRE SERRE : Et ça, c'est différent. Je veux dire on devait prendre, un peu comme si dans une cuisine, où tu as du sel bien pur, où tu as ceci-celà et ça, c'est pas de la cuisine. La cuisine, c'est de les mélanger et de faire des choses...

ALAIN CONNES : C'est les outils qui sont au point, et puis après, on s'en sert.

JEAN-PIERRE SERRE : De nettoyer, de préparer bien les outils, pour qu'après, on puisse s'en servir. Et ça, malheureusement, les gens qui ont commenté Bourbaki n'y ont rien compris. Ils ont vu ça comme une entreprise de pouvoir, par exemple, à la Bourdieu, quoi, bon *(geste évasif)*.

Alain Connes : Et dans l'autre sens ? Est-ce que ce que tu faisais pour Bourbaki t'a influencé pour tes propres recherches ?

Jean-Pierre Serre : Le style m'a influencé forcément, tu vois. Mais j'ai pas eu l'idée de travailler sur des sujets de Bourbaki, ça n'a pas de sens, ça, mais de m'en servir.

Alain Connes : Ah, si, quand-même, si, quand-même, laisse-moi te poser une question plus précise, par exemple, lorsque les groupes de Lie ont été traités, dans Bourbaki, etc., est-ce que ça, ça a pu t'influencer à faire des choses sur les algèbres de Lie ou sur les groupes de Lie... ?

Jean-Pierre Serre : Non, c'est le contraire, j'en avais besoin pour ce que je faisais, des groupes l-adiques, des trucs comme ça, et au contraire, c'est plutôt que ça m'a donné plus d'enthousiasme pour, dans Bourbaki, insister pour que les réseaux de Lie ne soient pas sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alain Connes : Bon, alors j'ai une autre question un peu plus précise, c'est, quand on voit par exemple, la preuve de Dwork sur... on voit bien qu'il faut utiliser des espaces de Banach p-adiques, etc., est-ce que ça, c'est toi qui as insisté pour que les E.V.T. [‡] aussi soient faits dans le cadre p-adique.

Jean-Pierre Serre : Non, ça c'était déjà fait je crois. D'ailleurs, ils n'ont pas été tellement bien faits du point de vue p-adique, c'est pas utilisable...

Alain Connes : Non, c'est trop, c'est trop superficiel.

Jean-Pierre Serre : Non, non, c'était déjà... Dieudonné, de lui-même, avait dit "un corps muni d'une norme" et puis voilà quoi.

Alain Connes : Et puis on fait tout là-dessus, d'accord.

Jean-Pierre Serre : On fait tout mais on fait rien d'intéressant. Les choses intéressantes, c'est Hahn-Banach, et tout.

‡. E.V.T. = Espaces Vectoriels Topologiques.

Alain Connes : Ca c'est sur $\mathbb{R}$ aussi.

Jean-Pierre Serre : Sauf le théorème de Banach, il est aussi vrai sur les p-adiques, sur les graphes fermés.

Alain Connes : Quand-même, oui, il y avait quand-même quelque-chose.

Jacques Dixmier : Sur les espaces de dimension finie, localement compacts.

Alain Connes : Alors Jacques, vas-y.

Jacques Dixmier : D'une part, Bourbaki m'a énormément influencé dans mes travaux personnels.

Alain Connes : Alors ça, c'est très important.

Jacques Dixmier : Et même les 3/4 de ce que j'ai fait ont été influencés par Bourbaki. Si j'avais pas été dans Bourbaki, j'aurais travaillé sur les espaces de Hilbert toute ma vie.

Jean-Pierre Serre : Peut-être mais peut-être pas quand-même.

Jacques Dixmier : J'ai tout de même fait d'autres choses. Et c'est grâce à Bourbaki.

Alain Connes : C'est grâce à Bourbaki, ah oui ?! Ca c'est fort quand-même.

Pierre Cartier : *(taquin, désignant AC)* Il y en a d'autres qui s'occupent des espaces de Hilbert.

Alain Connes : Non, mais pas que ça, non, non.

Jean-Pierre Serre : Tu sais qu'on disait ça de Dieudonné aussi, que s'il n'y avait pas eu Bourbaki, il aurait continué sur les polynômes à une variable parce que c'était ça son seul sujet.

Jacques Dixmier : Je ne suis pas le seul sûrement, je suis un peu Dieudonné au petit pied, si tu veux : j'ai rédigé beaucoup. Alors là, mon rôle dans Bourbaki n'a pas été un rôle... *(s'interrompant)* Alors, d'abord, quand-même, je reprends ce qu'il dit lui *(désignant JPS)*, quand il dit qu'il n'a pas eu d'influence sur Bourbaki, c'est un contresens énorme.

Jean-Pierre Serre : Tu me fais plaisir mais...

Jacques Dixmier : Non mais attends, il faut distinguer deux parties : à partir du moment si tu veux où les membres fondateurs sont partis, ils ont commencé à partir avec la loi des 50 ans en 54, Cartan avait 50 ans, il est parti. A ce moment-là, eh bien, c'est toi et Borel qui avez influencé Bourbaki et ses directions générales.

Jean-Pierre Serre : C'est pas si précis que ça, quand-même, c'était vraiment collectif, quand-même, mais ça a aidé.

Jacques Dixmier : Si tu compares l'influence que tu as eue sur Bourbaki et l'influence que j'ai eue sur Bourbaki, j'vais pas mettre ça sur le même plan. Par contre, j'ai rendu grand service sur Bourbaki parce que, comme Dieudonné, je rédigeais énormément. Alors 10 fois moins que Dieudonné, parce que Dieudonné, il est hors concours *(rires)* mais enfin, je... Bon alors, encore une fois, ce point étant réglé, de mon point de vue, Bourbaki m'a influencé en m'apprenant énormément de choses.

Alain Connes : Des choses nouvelles que tu ne connaissais pas, d'accord.

Jacques Dixmier : Et bon, du même coup, j'ai parlé de mon influence sur Bourbaki, en tant que rédacteur.

Alain Connes : Pas seulement, quand-même, tu n'as pas seulement...

Jacques Dixmier : Non, je n'ai pas influencé Bourbaki autrement qu'en facilitant le travail, en rédigeant beaucoup.

Alain Connes : Mais attends, pour une question un tout petit peu plus précise, c'est que, si tu veux, il y a eu quand-même, dans Bourbaki, des contributions *nouvelles*, je veux dire, Serre a raison de dire qu'on ne peut pas situer cela du tout sur le même plan puisqu'on mettait au point des outils, mais par exemple, avant 45, il y avait les filtres et les ultra-filtres, qui avaient été quand-même mis au point par Bourbaki, et qui n'existaient pas avant. Donc la question que je pose, c'est...

Jean-Pierre Serre : Mais c'est vraiment pas une des choses les plus importantes, alors ça, personne ne s'en sert en réalité, je pense.

Pierre Cartier : C'est pas vrai.

Alain Connes : Si, les ultra-filtres...

Pierre Cartier et Alain Connes : Si en logique, ils les utilisent.

Jean-Pierre Serre : *(accompagnant sa parole d'un geste)* Oh oui bon...

Alain Connes : Mais peu importe, mais ce que je veux dire, c'est en quel sens, la question était un petit peu plus précise, en quel sens il y a eu une créativité de concepts, etc.

Jacques Dixmier : Oui, tu m'as déjà posé la question en dehors de cette réunion, il faut distinguer.

Alain Connes : C'était pas le but, bien sûr.

Jacques Dixmier : Oui, pendant les congrès-mêmes, je ne crois pas qu'il y ait beaucoup de... Par exemple, un exemple qui m'est venu à l'esprit, les idéaux associés, pour faire la décomposition primaire, c'est une création de Chevalley, il l'a fait en dehors d'un congrès : il est arrivé, il a fait une rédaction, c'est apparu dans une rédaction Bourbaki.

Alain Connes : Ah quand-même, oui donc ça veut dire...

Jacques Dixmier : Pour le monde extérieur, c'est une invention de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Ah tu penses que ça n'existait pas avant ?

Jacques Dixmier : Ca n'existait pas avant. En tout cas, Samuel [§] me l'a affirmé et Samuel connaît parfaitement la question, et il était d'ailleurs un peu indigné, Samuel, parce que quand il y a eu la revue de ce bouquin aux Maths reviews, aucune allusion au fait que c'était un point-de-vue nouveau mais ça, ça n'a pas d'importance.

Jean-Pierre Serre : Ca n'a pas d'importance.

Jacques Dixmier : Les revues sont souvent déconnantes.

Jean-Pierre Serre : Non, c'est pas ça, quand il y a des choses nouvelles dans un texte, c'est justement ce que le reviewer ne comprend pas, tu vois, donc il n'en parle pas, c'est sûr.

Jacques Dixmier : Ah oui, mais là, c'était l'essentiel du chapitre, enfin bon, passons.

Jean-Pierre Serre : Non, c'est pas l'essentiel.

Jacques Dixmier : Un autre exemple, alors. Alors là, ça s'est quand-même passé pendant un congrès, donc je vais t'en parler, on discutait du chapitre 5 d'intégration et on lisait, si mes souvenirs sont exacts, une rédaction de Dieudonné, il y a beaucoup de choses dans le chapitre 5, il y avait les mesures produits, les mesures images, les mesures induites, les mesures à densité, et brusquement, Schwartz a eu une idée qui unifiait tout ça : au lieu que ça soit 4 ou 5 *(gestes des deux mains comme s'il tournait une manivelle)*, où on recommençait à chaque fois, pour démontrer les théorèmes, il a eu une idée qui unifiait tout.

Jean-Pierre Serre : Et qu'est-ce que c'était, j'ai oublié ?

Pierre Cartier : Familles de mesures.

Jean-Pierre Serre : Familles, c'est ça ?

§. Pierre Samuel.

Jacques Dixmier : Ce que Choquet a appelé les diffusions après...

Jean-Pierre Serre : Non, non, ça s'appelait pas diffusions dans Bourbaki.

Pierre Cartier : Ca correspond aux diffusions des probabilités.

Jacques Dixmier : Enfin bref, tu prends une mesure qui n'est pas d'un paramètre, et ce paramètre est lui-même dans un espace mesuré, et il faut intégrer.

Jean-Pierre Serre : Et ça donne les différents cas, ça ?

Jacques Dixmier : Ca contient tous les différents cas. Alors, je m'en souviens d'autant mieux que ça a enthousiasmé tout le monde, je crois on peut le dire, moi en particulier et j'ai été chargé de la rédaction.

Alain Connes : La rédaction d'après tu veux dire ?

Jacques Dixmier : La rédaction suivante, j'ai rédigé ça, ça m'a pris plusieurs mois. J'étais emballé là, *(puis riant franchement)* quand ça a été lu en congrès, ça a été sérieusement écrémé.

Jean-Pierre Serre : On était habitué à ça.

Jacques Dixmier : C'est passé dans les exercices...

Alain Connes : Ca fait rien, c'est un point très important, je pense, parce que si tu veux...

Jacques Dixmier : Mais c'est pas des nouvelles maths.

Alain Connes : Ah non mais quand-même, ce qui est intéressant je pense, ce qu'on voudrait savoir en fait, c'est lorsqu'il y avait des lectures en commun, comme ça se passait tout le temps...

Jacques Dixmier : Eh bien, oui, puisque c'était le principe.

Jean-Pierre Serre : Est-ce que tu veux en parler de ça, peut-être, des lectures à haute voix, parce que c'est très important dans Bourbaki.

Alain Connes : Absolument ! ! Bon, je remets ça à un peu plus tard, alors, d'accord, ce sera le sujet suivant. Mais effectivement, c'est un point très important. Finalement, c'est le seul moment où il y avait une réflexion commune qui se produisait. Alors Pierre maintenant. Donc Pierre, l'influence de tes maths sur Bourbaki et de Bourbaki sur tes maths.

Pierre Cartier : Je peux dire que pendant presque 30 ans, j'ai consacré 1/3 de mon activité scientifique à Bourbaki.

Alain Connes : 1/3, donc oui, d'accord.

Pierre Cartier : 1/3 à peu près, quand-même, en volume : les rédactions à faire, les tribus éventuellement que je faisais quand ce n'était plus toi *(à l'adresse de JD)* qui les faisais, les corrections d'épreuve, enfin, bon là, j'ai vraiment beaucoup, beaucoup... je dirais à peu près 1/3 de mon activité. C'était chronophage.

Alain Connes : 1/3 de ton activité, c'est énorme.

Jacques Dixmier : Et le procès ?

Alain Connes : Non, non, ça n'en parlons pas encore.

Jean-Pierre Serre : Oh, mon Dieu, non.

Jacques Dixmier : Oui, mais chronophage.

Pierre Cartier : Non le procès, je n'en parle pas. D'un autre côté, mes intérêts propres, scientifiques, n'ont pas toujours coïncidé avec ceux de Bourbaki ; par exemple, je me suis beaucoup intéressé aux probabilités, à une époque où Bourbaki s'y intéressait pas beaucoup.

Jean-Pierre Serre : Schwartz quand-même, Schwartz s'y intéressait.

Alain Connes : *(en riant)* Mais pas Dieudonné, hein.

Jacques Dixmier : Je coupe, Cartier s'intéresse à tout, alors forcément il a débordé Bourbaki.

Alain Connes : Non, non, non, mais là il a en tête quelque-chose de très particulier, oui oui, bien sûr.

Pierre Cartier : Bon, mais il est vrai que la gymnastique de rédiger dans un style imposé, parce que c'était un style très imposé, ça vous forme, ça, c'est clair que ça vous forme. Et alors d'un autre côté, si tu veux pour mes intérêts scientifiques, j'ai dit que j'avais beaucoup travaillé sur les probabilités, ce qui n'était pas dans les lignes de mire de Bourbaki, mais j'ai aussi beaucoup travaillé sur les groupes de Lie, sur des choses comme ça, et alors là, bon ben je veux dire que c'est certain, la rédaction des livres sur les groupes de Lie, ça a été pour moi un moment crucial. Et d'ailleurs je racontais tout à l'heure que je viens enfin de terminer une démonstration commencée il y a 60 ans sur ce sujet-là.

Jean-Pierre Serre : *(hochement de tête très intéressé)* Ah ? !

Pierre Cartier : Construire le schéma sur les entiers associé à un groupe de Lie semi-simple... Bon, j'ai une nouvelle démonstration qui m'a pris 60 ans à mettre au point.

Alain Connes : On parlait de l'article de Chevalley de 55.

Jean-Pierre Serre : Mais il faut qu'elle soit complète, cette démonstration-là. Parce qu'il y a des tas de gens (Kostant, etc.) en ont fait mais qui ne sont pas, toi aussi, tu en avais fait, et où il n'y avait pas les détails qu'il faut, donc ça ne servait à rien.

Pierre Cartier : Il y aura tous les détails, là, je te le garantis.

Jean-Pierre Serre : Il faut vraiment qu'il y ait tous les détails, hein.

Pierre Cartier : Non mais ça je suis d'accord, je connais le sujet. Bon enfin, bon. Disons que je me suis emballé pour beaucoup des projets que

Bourbaki a faits. Par exemple, on parlait de probabilités, le seul endroit où on s'approche des probabilités, c'est le dernier livre sur l'intégration.

Jacques Dixmier : Dernier "chapitre", Monsieur.

Pierre Cartier : Ah oui, dernier chapitre. Chapitre 9... qui a été fait sous l'impulsion de Schwartz, et essentiellement rédigé par Paul-André Meyer, qui n'était pas de Bourbaki, mais qui a servi disons de conseiller.

Jean-Pierre Serre : Mais il n'était pas dans Bourbaki, Paul-André Meyer ?

Pierre Cartier : Non, non, non, non, non.

Jacques Dixmier : Il est venu comme cobaye, je crois, une ou deux fois. Mais il n'était pas membre de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Ah il n'était pas membre.

Pierre Cartier : Non, il n'était pas membre. Mais il a participé, justement, à cette écriture du livre sur les probabilités.

Jacques Dixmier : C'est un cas très spécial, un non-membre qui a écrit, enfin, 50 % parce que toi, tu en as bien écrit 50 % aussi.

Pierre Cartier : Il y avait Schwartz, il avait Meyer et moi. Et on a réussi à le faire. Enfin, ça a été... disons que pour moi ça a été... S'il n'y avait pas eu cette impulsion de Bourbaki, je ne me serais sans doute pas intéressé à ce qui avait été fait par l'école russe à l'époque, Prokhorov, Kolmogorov et tout ça, et ça, ça m'a énormément servi ensuite. Donc, je veux dire que mes intérêts mathématiques...

Jean-Pierre Serre : Ils débordaient beaucoup, ils ont beaucoup débordé de Bourbaki.

Pierre Cartier : Ils ont débordé beaucoup de Bourbaki : je me suis intéressé à la physique mathématique et ça, c'était pas un sujet qui intéressait beaucoup Bourbaki.

Alain Connes : Non, c'est certain.

Jacques Dixmier : Ca intéressait beaucoup Bourbaki mais on avait autre chose à faire, quoi !

Jean-Pierre Serre : Mais ça, c'est pas des maths, quand-même.

Pierre Cartier : Non.

Jean-Pierre Serre : On pouvait pas le rédiger avec corollaires et démonstration.

Jacques Dixmier : Enfin, il y a un spectre continu, de l'un à l'autre.

Jean-Pierre Serre : Aaahh, *(faisant le geste d'une faille dans la montagne)* il y a une rupture discrète *(PC rit en montrant AC, qui fait comme s'il disait "Tant pis")*, il y a une rupture, non, non, non.

Pierre Cartier : Disons que ça n'a pas été une motivation pour faire des maths, ça c'est différent.

Jean-Pierre Serre : Voilà, ça c'est différent. Ca peut même inspirer des énoncés.

Alain Connes : Mais d'ailleurs, ça touche une question qui est quand-même très importante, c'est "comment est-ce qu'a été conçue et comment est-ce qu'a évolué l'architecture des livres de Bourbaki ?"

Jean-Pierre Serre : Quand je suis arrivé, c'était déjà lancé si tu veux, ils ont commencé ça très tôt tu vois, le plan général...

Pierre Cartier : ...date de 1935.

Jean-Pierre Serre : Dieudonné l'avait en poche depuis longtemps, ils ont dû faire ça dans les années 30 tu vois, à peu près.

Alain Connes : Tu veux dire, il avait mis E.V.T. avant théorie de la mesure *(rires)*, avant intégration.

Pierre Cartier : Non, ça c'est un détail.

Alain Connes : Non, je rigole, on en reparlera.

Jean-Pierre Serre : Le livre de Lie n'était pas prévu initialement. Ca s'arrêtait aux Espaces Vectoriels Topologiques. Intégration, ça c'était dedans, je crois que ça s'arrêtait là *(se tournant vers PC)*.

Pierre Cartier : Il y avait deux parties : première partie, les 6 premiers livres, et la seconde partie... Y avait un gros débat.

Jean-Pierre Serre : Seconde partie, c'était un peu un mythe. C'était "la seconde partie, on s'en occupera après", c'était plutôt ça tu vois.

Pierre Cartier : Non mais je veux dire que ce qui était prévu quand-même, c'est un peu plus que ça, c'était que les 6 premiers livres étaient le fondement indispensable pour tout ce qui suivait, et que ça, ils le suivaient dans un ordre très précis.

Jean-Pierre Serre : Ils le suivaient dans un ordre déterminé, tandis qu'après effectivement, on pouvait mélanger les...

Pierre Cartier : Après ça divergeait *(indiqué d'un geste d'écartement de branches, vers le haut)*

Alain Connes : Mais attends, ce que je ne comprends pas, je suis un peu interloqué par quelque chose qui me vient à l'idée, la théorie des faisceaux, elle est où dans ces 6...

Jean-Pierre Serre : Elle n'y est pas, elle n'est pas dans Bourbaki.

Alain Connes : Parce que moi je l'ai trouvée dans...

Jean-Pierre Serre : *(l'interrompant)*, Eh bien, non, ça n'est pas la peine, puisqu'il y avait un membre de Bourbaki qui l'avait écrite, on n'allait pas recopier, il y avait ça tu vois aussi.

Alain Connes : Mais alors la question qu'on peut poser, c'est en quel sens justement, Godement a été influencé ou a influencé Bourbaki, justement, pour quelque-chose comme ça, parce qu'on en parlait avec Pierre, justement.

Pierre Cartier : Godement, Godement, bon, c'est lui qui a écrit “le” bouquin sur les faisceaux à une époque.

Jean-Pierre Serre : Et c'est lui qui a écrit l'intégration, sur les mesures de Radon, mais ça, c'était sur l'ordre de Bourbaki, c'était pas uniquement son goût à lui.

Alain Connes : C'était une demande de Bourbaki, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Là, j'ai assisté à cette séance.

Pierre Cartier : Les faisceaux, les faisceaux, ça faisait partie des discussions courantes, évidemment bien sûr, on ne pouvait pas ignorer les faisceaux, on était tous...

Jean-Pierre Serre : On ne voulait pas en parler dans Bourbaki.

Pierre Cartier : Non, non mais attention, nous avons tous été formés par Cartan, et les faisceaux, c'étaient, c'étaient...

Alain Connes : Mais quelle était la raison pour laquelle vous ne vouliez pas en parler, justement alors ?

Jean-Pierre Serre : Il aurait fallu faire un livre de topologie algébrique, or, c'était pas la peine, on était en train de la construire, tu ne peux pas faire un Bourbaki sur quelque chose qui est en train de se faire tu vois, c'est pas raisonnable, ça.

Pierre Cartier : C'était la manière de voir.

Jean-Pierre Serre : Non, tu fais un Bourbaki sur des choses qui sont déjà assez bien établies, que tu réarranges.

Alain Connes : D'accord, mais la théorie générale des faisceaux, quand-même, elle était parfaitement bien établie, je veux dire...

Jean-Pierre Serre : Bon, écoute, regarde, l'expérience a montré qu'il aurait fallu prendre des revêtements autres que les revêtements bêtes, il fallait prendre des...

Alain Connes : Oui tu veux dire pour avoir la théorie de Scholze avec les revêtements pro-étales et tout ça, oui, bien sûr.

Pierre Cartier : Plutôt Grothendieck, la topologie étale.

Jean-Pierre Serre : Et puis, on va pas refaire ce qui est bien fait dans la littérature.

Jacques Dixmier : Pour l'architecture, là, j'ai une opinion bien nette, c'est que, d'ailleurs tu l'as dit, c'était réglé quand nous sommes entrés, ça a été fait entre 35 et 40, par les membres fondateurs, ça n'était pas du tout fait en 35 ni en 36, puisqu'ils voulaient écrire un traité d'analyse, mais dans les 2 ou 3 premières années, ils ont compris, enfin, ils ont imaginé autre chose, et d'ailleurs, ça a eu comme résultat que 4 ou 5 participants des premiers congrès ont foutu le camp, parce que c'était pas ça qu'ils voulaient faire, enfin, je sais pas *(s'adressant JPS pour qu'il confirme).*

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, oui, Dieudonné avait ce plan. Alors il y avait une suite, une deuxième partie, comme disait Cartier, mais c'était complètement vague.

Jacques Dixmier : Ca s'est précisé un peu... D'abord, je précise, Dieudonné, quand il parlait de ça, c'était sous-entendu "avec l'approbation de Cartan, Weil et Chevalley", il ne se serait pas permis, Dieudonné, de ... Bon. Deuxièmement, ils ont tout-de-même un peu structuré cette deuxième partie puisque c'était devenu "Structures algébriques, structures fonctionnelles, structures géométriques".

Jean-Pierre Serre : Non, ils n'ont pas fait ça, non.

Jacques Dixmier : Eh bien, j'ai entendu ça une fois. La deuxième partie était divisée en 3.

Jean-Pierre Serre : Non, non.

Jacques Dixmier : Ah ben si, je t'affirme que si.

Jean-Pierre Serre : Non, je t'assure que ça n'a pas continué, non.

Jacques Dixmier : Ca n'a pas été fait, non, ça n'a pas été fait du tout, c'était dans leur esprit.

Jean-Pierre Serre : Dans la deuxième partie, qu'est-ce qu'il y a eu finalement : il y a eu Théorie spectrale...

Pierre Cartier : Algèbre commutative... Théorie spectrale, Algèbre commutative et Groupes de Lie.

Jean-Pierre Serre : Et théorie des variétés dont il n'est resté que le fascicule... Grâce à Dixmier, d'ailleurs.

Alain Connes : Ce qui est terrible, quand on regarde de loin, c'est qu'il y a ce livre qui est très très bien sur la théorie des fonctions d'une variable réelle.

Jean-Pierre Serre : Oh oui, il est magnifique, personne ne le connaît. Les grands O sont splendidement définis.

Alain Connes : Mais par contre il n'y a pas un livre des fonctions d'une variable complexe alors quand-même, ça, c'est...

Pierre Cartier : Oui mais ça, c'est historique, si tu veux.

Alain Connes : C'est triste, ça...

Jean-Pierre Serre : Mais ça, ils pourraient le faire maintenant tu vois.

Pierre Cartier : A l'époque, à la Sorbonne, on ne parlait que de ça. Les cours de calcul infinitésimal dans ma génération, ou un peu avant, les cours, il n'y avait que les fonctions d'une variable complexe.

Jean-Pierre Serre : Oui, mais il n'y avait pas les choses utiles pour la théorie des nombres. Il n'y avait pas les grands O, les estimations, les choses comme ça.

Pierre Cartier : Oui mais alors je veux dire qu'il y avait une lassitude devant ces fonctions d'une variable complexe.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est ça, ils en avaient assez vu, quand-même effectivement.

Jacques Dixmier : Mais je me demande si le livre sur les variétés ne faisait pas partie, dans l'esprit des fondateurs, mais alors là, j'ose pas m'avancer... Mais à mon avis, ça faisait partie des structures fondamentales, vu l'importance qu'ils apportaient aux travaux d'Elie Cartan...

Jean-Pierre Serre : Non, je ne crois pas.

Jacques Dixmier : Ah j'aimerais bien qu'ils soient là pour qu'on leur pose la question.

Jean-Pierre Serre : Mais en tout cas, on peut te remercier parce que c'est grâce à toi que le fascicule de résultats existe.

Alain Connes : Pour les variétés tu veux dire.

Jacques Dixmier : Ah non, alors là.

Jean-Pierre Serre : Et je vais te dire pourquoi...

Jacques Dixmier : Vas-y *(rires d'AC).*

Jean-Pierre Serre : On avait le livre sur les groupes de Lie, qu'on voulait démarrer. Et alors en particulier chapitre 2, chapitre 3. Le chapitre 3, toutes les bases. Et Dixmier a mis son veto, il pouvait mettre un veto, tant qu'il n'y aurait pas un texte sur les variétés. Parce que tu vois, dans le chapitre 3, on utilise tout le temps des théorèmes sur les trucs intégrables, des machins comme ça, les sous-variétés, et tu as mis un veto.

Jacques Dixmier : J'ai oublié.

Jean-Pierre Serre : Et c'est moi qui ai écrit en bonne partie le fascicule de résultats, à toute allure *(se tenant la tête dans les mains)* : je crois qu'il y a eu des jours où j'ai rédigé 10 pages, de ce fascicule de résultats, et c'était horriblement difficile à écrire parce que sans démonstration, pour ne pas dire de bêtise... Ouh ! *(soupirant)*

Alain Connes : C'est pas évident, c'est sûr.

Pierre Cartier : En plus avec les a priori qu'on avait faits qu'il fallait traiter toutes les sortes de variétés en même temps, les dimensions finies, dimensions infinies.

Jean-Pierre Serre : les Banach p-adiques, mais *(détachant les mots)* ON L'A FAIT ! Et tu nous as forcé la main, tu vois, et c'est excellent d'avoir la main forcée, il n'y a rien de plus utile, pour écrire des livres.

Jacques Dixmier : Ca me rappelle, alors, le commentaire de Godement sur le chapitre 3, une fois que Godement, après qu'il ait abandonné Bourbaki.

Alain Connes : Sur les groupes de Lie ?

Jacques Dixmier : Il estime que c'est un monstre *(rires)*.

Jean-Pierre Serre : Il est très très bien, ce livre, il est gros effectivement.

Jacques Dixmier : Il est gros et lourd, mais je vois pas comment on peut faire mieux.

Jean-Pierre Serre : Tu te souviens quand-même que tu as mis un veto, tu t'en souviens ?

Jacques Dixmier : Non, je ne m'en souviens pas.

Jean-Pierre Serre : Sans blague, tu ne t'en souviens pas *(sidéré)*.

Jacques Dixmier : Mais ça ne m'étonne pas de moi *(rires)*. J'oublie des choses...

Jean-Pierre Serre : Ce qui m'étonne de toi, c'est que tu as mis un veto, c'est la seule fois de ta vie, je crois, d'ailleurs, il y a eu très peu de veto dans Bourbaki.

Jacques Dixmier : Je te fais confiance, en fait.

Jean-Pierre Serre : Je ne me souviens pas d'un autre, *(s'adressant à PC)* tu t'en souviens ?

Pierre Cartier : Chevalley, sur l'algèbre 2. Il ne voulait que des espaces vectoriels de dimension finie.

Jean-Pierre Serre : Mais c'était pas un veto, c'était une proposition et puis Weil a sauté en l'air. Il voulait supprimer tous les modules, tu vois, Chevalley. Qu'il n'y avait que les espaces vectoriels qui étaient utiles.

Alain Connes : *(expression du visage estomaquée et soupir)* Ouh !

Pierre Cartier : Et de dimension finie.

Jacques Dixmier : C'est d'autant plus extraordinaire, ce que tu dis, qu'un peu plus tard, quand on a étudié les algèbres séparables, Chevalley nous a vendu un énorme fourbi avec des algèbres séparables de dimension infinie. Et puis, on s'embrouillait là-dedans, à un congrès, "écoute, on pourrait laisser ça de côté...". Chevalley dit "Ah non maintenant c'est trop tard, on l'a lu suffisamment souvent, il faut le garder" *(rires)*. Heureusement, il a pas...

Alain Connes : Il a pas trop insisté.

Jean-Pierre Serre : On ne suivait jamais ce que voulait Chevalley, il avait très mauvais goût pour les rédactions élémentaires, tu vois ; il rédigeait très bien les théorèmes difficiles, mais alors quand il a essayé lui-même de faire des livres élémentaires, son livre sur les produits tensoriels, puissances symétriques, etc.

Jacques Dixmier : C'était imbuvable, mais par contre Theory of Lie groups, c'est un chef-d'œuvre... !

Pierre Cartier : Tous ses livres qui contiennent quelque-chose sont merveilleux.

Jean-Pierre Serre : Ah ben voilà, absolument, tous ceux qui contiennent quelque-chose. Mais l'exposition, c'était affreux.

Pierre Cartier : Mais celui qu'il avait publié aux Etats-Unis, sur les algèbres, relativement élémentaire.

Jacques Dixmier : Et son livre sur les spineurs, il est très agréable aussi !

Jean-Pierre Serre : Oui, sauf son côté systématique, mais il ne voulait pas mélanger différents points de vue et alors.

Jacques Dixmier : Et puis je pense à autre chose, on revient aux fondements, enfin, on ne revient pas, quand on a fini par rédiger les chapitres 1 et 2, de la théorie des ensembles...

Alain Connes : Ca a été fait quand ça ?

Pierre Cartier et Jean-Pierre Serre : En 50 à peu près.

Alain Connes : Ca a été fini quand ?

Jacques Dixmier : Quand je suis rentré moi en 49, j'ai eu entre les mains une rédaction de Dieudonné qui était vraiment pas engageante. Et après ça, il y a eu une rédaction Chevalley...

Jean-Pierre Serre : Et qui était bien ?

Jacques Dixmier : Ah moi, je l'ai trouvée formidable.

Jean-Pierre Serre : Ah bon, d'accord.

Jacques Dixmier : Alors j'ai été chargé de mon boulot habituel, de bien lisser, j'ai fait la rédaction après Chevalley.

Jean-Pierre Serre : Non mais parce qu'il est bien, le livre de théorie des ensembles, pour des tas d'usages.

Jacques Dixmier : Oh eh bien, il a des tas de défauts, encore, mais enfin, en tous cas, Chevalley a fait un très bon travail de rédaction là-dessus, c'était ça que je voulais dire.

Alain Connes : Donc il était capable quand-même...

Pierre Cartier : Chevalley, on disait de lui qu'il entrait dans un tunnel, tout noir, et que la sortie était à 4 km de là, avec une petite lueur.

Jacques Dixmier : Oui ben écoute, hein, le livre d'André Weil sur la théorie des nombres, hein, quand j'ai essayé de le lire, c'est un peu ça...

Jean-Pierre Serre : Ah le Basic Number Theory ?

Alain Connes : Oh le Basic Number Theory, oh, il est superbe, il est lourd, parce qu'il est localement compact, donc... *(rires)*

Jean-Pierre Serre : Non mais il y a des démonstrations complètes.

Jacques Dixmier : Non mais je dis pas, il a sûrement d'énormes qualités, etc, mais... pour un non-expert.

Jean-Pierre Serre : Est-ce qu'il démontre le corps de classes dedans, je crois, oui ?

Alain Connes : Non, mais si tu veux, il pousse à bout un point de vue, bon, qui est le point de vue localement compact des adèles, etc, et il le pousse très bien à bout.

Pierre Cartier : Mais c'est un point-de-vue important quand-même.

Alain Connes : C'est un point-de-vue très important mais bon, il ne le fait pas avec légèreté, ça c'est ce qu'on peut dire.

Jean-Pierre Serre : Bon alors qu'est-ce que tu avais comme questions ?

Alain Connes : Non, on devrait parler maintenant des réunions autour de la table, et du type de discussions qu'il y avait, parce que ça, c'est très important, je pense. Non, ce que je veux dire qui n'est pas évident à comprendre, c'est que bon, finalement donc, il y avait un rédacteur, qui faisait une rédaction, qui y passait du temps, qui essayait de rédiger le mieux possible, et ensuite, cette rédaction était lue.

Jacques Dixmier : Pas toujours.

Alain Connes : Pas toujours ? Il y avait des cas où elle n'était pas lue ?...

Jean-Pierre Serre : 100 pages, 100 pages, on lisait, c'est arrivé...

Alain Connes : 100 pages qui sont lues, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : ...je me rappelle de la rédaction de Dieudonné sur l'intégration, et ils ont lu les 3 premières pages, et ils ont dit, moi, j'ai assisté à ça, et ils ont dit "ah non, ça, c'est pas possible, c'est imbuvable, il faut le faire autrement, Godement, tu feras avec des mesures de Radon. Voilà". Et hop, à la trappe.

Alain Connes : Hop, à la trappe ? *(sifflement)*

Jean-Pierre Serre : Ah oui oui oui.

Jacques Dixmier : Et sauf erreur, ma rédaction du chapitre 1 des variétés, parce que j'y tenais moi aux rédactions détaillées... *(signe de la main que la rédaction est passée aux oubliettes)*. J'étais pas là, j'étais aux Etats-Unis.

Alain Connes : Ah mais c'est normal, t'as pas assisté. Si tu n'étais pas là, qu'est-ce que tu veux...

Jacques Dixmier : Non j'en ai pas souffert, pour moi, la chose importante, c'était que j'avais appris ce que c'était qu'une variété.

Jean-Pierre Serre : Moi aussi, j'ai fait des rédactions Bourbaki même sans espoir qu'elles soient prises, je ne me souviens plus de ce que j'avais rédigé, peu importe, je savais qu'elles ne serait pas prise, mais comme ça, j'avais clarifié pour moi, c'était écrit et puis voilà.

Jacques Dixmier : On ne l'a pas dit ça, tout à l'heure.

Alain Connes : Non, on ne l'a pas dit, on ne l'a pas assez mentionné.

Jean-Pierre Serre : Dire quoi ?

Alain Connes : Dire si tu veux qu'en fait, il y avait un des rôles positifs de Bourbaki qui était de forcer quelqu'un à aller au bout d'un sujet et à l'apprendre vraiment en profondeur, c'est quand-même important ça.

Jean-Pierre Serre : Oui, je voulais dire que pour moi, j'ai appris énormément de choses parce que, pour les rédiger pour Bourbaki, ça m'obligeait à donner des démonstrations complètes.

Alain Connes : Et tant qu'on n'a pas fait ça, je veux dire, on ne peut pas dire qu'on a compris.

Jean-Pierre Serre : Ca c'était parfait : j'ai appris les algèbres de Lie semi-simples, les racines, etc., en le rédigeant.

Alain Connes : J'ai amené ce livre parce que moi, je trouve que c'est un des livres les...

Jean-Pierre Serre : Ah eh bien, oui, c'est le plus célèbre de Bourbaki, au fond, le plus lu.

Alain Connes : On ne peut pas parler de Bourbaki...

Jacques Dixmier : Chapitre 4, 5 et 6, ah oui, c'est celui qui a le plus de succès, personne n'a osé en dire du mal, enfin à ma connaissance jusqu'ici.

Jean-Pierre Serre : En index de citations, je suis sûr que ça doit battre tous les autres.

Alain Connes : Je veux dire, il y a des gens qui ont critiqué Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Et celui-là, je crois qu'on le doit à Cartier en grande partie.

Jacques Dixmier : Je voudrais savoir ce qu'en aurait dit Arnold.

Jean-Pierre Serre : C'est toi qui as insisté, tu as insisté mais on a tous été enthousiaste.

Pierre Cartier : C'est moi qui ai insisté mais tout le monde y a participé.

Jean-Pierre Serre : On a été enthousiaste quand on a vu que ça se... *(faisant le geste de quelque-chose qui se développe bien)*. Et puis, en quelque sorte, les sous-produits sont très intéressants, les invariants de ces groupes, les choses comme ça.

Jean-Pierre Serre : Moi j'ai appris comme ça les groupes de Coxeter hyperboliques, par exemple, en écrivant des exercices pour Bourbaki. Et ils sont très amusants, les Coxeter hyperboliques.

Alain Connes : Là, il y a un va-et-vient manifeste entre l'intérêt personnel et le rôle dans Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Bourbaki est vraiment extrêmement utile pour ses rédacteurs, encore peut-être plus que pour ses lecteurs, tu vois.

Alain Connes : Mais oui, mais c'est un peu ce que j'avais en tête quand je parlais du va-et-vient entre l'activité de recherche...

Jean-Pierre Serre : Moi aussi, je crois que j'en ai bénéficié en bonne partie comme ça, en rédigeant.

Alain Connes : En rédigeant et en allant au fond des choses exactement.

Pierre Cartier : Vidons un compte ancien. Toi *(désignant Jacques Dixmier)*, tu avais rédigé l'algèbre commutative jusqu'au chapitre 5 ou 6.

Jacques Dixmier : Enfin, c'était déjà presque fini.

Pierre Cartier : Dans un plan déterminé. Puis Serre est arrivé et a tout rebouleversé, en introduisant la platitude.

Jean-Pierre Serre : Non, toi tu as rédigé après la platitude.

Jacques Dixmier : Enfin, tu as fait changer complètement le début en mettant les modules plats.

Jean-Pierre Serre : Oui mais toi, tu as dû...

Jacques Dixmier : J'étais pas capable de faire ça, moi.

Jean-Pierre Serre : Oui mais toi, tu as dû rédiger des spécialisations, des trucs comme ça, qui ont disparu.

Pierre Cartier : C'est ça, les spécialisations, c'est ça.

Jacques Dixmier : Quoi ?

Jean-Pierre Serre : Les spécialisations.

Jacques Dixmier : Non.

Jean-Pierre Serre : Non ? Parce que Weil...

Jacques Dixmier : Non, j'ai rédigé les valuations, qui ont été fort menacées à un moment donné par Grothendieck, mais elles sont restées.

Pierre Cartier : Mais enfin, le point de vue qu'on t'avait suggéré d'ailleurs pour rédiger, il a été, quand Serre est intervenu, il a été complètement bouleversé, ce point-de-vue-là sur l'algèbre générale.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, effectivement, j'ai eu une influence à ce moment-là...

PIERRE CARTIER : Tu parles, tu parles !

JEAN-PIERRE SERRE : Sur l'algèbre commutative tu vois, eh bien parce que je voyais bien ce qui servait.

PIERRE CARTIER : C'est toi qui as introduit la platitude quand-même, enfin qui as insisté pour la platitude.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui et puis d'autres choses du même genre.

ALAIN CONNES : Alors là, il y a une question, et on vient à des questions un peu plus délicates, si tu veux, pourquoi est-ce que dans le chapitre d'algèbre, pas d'algèbre commutative, sur l'algèbre homologique, pourquoi est-ce que ça a été fait non pas dans le cadre des catégories abéliennes mais dans le cadre des modules ?

JEAN-PIERRE SERRE : Parce qu'il n'y avait pas le langage des catégories, tout simplement.

ALAIN CONNES : Mais on ne pouvait pas le rajouter un petit peu là ?

JEAN-PIERRE SERRE : Les catégories, tu peux pas rajouter *"un petit peu"*, non, non, non ! *(riant)*

ALAIN CONNES : Il ne pouvait pas y avoir un fascicule de résultats sur les catégories, quand-même, oh écoute...

JACQUES DIXMIER : Ca aurait peut-être été une solution, oui. Mais je ne crois pas qu'on y ait songé.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais non, mais alors, est-ce que c'est un ensemble ou un fourbi ?...

Alain Connes : Ouaih, bon...

Jacques Dixmier : C'est ça la question.

Jean-Pierre Serre : Quand tu discutes, tu peux dire "oh, ouaih, etc.", mais tu ne peux pas dire "ouaih" par écrit ! !

Alain Connes : Mais je suis d'accord.

Jacques Dixmier : Il y a deux questions : d'une part, parler des catégories, c'est une chose, et deuxièmement, la question du fondement de cette théorie, ce sont deux problèmes disjoints, tous les deux très emmerdants, mais...

Jean-Pierre Serre : Mais pas disjoints quand-même, tu ne peux pas en parler si tu ne sais pas ce que c'est quand-même.

Jacques Dixmier : Si, si, très bien, très facilement !

Jean-Pierre Serre : Tu peux en parler, mais l'écrire, non, quand-même, non, pas dans Bourbaki.

Pierre Cartier : Pas dans le style Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Tu ne peux pas dire "soit $\mathcal{C}$ une catégorie" sans dire ce que c'est qu'une catégorie, ça, c'est pas...

Jacques Dixmier : En tous cas, dans le livre de Topologie algébrique dont nous sommes en train de médire abondamment *(rire d'AC)*, il y a quelques numéros sur les catégories...

Pierre Cartier : Les *petites* catégories, les *petites* catégories.

Alain Connes : Oui, des petites catégories, c'est sûr que ce sont des petites catégories ?

Pierre Cartier : C'est ça le problème. Les petites catégories, ça ne pose aucun problème. Les grosses catégories...

Alain Connes : C'est vrai que le livre de Demazure et Gabriel sur les groupes algébriques est canulé dès le début par cette discussion, hein, les univers, etc..., et ils sont obligés de discuter tout ça...

Pierre Cartier : Non mais Dixmier, tout le monde sait que parler de l'ensemble de tous les ensembles, c'est un non-sens complet, tout le monde sait ça, bon.

Jacques Dixmier : Oui, mais on sait aussi qu'à condition de ne pas s'orienter dans une certaine direction *(faisant le geste de prendre un chemin de traverse)*, on ne tombera pas sur des pépins.

Jean-Pierre Serre : Non mais ça, c'est du laïus, ça, tu ne peux pas le mettre par écrit ce laïus-là. Non par contre, ce qu'on peut faire, et Bourbaki le fait, et moi aussi, je l'ai fait souvent, ça, c'est de dire "le foncteur machin" pour dire juste "la construction que je viens de fabriquer"... a telles propriétés, ça, ça a un sens, on se permet ça.

Pierre Cartier : Bourbaki se permet ça.

Jean-Pierre Serre : On se permet ça, foncteur étant fonction simplement, ou construction plutôt.

Alain Connes : Mais je veux dire tu ne peux pas parler, tu ne parles pas d'une catégorie, tu ne nommes jamais une catégorie. La catégorie, je sais pas moi, des ensembles finis pointés par exemple.

Jean-Pierre Serre : Mais je ne sais pas où ils sont, dans quoi...

Alain Connes : Eh bien, tu en prends un squelette, qui est l'ensemble $\{0, ..., n\}$ avec le point T_0.

Jean-Pierre Serre : *(riant avec AC)* Bon, écoute, c'est pas l'endroit... de faire ça, on va pas faire un congrès Bourbaki et s'engueuler sur les catégories parce qu'on s'engueulera forcément, tu vois.

Alain Connes : Oui, sauf que je pense, si tu veux, que ça serait bien, parce que ça montrerait le genre de discussions, qui se produisaient autour de la table...

Jean-Pierre Serre : Oh ben déjà, ça a commencé, nous sommes déjà en train de le faire, tu vois *(s'esclaffant tous, heureux)*, ce mauvais exemple que nous donnons, là, mais qui n'est pas un si mauvais exemple, d'ailleurs.

Alain Connes : Ben non, ça n'est pas un si mauvais exemple.

Jean-Pierre Serre : Non on ne pouvait pas s'en sortir. Il aurait fallu tout refaire, tu vois, tous les fondements.

Pierre Cartier : Il y avait deux raisons : premièrement, il fallait tout reconstruire, et deuxièmement, les fondements étaient pas solides.

Jean-Pierre Serre : Alors en plus, oui. Tu sais qu'il y a des topologies de Grothendieck dont même Deligne n'ose pas se servir...

Alain Connes : Parce que justement, ce ne sont pas des ensembles.

Jean-Pierre Serre : Les topologies plates, par exemple, parce que tu ne peux pas majorer, tu vois, un truc plat *(se tournant vers PC)*, tandis qu'un truc étale, quand tu as un fourbi, tu le majores, tu as des modèles.

Pierre Cartier : *(acquiesçant)* Oui, c'est facile.

Jean-Pierre Serre : Mais plates, tu ne sais jamais si par hasard, en changeant d'univers, tu vois, ça pourrait changer la cohomologie, c'est idiot quoi, il faut pas...

Alain Connes : Non ça c'est vrai qu'on est un peu dans l'inconnu, mais.

Pierre Cartier : Il y a Gabriel et Demazure qui s'étaient astreints à ce genre de vérification, pfffou ! *(deux expirations pour montrer la difficulté)*

Alain Connes : Mais c'est ce que j'ai dit tout à l'heure. Et leur bouquin sur les groupes algébriques justement, il commence par ça, donc on se dit "bon ben on arrête de lire".

Jean-Pierre Serre : Ils ont...

Alain Connes : Ils ont exagéré, bon.

Jean-Pierre Serre : Ils ont exagéré pour la typographie aussi, ils ont rendu leur livre impossible à cause de ça *(nouvelle critique de PC en riant, JPS le coupant)* On va pas critiquer, on a suffisamment à faire pour nous critiquer nous.

Alain Connes : Tout à fait.

Pierre Cartier : Non mais tu parles de la typographie.

Jean-Pierre Serre : La typographie de Gabriel et machin, tu vois, ils ont inventé un système compliqué de lettres gothiques, italiques, etc.

Alain Connes : Que tu ne peux même pas lire.

Jean-Pierre Serre : Tu n'as pas remarqué ça ?

Pierre Cartier : Si, si, si.

Alain Connes : Tu ne peux même pas lire les lettres qui sont écrites.

Jacques Dixmier : Dans les premiers Bourbaki, il y avait des lettres gothiques majuscules que les gens ne savaient pas lire, c'est Bourbaki qui a...

Jean-Pierre Serre : Non, non, mais tu n'as pas regardé le Gabriel. C'est pas pareil, non.

Alain Connes : Bon alors maintenant, un sujet un peu plus léger, mais quand-même je pense que je voudrais absolument l'entendre, c'est qu'il y a eu... Chacun d'entre vous a, je pense, des anecdotes, qui se sont produites à Bourbaki. Moi, je n'en connais qu'une mais... En fait, Jacques m'en a raconté une autre mais je n'ose pas la raconter. Mais du genre qu'un jour, sachant très bien que Dieudonné devenait furieux quand, bon,...

Jean-Pierre Serre : Oui, oh bon, celle-là est connue... La démission de

Dieudonné par Godement, c'est ça.

ALAIN CONNES : Non mais attends *(désignant PC du doigt)*, et la rédaction déchirée de Dieudonné. Ca, c'est Cartier qui me l'a racontée.

JEAN-PIERRE SERRE : Déchirée ?

PIERRE CARTIER : Je ne sais plus, il y avait une discussion...

JEAN-PIERRE SERRE : Mais il avait un double quand-même *(on entend les rires d'AC)*.

PIERRE CARTIER : Ca devait être sur les ensembles, alors bon, on n'était pas d'accord.

JEAN-PIERRE SERRE : Il n'y avait pas beaucoup de doubles à l'époque.

PIERRE CARTIER : On n'était pas d'accord et il y a eu une discussion un peu compliquée un soir. Alors Dieudonné, furieux, attrape le manuscrit, qui était tout fini, annoté, pour l'envoyer à l'impression, le déchire *(PC fait le geste de déchirer un livre en 2)*, et puis alors il avait un poing qui permettait de le déchirer en deux, et laisse tout tomber. Alors Cartan et Eilenberg se précipitent avec du scotch pour essayer de recoller les morceaux. Et le lendemain matin, Dieudonné qui s'était calmé, descend tranquillement au petit-déjeuner en apportant une autre copie *(rires)*, qu'il avait reconstituée pendant la nuit, ou qu'il avait faite d'avance, je sais plus.

JACQUES DIXMIER : C'était un petit bout de la théorie des ensembles. C'était peut-être sur les *lemmes de Serre...(tendant la perche aux autres, qui rient)*.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, alors ça, toi, tu connais pas. Alors, il y a eu une époque où, il y avait dans Bourbaki, des *théorèmes de Weil* : les théorèmes de Weil, alors, qui étaient choisis pour être particulièrement évidents, tu vois, c'était ça qui était rigolo. *(Tous se marrent)*. Que si $f \circ g = 1$ et $g \circ f = 1$ alors f et g sont des bijections tu vois. Et alors ça, on rigolait, c'est commode tu vois, en ce moment, quand on veut montrer que le machin est bijectif, on fabrique son inverse. C'est beaucoup plus propre d'abord, comme truc. Et le *lemme de Serre*, c'était quelque-chose comme ceci, alors attention, qu'est-ce que c'est que le lemme de Serre : on a $a \to b$[¶] et $b \to c$ alors si $a \to c$ est injectif alors...

Alain Connes : $a \to b$ est aussi injectif.

Jacques Dixmier : C'est une partie des lemmes de Serre.

Jean-Pierre Serre : ... alors $a \to b$ est aussi injectif. C'est une partie, oui. Alors moi, tu vois, j'en avais besoin dans la C-théorie, quand tu négliges une classe de groupes, j'avais besoin de savoir si c'était vrai aussi dans cette théorie, c'est légèrement moins évident, tu vois. Mais alors pour se moquer de moi, ils appelaient ça les lemmes de Serre.

Alain Connes : Ah, d'accord, très bien *(rires)*.

Jacques Dixmier : Ca servait à démontrer le théorème de Weil *(tous s'esclaffent)*.

Jean-Pierre Serre : Exactement, les théorèmes de Weil sont des corollaires des lemmes de Serre, je sais plus comment, mais sûrement.

Jacques Dixmier : Mais Weil le prenait très bien.

Jean-Pierre Serre : Mais moi aussi, enfin ce sont des lemmes, ils sont vrais, quoi. Comme anecdote, c'est pas vraiment une anecdote mais c'est une expression de Bourbaki que j'aimais beaucoup et qui vaut la peine d'être gardée pour la postérité, c'est, on disait toujours sur les rédactions "oui, et puis il faudra faire attention à remplacer les théorèmes faux par d'autres."

Alain Connes : ssss ! Ouaih !

Jean-Pierre Serre : Avec l'ambiguité qui se...

Alain Connes : Alors attends, j'ai une question, qui revient un peu à la question des discussions autour des tables, etc. C'est-à-dire que si tu veux

¶. prononcer $\to$ "flèche".

d'habitude quand on réfléchit seul effectivement, on a de temps en temps *(geste d'un index qui tourne près de la tempe)* le rappel du cerveau qui dit "ça, ça peut être faux" un truc comme ça, et on a le temps. C'est-à-dire que ça peut venir, peut-être, une heure après, ou un truc comme ça. Alors comment ça se passait, lorsqu'il y avait les discussions autour de la table, c'est-à-dire est-ce que les discussions allaient suffisamment lentement, est-ce que les gens sortaient, partaient pour aller réfléchir.

Jacques Dixmier : Très souvent.

Jean-Pierre Serre : Mais en même temps, elles n'allaient pas lentement les discussions, elles étaient rapides. Elles étaient comme nous parlons là.

Alain Connes : Oui mais ça, ça laisse pas vraiment le temps de réfléchir, donc euh...

Jean-Pierre Serre : Ca excite un petit peu et après tu peux, après tu as le temps.

Jacques Dixmier : Ah eh bien, je vais te donner un exemple de discussion ultra-rapide : Schwartz, tout seul, disant "Oui oui oui, non non non, y a pas de doute !" *(rires).*

Jean-Pierre Serre : Oui, ça, c'est dans Bourbaki, on lui avait posé une question et il a répondu ça "Oui oui oui, non non non, y a pas de doute !" *(riant).*

Jacques Dixmier : C'est un cas extrême.

Jean-Pierre Serre : Joli cas de réflexion rapide, tu vois. Mais peut-être que tu pourrais dire un mot sur cette tradition de lire des textes à haute voix, parce que dans Bourbaki, il y avait cette règle que quand on nous apportait une rédaction, on n'était pas censé l'avoir lue avant.

Alain Connes : Bien sûr. Donc quelqu'un la lisait.

Jean-Pierre Serre : Quelqu'un l'avait écrite, on la lisait pas : et en congrès, l'un de nous la lisait à haute voix.

Alain Connes : L'un de nous, c'était pas une personne différente...

Jean-Pierre Serre et Pierre Cartier : Ca pouvait tourner. Ca ne tournait pas beaucoup, je lisais assez souvent. Il y a des gens qui n'aiment pas lire à haute voix, moi, ça ne me gênait pas.

Jacques Dixmier : Il y avait des bons lecteurs et des mauvais lecteurs, par exemple, je me souviens, à mon premier congrès, on m'a chargé de lire, et immédiatement, quelqu'un a dit "c'est un mauvais lecteur", j'ai pas dû en lire beaucoup.

Pierre Cartier : Tu écrivais suffisamment.

Jean-Pierre Serre : C'était vraiment important, tu vois, parce que sinon, la méthode traditionnelle, les gens envoient des textes, tu es censé les lire chez toi, et puis tu reviens, et en discussion, tu dis "oh oui, j'ai trouvé telle erreur". Non, ça, c'est de la blague, pour des maths, ça ne va pas du tout.

Pierre Cartier : Il faut passer partout.

Jean-Pierre Serre : Tandis que là, à haute voix. Et j'ai fait quelques fois avec des gens qui écrivaient un cours pour moi, je leur ai dit "on va vérifier, on va faire votre cours, vous venez chez moi, et on va le lire à haute voix", ils en étaient baba bien sûr, ça prend le temps que ça prend, ça prend des heures.

Alain Connes : Bien sûr, il faut du temps.

Jean-Pierre Serre : Chaque phrase y passe et là.

Pierre Cartier : Il y a le filtre, il y a le filtre.

Jean-Pierre Serre : On voit instantanément que ça ne va pas.

Alain Connes : D'accord mais la question c'est est-ce qu'on ne lit pas trop vite pour que les gens puissent réfléchir.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, on lisait raisonnablement.

JACQUES DIXMIER : Et puis j'ai un ajout à faire à ce qu'il a dit que quand-même, c'était pas du tout interdit d'avoir lu la rédaction à l'avance, c'était rare qu'on le fasse parce qu'on n'avait pas le temps, on avait trop de boulot, mais non seulement, c'était pas interdit, mais je crois même que c'était encouragé, on savait que c'était très peu fait mais enfin, ah ben écoute

JEAN-PIERRE SERRE : C'était très peu fait, c'était pas ça l'essentiel. L'essentiel, c'était la lecture à haute voix.

JACQUES DIXMIER : Je me souviens d'une lecture à haute voix, d'une rédaction. Je vais peut-être mélanger les noms, mettons une rédaction de Chevalley sur des algèbres de Lie, non, une rédaction de Godement, et Chevalley l'a lue avant qu'on la discute en congrès, il a envoyé un commentaire comme quoi cette rédaction était pisseuse et éculée.

ALAIN CONNES : *(sifflant)* Ouh la la !

JEAN-PIERRE SERRE : C'est ça : ce ramassis des méthodes les plus pisseuses et éculées. C'était ça le style.

ALAIN CONNES : C'est dur !

JACQUES DIXMIER : Ben dur, non ! C'est un peu le style des discussions Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Et on ne se fâchait pas !

JACQUES DIXMIER : C'était peut-être un peu limite mais pas tellement...

ALAIN CONNES : Tu m'avais raconté, Jacques, je ne sais pas si mes souvenirs sont exacts.

JACQUES DIXMIER : Ce qu'il y a, c'est que Godement avait pas très bon caractère.

Jean-Pierre Serre : Mais il l'avait quand-même pas trop mal pris.

Pierre Cartier : Il était provocateur disons.

Jean-Pierre Serre : Non mais c'était Chevalley qui avait dit ça, c'était pas Godement. Non mais sa rédaction n'était pas spécialement mauvaise, je ne me souviens pas d'un... Mais il avait pris des méthodes standard et ça, Chevalley en effet avait de meilleures choses et nous, on les a améliorées.

Jacques Dixmier : C'était sur les premières rédactions des algèbres de Lie, peut-être même “la” première.

Alain Connes : Ah, sur les algèbres enveloppantes, et tout ça.

Jacques Dixmier : Non, pas sur les algèbres enveloppantes...

Pierre Cartier : Les répliques, Chevalley était fanatique des répliques.

Jean-Pierre Serre : Oh, c'est pas mal, les répliques, mais enfin ça avait un sens, d'enveloppe algébrique.

Jacques Dixmier : Non, mais c'est pour dire que parfois, les rédactions étaient lues avant qu'on n'arrive au congrès.

Jean-Pierre Serre : Oui quand-même bien sûr, mais quand-même, le vrai travail, c'était au moment de la lecture.

Jacques Dixmier : Oui, c'était beaucoup plus fréquent, effectivement, on les découvrait, les rédactions, aux congrès.

Jean-Pierre Serre : La vraie critique. Le vrai travail, c'était sans doute après, le rédacteur suivant qui lui, alors, avait le droit aussi de ne pas respecter.

Jacques Dixmier : Alors là, je dirais à 50 % parce qu'il y avait eu les critiques pendant le congrès et puis, comme tu dis, après ça, le type qui rédigeait, il avait son boulot.

Jean-Pierre Serre : Il décidait, il décidait, parce que s'il trouvait que c'était idiot.

Jacques Dixmier : S'il trouvait que les critiques étaient idiotes, qu'il ne fallait pas en tenir compte, ça, ça arrivait souvent effectivement.

Alain Connes : Alors il y a une autre question qui est un peu reliée à ça, c'est que pendant une longue période qui est au moins jusqu'au départ à la retraite de Dieudonné, Dieudonné était là, donc il faisait le travail final de...

Jean-Pierre Serre : Oui, il faisait tout le travail final pour l'éditeur.

Alain Connes : Que s'est-il passé lorsqu'il est parti à la retraite, justement ?

Jacques Dixmier : Je ne m'en souviens pas là, qui a fait les dernières rédactions et les a envoyées à l'imprimeur.

Jean-Pierre Serre : *(s'adressant à JD)* Toi, tu as dû en faire toi.

Jacques Dixmier : Mais je ne m'en souviens pas.

Pierre Cartier : Non, c'était partagé, il n'y a pas eu de remplaçant.

Jean-Pierre Serre : Moi je n'en ai pas fait, je n'ai jamais donné une rédaction à l'imprimeur, il y a toujours eu quelqu'un intermédiaire, pour moi.

Pierre Cartier : Moi je ne pense pas que j'en aie donné non plus.

Jean-Pierre Serre : Par exemple, avec Bruhat, on a complètement terminé dans ce livre-là *(désignant le livre amené par AC dont il a été question précédemment et s'adressant à PC)*, il y avait des petits bouts tu vois, on les a écrits...

Jacques Dixmier : Je me demande écoute, est-ce que par hasard, on n'écrivait pas à Dieudonné en lui disant "voilà, le boulot est fini...", non mais je rigole pas, il était très dévoué Dieudonné, il aurait été prêt à faire...

Jean-Pierre Serre : Peut-être que c'était simplement la secrétaire de Bourbaki qui le donnait à l'imprimeur, tu vois, peut-être qu'on lui préparait le travail...

Jacques Dixmier : J'arrive pas à me rappeler, c'est dommage parce que... c'est pas très important, mais quand-même.

Alain Connes : Ah quand-même, oui, on aimerait savoir, effectivement oui.

Jacques Dixmier : Je ne peux pas te répondre.

Jean-Pierre Serre : Je pense que c'est elle qui avait un rapport avec l'éditeur parce que je vois pas l'un de nous aller chez Hermann.

Jacques Dixmier : Ah moi, je suis allé assez souvent chez Hermann.

Jean-Pierre Serre : Ah tu y es allé ?

Jacques Dixmier : Oui, c'était par exemple pour le... J'sais plus pourquoi j'y allais, j'avais fait la connaissance des, c'étaient deux vendeurs, qui étaient des braves types, là, c'était même pas Berès que je voyais... Bon, ben non, on ne sait pas répondre.

Alain Connes : Effectivement, il y a une autre question qui s'est posée, c'est, tu veux, lorsque les gens devaient partir à la retraite, en fait, j'ai un exemple particulier puisqu'on en avait parlé avec Jacques. Je veux dire, cette règle qui avait été posée à l'avance, il y a eu forcément des cas, où les gens n'étaient pas très très heureux, je pense à André Weil, de partir à la date donnée, ils étaient obligés.

Pierre Cartier : C'est quand-même lui qui a rappelé la règle. En 54. En 54 ou 55, je me souviens qu'on a lu une lettre, le jour de l'anniversaire de Dieudonné, qui était le 4 juillet, le jour de la fête nationale américaine, on fêtait ça, bon, on avait arrosé ça, et à la fin, Cartan a sorti une lettre de Weil. A la fin du pot.

Jean-Pierre Serre : Comme cadeau d'anniversaire, c'était bien choisi.

Alain Connes : Oui, c'est sympa, oui.

Jean-Pierre Serre : Ca c'est Bourbaki !

Alain Connes : Weil était là ?

Pierre Cartier : Non, il n'était pas là. J'ai reçu une lettre de Weil et à cette occasion, bla bla bla, je vais vous la lire. Et c'est là, Weil mettait les pieds dans le plat "on s'était promis de partir à 50 ans...".

Jacques Dixmier : On s'était promis, donc la règle existait déjà avant.

Jean-Pierre Serre : Oui je pense qu'elle existait avant. Ils avaient dû dire ça avant, les membres fondateurs.

Pierre Cartier : On s'était promis, bon... Et il y avait plutôt de la réserve, effectivement.

Jean-Pierre Serre : Bon alors voyons, vous deux, vous êtes partis à 50 ans, tous les deux ?

Pierre Cartier : Non.

Jean-Pierre Serre : Toi, à quel âge ?

Pierre Cartier : Un peu plus tard.

Jean-Pierre Serre : Ah bon, à combien ?

Pierre Cartier : 53 ou quelque-chose comme ça.

Jean-Pierre Serre : Ouh la la, et pourquoi tu as fait ça, c'est pas bien, ça ?! Bon alors heureusement, j'ai compensé, parce que moi, je suis parti 2 ou 3 ans avant.

Pierre Cartier : Borel et toi, vous êtes partis avant.

Jean-Pierre Serre : Non, Borel est parti à 50 ans, il serait volontiers resté, tandis que moi, j'en avais un petit peu assez, j'étais rentré à 21 ans ou 22, tu vois, à 50 ça faisait beaucoup, et donc je suis parti. De même que j'ai quitté le Collège 2 ou 3 ans avant. J'aime bien partir avant.

Jacques Dixmier : Il faut dire et c'est quand-même lié à ta question que Bourbaki a pris immédiatement l'habitude d'inviter les gens retraités à un congrès de temps en temps. Et moi, j'ai été invité deux fois à des congrès ultérieurs.

Jean-Pierre Serre : Moi, je crois que je n'ai pas été invité, j'ai été puni parce que j'étais parti avant.

Pierre Cartier : Oui moi aussi, j'ai été invité.

Jacques Dixmier : Tu as jamais été invité, ça m'étonne.

Alain Connes : Mais Jacques m'a raconté l'histoire, comme quoi, quand Weil avait été invité, quelques années plus tard, à un moment-donné, il y avait eu la réunion dans laquelle on assignait les rédactions pour la fois suivante, et apparemment, tu étais intervenu avec Borel, pour lui dire qu'il ne pouvait pas assister à cette réunion. C'est correct ?

Jean-Pierre Serre : Engagements du congrès, ça s'appelait, les engagements du congrès, et en effet, on était un peu sans pitié, tu vois. La notion de pitié était pas dans Bourbaki.

Jacques Dixmier : Euh alors là, je me souviens assez bien de cette scène, personne n'a fait... J'en ai parlé après coup avec Koszul et on avait exactement le même point-de-vue, c'est-à-dire que nous, on aurait bien accepté Weil, on ne pensait pas que ça aurait biaisé la discussion mais que s'il y avait des membres de Bourbaki, par exemple Borel et Serre qui ne voulaient pas, alors ça imposait le refus... Mais que c'était pas très humain si tu veux.

Jean-Pierre Serre : Non, tu vois, sur l'algèbre commutative, il avait un point de vue très différent. Et oui, c'est ça...

Alain Connes : Ah oui, sur l'algèbre commutative, il avait un point de vue très différent.

Jacques Dixmier : Oui, mais il s'agissait d'une discussion où on faisait les projets d'avenir, on distribuait les rédactions, si Weil se mettait à intervenir, on pouvait lui couper la parole, là, d'accord... Mais lui interdire d'assister à la réunion, là, c'est plus dur, quand-même.

Jean-Pierre Serre : Moi, je pense que c'est plutôt le contraire, tu vois...

Alain Connes : Je suis d'accord avec Serre.

Jean-Pierre Serre : Lui couper la parole, c'est vraiment pas possible.

Alain Connes : C'est vraiment impoli.

Jean-Pierre Serre : A partir du moment où tu viens à une discussion, tu es sur un pied d'égalité avec les autres.

Alain Connes : Je me souviens vaguement d'une histoire que tu m'avais racontée un jour, qui était que Weil était parti un jour en disant "ça sent le Chevalley, je m'en vais".

Jean-Pierre Serre : En disant quoi ?

Alain Connes : Il a dit ça ?

Jacques Dixmier : Ca sent le Chevalley. Si, si, il l'a dit, je revois la scène.

Jean-Pierre Serre : En quel sens il le disait ?

Jacques Dixmier : Oh ben, il était furieux du tour des discussions. Chevalley l'énervait particulièrement et il est parti en étant un petit peu injurieux pour Chevalley, quoi, voilà.

Alain Connes : Ca, c'est quand-même un trait de Bourbaki qui est que...

Pierre Cartier : C'était la première génération, quand-même, plus que les suivantes.

Jean-Pierre Serre : Tu veux dire qu'on était plus polis les uns avec les autres. Non, avec Borel, écoute : "Borel, tu déconnes, quand-même,...".

Pierre Cartier : Oui, mais bon, ça c'était pas grave !

Jacques Dixmier : C'est vrai que c'est pas la même chose que ça sent le Chevalley.

Jean-Pierre Serre : Dans d'autres réunions, tu vois, même ça.

Pierre Cartier : Weil pouvait être vraiment mordant, très mordant, plus que chacun de nous.

Alain Connes : Mais si tu veux, sinon, je pense que la liberté justement d'engueuler les gens, dans les discussions mathématiques, je pense, ça, c'est quelque chose qui allait de pair avec la fraternité qui était installée.

Pierre Cartier : En principe, il n'y avait pas de...

Alain Connes : D'animosité ?

Pierre Cartier : Non, il n'y avait pas de hiérarchie...

Jean-Pierre Serre : L'Ecole Normale y est sans doute pour beaucoup. Parce qu'on s'est amusé une fois à deviner ce que serait un congrès Bourbaki fait par des japonais tu vois. A ce moment-là, ils auraient tous fait ça, simplement *(faisant un salut en s'inclinant à la japonaise)* et le lendemain, on aurait trouvé l'un d'eux qui se serait fait harakiri et là, on aurait compris que la rédaction n'était pas bonne *(éclats de rires)*. Et c'est pour ça qu'il n'y a pas eu de Bourbaki japonais.

Pierre Cartier : Il y avait l'esprit normalien, c'est certain.

Alain Connes : Et c'est vrai qu'il y avait une atmosphère directe, bon.

Jacques Dixmier : Bon alors, il y a la phrase "il n'y avait pas de hiérarchie" ; alors c'est vrai et c'est faux. C'est vrai qu'on pouvait..., que j'avais aucun scrupule à lancer des vannes à Dieudonné qui était à l'Académie, etc.

Jean-Pierre Serre : Plutôt l'Académie, tout le monde s'en foutait alors. L'Académie, c'était plutôt négatif, si tu veux, comme qualité.

Jacques Dixmier : Mais la hiérarchie, elle existait, il est vrai que là, j'ai pas demandé aux autres. C'est un peu si tu veux comme dans une meute, il y en a qui baissent les oreilles, devant le chef de meute.

Jean-Pierre Serre : Weil était le fondateur, quand-même. C'était clair, c'était lui...

Alain Connes : C'était le fondateur, mais quand il y avait une discussion de maths...

Jacques Dixmier : Je ne peux pas dire que j'aie discuté de maths fondamentales avec Weil, quoi, voilà... Eh ben, j'avais peut-être tort. En tout cas, je pense que j'avais raison. Et c'est ça la situation en ce qui me concerne. Mais là j'exagère peut-être en disant qu'il y avait une hiérarchie.

Jean-Pierre Serre : C'est pas une hiérarchie, mais il y avait des gens plus influents que d'autres.

Pierre Cartier : Primus inter pares comme on dit en latin.

Jean-Pierre Serre : C'est normal ça.

Pierre Cartier : Une relation d'ordre.

Jacques Dixmier : C'est mieux une relation d'ordre, parce que ça n'est pas forcément un ordre total.

Alain Connes : Oui vas-y Serre, dis.

Jean-Pierre Serre : Si tu veux Delsarte, par exemple, quand il assistait aux discussions, au début, il a été vite à la retraite, mais, il disait rien, tu vois.

Alain Connes : Il n'intervenait pas.

Jean-Pierre Serre : Sa spécialité, c'était la théorie analytique des nombres, et on n'en faisait absolument pas, on n'en faisait même rien qui soit utile, on aurait pu mais...

Jacques Dixmier : J'ai entendu dire qu'il avait écrit la fin du livre 4.

Alain Connes : De topologie ?

Jacques Dixmier : F.V.R.

Alain Connes : Ah, fonctions d'une variable réelle.

Pierre Cartier : Ca c'était dans son style.

Jean-Pierre Serre : Oui mais ça c'était avant que je n'entre dans Bourbaki, tu vois, je l'ai connu, il ne disait jamais un mot. Et puis, nous avons eu Pisot et Roger qui étaient perdus, également. Ils étaient tout simplement pas à leur place.

Jacques Dixmier : Oui Bourbaki les a mis à la porte.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, et puis ça a été délicat.

Alain Connes : Ah bon, en plus ?!

Jean-Pierre Serre : Ah eh bien oui, tu sais mettre à la porte, c'est pas... Là, on a quand-même essayé que ce soit fait proprement mais je ne sais pas comment les membres fondateurs ont fait.

Pierre Cartier : En tout cas, dans les archives, il n'y a aucune trace.

Jacques Dixmier : Sauf que leur nom n'apparaît plus.

Pierre Cartier : Oui, ils apparaissent jusqu'à une certaine date, et après ils n'apparaissent plus mais il n'y a aucune trace de leur exclusion.

Jean-Pierre Serre : Non mais remarque, il n'y a pas de trace non plus du fait que Leray était aux discussions au début, et qu'il n'y a pas été ensuite.

Jacques Dixmier : Eh bien, on a bien fait de ne pas mettre ça dans La Tribu.

Jean-Pierre Serre : Mais je sais qu'on a eu des discussions entre nous pour savoir comment on arriverait à s'en débarasser.

Jacques Dixmier : Je n'y étais pas moi à ce moment-là, j'ai dû venir un peu après.

Alain Connes : Mais comment vous l'avez fait ?

Jean-Pierre Serre : Je ne m'en rappelle plus, je crois qu'on a inventé un système où ils n'étaient pas obligés de venir et ils ont compris.

Jacques Dixmier : Chaboty a été viré lui aussi.

Jean-Pierre Serre : C'est vrai qu'il a été membre de Bourbaki lui-aussi.

Jacques Dixmier : Et Ehresmann, c'est lui qui est parti.

Jacques Dixmier : Ce qui fait qu'à une certaine époque, je pense que Bourbaki s'est retrouvé devant un boulot énorme et à mon avis, c'est pour ça qu'ils se sont mis à recruter à tout va. N'importe qui pouvait venir à Bourbaki *(rires)* Enfin mais dans ton cas, comme tu dis...

Jean-Pierre Serre : Non, moi j'ai forcé la porte, non moi, c'est pas pareil.

Jacques Dixmier : Mais tu es un cas unique.

Jean-Pierre Serre : Je crois, oui oui oui. Comment ça s'appelle chez les américains, quand il y a une party, tu sais, les gens qui entendent dans un immeuble qu'il y a une party et qui vont à la porte et se glissent dedans, comment ça s'appelle "to crash", en tous cas, moi, j'ai crashé Bourbaki.

Pierre Cartier : Je ne connais pas l'expression argotique.

Jean-Pierre Serre : Alors est-ce que tu as encore des choses dans ta tirelire, là ?

Alain Connes : Pas vraiment non, pas vraiment. Je pense que sinon, après, ce sont des généralités sur Bourbaki, et bon...

Jean-Pierre Serre : On pourrait peut-être dire, un peu, ce que l'on pense de ce que l'on lit sur Bourbaki, parce que...

Pierre Cartier : Tu avais dit qu'on pourrait parler du séminaire.

Alain Connes : Oh, ben, c'est un sujet différent, non.

Jean-Pierre Serre : Ah, je voudrais en dire du bien, de ce séminaire, que c'est un truc extraordinaire, ça justifie à soi tout seul le maintien de Bourbaki, après notre départ, qui bien évidemment *(en charriant un peu PC)* était une catastrophe pour Bourbaki, mais...

Pierre Cartier : Bien sûr, bien sûr.

Alain Connes : C'est important effectivement de s'exprimer sur ce qu'on lit.

Pierre Cartier : Je regardais effectiveme les volumes 40-50 et sur 6 exposés, il y en a 4 par des membres de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Et également ils représentent un complément parfait au texte, parce que c'est des maths intéressantes, au contraire. Elles sont pas bourbachiques du tout.

Jacques Dixmier : Avec une différence énorme qui est qu'il n'y a souvent pas les démonstrations.

Jean-Pierre Serre : Oui mais maintenant, attention maintenant, il y a beaucoup de textes qui ont 40 à 50 pages et qui contiennent pratiquement les démonstrations.

Alain Connes : Mais Serre, tu as mentionné un sujet qui effectivement est très important, qui est qu'on a lu des critiques de Bourbaki, moi, j'ai contacté avant notre réunion, là, justement, quelqu'un que je connais bien, qui était professeur de taupe et qui avait interrogé un certain nombre de ses collègues sur Bourbaki et il s'est aperçu que les gens qui le critiquaient n'avaient lu aucun livre de Bourbaki.

Pierre Cartier : On vit sur la réputation, autrement dit.

Alain Connes : Simplement, comme ça, par ouï dire, etc., qui critiquent sans fondement. Mais je pense que c'est important de s'exprimer par rapport à certaines critiques, tu parlais d'Arnold, par exemple...

Pierre Cartier : Laurent Lafforgue aussi.

Alain Connes : Comment ?

Pierre Cartier : Il prétend qu'il n'a jamais lu un livre de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Bon eh bien, ça, ça n'est pas pareil.

Alain Connes : Non, mais ça n'est pas pareil, parce qu'Arnold...

Jean-Pierre Serre : Arnold, c'est pire que ça. Prenons par exemple dans la littérature, tu as des gens qui dans la même phrase, vont dire "Bourbaki est beaucoup trop abstrait !" et "Pourquoi est-ce que Bourbaki n'a pas fait la théorie des catégories ?". Du point de vue de l'abstraction, c'est bien plus difficile la théorie des catégories, mais ils ne se rendent pas compte de ce qu'ils disent. Ils sont contents de critiquer et voilà.

Alain Connes : Ca c'est parfaitement vrai.

Jean-Pierre Serre : Mais il y a quand-même quelque-chose de Bourbaki qu'il faudrait mentionner, c'est que beaucoup de gens accusent Bourbaki d'avoir essayé d'acquérir un certain pouvoir universitaire. Et ça, c'est sérieux, quand-même.

Alain Connes : Ca c'est sérieux, oui, tu peux en parler, mais je pense que la raison, elle est simple, c'est qu'en fait, les membres de Bourbaki étaient les meilleurs mathématiciens du moment, et donc... je veux dire, c'est pas infiniment étonnant qu'ils se soient retrouvés à la Sorbonne dans un endroit pareil.

Jean-Pierre Serre : Mais enfin, ça fait partie des choses que l'on voit sur Bourbaki et qui me sont désagréables parce que c'était pas le cas quand j'étais débutant, parce qu'ils étaient à Nancy, ils étaient pas...

Alain Connes : Oui bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Mais après ils sont tous venus à Paris.

Alain Connes : Effectivement si tu veux, la question qu'on peut se poser, c'est "est-ce qu'il y a eu un moment où Bourbaki a joué le rôle d'une coterie, d'une secte, enfin ?". Je veux dire, finalement, les gens se rencontrant quand-même un mois par an, avaient le temps de discuter ensemble, de prendre des décisions...

Jean-Pierre Serre : Extrêmement rarement. Je ne me souviens pas de discussions à table, par exemple, sur les postes, les choses comme ça.

Alain Connes : Sur les postes, non...

Pierre Cartier : Non, ça, c'était interdit.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'était moralement interdit, oui.

Alain Connes : C'est d'autant plus outrageant, ce genre d'accusation, si tu veux, que moi, si j'ai un souvenir de coterie qui n'est pas du tout Bourbaki, c'est que j'ai été le rapporteur pour Grothendieck en 1984, pour le CNRS.

Pierre Cartier : Ah, c'était toi.

Jacques Dixmier : Quand, à quelle date ?

Alain Connes : En 1984. Grothendieck était candidat au CNRS, d'accord, et j'étais son rapporteur. J'ai demandé à Jacques d'écrire une lettre, il fallait quand-même écrire des lettres de recommandation, il voulait faire des maths.

Jean-Pierre Serre : Et à l'époque, il voulait réellement faire des maths ? Parce qu'il a demandé des postes à une époque où il quittait les maths.

Alain Connes : Il avait son *Esquisse d'un programme*, il avait un programme qui était tout à fait extraordinaire.

Pierre Cartier : Un travail magnifique d'ailleurs.

Alain Connes : Magnifique, et alors si tu veux, ce qui s'est produit, c'est que je suis arrivé à la commission du CNRS donc, je faisais partie de la commission du CNRS et je me suis aperçu, avant qu'on commence, que l'ordre du jour avait été établi de telle sorte qu'on discuterait le cas de Grothendieck au moment où il n'y aurait plus de poste de disponible. Donc j'ai fait un scandale, j'ai mis... et ça, ça avait été fait par les syndicats, c'est-à-dire que ce qui était derrière, en amont, c'était pas Bourbaki, c'étaient les syndicats.

Jean-Pierre Serre : Ah non, mais ça, le pouvoir des syndicats, dans les commissions.

Jacques Dixmier : Ca n'a rien à voir, là.

Alain Connes : Non mais ce que je veux dire, c'est qu'on accuse Bourbaki, alors qu'il y avait à la manœuvre des coteries qui étaient bien pire.

Pierre Cartier : Oh, ben, il y avait Malliavin aussi.

Alain Connes : Il y avait peut-être Malliavin, et alors, Grothendieck a eu un poste, il a eu un poste temporaire, ça a marché, mais je veux dire, c'était une situation absolument intenable à cause justement du...

Jean-Pierre Serre : Oui, j'ai peut-être eu tort de mentionner ce problème-là, mais moi, ça m'est désagréable qu'on mette ça sur le dos de Bourbaki, qui n'était pas du tout comme ça.

Jacques Dixmier : Comme autre chose qu'on met sur le dos de Bourbaki, il y a les maths modernes, l'accusation bateau pendant des années, maintenant il n'y a plus de maths modernes, alors on n'en parle plus mais.

Alain Connes : Non mais ça, il faut s'en défendre, et...

Jacques Dixmier : Pendant 10 ou 20 ans, ça a été la tarte à la crème.

Alain Connes : Il faut s'en défendre, effectivement et Pierre tu disais...

Pierre Cartier : Ben que les plus actifs là-dedans, c'était par exemple Lichnerowicz.

Jean-Pierre Serre : C'était Lichné essentiellement et Choquet.

Pierre Cartier : Et qui n'étaient pas de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Mais qui étaient des sympathisants de Bourbaki, remarque, tous les deux.

Alain Connes : Ah bon ? Lichnerowicz était sympathisant de Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, il laissait même entendre plus ou moins, enfin, des gens disaient qu'il était membre de Bourbaki, et il ne démentait pas.

Alain Connes : Il laissait faire.

Jacques Dixmier : Je me demande s'il n'y avait pas un contentieux entre Weil et Lichné, mais bon, j'ai jamais cherché à approfondir...

Jean-Pierre Serre : Weil avait simplement une mauvaise opinion de Lichné, c'est tout. Ah ben, j'ai un souvenir précis, le souvenir précis, c'est que Lichné était censé avoir démontré je ne sais plus quoi sur des espaces Riemanniens symétriques et puis Weil est arrivé au congrès et on lui a dit ça, et il a dit "Ah non ça, sûrement pas, il a sûrement pas démontré ça". Et effectivement quelques jours après, on a su que la démonstration était fausse, tu vois ?

Pierre Cartier : Ah bon !

Jean-Pierre Serre : Non il savait d'avance que, il estimait que... *(grimace)*

Jacques Dixmier : Enfin les bagarres personnelles, ça existe partout, dans tous les milieux, et dans le milieu mathématique, et dans Bourbaki, et en dehors de Bourbaki, oh !

Jean-Pierre Serre : Une chose qui était sympathique dans les dîners, s'il y avait des choses qui étaient moralement interdites qui étaient de parler de postes, mais il y avait aussi de parler de nos propres travaux. Je me souviens de Dieudonné disant quelque-chose, et Weil disant "écoute, tes savants travaux, etc, tes savants travaux..."

Alain Connes : On s'en fout ! Ah ben ça, c'est très bien, ça.

Jacques Dixmier : Enfin, y en avait pas beaucoup qui avaient envie de parler de leurs propres travaux, enfin, la moindre pudeur.

Jean-Pierre Serre : Ah non, mais en discussion à table, tu vois... avec un voisin, quand-même on pouvait comme ça, non je crois que Dieudonné avait utilisé ça comme argument pour quelque-chose, il avait dit "moi je m'en suis servi dans ça, de..." Et alors Weil lui a dit "tes savants travaux" *(geste de faire signe à l'autre de se taire).*

Alain Connes : Ah ben ça, c'est parfait, c'est parfait. Justement c'est un élément essentiel dans ce que j'essayais de dire au début, c'est justement le fait qu'il y avait une pudeur et les gens mettaient de côté leur ego, et ils contribuaient justement à ça, et ça, c'est fondamental, parce que ça a créé cette fraternité, et ça a créé cet esprit de dévouement d'une certaine manière.

Jean-Pierre Serre : Si tu veux, c'est un peu comme ça que je suis entré dans Bourbaki sans le demander parce que ça ne me venait pas à l'idée qu'il fallait que je demande l'autorisation, c'était des maths, et j'estimais que des maths, j'avais toujours le droit d'y être, c'était spontané pour moi.

Jacques Dixmier : Ca me rappelle que moi, je ne me suis jamais posé la question financière à Bourbaki, ça tournait bien, je ne me suis jamais posé la question de comment ça marchait.

Jean-Pierre Serre : Des finances de Bourbaki, d'où ils recevaient l'argent ?

Pierre Cartier : La vente des bouquins, la vente des bouquins.

Jacques Dixmier : Oui, mais enfin, fallait organiser, fallait payer des impôts, ou ne pas les payer, enfin...

Pierre Cartier : Eh bien, il y avait une association pour ça.

Jacques Dixmier : Elle a été créée assez tardivement, l'association.

Alain Connes : A partir de 52.

Pierre Cartier : En 52, oui avant c'était Delsarte, avant.

Jean-Pierre Serre : Figure-toi qu'ils m'ont pris comme Trésorier, alors que je n'avais pas la moindre idée..., mais c'était Delsarte qui faisait tout, c'était sur le papier, j'étais Trésorier et puis il y avait peut-être un Président qui était peut-être Delsarte, mais je n'ai jamais vu le moindre compte de ma vie.

Pierre Cartier : Dans les 15 premières années, c'est Delsarte qui faisait tout ça.

Jacques Dixmier : Est-ce que comme anecdote, la présence d'acteurs de cinéma à des congrès t'intéresse ?

Alain Connes : Oh oui, bien sûr, toutes les anecdotes m'intéressent, j'avais prévu...

Pierre Cartier : Piccoli est venu nous voir.

Alain Connes : Ah bon ?

Jacques Dixmier : Oui, Piccoli, on était à Saint-Rémy-de-Provence, c'était un copain, c'était le cousin assez éloigné de Douady, c'est ça. Il est venu assister à une ou plusieurs de nos discussions.

Jean-Pierre Serre : Non, pas plusieurs, non.

Pierre Cartier : Il a été parfait, il a été d'une modestie parfaite.

Jacques Dixmier : Il a pas dit un mot, il s'est assis dans un coin.

Alain Connes : Ah bon ? Quand-même, ah ça, c'est pas mal alors comme anecdote.

Jean-Pierre Serre : Assis dans un coin... Il me revient une anecdote, tu vois. C'était à l'abbaye de Royaumont et on discutait des Espaces Vectoriels Topologiques donc c'est il y a vraiment très longtemps. Et on était sur une terrasse avec du soleil, et il y avait des chaises longues, et on s'était installés dans les chaises longues, et Weil était là, et les Espaces Vectoriels Topologiques, ça l'embêtait, tu vois, alors Weil s'était endormi. Alors quand on s'est aperçu qu'il s'était endormi, on est tous partis sans faire le moindre bruit, et on est allés regarder par les fenêtres et on a vu à un moment Weil qui se retournait et il ne pouvait engueuler personne, il n'y avait personne ! *(rires de tous).*

Pierre Cartier : Ca, je connaissais pas, ça.

Jean-Pierre Serre : Ca, c'est 49, je pense. Je pense, parce que c'est ma première année, c'était sûrement ça. Oh, c'étaient les E.V.T. de dimension finie, tu vois.

Alain Connes : Les E.V.T. de dimension finie, non...

Jean-Pierre Serre : Ecoute, quand le corps n'est pas complet, c'est pas tout à fait trivial et par exemple, il y a des choses qui sont pas forcément fermées l'une dans l'autre, et bon, par contre, si le corps est complet, il ne se passe rien. Oui, tu vois, c'est pas terrible. Mais je revois encore la tête de Weil, il était un peu penaud, tu vois.

Alain Connes : Sûrement *(rires).*

Jacques Dixmier : Et pour te dire que les discussions étaient parfois informelles, je me souviens d'une séance où, c'était l'été, on était dans une cour, un jardin, et Douady est parti avec une pelle et il est revenu quelques minutes plus tard en nous montrant ce qu'il avait fait, il avait tué une vipère et il nous montrait fièrement la vipère.

Jean-Pierre Serre : Il y a eu une fois, il m'a lancé un serpent, c'était paraît-il une couleuvre, mais c'est assez désagréable quand on vous lance un serpent dans les bras, vivant, lui, alors !

Pierre Cartier : Douady, la chasse aux vipères, c'était une de ses obsessions.

Jean-Pierre Serre : Il les tuait.

Jacques Dixmier : Douady et les contre-exemples.

Jean-Pierre Serre : A l'époque, on tuait les vipères, maintenant elles sont protégées.

Alain Connes : Jacques a Douady et les contre-exemples, c'est justement envoyer des vipères à quelqu'un.

Jacques Dixmier : On discutait ce que Godement appelle le monstre, le chapitre 3 des groupes de Lie.

Jean-Pierre Serre : Oh, c'est pas un monstre, je te le dis encore une fois, c'est un très beau chapitre.

Jacques Dixmier : Et Douady était là et j'étais là et donc un soir, d'habitude, on allait se coucher assez tôt, vers 10 heures, mais là, je sais pas pourquoi, j'était resté travailler jusque vers minuit et Douady, lui non-plus, n'était pas allé se coucher, il est rentré à l'hôtel, il m'a vu, il était excité, il m'a dit "j'ai trouvé le contre-exemple sur les groupes de Lie, devine ce que c'est !". Alors, j'essaye de lui suggérer "t'as trouvé ceci ?", "non c'est pas ça !"... "non, c'est pas ça !". Et puis alors tout de même, à un moment donné, je me suis dit "est-ce ça ne serait pas", ça me paraissait presque impossible, est-ce que par hasard, il aurait trouvé une algèbre de Lie qui ne correspondrait à aucun groupe de Lie ?...

Jean-Pierre Serre : C'est ça, Banachique ou un truc comme ça, mais pas de dimension finie quand-même...

Jacques Dixmier : Alors je lui dis “est-ce que c'est ça ?”... “Oui, c'est ça !”. Et puis alors, il s'est mis à hurler, il était minuit, il a dû réveiller la moitié de l'hôtel *(éclats de rire)*. J'ai eu un mal fou à le calmer.

Pierre Cartier : C'était un vrai problème, ça.

Jean-Pierre Serre : J'espère que c'est en exercice dans Bourbaki, ça.

Jacques Dixmier : Ca a passé en exer. bien sûr. Tu parles de l'importance du contre-exemple, quand-même.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, et puis il y avait aussi, Dixmier, tu avais fait, il me semble, des contre-exemples rigolos, est-ce que tu avais pas fait un exemple où une famille a un paramètre de groupes de Lie et les revêtements universels ne peuvent pas se prolonger *(faisant des gestes avec les bras pour illustrer son propos)*.

Alain Connes : Il n'y a pas de relèvement de l'homotopie, tu veux dire.

Jean-Pierre Serre : Je pense.

Jacques Dixmier : Pas moi, non, je n'ai pas de souvenir de ça.

Jean-Pierre Serre : Ce n'est pas toi ?... Mais celui que tu dis, je crois que c'était un sous-espace non fermé dans un Banach, il y avait un truc comme ça.

Jacques Dixmier : Ah c'était en dimension infinie, naturellement.

Alain Connes : Donc l'aspect créatif est souvent dans les exercices, effectivement.

Jacques Dixmier : Oh non t'exagères.

Jean-Pierre Serre : Il y a beaucoup de choses dans les exercices.

Jacques Dixmier : Des choses que Dieudonné est allé chercher.

Jean-Pierre Serre et Alain Connes : Non non non pas du tout.

Jean-Pierre Serre : J'ai fabriqué quantités de choses que j'ai mises dans des exercices, tu vois, qui n'étaient pas dans la littérature, non, qui n'étaient pas connues, quelquefois.

Jacques Dixmier : Je suis persuadé que tu as mis des tas de choses, mais enfin, c'était pas la majorité des exer. quoi.

Jean-Pierre Serre : *(se levant, et allant vers la table des livres)* A partir de ces livres-là, ça tu vois, Dieudonné n'a contribué à aucun exercice là-dedans : ça, ce sont des exercices entièrement à nous... Tu vois, les Coxeter hyperboliques par exemple, qui sont là, d'ailleurs avec des fautes d'impression. Ben ça a été mal imprimé, bon. Non, des quantités de choses, j'avais mis des invariants de groupes, engendrés par des réflexions en caractéristique p.

Jacques Dixmier : La caractéristique p, Dieudonné connaissait ça, quand-même.

Jean-Pierre Serre : Non il connaissait absolument pas. Les invariants peut-être.

Jacques Dixmier : Non, pas les invariants. Enfin, je ne sais pas, son bouquin sur les groupes classiques, je ne l'ai quasiment pas lu.

Jean-Pierre Serre : Ecoute, il y a des exercices, là, ils sont jolis comme tout. C'est pas du tout pareil que les premiers livres de Bourbaki où effectivement, Dieudonné prenait dans des articles, des choses, et il les mettait tandis que là, moi, quand j'en faisais, c'était différent, je me posais des questions, ou bien, alors, quelque-chose que je savais être vrai, j'arrivais à trouver une façon de le rédiger en exercice. Non, il y a énormément de choses.

Alain Connes : Je crois que c'est un moment idéal pour terminer.

JACQUES DIXMIER ET JEAN-PIERRE SERRE : Terminons.

ALAIN CONNES : On pourrait discuter pendant des heures.

JEAN-PIERRE SERRE : On pourrait "*s'engueuler*" pendant des heures, pour donner une idée de ce que c'était ! *(rires)*

ALAIN CONNES : Je pense que ça donne quand-même une bonne idée de ce que c'était.

Transcription[1] de l'entretien entre
Jean-Pierre Serre
et
Alain Connes
au sujet de la correspondance
Serre-Grothendieck

ALAIN CONNES : Alors ce que je propose, c'est que notre discussion commence justement en l'année 1955, je lis ce que dit Grothendieck, il dit : "l'année 1955 marque un tournant crucial dans mon travail mathématique, celui du passage de l'analyse à la géométrie". Et il dit : "je me rappelle encore de cette impression saisissante, toute subjective certes, comme si je quittais des steppes arides et revêches".

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, et c'est pas gentil pour ce qu'il faisait avant...

ALAIN CONNES : Non ! Non, non !

JEAN-PIERRE SERRE : Parce que, il faut vous expliquer que Grothendieck avait été à Nancy et que là, sur un certain sujet qui était assez à la mode mais un peu restreint quand-même...

ALAIN CONNES : Oui, c'étaient les espaces vectoriels topologiques...

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, c'est ça, il avait presque résolu tous les problèmes du coin.

ALAIN CONNES : C'est-à-dire qu'on lui avait donné 14 problèmes, c'était Dieudonné je crois, qui les lui avait donnés, ou Schwartz.

JEAN-PIERRE SERRE : Je sais pas si c'est 8, ou...

ALAIN CONNES : Ils lui avaient donné 14 problèmes à résoudre...

1. Transcription : Denise Vella-Chemla, 26.1.2019.

Jean-Pierre Serre : qu'ils ne savaient pas faire...

Alain Connes : qu'eux ne savaient pas faire... et Grothendieck et je pense que c'était la première fois que Grothendieck appliquait sa méthode que Serre a décrite comme étant : "pour résoudre des problèmes, il faut les laisser se dissoudre dans une marée montante de théories générales".

(Rires)

Jean-Pierre Serre : C'était un sujet qui était un peu bouché, quand-même.

Alain Connes : Oui, c'est ça, quand-même.

Jean-Pierre Serre : On a eu l'impression qu'il avait résolu à peu près toutes les questions. En fait, c'est pas tout à fait vrai. Il y avait des contre-exemples à trouver.

Alain Connes : Oui, des contre-exemples à trouver...

Jean-Pierre Serre : Il y avait les Banach, il y avait des jolis contre-exemples à trouver, mais il ne les a pas trouvés. Mais, il en avait assez, quand-même.

Alain Connes : Mais il en avait assez et alors la question que je me suis posée, parce que j'ai regardé la thèse de Grothendieck, quand il a passé sa thèse, j'ai regardé la deuxième thèse. Et alors la deuxième thèse de Grothendieck, ça c'était, ça, c'est très intéressant, la deuxième thèse de Grothendieck, c'était : "Théorie des faisceaux"

Jean-Pierre Serre : Ah ? ! *(étonné et intéressé)*

Alain Connes : donc ça veut dire, enfin, c'est ma conjecture, que le moment où il a... il a bifurqué des espaces de l'analyse fonctionnelle...

Jean-Pierre Serre : Et il avait envie sûrement.

Alain Connes : Et il avait sûrement envie de bifurquer, c'est au moment de sa deuxième thèse, on lui a demandé d'exposer la théorie des faisceaux...

Jean-Pierre Serre : Alors il faut vous expliquer ce que c'est que la deuxième thèse parce que ça n'existe plus. A l'époque quand on passait sa thèse, on avait la thèse principale, ce qu'on avait fait, et puis le jury vous donnait un autre sujet. C'était un sujet que l'on donnait à l'intéressé avec son accord en général, ça se passait assez en famille, ça, souvent, pas toujours, pas toujours. Et alors, la personne en question parlait une demi-heure ou 20 minutes de ça et c'était très bien. Et je pense que Grothendieck avait dû plus ou moins choisir son sujet. En plus, tu vois, le lien avec les faisceaux, c'est que, déjà à l'époque, on se rendait compte que sa théorie des espaces nucléaires était si bonne que tu pouvais faire des produits tensoriels...

Alain Connes : C'est ça, qui étaient uniques bien sûr.

Jean-Pierre Serre : où, par exemple, Kunneth, que la formule de Kunneth marchait et par exemple, j'ai vendu la théorie de Grothendieck à Bott...

Alain Connes : Oui, bien sûr, à cause de ça...

Jean-Pierre Serre : ...un an ou deux ans après pour quelque chose, je lui ai dit : "tu sais, tu as un produit de variétés, eh ben, tu dois faire comme si c'était un produit tensoriel et puis voilà, tout marche !".

Alain Connes : et puis, non seulement ça, absolument, mais l'idée philosophique en fait qui est derrière les espaces nucléaires, c'est que ce sont des espaces de dimension finie. C'est-à-dire en fait, on les traite...

Jean-Pierre Serre : Oui, ils se comportent...

Alain Connes : ... , ils se comportent comme des espaces de dimension finie.

Jean-Pierre Serre : Bon, ça, c'est un peu technique.

Alain Connes : C'est un peu technique. Ah, mais, on va rentrer dans la technique.

Jean-Pierre Serre : Il est passé très naturellement...

Alain Connes : à la théorie des faisceaux. Enfin, à la géométrie algébrique.

Jean-Pierre Serre : Enfin, d'abord à la topologie...

Alain Connes : Absolument. Alors, la question que je voulais te poser, là-dessus, justement, c'est "quand est-ce que Grothendieck est rentré dans le groupe Bourbaki ?", tu te souviens ?

Jean-Pierre Serre : Oh, ça a été un petit peu, oh, je ne sais pas. Je n'ai pas de souvenir du tout de date. C'est nettement après ça.

Alain Connes : C'est nettement après ça, bon, ben d'accord. C'est ce que je voulais savoir, que c'est nettement après ça.

Jean-Pierre Serre : Nettement.

Alain Connes : Nettement, d'accord, parce qu'en fait...

Jean-Pierre Serre : Nettement, bon attends... Là, tu parles de 55. Est-ce qu'en 55... Quelle est l'année où il est parti au Kansas ?

Alain Connes : Bon, eh bien, ça, je ne pourrais pas te le dire.

Jean-Pierre Serre : Parce qu'il m'a écrit une lettre du Kansas, alors.

Alain Connes : La lettre sur...

Jean-Pierre Serre feuillette son exemplaire de la correspondance qu'il prend sur la table.

Jean-Pierre Serre : Elle est de 55.

Alain Connes : La lettre sur le diplodocus... homologicus. Et il parle d'une emmerdante rédaction pour Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est donc en 55, je pense, le Kansas. Et je dirais qu'il a dû entrer à Bourbaki, il a dû y être pris vers 57, peut-être.

Alain Connes : Ah bon, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui, un truc comme ça.

Alain Connes : D'accord, d'accord, d'accord, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Je sais pas : il s'est mis à faire des rapports pour Bourbaki, d'énormes rapports bien sûr.

Alain Connes : Oui bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Nous parlons de Bourbaki ensemble en 59. En 59, il y était, certainement.

Alain Connes : Non, sûrement, mais il me semble...

Jean-Pierre Serre : Donc, c'est par là.

Alain Connes : Oui.

Jean-Pierre Serre continue de feuilleter son exemplaire à la recherche de l'information précise.

Jean-Pierre Serre : Je lui dis... Moi, je lui parle de Bourbaki en 58 déjà donc visiblement...

Alain Connes : Non, je pense que... il y était avant.

Jean-Pierre Serre : Non, en 58, je lui dis "le congrès Bourbaki a été très agréable.". Donc, c'est que, il aurait pu y être. C'est 57, je pense, Bourbaki.

Alain Connes : 57 , d'accord, 57. Ce qui m'a beaucoup frappé, moi, en lisant la correspondance, c'est euh, vraiment euh, au moins au début, puis après je parlerai d'autres choses, mais à quel point Grothendieck justement, arrive à gagner ta confiance d'une certaine manière, et je pense qu'il y a un point qui m'a beaucoup frappé, c'est le moment où il comprend ta dualité à travers les *Ext*, c'est-à-dire, là, tu lui dis : "c'est vraiment rupinant, etc..."

Jean-Pierre Serre : Oui, mais la confiance entre nous, elle était venue au moins 2 ans avant, tu vois : j'étais allé à Nancy...

Alain Connes : Ah bon ? Ah d'accord !

Jean-Pierre Serre : Eh oui ! *(en éclatant de rire)* J'enseignais la mécanique rationnelle à Nancy...

Alain Connes : Ah d'accord !

Jean-Pierre Serre : Je l'avais en horreur, mais je faisais aussi un séminaire de topologie, je discutais avec Grothendieck, donc j'ai vu de près ses espaces nucléaires, tu vois, et ça m'a beaucoup frappé parce que c'était très bon comme idée, ces produits tensoriels, et donc on était en confiance, depuis longtemps.

Alain Connes : Vous étiez déjà en confiance depuis longtemps, mais bon au niveau mathématiques, il y a déjà dès le début de la correspondance, il y a plusieurs points qui frappent assez et qui sont par exemple tout son traité sur l'algèbre homologique, c'est-à-dire ce qu'on appelle le Tohoku.

Jean-Pierre Serre : Oui ça m'intéressait pas spécialement.

Alain Connes : Ca t'intéressait pas spécialement ?

Jean-Pierre Serre : Non, je considérais ça comme plus ou moins évident, tu vois ? !

Alain Connes : C'est-à-dire, il y avait le Cartan-Eilenberg.

Jean-Pierre Serre : Pour moi, c'était de la rédaction. D'ailleurs pour lui aussi, c'était pareil.

Alain Connes : C'était de la rédaction.

JEAN-PIERRE SERRE : Il le dit : “Pour comprendre quelque chose, j’ai besoin de l’écrire.”.

ALAIN CONNES : Oui, tout à fait.

JEAN-PIERRE SERRE : Et du coup, il le rédigeait mais pour moi il y avait rien d’original dedans.

ALAIN CONNES : Ah ? ! Moi, il y a quand-même quelque-chose qui m’a beaucoup frappé là-dedans.

JEAN-PIERRE SERRE : Bon, il y avait les axiomes sur les catégories abéliennes.

ALAIN CONNES : Voilà. Non, il y avait les axiomes sur les catégories abéliennes, mais pas seulement. Il y avait au niveau des exemples. C’est-à-dire au niveau des exemples, c’est-à-dire bon, bien sûr, l’exemple principal, c’était les faisceaux de groupes abéliens sur...

JEAN-PIERRE SERRE : Alors ça n’a pas vraiment été fait mais bon, c’était connu que c’était faisable, bon...

ALAIN CONNES : Bien sûr, que ça marchait, d’accord ?. Mais bon il y avait la nuance entre l’aspect Cech, enfin l’aspect si tu veux pour calculer la cohomologie, mais, en fait, moi, ce qui m’a beaucoup plus frappé quand j’ai lu cet article en détail, c’était un autre exemple, qui a l’air de rien, mais j’y reviendrai après, et c’est l’exemple de ce qu’il appelait les catégories de diagrammes.

JEAN-PIERRE SERRE : Catégories de ?

ALAIN CONNES : de diagrammes. Alors ça, ça passe inaperçu dans l’article...

JEAN-PIERRE SERRE : Alors, oui effectivement parce que je ne m’en souviens pas du tout.

ALAIN CONNES : Tu ne t’en souviens pas ? Voilà !

Jean-Pierre Serre : Eh bien, même maintenant.

Alain Connes : Alors, je vais t'expliquer ce que c'est. Et le rôle que ça a joué je pense après, mais c'est aussi une conjecture. Donc en fait, qu'est-ce qu'il fait ? Il a tout un chapitre enfin, sur cet exemple-là et qu'est-ce qu'il dit ? Eh bien, il dit...

Jean-Pierre Serre : Tiens, c'est curieux, je ne me souviens pas du tout de ça !

Alain Connes : Il dit : on prend une petite catégorie et on prend les foncteurs de cette petite catégorie vers les groupes abéliens.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est ça, c'est une catégorie de diagramme.

Alain Connes : Voilà, c'est ça une catégorie de diagrammes, pour lui. Et après, il vérifie bien-sûr que bon, c'est une catégorie abélienne, tout marche, etc.

Jean-Pierre Serre : Oui, effectivement, c'est une idée qui était certainement pas dans l'air, ça, non.

Alain Connes : Voilà. Donc, si tu veux, moi, c'est cette partie-là qui m'a beaucoup intéressé, comme partie novatrice, et j'y reviendrai après.

Jean-Pierre Serre : Mais moi, elle ne m'intéressait pas parce que ça ne représentait rien de concret pour moi. Il ne calculait pas des groupes d'homotopie, il ne calculait rien avec, tu comprends ?

Alain Connes : Oui, je suis bien d'accord.

Jean-Pierre Serre : Alors, j'ai tendance à être comme ça.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr, bien évidemment, bien évidemment, mais j'y reviendrai après... Alors, en fait, donc, j'ai entendu dans une des interviews que tu as données que, je veux dire, ça te fait réagir lorsque les gens, et je pense qu'ils ont tort, parlent d'une révolution à propos de la théorie des schémas. Ca, je pense qu'on est bien d'accord, c'était dans l'air et en fait, tu fais remonter ça à Krull ?

Jean-Pierre Serre : Parce que Krull, bon, c'était un algébriste, Krull. Mais on avait le sentiment qu'il devinait la géométrie qui était derrière. Et en tout cas, il construisait les anneaux locaux, la localisation...

Alain Connes : Il construisait la localisation qui est l'essentiel, oui.

Jean-Pierre Serre : ...mais il n'avait pas fait le pas d'aller au projectif, tu vois, il était affine, et ça, la géométrie quand elle reste affine, elle est pas collée.

Alain Connes : Ah d'accord...

Jean-Pierre Serre : La géométrie, quand elle est affine, ça marche pas...

Alain Connes : Il faut la recoller, non, bien sûr, sinon, ça ne marche pas, c'est sûr, la cohomologie...

Jean-Pierre Serre : C'est pas assez intéressant.

Alain Connes : Et alors, ce qui m'a aussi beaucoup frappé, c'est à quel point, justement, Grothendieck est arrivé dans un monde idéal. Pourquoi ? Parce que Serre et plusieurs autres personnes faisaient un séminaire à Princeton sur les schémas, au moment où ils les écrivaient. Dieudonné l'aidait à rédiger.

Jean-Pierre Serre : Mais ça, c'est un petit peu après quand-même.

Alain Connes : C'est un petit peu après.

Jean-Pierre Serre : Au début, ça a été purement, la correspondance avec moi, quand il était à Kansas, tu vois ?

Alain Connes : C'est ça, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Ca a été pour lui, ça, le changement net, c'était Kansas, et il m'écrivait, ALAIN CONNES : C'est ça. Ca a donné lieu au développement. D'accord.

JEAN-PIERRE SERRE : Et puis après, il a été recruté par Motchane. Alors je sais pas comment ça marche au point de vue des années...

ALAIN CONNES : C'est 58, le recrutement par Motchane, c'est 58.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah oui, tandis que Kansas, c'est 55. Il y a eu une période intermédiaire. Il était au CNRS, alors, peut-être ?...

ALAIN CONNES : Je ne sais pas, alors ça, je ne sais pas.

JEAN-PIERRE SERRE : Il était apatride, alors, c'était pas si simple.

ALAIN CONNES : C'était assez difficile pour lui sur ce plan-là. Donc au niveau des... au niveau des schémas, bon, c'est clair. Aussi, pareil, je veux dire la correspondance est idéale au niveau des motifs, ça c'est formidable, parce qu'on voit en 64, votre correspondance, toi, tu parles de la métaphysique des motifs, etc.

JEAN-PIERRE SERRE : Et alors, ce que la correspondance ne montre pas, c'est que c'est en fait une conséquence de tas de remarques que je lui faisais : je lui disais "tu sais, entre variétés, si on admet les conjectures de Weil, ça suggère que la cohomologie se coupe en morceaux et des choses comme ça."

ALAIN CONNES : Bien sûr, bien sûr.

JEAN-PIERRE SERRE : Et ça, ça a mijoté dans son crâne. Mais alors, il a fait quelque chose que moi, je n'aurais jamais fait, il a eu l'idée de définir ça, avec un courage ! ! !

ALAIN CONNES : qui le caractérise !

JEAN-PIERRE SERRE : intellectuel extraordinaire parce que j'aurais jamais pensé que les cycles algébriques, c'était assez fort pour faire...

Alain Connes : Oui.

Jean-Pierre Serre : ça, mais il a eu le courage de le faire. C'est peut-être faux d'ailleurs, c'est peut-être faux, mais en tout cas, c'était un bon départ.

Alain Connes : C'est la conjecture de Hodge. C'était un bon départ. Mais alors il y a une autre partie pour moi absolument essentielle, et je vais te raconter ce que je sais, et tu vas me corriger, d'accord ? C'est pour la cohomologie étale. Alors ce que j'ai entendu dire, mais je ne sais pas si c'est vrai, tu me corriges, ce que j'ai entendu dire c'est que c'est toi qui as donné un séminaire, non, au séminaire Chevalley, en 58...

Jean-Pierre Serre : oui bien sûr, tout cela est correct, oui, c'était en 58.

Alain Connes : ...dans lequel tu as expliqué que pour avoir des fibrés localement triviaux en terme de groupes algébriques, il fallait prendre des revêtement étales...

Jean-Pierre Serre : C'est ça.

Alain Connes : alors, et que, à la sortie de ton séminaire...

Jean-Pierre Serre : C'est absolument correct. Et j'ai fait mon exposé, je me vois encore, au tableau...

(Rires d'Alain Connes)

Jean-Pierre Serre : ...parlant à Poincaré de ça...

Alain Connes : C'était à Poincaré, d'accord.

Jean-Pierre Serre : et à la fin de l'exposé, Grothendieck me disant : "ça va faire la cohomologie de Weil". Parce que ça s'appelait cohomologie de Weil, c'était la cohomologie que nous voulions en tout cas.

Alain Connes : Mais alors...

Jean-Pierre Serre : Instantanément.

Alain Connes : Instantanément ?

Jean-Pierre Serre : Instantanément : moi, j'avais présenté, effectivement et systématiquement, je fais un H^0, bon le H^0, c'est trivial. Je fais le H^1.

Alain Connes : Toi, c'était le H^1 ?

Jean-Pierre Serre : Oui, mais j'ai pas eu le courage intellectuel de me dire "ça pourrait faire un H^2". Tandis que lui, il a dit, tout de suite, instantanément, et c'est parfaitement correct. Cette légende, pour une fois, elle est juste.

Alain Connes : C'est le courant, qui est passé...

Jean-Pierre Serre : Ca a déclenché. Et... en un sens... tu regarderas le texte que j'ai écrit, je l'avais vraiment rédigé comme ça, c'était avec, j'avais écrit H^1, tu vois ?

Alain Connes : Oui, oui ! Ah ? Tu avais déjà écrit la suite cohomologique, tu avais noté H^1, d'accord, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, j'avais écrit H^1. J'avais la bonne cohomologie en dimension 1, c'était ça mon idée. J'étais partie de l'idée que le H^1, de Zariski, pour les revêtements, est ridicule puisqu'on trouve rien. Alors tu les mets de force, dans la machine.

Alain Connes : Tu les mets de force ? Ah, d'accord...

Jean-Pierre Serre : Et j'avais constaté que ça faisait un bon machin. Mais j'avais pas eu l'idée que ça pourrait... On m'aurait posé la question, j'aurais dit qu'il fallait peut-être des idées nouvelles en dimension plus grande, tu vois.

Alain Connes : Oui, c'est ça, c'est ça.

Jean-Pierre Serre : Tandis que lui, était...

Alain Connes : ...était convaincu que ça marchait pour les dimensions plus grandes.

Jean-Pierre Serre : Eh bien, il était d'un optimisme extraordinaire.

Alain Connes : Et toi, souvent, on voit bien dans ta correspondance à quel point, tu lui donnes des contre-exemples *(éclats de rires)*.

Jean-Pierre Serre : *(souriant franchement)* Un peu moins optimiste.

Alain Connes : De manière régulière...

Jean-Pierre Serre : Un peu moins optimiste. Oh, eh bien, tu sais, Weil m'a dit un jour, ça m'avait frappé : "ce sont les optimistes qui démontrent les théorèmes".

Alain Connes : Oh, un petit peu, bon, il ne faut pas être trop optimiste non plus. Il faut une certaine dose d'optimisme.

Jean-Pierre Serre : Bon, en tout cas, cette légende, elle est absolument correcte, donc, ça, c'est bien.

Alain Connes : D'accord, ça, c'est bien, alors il y a une notion que je voudrais aborder, Je pense savoir quelle sera ta réaction mais je vais...

Jean-Pierre Serre : Eh bien, dis toujours.

Alain Connes : Mais j'y vais toujours. Voilà, pour moi, une des grandes découvertes de Grothendieck, c'est la notion de *topos*.

Jean-Pierre Serre : C'est la notion de... ?

Alain Connes : C'est la notion de *topos*.

Jean-Pierre Serre : Alors, je ne sais même pas ce que c'est. Je n'ai même jamais fait l'effort de comprendre exactement parce que... dès qu'il y avait des catégories dedans, en abondance, je m'arrêtais d'écouter.

Alain Connes : D'accord, d'accord.

Jean-Pierre Serre : C'est, c'est, mon crâne s'est un peu bloqué sur ces choses-là.

Alain Connes : Alors, j'avoue que j'avais exactement la même attitude jusqu'à quelques années... et que finalement je pense que c'est une notion qu'on ne peut apprécier que quand on la rencontre indépendamment.

Jean-Pierre Serre : Voilà, ça c'est sûr.

Alain Connes : Tu es d'accord, hein ?

Jean-Pierre Serre : Mais je n'en ai jamais eu besoin.

Alain Connes : Tu n'en as jamais eu besoin, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Donc en fait, si je te pose la question "à quel moment Grothendieck a inventé les topos ?"...

Alain Connes : Je ne sais pas et je m'en fiche.

Jean-Pierre Serre : Tu ne saurais pas, tu t'en fiches.

Alain Connes : Bon, je ne m'en fiche pas vraiment.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, oui, c'est sûr.

Alain Connes : Ca ne me dit rien.

Jean-Pierre Serre : Ca ne te dit rien, OK, d'accord...

Alain Connes : Non alors là, vraiment.

Jean-Pierre Serre : Je sais qu'on en fait beaucoup de... qu'on en parle énormément, que c'est très à la mode et tout ça, mais...

(Rires d'Alain Connes)

Alain Connes : Mais c'est pas quelque chose qui te... Et c'est exactement ce que je pensais, hein, je pensais que...

(Rires d'Alain Connes)

Alain Connes : ...quand j'avais bossé dessus.

Jean-Pierre Serre : Ca ne me dit rien... du tout.

Alain Connes : Voilà. Il y a une autre, comment dire, il y a une autre distinction, que tu fais, dans plusieurs interviews, et qui ressemble un peu à la distinction entre justement, que faisait Grothendieck entre l'analyse fonctionnelle et la géométrie algébrique, c'est..., tu fais une distinction un peu entre la géométrie algébrique et la théorie des formes modulaires.

Jean-Pierre Serre : Ah, ça a beaucoup plus de charme dans ma tête, eh bien, c'est-à-dire que... Non, là, nous allons dans une direction vraiment différente, ce sont des directions différentes et que, Grothendieck quand-même ne s'intéressait qu'aux théories qui se développaient logiquement par elles-mêmes, tu vois ?

Alain Connes : Eh bien, la *marée montante de théories générales*.

Jean-Pierre Serre : La *marée montante*, c'est ça. Or, l'un des charmes justement des formes modulaires et du programme de Langlands, c'est que, et ça n'est absolument pas logique du tout, c'est que, c'est une brillante idée qui dit "deux choses sont essentiellement presque identiques, enfin, elles *se correspondent*, or il n'y a aucune raison, a priori, du tout pour que ça soit vrai.

Alain Connes : Pour que ça soit vrai, d'accord. Et ça, c'est d'un charme extraordinaire.

Jean-Pierre Serre : Ca, pour moi, c'est d'un charme absolument incomparable par rapport à...

Alain Connes : à quelque chose qui se développe comme ça.

Jean-Pierre Serre : Pour moi, ce sont les choses qui se développent petit à petit, comme ça.

Alain Connes : Oui, ça je comprends très bien.

Jean-Pierre Serre : Alors ça pour moi, ça s'incarnait dans des choses précises avec les formes modulaires. Ma conjecture par exemple...

Alain Connes : Bien sûr.

Jean-Pierre Serre : ...sur les extensions Galoisiennes.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : La conjecture sur les courbes elliptiques. Tout ça pour moi a pris forme... vers 67. 67 est une grande année pour moi. Pour la théorie des nombres, parce que c'est l'année où il y a eu les motifs, j'ai vu tout de suite que les motifs étaient, étaient liés, tu vois ?

Alain Connes : En 64, c'étaient les motifs, déjà, dans la correspondance, c'est en 64.

Jean-Pierre Serre : Non, mais pour moi, c'est en 67 seulement que je... que je vois que ça doit être lié.

Alain Connes : D'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui parce que c'est à ce moment-là qu'il y a eu l'article de Weil sur les courbes elliptiques...

Alain Connes : Ah oui, ce qu'on appelle la conjecture de Taniyama-Weil.

Jean-Pierre Serre : ...qui confirmait que les courbes elliptiques devaient correspondre à des formes modulaires. Jusque là, c'était une espèce d'espoir vague, mais...

Alain Connes : Je comprends.

Jean-Pierre Serre : C'était pas concret, tandis que... Weil n'avait pas tout à fait la notion de conducteur mais presque. En tout cas, moi, je l'avais la notion de conducteur, et donc je pouvais, je pouvais énoncer beaucoup plus précisément la conjecture, et alors du coup, elle devenait absolument convaincante. C'était incroyable ! Je l'ai raconté quelque part, après discussion avec Weil, je crois, je suis rentré chez moi, j'ai regardé : "Ah ! !" (je savais qu'il n'y avait pas de courbes elliptiques de conducteur 1), "Ah ben oui, mais il n'y a pas de forme modulaire correspondant, tu vois ?"

(Rires partagés)

Jean-Pierre Serre : Ah et puis, il n'y en a pas non plus avec 8, oh ben, c'était pareil, et par contre, il y en a... Ah ! ! ! C'était lumineux, tu vois ? C'était lumineux. Et ça, c'est le genre de chose par exemple, qui n'est absolument pas Grothendieckien.

Alain Connes : C'est totalement orthogonal à... Mais ça, ça transparaît très clairement dans votre correspondance, complètement.

Jean-Pierre Serre : Ca, évidemment, ça me fait beaucoup plus d'effet, tu vois ? Alors à des niveaux plus élémentaires, à chaque fois qu'il y a des correspondances qui sont un peu surprenantes, ça me touche.

Alain Connes : Ca t'excite, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Alors que au contraire, Grothendieck, ça...

Alain Connes : (*s'exclamant*) : il n'aimait pas !

Jean-Pierre Serre : Il n'aime pas, il n'aime pas ça.

Alain Connes : Et tout ça ressort parfaitement de la correspondance.

Jean-Pierre Serre : Ce sont des points de vue un peu... : c'est bien plus romantique, quand il n'y a pas de relation évidente, et que les trucs sont les mêmes, enfin, c'est *(chuchotant presque)* un mariage fut au ciel, tu vois, enfin, c'est le... le coup de foudre, tu vois...

(Rires)

Alain Connes : Justement, on se rapproche d'une période, de 68, enfin cette période un peu trouble par rapport à Grothendieck, donc on va moins parler de mathématiques.

Jean-Pierre Serre : Eh bien, c'est... Il commence à quitter les maths, en 68.

Alain Connes : Il commence à quitter les maths.

Jean-Pierre Serre : Enfin, c'est pas loin, c'est en 70 à peu près, c'est vers 70 qu'il quitte à peu près.

Alain Connes : Voilà. C'est en 70 qu'il quitte l'IHES ?...

Jean-Pierre Serre : Je ne me rappelle pas des dates.

Alain Connes : Bon, je ne sais pas. Mais en tout cas, il passe 2 ans au Collège de France, c'est toi qui l'invites au Collège de France, sur 2 ans.

Jean-Pierre Serre : Alors c'était une chaire de savant étranger.

Alain Connes : C'était une chaire de savant étranger, qui durait 2 ans.

Jean-Pierre Serre : qui était pour un an. Qui était pour un an, et puis on l'a renouvelée, pour la seconde année. Mais on n'a pas voulu le renouveler pour la troisième fois.

Alain Connes : Pourquoi, il s'était fait des ennemis ? Tu veux dire ? Il s'était...

Jean-Pierre Serre : Comment ?

Alain Connes : Il s'était mal comporté, qu'est-ce qui s'était passé ?

Jean-Pierre Serre : Bah, *(soupir)*, c'était pas sa place parce que, écoute, il passait son temps à ce moment-là à dire qu'il fallait plus faire de sciences. Tu vois, il fallait plus faire de maths, il fallait plus faire de sciences, que c'était l'écologie. Bon ben s'il ne voulait plus en faire, qu'il aille ailleurs quoi, c'était... Non non, et j'étais pas content même que le CNRS le prenne. Je trouvais que c'était... que c'était pas bien...

Alain Connes : Que c'était une erreur... Mais ça, c'était longtemps après, ça, le CNRS.

Jean-Pierre Serre : Pas très longtemps, non.

Alain Connes : C'était en 84 qu'il a été pris au CNRS.

Jean-Pierre Serre : Non mais à ce moment-là. Non, c'était, il jouait un assez vilain jeu parce que il ne voulait plus faire de maths, tout ça, mais il voulait bien être payé, il voulait bien avoir un poste, tu vois, c'était quand-même, pour quelqu'un qui était en principe si... rigoureux.

Alain Connes : Mais il faisait pas ses cours, ou il faisait ses cours ?

Jean-Pierre Serre : Ah, eh bien, tu connais bien l'histoire des cours au Collège, non ?

Alain Connes : Non. Absolument pas.

Jean-Pierre Serre : Alors, la première année, il n'y a pas eu de problème. La première année, il a fait un cours. Il a fait un cours, je sais pas sur quoi.

Alain Connes : Si, c'était sur les groupes de Barsotti-Tate ou un truc comme ça.

Jean-Pierre Serre : Non, je crois que ça, c'est la seconde. La seconde année, il nous a donné comme sujet de cours, tu sais bien, les sujets que nous proposons au mois de juin...

Alain Connes : Oui, au mois de juin.

Jean-Pierre Serre : Il nous a donné un truc d'écologie.

Alain Connes : Ouh la !

Jean-Pierre Serre : Alors euh...

Alain Connes : Ah c'était à ce point-là alors... Je croyais qu'il avait donné deux sujets.

Jean-Pierre Serre : Non, non, pas du tout. Un sujet d'écologie. Alors l'administrateur a disjoint cette proposition-là du reste, nous avons voté sur tout le reste, on a voté oui pour tous les copains et puis ensuite, on a voté séparément sur le truc de Grothendieck, on a voté non à une large majorité. Moi j'ai voté non bien-sûr, sur l'écologie ! Alors Grothendieck a accepté, ça, il n'avait pas le choix. Et il a fait un cours sur Barsotti-Tate ou un truc comme ça, mais dans lequel il a commencé par "je ne peux pas vous parler de Barsotti-Tate sans vous expliquer que..." et puis, 4 heures d'écologie, tu vois, et...

Alain Connes : Mon Dieu !... D'accord !

(Eclats de rires)

Jean-Pierre Serre : Je crois que le pauvre Illusie a assisté. Je crois qu'il a pas dû y avoir grand monde à ce cours.

Alain Connes : Ah c'était un cours d'écologie alors...

Jean-Pierre Serre : De Survivre [2], enfin... Des bons sentiments quoi, des bons sentiments de Grothendieck, ça.

Alain Connes : D'accord.

Jean-Pierre Serre : Et alors, tu imagines, on n'avait pas du tout envie de le renouveler, tu comprends, avec un truc pareil.

2. Mouvement écologiste fondé par Grothendieck et ses amis.

Alain Connes : Mais ça me rappelle, d'ailleurs, dans la correspondance, une dissenssion que vous aviez eue, qui était au moment où Grothendieck avait voulu, enfin, je crois qu'il l'avait écrit, il avait écrit une lettre à Cartan

Jean-Pierre Serre : Ca c'est différent, il avait écrit une lettre à Cartan sur la guerre d'Algérie...

Alain Connes : sur la guerre d'Algérie, il voulait dispenser les normaliens de service militaire ou un truc comme ça, oui.

Jean-Pierre Serre : oui, dispenser les mathématiciens de service militaire.

Alain Connes : Ca t'avait un peu...

Jean-Pierre Serre : Je lui avais répondu que c'étaient quand-même délicat quand la peau des gens était en jeu de... oui, c'est ce que je lui avais dit, que certains ne se fassent pas tuer alors que d'autres peuvent... se font tuer. Alors il est exact que certains pays, effectivement, protégeaient leurs scientifiques, je crois que l'URSS par exemple...

Alain Connes : protégeait les scientifiques...

Jean-Pierre Serre : *(riant :)* Ils les tuaient pour des raisons politiques éventuellement, mais ils ne les envoyaient pas se faire tuer à la guerre.

Alain Connes : D'accord, lui parlait des Etats-Unis, c'est sûr, oui.

Jean-Pierre Serre : Et Grothendieck, lui, anarchiste d'origine, lui, son point-de-vue était "Si n'importe quelle raison peut marcher pour ne pas aller dans l'armée, alors on la prend, c'était ça son... Mais ça n'a pas été une discussion sérieuse. Il a écrit ça à Cartan et on n'en a plus parlé après.

Alain Connes : Il y a un certain nombre de lettres, effectivement, qui sont un peu restées sans réponse.

Jean-Pierre Serre : Et puis c'est la guerre d'Algérie, ça, oui, c'est la guerre d'Algérie.

Alain Connes : Oui, c'était en 61. Un certain nombre de lettres dont on voit qu'il n'a pas répondu et il y avait une lettre sur laquelle j'étais très très curieux de savoir si tu l'avais vue après ou quoi ?... Et c'est quand Dwork a démontré la rationalité des fonctions ζ. Ca, je suis très curieux de savoir comment il a réagi.

Jean-Pierre Serre : Oh ben, il s'en foutait.

Alain Connes : Ah il s'en foutait ? Alors que...

Jean-Pierre Serre : C'était en dehors de son truc.

Alain Connes : En dehors de son schéma, il s'en foutait, c'est incroyable, parce que la démonstration de Dwork est magnifique.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, je l'avais exposée à Bourbaki, je m'étais régalé.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Elle était magnifique mais, euh, par exemple, j'avais essayé de regarder ce que ça donnait pour la cohomologie avec des coefficients, et je ne me rappelle plus mais il y avait des difficultés quand-même, avec un groupe qui opère... Non mais de toute façon, il avait raison de son point de vue : il la voulait d'une certaine façon,...

Alain Connes : Il la voulait d'une certaine façon, il ne voulait pas se détourner de son objectif.

Jean-Pierre Serre : Non, c'était un accident, un accident, quoi, on avait démontré ça, quoi, un peu plus tôt qu'on aurait dû.

Alain Connes : Bon, mais est-ce qu'il n'y a pas là-dedans, plus ou moins, ...

Jean-Pierre Serre : *(l'interrompant)* : Tu vois, j'ai eu quand-même, je te raconte, vers euh... Quand est-ce que j'ai réfléchi à Riemann-Roch, moi ?... C'est vers...

ALAIN CONNES : Ah oui, mais tu le dis ça, dans l'interview de Colliot-Thélène, c'est toi le premier qui as eu l'idée que c'était une caractéristique d'Euler.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, c'était... *(petit rire modeste)*

ALAIN CONNES : Et ça, c'est très important en fait. C'est très important, mais tu l'as jamais publié !

JEAN-PIERRE SERRE : Non, c'était pas la peine parce que, quand j'ai correspondu avec Kodaira-Spencer, j'ai vu qu'ils avaient eu la même idée mais ils n'avaient pas mon théorème de dualité. Alors ils ont publié leur truc et moi, j'ai publié le théorème de dualité.

ALAIN CONNES : Bon, donc ça va, quoi, d'accord.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, oui, c'était... Mais alors, quand j'ai réfléchi à ça, à Riemann-Roch, ce qui m'a amusé, c'était que j'ai essayé de le démontrer pour les courbes, tu vois...

ALAIN CONNES : Oui, ben là, c'était juste H^1 et H^0 donc...

JEAN-PIERRE SERRE : Eh, tu parles, oui ! Oui, oui, d'accord, mais alors, j'essayais là de démontrer quelque chose, qui était connu depuis environ 100 ans, quoi, c'est ça. Mais j'avais une idée des démonstrations qu'on pouvait faire, mais je les voulais pas.

ALAIN CONNES : Non, mais excuse-moi, mais excuse-moi, c'est-à-dire quand tu dis que tu faisais ça, tu faisais ça avec des faisceaux Zariski, etc., ou... ?

JEAN-PIERRE SERRE : C'est ça.

ALAIN CONNES : C'est ça, c'est ça, hein, d'accord.

JEAN-PIERRE SERRE : Euh... Non, à l'époque, attends, à l'époque, est-ce que j'étais Zariski ou est-ce que j'étais, non, j'étais analytique-complexe à l'époque.

Alain Connes : Ah, tu étais analytique-complexe, c'était avant, euh...

Jean-Pierre Serre : C'était avant GAGA. J'ai fait FAC et GAGA en même temps. Non c'était analytique-complexe et, simplement, je voulais pas les démonstrations existantes. Je les voulais pas parce que, quand j'ai trouvé celle que je voulais, celle que je voulais, tu dois la connaître, c'est... tu as un diviseur d et ce que tu montres, c'est que si tu le sais pour d, alors tu le sais pour $d + p$ où p est un point. Or comme tu peux te balader, comme ça, et puis, quand $d = 0$, c'est...

Alain Connes : Une espèce de récurrence, quoi, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Alors, je me vois encore à ma table de travail, quand j'ai trouvé ça, je l'ai écrit quelque part, je sais que 3 minutes après, j'avais la dimension 2, la théorie des surfaces.

Alain Connes : Paf ! Donc tu savais déjà que c'était une caractéristique d'Euler.

Jean-Pierre Serre : Ah, oui, oui, oui, oui, oui. Je savais qu'avec ce style-là...

(Claquement de langue d'admiration d'Alain Connes)

Alain Connes : D'accord, d'accord, parce que comment il fallait l'énoncer ?...

Jean-Pierre Serre : Et tu vois bien comment il fallait faire ? ! Il fallait que je montre que si j'ai un diviseur sur la surface, et si je lui ajoute quelque-chose, et si je l'avais pour le diviseur, je l'ai encore pour...

Alain Connes : Ca continue à être vrai...

Jean-Pierre Serre : Et grâce au Riemann-Roch précédent, un p'tit peu plus, non non, ça m'a pris 3 minutes, je crois. Dimension 3, je pouvais pas parce qu'il y avait des choses à démontrer que...

Alain Connes : Oui, bien sûr...

(Rires d'Alain Connes)

Jean-Pierre Serre : Mais typiquement, ça nous arrive souvent ça, on n'est pas content d'une démonstration parce qu'on en veut une qui fasse autre chose.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Et celle-là, c'était formidable.

Alain Connes : Et ça, c'était en quelle année, que tu as fait ça, en gros ? 53 ?

Jean-Pierre Serre : Oh, c'est en gros 53.

Alain Connes : 53 ?

Jean-Pierre Serre : Oh à peu près, oui. Ma thèse est de 51. Je me suis arrêté de faire des groupes d'homotopie à peu près tout de suite. En 52, c'était le séminaire Cartan des variétés de Stein, et très rapidement, j'ai été élevé en taupe, comme toi d'ailleurs, avec l'idée que c'est la géométrie projective qui est bonne. La géométrie affine, c'est de la blague.

Alain Connes : C'est sûr.

Jean-Pierre Serre : Or Cartan, c'est de la géométrie affine, tu vois. Les variétés de Stein, ce sont des machins ouverts, c'est pas... Et les trucs compacts ont quand-même un charme...

Alain Connes : D'ailleurs, votre correspondance commence par une grosse bêtise de Grothendieck qui dit que le quotient d'une variété de Stein par un groupe...

Jean-Pierre Serre : Oui, non, mais je pense que ça, c'est une faute de frappe de Grothendieck, il a oublié de mettre fini.

Alain Connes : Fini, bien sûr, oui, je suis d'accord.

Jean-Pierre Serre : Après coup, je m'en suis rendu compte, c'était sûrement ça qu'il voulait dire. Mais il ne le corrige pas dans ça. Peut-être qu'il le croyait... Mais en tout cas, c'est pour ça que j'ai quitté le point de vue Cartan. C'est parce que pour moi, c'est la taupe qui m'a fait.

Alain Connes : Mais il y a un point essentiel dans ce que tu as fait, c'est l'utilisation de la topologie de Zariski, des faisceaux pour la topologie de Zariski.

Jean-Pierre Serre : Ca c'est juste après, et ça, c'est... *(se reprenant)* Bon mais ça, c'est parler de moi, c'est pas parler de Grothendieck.

Alain Connes : Mais ça ne fait rien parce que, si tu veux, c'est complètement clair, en fait, quand on regarde avec une certaine distance, moi en tant que non spécialiste du tout, c'est, si tu veux, l'influence en fait, de Leray...

Jean-Pierre Serre : Oh oui, sur les premières années de Grothendieck, oui, oui, j'ai... oui, je l'ai influencé énormément, ça c'est clair.

Alain Connes : Tu l'as influencé énormément, donc...

Jean-Pierre Serre : Non, ce qui s'est passé, c'est que... sur l'espace projectif, sur les faisceaux sur l'espace projectif complexe, tu vois, j'ai pu voir qu'il y avait des modules, parce que j'ai pris les sections.

Alain Connes : Non mais, j'ai bien vu la preuve de ton article sur GAGA, justement.

Jean-Pierre Serre : Eh bien, c'était dans un séminaire Cartan, c'était dans un séminaire je ne sais plus, en tout cas, j'ai fabriqué dans ce cas-là, et j'ai vu un dictionnaire avec les modules, alors je me suis dit "bon après, c'est pas possible, ça va marcher sur un corps quelconque." Et alors, c'est comme ça que je suis passé à FAC[3] qui s'est écrit alors, incroyable...

3. Faisceaux algébriques cohérents

Alain Connes : Oui, ça tu le dis plusieurs fois, que tu n'as pas eu à réfléchir.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : *(faisant le geste d'un papier interminable sortant d'une machine à écrire)* La machine a tapé, comme ça, un article de 100 pages, comme s'il existait déjà.

Alain Connes : Oui, alors donc là, justement, on va aborder une période qui est beaucoup plus délicate si tu veux, et qui est la fin de la correspondance, c'est-à-dire qu'il y a une très grande interruption dans la correspondance.

Jean-Pierre Serre : Oh, ben y en a plus, au fond, de correspondance.

Alain Connes : Ah il n'y en a plus. Quand-même, il y a la lettre que tu lui as écrite, et que je trouve très très pertinente si tu veux, quand tu as reçu *Récoltes et Semailles. (On entend un gros soupir de Jean-Pierre Serre.).* Donc quand tu as reçu *Récoltes et Semailles*, c'était en 86, je pense, hein ? Là, tu lui as écrit, et si tu veux, je m'en voudrais de mal te citer mais c'est très important...

Jean-Pierre Serre : Tu as fait des photocopies !

Alain Connes : Ah oui, bien sûr. Alors, je te lis, hein, pour être sûr, donc : *"J'ai bien reçu le fascicule de Récoltes et semailles que tu m'as fait envoyer. Merci beaucoup. Il me manque encore l'avant-dernier fascicule, dont j'ai seulement quelques pages isolées."*

Jean-Pierre Serre : *(riant)* il manque quelques centaines de pages, c'est tout !

Alain Connes : Oui, c'est ça. *"Une chose me frappe. Dans les textes que j'ai pu voir, tu t'étonnes et tu t'indignes de ce que tes anciens élèves n'aient pas continué l'œuvre que tu avais entreprise et menée en grande partie à bien. Mais tu ne te poses pas la question la plus évidente, celle à laquelle tout lecteur s'attend à ce que tu répondes : "Pourquoi toi, tu as abandonné l'œuvre en question ?"."*

JEAN-PIERRE SERRE : Bien sûr, c'est évident comme question, et il passe 600 pages à ne pas y répondre.

ALAIN CONNES : A ne pas y répondre, *(s'exclamant)* mais, ce qui est le plus intéressant, c'est que tu as une idée...

(Rires)

JEAN-PIERRE SERRE : Oh oui, j'ai une idée, je la connais, je suis encore d'accord avec cette idée.

ALAIN CONNES : Alors, tu dis : *"J'ai l'impression que malgré ton énergie bien connue..."* Alors c'est vrai que...

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, l'énergie, alors ça c'est vrai, il aurait fallu le connaître : physiquement et intellectuellement, c'était pareil, c'était phénom..., il pouvait travailler presque 24 heures, c'était extraordinaire. Il était une force, je connais personne qui avait autant de force que lui... Même, il y a des gens, je connais des gens qui sont intellectuellement très forts comme Thompson par exemple, Bombieri, sont très forts, mais Grothendieck, c'était une force, euh... animale !

ALAIN CONNES : Tu dis, alors : *"Tu étais tout simplement fatigué (rires), quand-même, de l'énorme travail que tu avais entrepris. D'autant plus, qu'il y avait aussi les SGA."* Alors je rappelle que les SGA, bon, SGA3, je crois que c'est les groupes algébriques, y avait SGA4, c'étaient les topos, bon et alors tu dis : *"Je me souviens notamment de l'état plutôt désastreux de SGA5"*.

(Rires)

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, parce que alors, il était vraiment désastreux tu vois, il avait été ronéotypé par l'IHES mais il y avait trop de commutativité à vérifier, et Illusie qui était pourtant, Illusie qui était sérieux, sur un théorème vraiment décisif, avait écrit : "j'ai été incapable de vérifier"...

ALAIN CONNES : Ouah, oui donc ça, c'était terrible.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, "j'ai été incapable de vérifier..."

ALAIN CONNES : Tu dis : *"Ils en étaient réduits à affirmer sans preuve la commutativité, au signe près en étant optimistes, et ces commutativités étaient essentielles pour la suite."*

JEAN-PIERRE SERRE : *(s'exclamant)* Mais oui, c'était... Alors, évidemment, vu les résultats auxquels elle est appliquée, le signe, y avait pas de problème parce que... ils auraient trouvé des nombres négatifs pour les nombres de points, ben tu vois, alors évidemment !

(Eclats de rire)

ALAIN CONNES : Fallait forcément que...

JEAN-PIERRE SERRE : Non mais alors c'est précieux d'avoir des trucs comme ça, c'est précieux.

ALAIN CONNES : Ca veut dire qu'on peut détecter une erreur.

JEAN-PIERRE SERRE : Ca veut dire qu'on peut détecter une erreur, mais ça ne veut pas dire qu'on a une démonstration.

ALAIN CONNES : Non, ça ne veut pas dire qu'on a une démonstration.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, Illusie avait écrit carrément dans le texte : "le rédacteur s'excuse de n'avoir pas été capable de vérifier la commutativité du diagramme".

ALAIN CONNES : Alors mais alors là, ce que tu dis et qui est vraiment, vraiment très très intéressant, tu dis quelque chose, je pense que je devrais lire la suite parce que c'est, je vais m'arrêter au milieu, tu dis : *"on peut se demander par exemple s'il n'y a pas une explication plus profonde...*

JEAN-PIERRE SERRE : Oui.

ALAIN CONNES : *"...que la simple fatigue d'avoir à porter à bout de bras tant de milliers de pages. Tu décris quelque part ton approche des maths, où l'on n'attaque pas un problème de front, mais où on l'enveloppe et le dissout* *dans une marée montante de théorie générale. Très bien. C'est ta façon de travailler et ce que tu as fait montre que ça marche effectivement pour les EVT*[4] *et la géométrie algébrique."* Et après tu dis, et je vais te laisser parler : *"C'est beaucoup moins clair pour la théorie des nombres"*.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, je pensais à par exemple, je ne sais pas si j'y pensais à ce moment-là, mais justement à la théorie de Langlands, à ce genre de choses.

ALAIN CONNES : Tu pensais aux formes modulaires.

JEAN-PIERRE SERRE : Aux formes modulaires, il n'y avait rien compris aux formes modulaires. Et il avait... Il était extraordinaire d'incompréhension quelquefois, parce que quand ça ne rentrait pas dans son cadre...

ALAIN CONNES : D'accord, je comprends.

JEAN-PIERRE SERRE : Je lui racontais des formes modulaires, et il disait : "Mais tes formes modulaires, ça n'a aucun sens !", parce que tu vois la variété des modules, elle est affine et donc, à l'infini, tu mets des conditions artificielles, alors...

ALAIN CONNES : Alors que c'est une variété algébrique, bien sûr.

JEAN-PIERRE SERRE : Alors que moi, j'avais 100 ans ou 150 ans de formes modulaires derrière moi, où je savais que c'était bon, cette théorie, quand on la voit, on résiste pas quoi. Eh bien lui, si, alors là ! "Aucun sens... Des formules !..." Il pouvait pas supporter les formules.

ALAIN CONNES : Donc ce que tu dis là, en fait, tu dis plus loin qu'en fait en théorie des nombres justement, toutes les mathématiques peuvent rentrer et...

JEAN-PIERRE SERRE : Et qu'on ne sait pas... Et qu'on ne sait pas comment ça marche.

ALAIN CONNES : On ne sait pas comment ça va marcher, on ne sait pas du

4. Espaces vectoriels topologiques

tout où...

Jean-Pierre Serre : Ca, c'est passionnant en théorie des nombres.

Alain Connes : Exactement, exactement. Mais alors maintenant, ce que je voulais avoir, c'était... Donc là, on voit ta réaction, j'ai lu la...

Jean-Pierre Serre : En tout cas, tu peux constater que je suis d'accord avec tout ce que tu cites. Autrement dit, je n'ai pas changé d'avis depuis.

Alain Connes : Non, non, tu n'as pas changé d'avis, tu n'as pas changé d'avis. C'est important. Il y a la réponse de Grothendieck, elle est dans la correspondance, je ne vais pas la lire.

Jean-Pierre Serre : Non il y a peut-être des choses où j'ai dit peut-être des bêtises dans la correspondance, c'est possible mais...

Alain Connes : Non.

Jean-Pierre Serre : Mais probablement je les ai corrigées dans les notes, parce qu'il y a des notes. Donc si j'ai dit quelque chose que je trouvais idiot, je...

Alain Connes : Non, non, je ne pense pas. Je pense si tu veux, je pense que, moi, ce que j'ai essayé de faire, c'est de me glisser dans la peau de Grothendieck pour comprendre, essayer de comprendre comment il avait pu, comment dire, euh, *(soupir)*, si tu veux... Je ne dis pas qu'il est devenu paranoïaque, parce que je n'aime pas le mot du tout, je pense qu'il y a un mot pour ça, c'est un mot à la mode, c'est obsidional mais si tu veux...

Jean-Pierre Serre : Pour te donner ma comparaison à moi...

Alain Connes : Oui, vas-y.

Jean-Pierre Serre : Grothendieck me faisait penser à une centrale nucléaire. *(Rire d'Alain Connes)*. Et les centrales nucléaires, il faut les refroidir, il faut les protéger, etc. Et tant qu'il a été dans le monde mathématique normal, nous lui servions au fond de protection. Dès qu'il a été seul, la centrale a explosé. Bon c'est... C'est pas très gentil comme comparaison mais...

Alain Connes : Peu importe, peu importe. Ce qu'il y a, c'est, le texte qu'il a écrit.

Jean-Pierre Serre : *Les* textes, il a écrit des milliers de textes, des dizaines de milliers de pages.

Alain Connes : Il a écrit des dizaines de milliers de pages. Si tu veux en fait...

Jean-Pierre Serre : Tu parles de quel texte, alors ?

Alain Connes : Je parle de plusieurs textes, en fait, j'ai compris en... J'avais dû faire un exposé au Collège de France sur... on m'avait demandé de faire un exposé sur les réfugiés, bon. Il y avait un colloque sur les réfugiés, un colloque de rentrée.

Jean-Pierre Serre : *(étonné)* : Sur les réfugiés ?

Alain Connes : Sur les réfugiés. Attends, c'était un truc général, donc, évidemment, bon, j'avais dit d'accord, et puis tu sais comment c'est quand c'est un mois avant, tu commences à te dire "sur quoi je vais parler..."

Jean-Pierre Serre : T'as quelque chose à dire sur les réfugiés, toi ?

Alain Connes : Et puis, bon, j'étais dans des circonstances très spéciales, parce que je m'occupais de ma mère qui était très malade, et la nuit, je lisais, et je lisais la Clef des songes, qui est un des textes de Grothendieck.

Jean-Pierre Serre : Ah celui-là, je ne connais pas la Clef des songes.

Alain Connes : Tu ne connais pas la Clef des songes. Et je suis tombé...

Jean-Pierre Serre : Ah si, j'ai dû regarder quand-même, si.

Alain Connes : Tu as peut-être regardé quoi...

Jean-Pierre Serre : Parce que j'étais impressionné par certains rêves de Grothendieck qui sont d'un détail de description, je me rappelle, il y a eu une princesse, quelque chose comme ça, avec des décorations...

Alain Connes : Des détails absolument incroyables.

Jean-Pierre Serre : Je sais que je n'ai jamais de rêve avec des précisions, mon crâne ne fabrique pas, c'est une question de puissance du crâne, tu vois...

Alain Connes : D'accord.

Jean-Pierre Serre : De fabriquer mentalement avec tes petits neurones, que tu fabriques des décorations d'une dame. Et la puissance de son crâne se voyait même dans ses rêves.

Alain Connes : Absolument. Et alors je suis tombé par hasard en lisant ce texte sur un passage qui est absolument magnifique et qui est le passage sur son père, ce qui est arrivé à son père, donc, qui était un anarchiste, quand il était en prison, parce qu'il est resté, je crois, plus de 10 ans en prison en Russie et ce qui lui est arrivé à un moment donné, et qui a été transmis à Grothendieck par sa mère. Et Grothendieck le décrit d'une manière incroyablement précise comme tu dis.

Jean-Pierre Serre : Mais c'était dans un rêve alors...

Alain Connes : Non ! Non, non, c'était dans la réalité. Ca, c'est dans la réalité. Il décrit ce qui est arrivé à son père, qui était : on avait promis à son père qu'il serait libéré, je crois, au bout de 10 ans, bon, il comptait les jours, en fait, etc. Et au moment où la date est arrivée, il n'a pas été libéré. Il a commencé une grève de la faim. Et au bout de je sais pas, peut-être 3 semaines ou un mois de grève de la faim, là, il a eu une illumination... mystique.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est pas surprenant, ça.

Alain Connes : C'est pas très surprenant, mais, si tu veux, la manière dont... et dans cette illumination, il pardonnait à ses geôliers enfin, etc. Et la manière dont c'est écrit, donc, si tu veux que ça a fait que, la première fois que je l'ai lu à ma femme, avant d'en parler au Collège, j'ai été obligé de m'arrêter dans la lecture tellement c'était émouvant. Donc en fait, bon, je l'ai lu au Collège, mais c'est à cette occasion-là si tu veux que je me suis aperçu du fait qu'au milieu de 36 choses différentes, il y avait dans ses textes, de temps en temps, des choses extraordinaires.

Jean-Pierre Serre : Oui, ça, je pense qu'effectivement, c'est vrai qu'il y a, je suis un peu... je ne trouve pas d'adjectif, j'ai commencé par penser méprisant mais c'est pas tout à fait le cas, sceptique en tout cas, sur les choses de Grothendieck des 30 dernières années, mais quand-même, c'est clair qu'il y a des choses dedans.

Alain Connes : Il y a des choses.

Jean-Pierre Serre : *(soupirant)* Son crâne n'a jamais dégénéré. Non, c'est pas comparable à ceux de nos amis dont...

Alain Connes : ...dont nous ne parlerons pas.

Jean-Pierre Serre : ...dont nous ne parlerons pas, et qui n'ayant même pas 90 ans...

Alain Connes : Non, on n'en parle pas.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : N'en parlons pas, son crâne n'a jamais dégénéré, non, il a plutôt explosé qu'autre chose.

Alain Connes : Tout à fait, tout à fait.

Jean-Pierre Serre : Et toujours intelligemment.

Alain Connes : Toujours intelligemment et, si tu veux, ce que ce texte m'a appris, ce texte que j'avais découvert, ce qu'il m'a appris, c'est qu'en fait, son père n'avait jamais réussi à faire ce qu'il voulait faire. Son père voulait être écrivain.

Jean-Pierre Serre : Ah bon.

Alain Connes : Son père voulait écrire, et il n'avait jamais réussi à le faire, parce qu'il était tout le temps par monts et par vaux, quoi, etc.

Jean-Pierre Serre : Faut pas être anarchiste et écrire à la fois, c'est un peu...

Alain Connes : C'est vrai. Mais donc en fait, Grothendieck apparemment, au bout d'un moment, a décidé d'écrire.

Jean-Pierre Serre : Ah ça, pour écrire, il a écrit.

Alain Connes : Pour écrire, il a écrit, et ce que personne ne sait, qu'on a trouvé dans sa demeure quand il est mort, on a trouvé un nombre incroyable de pages, qui sont pour le moment inaccessibles.

Jean-Pierre Serre : Enfin, non, elles ne sont pas inaccessibles.

Alain Connes : Si, si, elles sont gardées par un avocat parce que les enfants ne sont pas d'accord.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, mais ça sera accessible, un jour, ça sera accessible. Ils ne les ont pas perdues quoi, elles ne sont pas perdues.

Alain Connes : Exactement mais apparemment, et alors ça, je trouve ça tout à fait incroyable, apparemment, le sujet principal, tu sais que bon, Grothendieck a quand-même une évolution mystique, hein, je veux dire, hein, c'est clair.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est un peu bizarre, oui.

Alain Connes : Un peu bizarre, mystique, mais apparemment, le sujet principal de ces milliers de pages, c'est, euh, en fait, c'est le problème du Mal. C'est à dire que, en fait, il s'est aperçu en étant mystique, en étant religieux d'une certaine manière, hein bon, qu'en fait, il y avait un problème fondamental, et il s'est attaqué à ce problème-là. On ne sait pas ce qu'il y a dedans.

Jean-Pierre Serre : J'appelle pas ça des problèmes, ces choses-là. Les littéraires ont tendance à appeler ça Le problème, avec l'idée que surtout, on n'essaye pas de les résoudre, mais on en parle...

(Rires)

Alain Connes : Oui, mais lui, alors lui, il a essayé justement. Donc moi je suis vraiment quand-même très curieux de... alors, je ne sais pas si ce sera possible de, bien sûr, apparemment, c'est au moins 30000 pages...

Jean-Pierre Serre : 30000 ?

Alain Connes : 30000 pages. Si ce n'est plus.

Jean-Pierre Serre : 30000, oh c'est possible avec Grothendieck...

Alain Connes : Bien classées.

Jean-Pierre Serre : ...parce qu'il écrivait à une allure, vraiment incroyable. Et... elles sont tapées à la machine ou elles sont écrites, tu ne sais pas ?

Alain Connes : Ca, je ne sais pas, mais maintenant avec l'intelligence artificielle, on pourra.

Jean-Pierre Serre : En même temps, il tapait très très vite.

Alain Connes : Oui, on pourra maintenant, non, je crois que c'est manuscrit.

Jean-Pierre Serre : Parce que son écriture n'était pas terrible, hein ?

Alain Connes : Mais on mettra au point un petit logiciel qui transformera ça en Latex, donc ça c'est pas un problème. Ca, c'est pas un problème, non, c'est pas un problème.

Jean-Pierre Serre : On va pas s'occuper de ça.

Alain Connes : Non, on va pas s'occuper de ça mais alors maintenant, je voulais te signaler un autre fait, dont je ne sais pas si tu le connais. Bien sûr, tu as connu sûrement Paulo Ribenboim.

Jean-Pierre Serre : Ribenboim. Ah oui, oui, charmant, charmant !

Alain Connes : Tu vois qui c'est ?! Charmant, charmante personne.

Jean-Pierre Serre : Attends, il est d'Afrique du Sud ou il est...

Alain Connes : Non, il est du Brésil.

Jean-Pierre Serre : Ah du Brésil.

Alain Connes : Du Brésil, et puis il alterne entre Kingston, le Brésil, et puis Paris aussi.

Jean-Pierre Serre : Il fait de la théorie des nombres.

Alain Connes : Oui, et il fait de la théorie des nombres. Alors, je l'ai vu récemment, je l'ai vu récemment, et il m'a appris quelque chose.

Jean-Pierre Serre : Il est presque aveugle, je crois ?...

Alain Connes : Oui, malheureusement, il est presque aveugle, mais si tu veux, il utilise les moyens informatiques pour y voir, c'est-à-dire que bien qu'étant presque aveugle, il a une machine qui amplifie considérablement les caractères,

Jean-Pierre Serre : Ah !

Alain Connes : Et donc en fait il est encore capable de...

Jean-Pierre Serre : De taper à la machine ?

Alain Connes : Non, pas de voir, mais de lire ce qu'on lui envoie, etc. Et alors, j'ai discuté avec lui, et il m'a appris quelque chose de très intéressant. Il m'a appris qu'en fait, Grothendieck était venu dans les années 2000 secrètement à Paris, tu n'étais pas au courant ?

Jean-Pierre Serre : Ah bon ?

Alain Connes : Tu ne le savais pas, ça ?

Jean-Pierre Serre : Mais, euh, faire quoi ?

(Rires)

Alain Connes : Et alors, il était venu parce qu'il voulait absolument encore faire une tentative pour faire publier *Récoltes et Semailles*. Donc apparemment, il est venu, il est resté dans l'appartement de Paulo Ribenboim, qui a un appartement à Paris.

Jean-Pierre Serre : Ah.

Alain Connes : Et il a voulu...

Jean-Pierre Serre : Avec Odile Jacob, peut-être ?

Alain Connes : Non, je ne pense pas. Non, elle me l'aurait dit.

Jean-Pierre Serre : Parce que initialement, il avait été question d'Odile Jacob.

Alain Connes : Bien sûr, mais Odile m'a raconté ce qui s'était passé, si tu veux.

Jean-Pierre Serre : J'avais été, on m'avait contacté, mais il y a longtemps de ça, bien avant 2000, sur la publication de ça, et finalement, j'avais hésité, puis j'avais donné un avis défavorable parce que, il dit vraiment des choses méchantes sur Deligne, Illusie, et vraiment, pour ces gens-là, qui sont des gens bien, de voir ça écrit, publié, et auquel ils ne peuvent pas répondre, tu vois, c'est, c'était vraiment désagréable.

Alain Connes : De ce point de vue-là, c'est très désagréable.

Jean-Pierre Serre : Pour Deligne, en particulier.

Alain Connes : C'est sûr. Non, non, ça, c'est évident que...

Jean-Pierre Serre : Je crois que c'est peut-être bien la SMF aussi qui voulait...

Alain Connes : Ah bon ?!

Jean-Pierre Serre : ...qui s'était posé la question. Peut-être que c'était la SMF qui m'avait contacté.

Alain Connes : D'accord, d'accord, oui.

Jean-Pierre Serre : Il avait dû... Mais j'avais hésité parce que c'est intéressant, il n'y a pas de doute.

Alain Connes : Il y a quand-même beaucoup de choses intéressantes. C'est-à-dire tout le côté polémique, bon, ben, si on pouvait le laisser de côté, le reste est intéressant...

Jean-Pierre Serre : Quelle longueur ça a, je ne me souviens plus...

Alain Connes : C'est pas si long que ça, une fois que c'est tapé, une fois que c'est tapé, ça fait à peu près...

Jean-Pierre Serre : 600 pages ?

Alain Connes : Oui, c'est ça, ça fait à peu près entre 500 et 600 pages. Donc, c'est pas...

Jean-Pierre Serre : Oui, ça fait un livre.

Alain Connes : Oui, c'est publiable. La question, et ça, il le dit très bien au début, c'est qu'il a essayé d'écrire quelque-chose qui appâte le lecteur, etc, ça, il n'a pas réussi, je veux dire le lecteur non mathématicien.

Jean-Pierre Serre : Non, en tout cas, un jour, ce sera publié.

Alain Connes : Oui, je crois que ça va même être publié, il me semble que... Je sais pas si c'est pas Hermann qui va... En tout cas, j'ai entendu ça.

Jean-Pierre Serre : Bon.

Alain Connes : J'ai entendu ça, j'ai entendu ça récemment.

Jean-Pierre Serre : Bon, écoute, on ne m'a pas demandé.

Alain Connes : Non, non, bon, mais enfin, bon, je veux dire, il vaut mieux se tenir à l'écart de ça. Mais si tu veux, c'est vrai que moi, j'ai quand-même, j'ai quand-même regretté que les passages vraiment intéressants, parce qu'il y a des passages intéressants, soient inaccessibles.

Jean-Pierre Serre : Alors, c'est quand-même difficile d'extraire, alors, ça m'est arrivé, j'ai extrait 3 pages, sur les motifs, tu sais, j'ai écrit quelque chose sur les motifs, et j'ai recopié les 3 à 4 pages de lui, splendides !

Alain Connes : Oui, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Splendides, et où il n'engueule personne, il ne dit pas de mal de quelqu'un, et j'ai eu son autorisation.

Alain Connes : Tu as eu son autorisation ?

Jean-Pierre Serre : A l'époque.

Alain Connes : C'était pas trivial d'avoir son autorisation. Et tu sais ce qui s'est produit, personne ne le sait ça, je ne sais pas si je devrais en parler mais bon.

Jean-Pierre Serre : Si, tu peux en parler.

Alain Connes : Ce qui s'est produit, au 50ème anniversaire de l'IHES, c'était un peu avant, c'était au mois de septembre.

Jean-Pierre Serre : C'était quand, ça, le cinquantième anniversaire de l'IHES ?

Alain Connes : ben, c'était il y a 10 ans, donc, c'était en 2008, l'année de la mort de Cartan, il y a 10 ans. Et au mois de septembre, Grothendieck a écrit à la bibliothécaire de l'IHES pour lui demander des livres.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, j'avais entendu parler de ça.

Alain Connes : Tu es au courant de ça ?

Jean-Pierre Serre : Non, je ne suis pas au courant, mais j'avais entendu parler de quelque chose comme ça. Et alors, on lui a envoyé ces livres, ou pas ?

Alain Connes : Non non, il s'est fait, malheureusement, ça a été malencontreux, que la bibliothécaire était en vacances à ce moment-là. Donc, la lettre de Grothendieck n'a pas eu de réponse, bon, n'a pas eu de réponse immédiate.

Jean-Pierre Serre : Mais enfin, elle va rentrer de vacances au bout d'un certain temps quand-même.

Alain Connes : Oui, bon, mais il s'est un peu impatienté et donc il a écrit au directeur.

Jean-Pierre Serre : Oui, d'accord, en effet, pourquoi pas ?

Alain Connes : Pourquoi pas ? Il se fait que le directeur était absent à ce moment-là...

Jean-Pierre Serre : Aïe !

Alain Connes : Et qu'à ce moment-là, la personne qui a répondu à Grothendieck n'était pas le directeur, enfin, si tu veux, c'était... Alors là, il a commencé à y avoir un embrouillaminis parce que finalement la réponse était un peu une réponse un peu générique, si tu veux, en disant que bon, etc. Et là, le ton est monté.

Jean-Pierre Serre : En disant que c'était pas possible, quoi.

Alain Connes : Pas en disant que c'était pas possible, mais en disant que, pfff, peut-être y aurait des délais, enfin, etc. Enfin...

Jean-Pierre Serre : Bon, enfin, c'était pas ce qu'il voulait, quoi.

Alain Connes : Enfin, c'était pas ce qu'il voulait, donc le ton est monté. Et Grothendieck a écrit une lettre beaucoup plus virulente comme il était capable de le faire...

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Oui, plus énergique, oui, déjà qu'il est énergique par nature.

Alain Connes : Après, bon, le directeur était rentré et le directeur a essayé de répondre.

Jean-Pierre Serre : Qui c'était le directeur à l'époque ?

Alain Connes : C'était Jean-Pierre Bourguignon, qui était un excellent directeur.

Jean-Pierre Serre : Bourguignon, qui sait arranger les choses.

Alain Connes : Oui, oui, bien sûr, alors il a essayé d'arranger les choses, en expliquant que bon, il était absent, etc. Mais le ton est monté. Et Grothendieck a en fait téléphoné à Lafforgue, à Laurent Lafforgue, chez lui. Alors Lafforgue est un admirateur de Grothendieck absolument inconditionnel comme tu sais, il a sa photo sur son bureau, etc. Et un jour, Laurent Lafforgue était rentré chez lui, le téléphone sonne et il entend une voix !

Jean-Pierre Serre : Mais, qu'il ne connaissait pas... !

Alain Connes : Mais bien sûr que non ! Et alors là...

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Ah, il a cru que c'était un canular ?

Alain Connes : Non, non, non, non, non, il était absolument abasourdi parce qu'il entend, au téléphone : "C'est Alexandre Grothendieck." Donc évidemment, et alors là...

(Rires)

Alain Connes : ... ce que Grothendieck lui a demandé, il lui a demandé de transmettre à tous les membres du Conseil Scientifique, à l'époque, je faisais partie du Conseil Scientifique, une copie de ses lettres, et de l'échange qui avait eu lieu. Et c'est là que j'ai appris que Grothendieck était réfugié, je savais pas où il était, je n'avais aucune idée d'où il était...

Jean-Pierre Serre : Il était déjà dans les Pyrénées, à ce moment-là, oui ?

Alain Connes : Bien sûr, il était dans les Pyrénées depuis 90, donc là, on était en 2008, hein, on était en 2008 déjà. Depuis, je pense 91 ou 92, il était déjà dans les Pyrénées.

Jean-Pierre Serre : Il était déjà à Lasserre, ou un endroit comme ça ?

Alain Connes : Peut-être, écoute, tu vas rigoler : moi, j'ai pensé que c'était pas un hasard...

(Rires)

Alain Connes : Si l'endroit où Grothendieck s'était réfugié...

Jean-Pierre Serre : Peut-être, en tout cas, c'est joli...

Alain Connes : L'endroit s'appelait Lasserre. Parce que, je veux dire dans *Récoltes et Semailles*, il y a tout un développement, sur le yin et le yang, etc., et sur l'idée que Grothendieck, justement, a un côté féminin dans son approche des mathématiques, qui est pas complètement dénuée de sens, hein, je veux dire, et alors, le fait qu'il soit réfugié...

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est ça qui est curieux, effectivement, ça peut intéresser qu'il considérait qu'il avait un esprit féminin en maths, et que moi, j'avais un esprit masculin. Alors que moi, j'ai jamais connu quelqu'un d'aussi masculin que lui, quoi, c'était...

Alain Connes : D'aussi, tu veux dire...

Jean-Pierre Serre : D'aussi, ah, c'était incroyable !

Alain Connes : Ah ! Et dans la correspondance, c'est clair, aussi, quand-même, germanique !

Jean-Pierre Serre : Il se considérait lui comme à caractère féminin, et moi comme au contraire, à caractère masculin.

Alain Connes : Tout à fait. Pour lui, toi, tu étais le prototype du caractère masculin.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui.

Alain Connes : Bon mais tout ça, c'est expliqué en grand détail dans *Récoltes et Semailles*, moi, ça m'a beaucoup amusé.

Jean-Pierre Serre : Ca, c'est rigolo quand même, mais non, mais ça, il le prenait au sérieux, ça.

Alain Connes : Ah, il le prenait au sérieux.

Jean-Pierre Serre : Au contraire, il le prenait au sérieux. D'ailleurs, c'est une caractéristique de Grothendieck, il prenait *tout* au sérieux.

Alain Connes : Et d'ailleurs, c'est une question que je voulais te poser : que finalement, ce qui ressort beaucoup de ses écrits, c'est qu'on n'a pas l'impression qu'il a un sens de l'humour.

Jean-Pierre Serre : Non ! Non, non, non, il a un sens de... un espèce de devoir intellectuel, de pousser les idées jusqu'au maximum, de les approfondir, c'était une grande honnêteté intellectuelle de Grothendieck.

Alain Connes : Oui, mais pas de sens de l'humour, pas de sens de l'humour.

Jean-Pierre Serre : Ah non, c'est pas compatible.

Alain Connes : C'est pas compatible, pas de sens de l'humour.

Jean-Pierre Serre : J'imagine pas, je ne me souviens pas de l'avoir entendu rigoler, ou peut-être pour d'autres choses, mais...

Alain Connes : Tu dis c'est pas compatible mais, en voyant l'interview de Cartan, on ne peut pas ne pas être frappé par le fait que Cartan avait un sens de l'humour incroyable, tout en étant très sérieux.

Jean-Pierre Serre : Oui, mais Cartan n'aurait pas pu faire l'œuvre de Grothendieck, c'est évident, avec un caractère comme ça, moi non plus d'ailleurs.

Alain Connes : Oui, oui, je comprends ce que tu veux dire.

Jean-Pierre Serre : Il y a une certaine, je ne sais pas comment dire, il y a une force, ça demande une force énorme. Et ça n'est pas compatible avec rigoler.

(Rires d'Alain Connes)

Entre deux, temps et vérité
Alain Connes et Daniel Sibony
Un dialogue organisé
par la Fondation Hugot
du Collège de France,
2019

Alain Connes : Bonjour, Daniel Sibony.

Daniel Sibony : Bonjour.

Alain Connes : Donc, ça me fait vraiment très très plaisir de pouvoir discuter avec toi. Alors je vais commencer par te présenter parce que tu as une carrière assez atypique vraiment, c'est-à-dire que tu es mathématicien, tu as une thèse de mathématiques.

Daniel Sibony : Au départ.

Alain Connes : Au départ, avec Gustave Choquet. Tu es philosophe, tu as une thèse de philosophie, je disais avec Desanti, mais bon, plus précisément. Et puis, tu as une pratique de psychanalyste. Alors la manière que j'ai choisie pour pouvoir te présenter, c'est en fait de lire une page d'un de tes ouvrages, que j'ai trouvée très touchante, parce que finalement, ça en dit plus sur toi que beaucoup de titres ronflants, etc.

Daniel Sibony : Je suis curieux.

Alain Connes : Donc tu me permets de la lire, voilà. C'est un livre qui s'appelle "Entre deux, et l'origine en partage". Là, ça va être vraiment l'origine en partage, et après, ça va être entre deux, c'est-à-dire que tous les deux, on va discuter entre 2 extrêmes. Tu dis : "J'en ai connu l'impasse autrefois, étant élève à Marakkech dans une école juive qui avait pour mission d'occidentaliser les petits marocains que nous fûmes. Ma connaissance de l'arabe, ma langue maternelle, m'y joua de mauvais tours, en m'apprenant beaucoup sur cette peur que l'autre peut avoir de lui-même, de son origine réveillée. J'avais les pires notes en français, souvent des 0, alors que j'aimais écrire, et que mes textes étaient assez pittoresques. Mais c'est que le professeur était révulsé d'y trouver de fortes traces de ma culture indigène, culture et langue dont il était averti mais qu'il semblait gêné de connaître et dont il supportait mal les mélanges avec l'écriture française qu'il nous donnait pour idéal, idéalement plate. Mes rédactions étaient souvent lues, à la remise des copies, et toute la classe se tordait de rire, y compris moi. L'expression correcte cachait mal et même montrait complaisamment les gestes grotesques de nos modes d'être qui semblaient un peu honteux, au regard des petits Classiques Larousse qui indiquaient la vraie culture. Une fois lues, mes copies recevaient leur juste sanction : 0. Après quoi était lue la copie modèle où tout le monde, mine allongée, s'ennuyait ferme. Phrases convenues, tournures sans vie. Voilà qui s'appelle "Bien écrit" martelait le professeur : "ce n'est pas farcesque, c'est élégant.". J'en ai gardé un fort dégoût pour les textes bien écrits et creux. Je n'avais pas alors, à 12-13 ans, les moyens de comprendre que je froissais dans ses troubles démêlées avec l'origine, avec ce qu'il en refoulait. Je croyais naïvement qu'écrire, c'était articuler des blocs de sens et de mémoire, de sensations et de rappels, avec les mots qui s'offrent, d'où qu'ils viennent pourvu que ce soit juste, c'est-à-dire authentifié par la vie d'au moins un être, qui en l'occurrence était moi. J'acceptais donc, sans trop y croire, mon étiquette : nul en français. Et je tremblais lorsqu'arrivant en France, à 14 ans, je fus placé dans un internat où tous parlaient français naturellement. Pourtant, le jour où le professeur remit la première copie, il déclara, péremptoire : "Ici, il y en a un qui sait écrire.". Et il avait pointé du doigt dans ma direction. Je me retournais pour voir ce type à qui l'écriture souriait. Derrière, il n'y avait personne. J'appris vite, après, que ce professeur aimait par-dessus tout les textes originaux. C'était sa façon heureuse de transmuer les rapports avec l'origine.". Je veux dire, quand j'ai lu ça, j'ai dit : "C'est vraiment Daniel". Et c'est vrai que...

Daniel Sibony : Je suis très touché que tu sois tombé sur ce texte, comme ça.

Alain Connes : Absolument. Parce que, qu'est-ce que tu veux, ça veut dire qu'en fait, dans un individu, ce qui m'intéresse, justement, c'est ce qui sort de l'ordinaire, ce qui est original, ce qui n'est pas du tout typique, etc., qui n'est pas du tout comme l'écriture telle qu'on la veut, etc. Et c'est comme ça que je te perçois. Et si tu veux donc en fait dans ton parcours, il y a quelque chose qui est très marquant, c'est que donc, tu étais mathématicien avec Gustave Choquet, et un jour, tu as décidé que... Je sais pas, tu as décidé de changer un peu de trajectoire. Comment est-ce que ça t'est venu ?...

Daniel Sibony : Il y a beaucoup de raisons, c'est ce qu'on appelle un acte surdéterminé, ça veut dire beaucoup de vecteurs convergent là, mais c'est vrai que, je me rendais compte que j'étais travaillé par toutes sortes de pensées, qui *devaient* s'exprimer, et qui ne trouvaient pas une expression mathématique.

Alain Connes : Bien sûr.

Daniel Sibony : Et que le travail mathématique, ne suffisait pas, chez moi, à combler ce désir. Et donc, j'ai fait de la philosophie, et puis j'ai fait de la psychanalyse.

Alain Connes : Tu as fait une psychanalyse avant de devenir psychanalyste.

Daniel Sibony : Ah oui, j'ai fait un long contrôle, à l'époque, c'était avec Lacan. Et comme je le fréquentais aussi de près parce qu'il aimait les maths et qu'il voulait que je lui explique des choses alors ça m'a évité d'être Lacanien, et même d'entre anti-Lacanien. Donc je suis très libre, par rapport à cette pensée. Et donc, c'est comme ça que, petit à petit... Mais par rapport à ce dont on va sûrement discuter, c'est-à-dire le temps, la physique, les maths,...

Alain Connes : Oui, c'est comme ça que tu m'avais contacté, oui, bien sûr...

Daniel Sibony : Je me suis rendu compte que bizarrement, mon travail en maths avait porté, on y reviendra tout à l'heure, avait porté sur une idée qui toi t'est familière, et que tu as génialement appliquée dans d'autres domaines, partait de l'idée d'un paquet de fonctions qui devraient avoir certaines propriétés intrinsèques pour qu'il en sorte du temps. Et ça, c'était l'idée sur le temps, le souci du temps a même marqué mon travail mathématique et quelques années plus tard, quand j'ai écrit un de mes livres comme ça, qui s'appelle "Psychanalyse et écriture", le titre est plus bizarre, c'est "L'autre incastrable", j'avais écrit un gros texte sur le temps, où j'ai mis vraiment toutes mes questions et tout ce que je ressentais, et donc j'ai été travaillé par le temps, tout le temps.

Alain Connes : D'accord, alors en fait, si tu veux, ce que je pense, c'est que justement, nous allons avoir un dialogue et qu'en fait, ce dialogue, ça va être un entre-deux, mais pas entre nous deux, ça va être entre deux extrêmes. Et ces deux extrêmes, si tu veux, justement, tu as parlé de Lacan, il y a eu une période où on pourrait dire qu'il y avait un grand danger dans le post-modernisme, qui était d'utiliser des concepts scientifiques qui n'étaient pas vraiment digérés, pour finalement essayer d'avoir un ascendant psychologique, essayer d'acquérir un ascendant psychologique, sur des gens qui, eux, n'étaient pas capables de comprendre ce langage. Donc ça, c'est un extrême, c'est un extrême qui a été mis en évidence dans le livre de Sokal, sur Impostures intellectuelles.

Daniel Sibony : J'ai dénoncé cet aspect-là, tout au long...

Alain Connes : Tu l'as dénoncé, bien sûr, je te fais entièrement confiance. Et il y a un autre extrême, sur lequel il faut que nous soyons très vigilants, c'est l'extrême consistant à parler de notions techniques, qui pour être correctes, mathématiquement ou physiquement, vont quand-même être difficile à comprendre par notre auditoire. Donc il faut qu'on arrive à naviguer entre ces 2 extrêmes et il faut qu'on arrive à rester compréhensible.

Daniel Sibony : J'ai confiance.

Alain Connes : Si tu veux, je pense qu'on pourrait commencer, j'avais comme idée qu'on pourrait commencer par aborder le temps, comme tu l'as proposé, et ensuite, d'aller sur un autre sujet, qui est très relié, d'une certaine manière, et qui est la notion de vérité. Donc, c'est vraiment deux sujets fondamentaux, deux sujets fondamentaux sur lesquels je pense que nous avons tous les deux des choses à dire et en fait, moi je m'en tiendrai aux seules choses que j'ai à dire dont je suis certain mais dont je ne conçois pas du tout la portée philosophique ou autre, parce que je ne suis pas philosophe, parce que je suis simplement scientifique, si tu veux, mais ça sera pareil sur la notion de vérité puisque là, vraiment, il y a beaucoup de choses à dire. Donc sur le temps, en fait, j'ai eu une trajectoire mathématique sur laquelle ça a joué un rôle absolument essentiel, mais, en fait, la principale observation, la chose essentielle à laquelle je suis arrivé, c'est qu'en fait, il y a quelque-chose qui est beaucoup plus fondamental que cette ligne du temps à un paramètre...

Daniel Sibony : que la variation du temps.

Alain Connes : ... que la variation du temps, voilà, exactement. Je me souviens, j'avais un professeur de maths spé, qui m'avait interrogé, et qui avait fait ça *(geste d'un index suivant une courbe dessinée sur un tableau imaginaire)* et il avait dit "M. Connes, quelle est la variable ?". Alors on faisait de la cinématique, etc., j'avais pas mal réfléchi, j'avais pensé "c'est x ou y ?", et puis j'avais fini par lui dire "c'est le temps". Effectivement, ce dont on s'aperçoit mais là, ça demanderait des explications techniques, et je m'abstiendrai de les donner, c'est que la vraie notion, c'est moins le passage du temps, que ce que j'appellerai la variabilité. Et là, on s'aperçoit d'un phénomène qui est absolument fondamental, qui est absolument crucial, qui est l'une des plus grandes découvertes du XX^ième^ siècle donc ça n'existait pas avant, c'est que quand on fait des expériences, dans le domaine microscopique, c'est-à-dire dans ce qu'on appelle le quantique, c'est simplement au niveau expérimental, il n'y a pas besoin d'avoir une théorie pour ça, donc il se fait qu'il y a certaines expériences, par exemple, le fait de faire passer un photon à travers une toute petite ouverture, et puis de le faire atterrir sur une cible à l'arrivée, alors ça, ça peut se faire dans un iphone, eh bien, l'expérience qui consiste à dire que le photon va arriver à tel endroit n'est pas reproductible. Et c'est à cause de ce phénomène que des ingénieurs suisses ont fabriqué un appareil, qu'on peut mettre dans un iphone, qui fabrique des nombres aléatoires, mais contrairement aux ordinateurs qui peuvent fabriquer des nombres aléatoires, même si l'on connaissait tous les tenants et les aboutissants du système, on serait incapable de reproduire les nombres aléatoires en question.

Daniel Sibony : Alors, si tu permets, c'est bien parce qu'il y a des phénomènes comme ça, et qui m'ont touché, que j'étais content à l'idée qu'on se rencontre, et qu'on discute, mais vraiment librement, et à fond. Je reprends l'exemple de ton prof, qui m'a touché, j'y ai réfléchi, et figure-toi, bien sûr, tu as répondu "la variable, c'est le temps, parce que voilà..."

Alain Connes : C'est ce qu'il attendait.

Daniel Sibony : Et puis, ça va de soi, ça *semble* aller de soi. En réalité, tu n'avais pas le point de vue quantique, et spectral, que tu as eu plus tard, mais tu aurais pu lui dire que la variable, c'est les mouvements de son doigt, et ça, c'est , non seulement c'est logique, mais c'est non-commutatif, c'est-à-dire que s'il fait ça *(esquissant la fin du mouvement)*, il ne peut pas le faire s'il n'a pas fait ça avant *(esquissant le début du mouvement)*. C'était la danse de son corps si tu veux.

Alain Connes : Je comprends ce que tu dis.

Daniel Sibony : Et ça, ça rejoindrait, je ne sais pas, je pense à une phrase d'Héraclite et qui est "le temps est un enfant qui joue.". C'est-à-dire un enfant qui permute des gestes, des mouvements, et c'est pas eux qui sont le temps, le temps, c'est la possibilité de faire tout ça. Et ça, ça rejoint, de loin, la variabilité qui t'est chère.

Alain Connes : Tout à fait. Maintenant si tu veux, ce qui s'est produit au niveau mathématique, on s'aperçoit si on réfléchit vraiment mathématiquement, posément, à ce qu'est une variable réelle, alors les mathématiciens croient qu'ils savent ce qu'est une variable réelle en disant qu'ils ont un ensemble X et qu'ils ont une application qui va de l'ensemble X dans $\mathbb{R}$, dans les réels. Et en fait, on s'aperçoit assez vite, si on réfléchit, mais de manière naïve, mais c'est ce qu'il faut faire, on s'aperçoit que cette notion, aussi standard soit-elle, de variable réelle, en fait, elle ne permet pas de faire vivre en même temps, le continu et le discret. Bon, alors je ne vais pas rentrer dans les détails techniques mais alors ce qui est extraordinaire, c'est que le quantique, par définition, presque par définition, au départ, c'était l'irruption du discret dans ce qui aurait dû être le continu, c'est-à-dire ce que Planck a fait à la main : en gros, je peux raconter un peu l'histoire quand-même, c'est que Planck a trouvé, de manière presque empirique, une formule mathématique, qui décrivait très bien les hautes températures, et les basses températures, il était dans un institut où on faisait des expériences de corps noir, à basse et haute température, et il a trouvé une formule mathématique. Dans cette formule mathématique, il était obligé de prendre une fonction vraiment non triviale d'une quantité qui avait des dimensions, les dimensions d'une action. Alors c'est impossible parce qu'en physique, normalement, quand on fait des calculs, on ne peut pas rajouter une longueur et le carré d'une longueur. Donc, cette fonction, il a été obligé... et cette fonction, c'était une fonction exponentielle, il ne pouvait pas, il pouvait... Et la seule chose qu'il pouvait faire, c'était de définir une constante d'action, arbitraire, la constante de Planck, et lorsqu'il divisait la quantité qu'il devait mettre par cette constante d'action, elle devenait sans dimension, et donc on pouvait lui appliquer n'importe quelle fonction. C'est ce qu'il a fait. Et bon, après, eh bien on a compris, lui l'a dit mais il ne comprenait pas vraiment ce qui se passait, que ça signifiait que l'énergie était discrète, c'est-à-dire que c'étaient des multiples entiers, c'est-à-dire que l'énergie d'un photon, c'est des multiples entiers de cette constante fois la fréquence. Alors donc en fait, ce qui est absolument extraordinaire, c'est que l'impossibilité mathématique de représenter ce qu'on appelle des variables, par quelque-chose de simple, comme des applications d'un ensemble dans la droite réelle, elle a été complètement résolue par la mécanique quantique, et le formalisme de la mécanique quantique, qui a été trouvé par Heisenberg et puis par Von Neumann, a permis de comprendre qu'en fait, une variable réelle, il ne fallait pas y penser comme à une fonction, mais il fallait y penser comme à un opérateur d'un espace de Hilbert, et à ce moment-là, on s'aperçoit que les variables discrètes coexistent magnifiquement avec les variables continues, sauf qu'elles ne peuvent pas commuter. C'est-à-dire qu'il est impossible, pour une variable continue, de commuter avec une variable discrète. Et c'est cela qui fait tout le début du miracle quantique. Alors dans mon cas, ce qui s'est produit, c'est que ce que j'ai compris dans ma thèse c'est que lorsqu'on regarde un système quantique, mais on ne connaît que partiellement ce système, ça veut dire qu'on s'intéresse à des sous-systèmes, le sous-système admet, son propre temps émerge. Le propre temps du sous-sytème émerge du fait qu'on ne connaît pas tout, du fait qu'on a une connaissance limitée des choses, le temps apparaît, alors, ça, j'ai trouvé ça absolument miraculeux et pendant des années et des années, c'était très intéressant mathématiquement, parce que ça donnait toute une série d'invariants que j'ai trouvés dans ma thèse sur ce qu'on appelle les facteurs, les algèbres de Von Neumann mais pendant de très nombreuses années, j'avais essayé, un peu bêtement, de réconcilier cela avec la physique et je n'y étais pas arrivé, ça me paraissait évident que ce temps qui apparaissait de manière naturelle à partir du quantique, devait être lié à la physique, jusqu'au jour où, à l'occasion d'une rencontre que j'ai racontée trop souvent déjà, celle de Carlo Rovelli, j'ai rencontré quelqu'un qui était un philosophe, un physicien mais qui en fait est plus philosophe que physicien, et qui en réfléchissant abstraitement sur la gravitation, avait trouvé que, à un état thermodynamique, donc un état d'équilibre thermodynamique, devait être associée une évolution, un temps, dans ce sens-là, et c'est exactement ce qu'on avait dans le cadre mathématique. Donc, à ce moment-là, qu'est-ce qu'on éprouve en tant que non-philosophe, mathématicien, physicien, etc., on se dit "Bon, il y a quelque-chose, là". Bon alors on n'est pas capable de poursuivre suffisamment, mais, on ne peut s'empêcher de se questionner, on ne peut s'empêcher de se poser toutes sortes de questions, et de se questionner vraiment sur... Quelle est la question à laquelle j'ai abouti, quelle est la question fondamentale, c'est "ne comettons-nous pas une erreur fondamentale en disant que toute la physique est basée sur l'évolution dans le temps, c'est-à-dire en disant qu'en fait, les équations de la physique sont des équations de la forme $\frac{d}{dt}$ égale quelque-chose d'autre, voilà.

Daniel Sibony : Alors tu veux que je te dise mon sentiment : mon sentiment, c'est que d'abord j'adore les phénomènes quantiques justement parce qu'ils sont d'un tout autre ordre, notamment cette variabilité d'un simple électron qui traverse un trou, qui te donne quelque-chose d'absolument non répétable, et en même temps universel. J'avais autrefois construit un concept que j'appelle singulièrement universel, ça veut dire que c'est absolument singulier...

Alain Connes : Ca reste singulier, c'est ça qui est extraordinaire, ça n'est pas un nuage.

Daniel Sibony : C'est singulier et c'est universel.

Alain Connes : Absolument.

Daniel Sibony : Donc, déjà, ça subvertit une opposition factice. Autre chose que j'ai beaucoup aimé, c'est que finalement, j'expliquais ça à quelqu'un qui ne connaissait rien à la physique qui me demandait "le quantique, c'est quoi ?". Je lui disais : "voilà, vous prenez ce verre, il contient un nombre incalculable de particules, des milliards de particules,

Alain Connes : Des milliards de milliards, oui.

Daniel Sibony : Des milliards de particules, et ça se passe dedans. Mais si on va dedans, on n'y comprendra rien. Pour comprendre quelque-chose, pour aborder la vérité de ce phénomène, il faut se placer dans un espace de dimension infinie, dans un espace de Hilbert, avec des observables, qui sont des opérateurs, et là, on comprend, on a une vision claire ; autrement dit, et ça c'est très beau, et c'est très beau à la fois philosophiquement et poétiquement, et je dirais même, au point de vue thérapeutique, qui est le mien, psychanalytique, parce que souvent, on veut attaquer directement, au niveau du comportement : là, cette personne a ce comportement tordu, on va le lui réguler, on va le redresser, comme l'autre voulait redresser mon style, et on va le redresser directement. Et c'est pas vrai, il faut passer par un espace totalement abstrait, qui peut être la dimension inconsciente , ou même plus concrètement la dimension du symptôme et là, on voit les choses, et je t'en donnerai des exemples, qui permettent de débloquer ce comportement. Puisqu'on parle de temps, je pense à un exemple : une fois, il y a une personne qui est venue me voir, qui n'était même pas ma patiente, et qui m'a exposé son drame, c'est qu'elle avait tout le temps de la fièvre, mais pas n'importe quelle fièvre, elle avait toujours 38.

Alain Connes : C'est pas ordinaire oui.

Daniel Sibony : Tout le temps. J'étais un peu perplexe. Naturellement, voilà, qu'est-ce que j'ai de mieux à faire, lui faire raconter un peu son histoire, non pas que l'histoire soit totalement fiable, mais ça donne des éléments. Et elle raconte, elle raconte, et soudain, il sort de ma bouche cette question : "Mais vous n'avez quand-même pas 39 ?". Et elle me dit "Eh bien justement, en 39, ma mère a dénoncé mon père aux nazis", c'était une allemande, "et donc, je n'ai plus eu de père.". Et la disgrâce du père avait commencé en 38, parce qu'en 38, elle a commencé à le menacer. Et donc, il s'est écrasé, il se cachait, dès 38. Et là, je me suis dit, le temps, par la température, a fait un petit passage et s'est inscrit comme une espèce de pierre brûlante, dans le corps de cette femme ; évidemment, quand on a déployé ça, c'est-à-dire quand on a pris ce marquage 38 dans une histoire, dans 1938, la femme a perdu sa fièvre.
Alain Connes : *(estomaqué)* Mais attends, attends, alors là, parce qu'on a un exemple, je vais me faire l'avocat du diable, parce que je suis rationnel, mais pourquoi n'est-elle pas allé voir un docteur avant d'aller te voir ?

Daniel Sibony : Elle est allée voir des docteurs...

Alain Connes : Et ils n'ont rien fait.

Daniel Sibony : Eh bien, si. Ils la soignaient de sa fièvre et quand elle arrêtait les traitements anti-fière, elle avait toujours cette fièvre.

Alain Connes : Mais ils arrivaient à la soigner en lui donnant, je sais pas, de l'aspirine.

Daniel Sibony : Mais elle-même. Aujourd'hui, quelqu'un qui a 38, il prend 3 dolipranes, il a pas 38. Et puis un jour il arrête, et puis hop, c'était 38.

Alain Connes : Mais alors là, on touche aussi un autre point singulier, si tu veux, qui est la coïncidence numérique : c'est vrai que 38 et 39 avaient une signification pour elle, elle est quand-même jamais descendue en-dessous de 36.

Daniel Sibony : Mais si tu veux, le problème n'est pas là, ça aurait pu être un autre signe. Simplement, c'était pour te dire que quelquefois, il faut passer par des choses qui n'ont rien à voir, pour... Et à partir de là, le point qui moi m'a beaucoup intéressé, m'a passionné dans tes conférences, c'est justement que tu pars de cette donnée, de cette variabilité. Tu dis "on commet une erreur en associant cette variabilité au temps". Moi, je plaiderais pour une certaine indulgence pour le commun des mortels qui utilise la droite comme repérage du temps. Mais personne ne vit le temps comme un point qui se déplace sur la droite. Du coup, en réalité, je me suis aperçu que le temps qui est repéré comme un point de $\mathbb{R}$, c'est je dirais le minimum vital dont on a eu besoin, pour noter des choses qui concernent le temps, sachant que dans la vie, c'est tout autre chose. Regarde là, nous sommes en train de vivre un moment, ce moment est présent.

Alain Connes : Oui.

Daniel Sibony : Il implique nos présences et on n'a pas l'impression que c'est un instant t qui déjà est passé, donc il y a une certaine stabilité du présent. Et il y a aussi d'autres phénomènes, c'est-à-dire que si tu prends deux instants, tu te dis t_1 il est avant t_2, et quand on est dans t_2 c'est foutu, c'est fini, on ne parle plus de t_1 c'est terminé et les gens ont écrit des poèmes sur Nevermore, etc. Et en réalité, c'est pas ça, parce que les points t_1 et t_2, c'est comme s'ils portaient des fibres, ou des espaces fibrés, qui font qu'avec ces dimensions de plus, les fibres s'entremêlent, et l'instant ultérieur t_2 peut se retrouver avant t_1 dans... c'est pas le temps qui est inversé, c'est le rapport au temps.

Alain Connes : Je vais rebondir sur ce que tu as dit parce qu'il m'est arrivé de faire un exposé sur un séminaire d'Antoine Compagnon, qui parlait de Proust, et à ce moment-là, effectivement, j'ai donné une image qui est très proche de celle que tu donnes et qui est en gros la suivante : nous sommes habitués effectivement à voir le temps comme cette droite rectiligne et très justement, tu dis que c'est une image qui ne correspond pas en fait vraiment à la meilleure description et je pense... la description que j'avais donnée, en gros, était la suivante : ce que je disais c'est qu'en fait, dans la vie quotidienne, dans les écrits de Proust, etc., ce qui se produit, ce n'est pas du tout une droite, comme ça, indéfinie, mais c'est une droite qui s'enroule. Elle s'enroule sur elle-même, et finalement, j'avais donné une image géométrique, j'avais donné le tore, et elle s'enroule comme un feuilletage, pas comme un fibré, c'est-à-dire qu'en fait, ce qui se produit, c'est que dans notre expérience quotidienne, nous avons un certain nombre de périodicités, la périodicité diurne, celle de l'année, un tas d'habitudes, et ce sont ces habitudes qui donnent des repères sur ce tore et non pas sur cette droite indéfinie, et qui font qu'il y a un espèce d'éternel retour, et qui est parfaitement décrit dans Proust, en fait. J'avais repéré dans Proust un certain nombre d'énoncés, qui montraient précisément que la structure de son temps, il avait réussi à le structurer en écrivant *A la recherche du temps perdu* et qu'on arrivait à voir cet objet global sur lequel s'enroulait le temps naïf, qui est cette droite indéfinie, etc., mais qu'en fait, la vraie construction mentale à laquelle il arrivait, et à laquelle peuvent arriver des gens qui se retournent sur leur passé, c'était une structure beaucoup plus intéressante géométriquement que la droite indéfinie. Je pense que ça correspond à ce que tu disais.

Daniel Sibony : L'intéressant dans l'exemple que tu donnes pour moi, par rapport à Proust, le temps auquel arrive Proust, ce temps global...

Alain Connes : multidimensionnel, oui, bien sûr...

Daniel Sibony : C'est les 3 volumes de la recherche du temps perdu.

Alain Connes : C'est son bouquin.

Daniel Sibony : C'est son bouquin et le mot feuilletage est très bienvenu...

Alain Connes : Très approprié.

Daniel Sibony : Parce que avec le feuilletage du tore que tu décris, c'est-à-dire avec une droite qui s'enroule de façon irrationnelle et qui donc va tout couvrir, les feuillets, tu peux avoir des feuillets antérieurs qui viennent se synchroniser sur des feuillets ultérieurs. C'est-à-dire qu'en fait, tu donnes, avec cet exemple d'enroulement, tu donnes comme des fibres parce que les feuilles sont comme des fibres

Alain Connes : C'est ce que tu entends par fibres, localement, c'est une fibration.

Daniel Sibony : C'est une fibration locale mais ça te donne, ça te permet d'aborder ce phénomène qui tourne beaucoup de têtes, que j'ai appelé, qu'on appelle la synchronicité qui est que, c'est pas grave, c'est pas extraordinaire, que des trajets ultérieurs viennent chercher à se synchroniser sur un point donné, sachant qu'en plus, ils sont porteurs de sens, imagine-les comme des petits véhicules qui portent un paquet de signification et qui viennent amener la signification là où elle n'était pas. C'est magnifique et ça permet vraiment de démystifier et ça permet de garder cette droite, en l'occurrence enroulée...

Alain Connes : Elle reste là ?

Daniel Sibony : parcourue de fibrés.

Alain Connes : Elle reste là, oui.

Daniel Sibony : Simplement, je te comprends quand tu dis "pour le quantique, c'est pas la variable réelle qui va donner la vraie variation, c'est les opérateurs avec leur spectre, c'est-à-dire, justement, d'ailleurs le spectre, c'est pas malvenu non plus comme mot, parce que finalement, le spectre d'un opérateur, c'est quand-même quelque-chose qui à un facteur près, te donne une variation de l'identité.

Alain Connes : Surtout si tu veux, ça j'insiste beaucoup sur le fait que justement dans le quantique, ce qui se produit, donc, une variable réelle est remplacée par un opérateur auto-adjoint, et les *valeurs* de la variable réelle qui peuvent être soit discrètes soit continues sont remplacées par le spectre de l'opérateur. Donc en fait, le spectre de l'opérateur, ça veut dire sa propre variabilité, ça veut dire l'espace dans lequel il peut varier lui-même.

Daniel Sibony : Alors ce que j'ai beaucoup aimé, c'est que, avec ce montage, ce dispositif, tu arrives à extraire du seul fait que l'algèbre des opérateurs est non-commutative, tu arrives à extraire...

Alain Connes : du temps

Daniel Sibony : ...à extraire un groupe à un paramètre, c'est-à-dire du temps, c'est-à-dire tu arrives à montrer que l'algèbre évolue...

Alain Connes : Voilà, donc elle génère son propre temps, si tu veux.

Daniel Sibony : Et ça, un phénomène qui génère le temps dans lequel il se déroule, ça, je trouve ça super.

Alain Connes : Absolument. Je suis entièrement d'accord avec toi, en fait...

Daniel Sibony : Attends, je trouve ça très beau parce que, justement, ce qui m'a beaucoup travaillé tout au long des années, c'est ce que j'ai appelé déjà, dès ce livre de 78 *L'autre incastrable*, où j'introduis la notion d'objet-temps. Tu permets, j'en dis un mot ?

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr, je t'en prie.

Daniel Sibony : Et ce que j'appelle objet-temps, c'est un objet *porteur de temps* et dont tu peux extraire quelques filons temporels, exactement, ce que nous venons de dire, c'est que le dispositif d'une situation quantique, avec l'algèbre des opérateurs et le spectre, c'est un objet-temps. Mon dispositif, j'avais étudié autrefois la théorie du potentiel, où je partais d'un cône de fonctions et c'est ça qui m'avait plu et qui m'avait stimulé. Tu pars d'un ensemble de fonctions dont tu exiges qu'elles vérifient certaines propriétés qui n'ont rien à voir avec le temps, et tu en extrais le temps.

Alain Connes : Là tu vois, je trouve qu'on touche un point si tu veux crucial, je vais te dire pourquoi. Parce que justement, je crois que... j'avais lu par exemple dans Desanti, il a parlé d'objet-temps.

Daniel Sibony : Il a parlé d'objet-temps ?

Alain Connes : Il a parlé d'objet-temps, mais pas du tout dans ton sens. Et ce sur quoi je veux insister justement, c'est cette espèce de fil du rasoir sur lequel nous devons si tu veux nous promener et rester avec le plus grand soin possible qui fait que nous restons dans le vrai scientifique, mais qu'en même temps, nous arrivons à toucher, si tu veux, des notions qui sont acceptables, compréhensibles, mais nous restons dans le vrai, tu comprends ce que je veux dire.

Daniel Sibony : C'est mon souci majeur. Je ne connais pas ces textes de Desanti. Desanti était un ami mais ses réflexions sur les mathématiques, c'étaient pas tout à fait les miennes, c'était pas ma tasse de thé. Non, j'essaye d'avoir une réflexion intrinsèque, c'est-à-dire que quand il y a une situation, qu'elle soit philosophique, analytique, physique, les situations que tu as apportées, moi, je trouve ça merveilleux, non pas tant pour illustrer ma notion d'objet-temps, ça, on s'en fout, mais pour montrer que, finalement, chaque chose en son temps, dans son temps. C'est pas, on range des programmes, c'est que l'important dans une situation vivante, voir comment elle produit le temps dans lequel elle peut se dérouler. Et ç, c'est formidable, et il y a un autre phénomène que j'ai trouvé très beau, dont tu avais parlé aussi, c'était l'intrication quantique.

Alain Connes : Alors on va y venir. On va y venir, pourquoi ? Parce que si tu veux, une des idées qui se dégage de cette relativisation du temps disant que justement, on devrait peut-être s'intéresser à la variabilité avant de s'intéresser au temps, donc en fait, on a trouvé dans notre premier livre avec Danye Chéreau et Jacques Dixmier, on a trouvé une formule, bon, c'est toujours plaisant d'avoir des formules. Donc on a dit "L'alea du quantique est le tic-tac de l'horloge divine."

Daniel Sibony : Eh bien justement, je te dirai ce que j'en pense.

Alain Connes : Mais alors attends. Laisse-moi rebondir là-dessus pour dire la chose suivante, par rapport à l'intrication. Quand on discute l'intrication quantique, d'abord qu'est-ce que c'est. Donc, je rappelle en deux mots ce que c'est. Il y a eu au début de la mécanique quantique, c'est normal, un nombre incalculable de discussions philosophiques. Les discussions philosophiques, par exemple, étaient plus importantes, entre Einstein et Heisenberg, etc., que les équations elles-même. Les discussions philosophiques étaient absolument fondamentales. Alors il y a eu cet épisode bien connu de Bohr, Einstein pensait avoir trouvé une réfutation du principe d'incertitude...

Daniel Sibony : ... qui était fausse...

Alain Connes : Et Bohr a trouvé, grâce à Einstein, grâce à sa théorie de la relativité générale, que... Mais Einstein ne s'est pas découragé. Ca c'était au début des années 30. Mais Einstein ne s'est pas découragé. Et quelques années plus tard, il a produit avec Podelski et Rosen un paradoxe, auquel au début, personne n'a fait attention. Bohr l'avait réfuté en utilisant une méthode complètement cafouilleuse mais quand maintenant on regarde la courbe du nombre de citations de cet article, de Einstein, ça croît toujours de manière exponentielle. Donc, c'était une contribution absolument majeure. Et quelle était leur idée, quelle était l'idée qu'ils ont mis en avant, l'idée qu'ils ont mis en avant, c'est que... Bon alors, c'est vrai que...

Daniel Sibony : Comme par hasard, c'est 2 particules.

Alain Connes : Oui, c'est 2 particules. Ce qui est possible, c'est de créer deux particules, dont les moments sont exactement opposés. Et, comme elles sont créées au même endroit, leur position doivent être aussi reliées. Bon alors qu'est-ce qu'on fait maintenant ? C'est ça qu'on appelle l'intrication quantique, que dit la description de l'expérience ? Ce qu'on sait, enfin, ce que disaient Einstein, Podelski et Rosen, c'est qu'après tout, on va pouvoir mesurer la position de l'une et le moment de l'autre, et si on le fait de façon à ce qu'elles soient causalement séparées, eh bien, à ce moment-là, on aura, comme on sait l'égalité entre les moments, etc, on aura les 2 informations. Alors, en fait, la situation est bien plus intéressante que ça, et on a fait l'expérience et on s'est aperçu qu'il y avait effectivement cette intrication quantique, qu'elle existe, et en particulier, il y a Alain Aspect et toutes les expériences qui ont été faites, ont montré qu'il y avait effectivement l'intrication quantique mais ça paraissait alors extrêmement bizarre et ça paraît toujours extrêmement bizarre, qu'au moment où on fait une expérience sur l'une, ça signifie que quelque-chose va se passer sur l'autre, alors qu'elles sont causalement séparées, ça c'est ce qu'Einstein a appelé Spooky action at a distance.

Daniel Sibony : Bien sûr il n'y a pas une action à distance. C'est très clair, parce que si la distance est énorme, ça fait trop, mais, ce que j'aime là-dedans, c'est qu'il y a l'idée d'unité. C'est comme si ça forme une unité.

Alain Connes : C'est exactement le cas.

Daniel Sibony : Et si ça forme une unité, ce que tu dis de ce point est déjà répercuté sur l'autre.

Alain Connes : Voilà mon interprétation philosophique de ce genre de situation. Alors il se fait que l'homme essaie toujours d'écrire une histoire, du passé. Et dans ce cas, lorsqu'on essaie d'écrire une histoire impliquant le temps, on se plante, ça ne marche pas. Pourquoi ? Parce que les deux points sont spatialement séparés, causalement séparés, donc en fait, on ne peut pas écrire une véritable histoire. Quelle est mon interprétation ? Mon interprétation, c'est que dans cette situation, l'alea du quantique au point qui est ici et l'alea du quantique à cet autre point ne sont pas indépendants. Ils forment une unité.

Daniel Sibony : Voilà, ils sont connectés, ça veut dire que la variabilité a beau être absolue en chaque point, elle est surmontée par une connexion.

Alain Connes : Et qu'est-ce que cela devrait signifier ? Cela devrait signifier que exactement comme Einstein avait fait l'analyse du temps, à partir de l'expérience dans le train, il faudrait être suffisamment intelligent, pour faire ici l'analyse de la variabilité et comprendre qu'au lieu que l'alea du quantique soit complètement aléatoire, en fait, à cause de l'intrication quantique, il a une structure, et que c'est de cette structure que doit émerger, non pas le temps, parce que ça, je sais le faire émerger des équations, et de la non-commutativité, mais que doit émerger la structure générale. Donc ça, c'est un problème, je ne prétends pas que ce problème soit résolu, mais je prétends que la question devient brûlante, parce qu'on ne peut pas écrire d'histoire cohérente d'autant plus que le passé comme tu le sais n'est pas déterminé, à cause des expériences de Wheeler.

Daniel Sibony : Mais justement, peut-être pour relever, pour mettre en relief cet aspect de l'intrication quantique, il faudrait parler de l'expérience des 2 trous et de deux photons qui entourent une galaxie.

Alain Connes : Oui, bien sûr, surtout l'expérience de Wheeler. En fait, on peut le faire soit avec les 2 trous, soit avec des miroirs et les photons qui entourent une galaxie. Bon on ne va pas entrer dans les détails techniques, mais en gros, on va quand-même expliquer quel est le paradoxe. Le paradoxe, c'est qu'à un moment-donné, lorsqu'on fait une telle expérience où on a un photon qui se divise en 2, a priori, lorsqu'on le pense comme une onde, etc., et il peut faire des interférences à l'arrivée, eh bien en mettant à l'arrivée soit ce qu'il faut pour qu'il y ait une interférence, soit ce qu'il faut pour qu'on sache quel trajet le photon a pris, eh bien, ça va déterminer en fait ce qui s'est passé dans le passé. Et alors Wheeler a imaginé une expérience avec une galaxie intermédiaire, qui fait que les 2 trajectoires du photon vont se rejoindre à un instant bien bien ultérieur peut-être un milliard d'années plus tard, eh bien, qu'est-ce que ça signifierait ? Ca signifierait que selon ce que nous faisons maintenant, nous allons déterminer ce que le photon a fait il y a un milliard d'années. Donc qu'est-ce que ça signifie ? Ca signifie qu'en fait, le passé n'est pas écrit une fois pour toutes, ce qui est quand-même absolument fascinant.

Daniel Sibony : Et c'est ça qui est... Enfin, inutile de te dire que ça, ça m'enthousiasme parce que, si tu veux, d'abord, il y a un phénomène courant, qu'on trouve en psychanalyse mais que chacun connaît et qu'on appelle l'après-coup. Ca veut dire l'après-coup, il s'est passé un événement pour toi, à 4-5 ans, qui a été un peu marquant mais pas trop, et puis 30-40 ans plus tard, très longtemps après, se passe un autre événement, qui n'est pas identique, qui a une petite variabilité avec le premier, mais suffisamment proche, pour faire une espèce de résonance et là, le sujet s'aperçoit au second événement, que le premier était traumatique. C'est-à-dire la nature de l'événement passé n'apparaît que lorsqu'il questionne le passé, avec un grand écart, et aussi avec un certain intérêt pour la vérité, c'est-à-dire que s'est-il passé, *vraiment* ? On ne le saura peut-être pas mais ce qu'on sait, c'est qu'il s'est passé autre chose que ce qu'on croyait. Autrement dit, si on reprend maintenant en termes physiques, je trouve formidable que le passé soit instable,

Alain Connes : ne soit pas fixé,

Daniel Sibony : et dépende par surcouches qu'on ne connaît pas dépende de notre manière de l'interroger.

Alain Connes : Tout à fait, au temps présent ?

Daniel Sibony : Au temps présent. Si on réfléchit, c'est peut-être le montage-même de l'écriture. Tu parlais de Proust. Quelqu'un qui écrit un roman, qui écrit un article un peu créatif, etc., il écrit ce qui se présente mais il se laisse aborder par des choses qui vont reconvoquer autrement le passé, autrement dit qui vont transformer le passé. Il y a une forme caricaturale de ça, aujourd'hui, mais qui a dû exister, c'est les gens qui veulent réécrire l'histoire.

Alain Connes : Evidemment, c'est une évidence.

Daniel Sibony : Mais l'idée par elle-même est d'une grande beauté, ça veut dire aussi que la vérité, elle ne peut être qu'une dispersion, une distribution discrète, toujours partielle, et que c'est dans la récurrence des requestionnements qu'on arrive à se rapprocher plus de l'effet de vérité, qu'en inscrivant, de façon définitive, ce que la vérité doit être.

Alain Connes : Oui alors ça, c'est très intéressant, parce que ça nous conduit vers ce que c'est que la vérité et là, si tu veux, je pense qu'il faut qu'on soit assez organisés, pour la raison suivante : quand tu prends le travail du mathématicien, au premier abord, le travail du mathématicien est qu'il cherche à faire des démonstrations, il cherche à savoir si quelque chose est vrai. A la limite, il peut tester avec son ordinateur tester si quelque-chose est vrai etc. et au premier abord, même le mathématicien va avoir l'impression que soit quelque-chose est vrai, soit quelque-chose est faux, et puis qu'il va donc naviguer dans un univers qui est tout à fait simple, c'est à dire qu'il va simplement naviguer de l'un à l'autre. En fait, on s'aperçoit que cette idée-là, même en mathématiques, j'y reviendrai pour le reste après, même en mathématiques, est une idée fausse et la raison est la suivante, la raison est que ce que je viens de dire s'applique parfaitement à des propositions décidables ; par exemple, si je veux savoir si un nombre, par exemple 31 est un nombre premier ou pas, c'est ce qu'on appelle quelque-chose de décidable, c'est-à-dire soit c'est vrai, soit c'est faux, et on pourra le faire en un temps fini. Alors, maintenant, quand on discute justement des vérités en mathématiques, il faut faire très très attention, parce qu'il faut arriver à qualifier les énoncés, et il faut bien voir qu'il y a des énoncés qu'on appelle existentiels ou des énoncés universels. Alors ce que j'appelle par exemple un énoncé universel, c'est par exemple, quelque soit x, je ne sais pas, quelque soit un nombre pair, il existe... Bon d'accord. Mais ce qui va se produire, c'est que donc, ce que j'appelle un énoncé universel, c'est quelque soit x, mais quelque soit x, on va énoncer une propriété décidable, par exemple, on va demander que x s'il est pair soit la somme de deux nombres premiers. C'est un énoncé qu'on peut décider. Alors ce qui est absolument incroyable, c'est que, si on ne prend que les entiers, tout le monde sait ce que sont les entiers, ce qui est absolument incroyable, c'est qu'on sait, si on travaille avec les entiers, etc., on sait que si un énoncé est démontrable, il est vrai. On a toutes sortes de nuances entre ce qui est démontrable et ce qui est vrai et en fait, ce que l'on sait aussi, c'est qu'en fait, si on regarde la plupart des énoncés qui sont vrais sur les entiers, la plupart des énoncés vrais sont non démontrables. Donc, ça, c'est quelque-chose d'absolument incroyable, si on regarde la proportion, parmi les énoncés vrais, de ceux qui sont démontrables, on sait qu'il y a une quantité incroyable d'énoncés vrais qui ne sont pas démontrables. Et alors un exemple typique d'un énoncé qui est vrai mais qui n'est pas démontrable dans les axiomes de Peano, c'est un exemple que j'aime bien donner, je ne vais pas le donner techniquement mais je vais le dire comme ça, et le dire, j'espère, de manière coorecte : c'est qu'on prend un nombre, comme par exemple, le nombre 5, on l'écrit en base 2, on écrit que 5 est égal à 4 plus 1 mais on écrit que 4, c'est 2 puissance 2, on écrit tout en base 2, d'accord, et ensuite, on fait une opération que j'appelle le lièvre, parce qu'elle va augmenter considérablement la taille du nombre. On remplace tous les 2 par des 3, d'accord ?! Après, la tortue arrive et la tortue soustrait 1. On prend le résultat, on l'écrit à nouveau en base 3, etc. et on remplace tous les 3 par des 4, ça c'est le lièvre, puis la tortue arrive et elle soustrait 1, on réécrit le résultat en base 4, et on remplace tous les 4 par des 5, etc. L'énoncé qui est incroyable mais qui est vrai, et je vais te dire pourquoi mais qui n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano, c'est que c'est la tortue qui gagne. C'est l'histoire du lièvre et de la tortue bien sûr que je veux illustrer, c'est que bien que le lièvre fasse des pas absolument immenses, la tortue qui ne fait presque rien. Qu'est-ce qui va se produire ? Il va se produire des situations dans lesquelles quand on soustrait 1, on ne peut plus l'écrire de la même manière, il faut avoir changé d'écriture, etc. et alors, ce qui est incroyable, c'est que cet énoncé, on sait qu'on ne peut pas le démontrer dans l'arithmétique de Peano. Comment est-ce qu'on sait ça ? On sait ça parce qu'on sait que la fonction qui donne le nombre de pas qu'il faut pour que la tortue gagne est une fonction qui croît plus rapidement que toute fonction qu'on peut écrire. Or si on savait le démontrer, on aurait une borne pour cette fonction. Donc on sait que ce n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano. Pourquoi est-ce qu'on sait que c'est vrai ? Tu vas comprendre puisque tu étais élève de Choquet donc tu vas comprendre tout de suite : qu'est-ce qu'on fait ? On fait quelque-chose qui est magnifique, on remplace la base, qui était 2 puis 3 puis 4 par le plus petit ordinal infini, par ω et on s'aperçoit que quand on met ω, le lièvre ne change rien, et la tortue décroît de 1. Comme on a un ordinal, ça va finir par arriver vers 0. La démonstration est d'une simplicité incroyable, mais elle échappe à l'arithmétique de Peano, donc on a là un exemple qui montre à quel point la notion de vérité en mathématique est une notion incroyablement subtile et c'est une notion qui, bon, en pratique, le mathématicien qui travaille n'a pas à faire ces choses-là. Mais en fait, il se pourrait très bien qu'il y ait des situations assez communes, dans lesquelles ce genre de choses a un rôle. En tous les cas, l'image qui s'en dégage a été merveilleusement décrite dans un petit livre qui est le livre de Jean-Yves Girard, sur le théorème de Gödel, ce qu'il explique dessus, l'image qui s'en dégage, si tu veux, c'est qu'il faut voir le mathématicien comme quelqu'un qui est dans un tribunal et qui va essayer d'analyser la vérité. Il va avoir certains moyens, mais certainement pas celui de savoir si quelque-chose est vrai ou pas, si tu veux, sauf dans des cas très simples, bien entendu.

Daniel Sibony : Ce problème se pose, bien sûr, en mathématiques, mais dans bien d'autres domaines. Puisque tu parles de tribunal, il y a des causes qui sont vraiment justes, irréfutables, etc., et qui sont perdues au tribunal, parce que le langage dans lequel il faudrait les formules pour qu'elles soient même entendables, n'est pas là.

Alain Connes : N'existe pas.

Daniel Sibony : Donc l'intéressant, ça veut dire que la vérité, ça n'est pas une entité, ce n'est même pas une émergence ou un effet, c'est une corrélation entre deux langages, c'est-à-dire entre le langage qui porte l'objet, et puis le langage qui doit recevoir, qui doit authentifier.

Alain Connes : Oui, mais alors attends, alors là, il faut qu'on fasse très attention parce que si tu veux, par exemple dans ce livre, là, de Bricmont et Sokal, que j'ai lu attentivement pourquoi, parce qu'en fait, j'ai des choses à dire là-dessus, alors, quelle était leur idée ? Leur idée, l'idée d'*Impostures intellectuelles*, c'était que, et là, on est tous les deux d'accord là-dessus, il y a eu des abus, au moment du post-modernisme, c'est-à-dire qu'il y a eu des abus qui consistaient à utiliser un langage mathématique, qui n'était en fait, pas soutenu par la rigueur, et qui n'est surtout pas la connaissance.

Daniel Sibony : Si tu permets, même aujourd'hui, ça n'est pas que post-moderne. Il m'arrive d'écouter des conférences de vulgarisation de la physique et d'entendre des choses stupéfiantes, par exemple, d'entendre que du fait de la relativité, du temps, il n'y en a plus, le temps n'existe plus. Et ça, je trouve que...

Alain Connes : ...que c'est difficile à avaler, oui.

Daniel Sibony : Les gens qui ne connaissent pas la relativité, heureusement qu'ils résistent et qu'ils savent qu'il y a le temps, que le temps ici, n'est pas le même que là-bas, sur l'autre galaxie, c'est très bien, c'est-à-dire qu'on confond le temps et la mesure du temps, et on confond le temps avec le rapport au temps, donc il y a beaucoup de confusion, même chez des scientifiques.

Alain Connes : Bien sûr. Le fait d'être scientifique n'exclut absolument pas ce genre de confusion. Mais alors, ce qui m'a beaucoup frappé, en lisant ce livre, justement, de Sokal, leur but était louable d'une certaine manière, mais ce qui m'a énormément frappé, c'est que les gens qu'ils critiquent, il y a Bruno Latour, il y a Lacan, Lacan est en première ligne...

Daniel Sibony : J'espère.

Alain Connes : mais, ce qui m'a énormément frappé et là, je suis sûr que je vais me faire attaquer mais ça n'est pas grave, il y a quelque-chose que ces personnes ont ressenti mais qu'ils n'avaient pas le langage pour le dire, et je pense que ça va correspondre à ce que tu disais tout à l'heure.

Daniel Sibony : Dis-moi.

Alain Connes : Les gens disent que j'ai une marotte, c'est les topos de Grothendieck. Mais je vais en parler. Je vais en parler pourquoi, parce que cette marotte, en fait, Grothendieck l'a considérée comme sa plus grande découverte, et quand on la comprend vraiment, ce qui en fait, ce qui m'a amusé aussi, c'est de voir que les gens qui critiquent cette chose-là, en général, ne savent pas ce que c'est, et le critiquent en disant "oui, ça n'a pas eu d'impact sur les mathématiques" mais justement, si ça n'a pas eu d'impact sur les mathématiques, c'est parce que justement, les gens n'ont pas compris le sens que ça a. Et ça a un sens extraordinaire. Je vais t'expliquer ce que c'est, et t'expliquer en quel sens justement, ça permettrait à ces gens-là, qui ont essayé de s'exprimer, s'ils avaient eu ce concept, ils auraient pu s'exprimer.

Daniel Sibony : Ces gens-là, c'est-à-dire ?

Alain Connes : Bruno Latour, etc.

Daniel Sibony : Ah oui, des gens qui ont bricolé avec des choses, comme ils ont pu.

Alain Connes : Avec le langage commun.

Daniel Sibony : Oui bon.

Alain Connes : Avec le langage commun mais ils n'avaient pas les mots pour le dire. Alors je vais essayer d'expliquer, d'abord quel est le concept, et en quel sens ça change complètement la notion de vérité parce que c'est ça qui est fondamental. L'intérêt de ce concept, c'est que ça change la notion de vérité, ce qui est absolument fabuleux. Alors si tu veux, bon, c'est un concept mathématique abstrait. Quelle était la grande découverte qu'a fait Grothendieck ? Il s'est aperçu d'abord de la chose suivante. Je vais employer des mots techniques, mais si je n'emploie pas des mots techniques, on va m'accuser de... bon.

Daniel Sibony : Il faut.

Alain Connes : Ce qu'a trouvé Grothendieck, c'est qu'à un moment-donné, il a eu à écrire un article pour, c'était un article un peu de... tout le monde aurait dit c'était facile, c'étaient des choses qu'il devait compiler etc., c'était sur l'algèbre homologique, et en gros, il a écrit les axiomes des catégories abéliennes, mais les gens les connaissaient plus ou moins à l'époque, c'était pas ça qui était important, et par une élaboration de ces idées, en prenant des exemples, des exemples très intéressants, qu'il appelait les catégories de diagrammes si tu veux, il s'est aperçu de la chose suivante, il s'est aperçu qu'en fait, alors que lorsqu'on fait la théorie des faisceaux d'habitude, on prenait des faisceaux de groupes abéliens, et puis on regardait la cohomologie, etc., et il a eu l'idée de regarder non plus des faisceaux de groupes abéliens, mais des faisceaux d'ensembles, et à ce moment-là, il a fait deux observations qui sont géniales, la première observation qu'il a faite, c'est que, si on donne la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique, on peut reconstruire l'espace topologique, avec sa topologie, donc, c'est assez extraordinaire, parce que tu donnes une observation abstraite... Deuxième observation, quand on travaille dans la catégorie des faisceaux d'ensembles sur un espace topologique, c'est comme si on travaillait dans la catégorie des ensembles. Toutes les propriétés qu'on utilise d'habitude sont vraies, sauf le principe du tiers-exclus. C'est-à-dire qu'on a plus le droit de raisonner par l'absurde, sinon, tout marche impeccable. C'est-à-dire si tu travailles dans la catégorie des faisceaux d'ensembles, dans un espace topologique, tu peux parler d'un groupe, tu peux parler d'un anneau. Et ça reviendra à parler d'un faisceau de groupes, d'un faisceau d'anneaux, etc. Mais troisième observation vraiment géniale, c'est qu'il n'y a pas que les catégories de faisceaux d'ensembles sur un espace topologique qui vérifient ces propriétés, il y en a d'autres. Et cela signifie qu'il y a de nouveaux espaces. Et parmi ces nouveaux espaces, qui ne sont plus des espaces topologiques, ce sont en gros des espaces avec un mouvement intérieur, d'accord, avec des relations si tu veux. Et alors ce qui arrive maintenant et qui est vraiment merveilleux, je trouve. Moi j'ai rencontré ça, si tu veux, ce qui m'a convaincu, c'est qu'avant, je bêlais comme le troupeau, c'est-à-dire je disais "Oh, le topos, c'est pas intéressant, c'est une généralisation de la notion d'espace, on s'en fiche, etc", c'est ce que je faisais jusqu'à il y a un certain nombre d'années, il y a peut-être 5 ou 6 ans, et il y a 5 ou 6 ans, je me suis rendu compte dans mes travaux avec Katia Consani qu'en fait, il y avait un topos sous-jacent à l'espace qu'on avait trouvé, et dont l'espace des points était l'espace non-commutatif qu'on avait trouvé, à ce moment-là, j'ai été émerveillé, j'ai été complètement emballé par cette notion, et après coup, je me suis rendu compte de la profondeur qu'elle avait, et en fait, ce qui est vraiment profond dans cette notion, c'est que, quand tu travailles dans un topos, où tu ne peux plus utiliser le tiers-exclus, le principe de contradiction eh bien, on a un remplacement pour le vrai et le faux, je vais t'expliquer ce que c'est, un peu techniquement, on a quelque-chose qui remplace le vrai et le faux, mais qui est plus subtil. Et j'ai fait récemment une conférence l'an dernier à l'école normale, dans laquelle je voulais donner un exemple de ça. Et alors je voulais donner un exemple, et cet exemple, c'était dire qu'on est à 3 pas de la vérité, à 4 pas de la vérité, à 10 pas de la vérité. Alors je vais te donner un topos que je vais te nommer, d'accord, donc techniquement ce sera correct, et qui permettra de dire qu'on est à 10 pas de la vérité. Qu'est-ce que c'est que ce topos ? Eh bien au lieu de parler d'un ensemble, comme on en parlerait normalement, eh bien, on va parler d'un ensemble avec une transformation, sans propriété spéciale, c'est une transformation. Tu as un ensemble et une transformation. Théorème : ça, c'est un topos, c'est-à-dire que si tu travailles avec ces choses-là, tu peux travailler exactement comme si tu étais en train de travailler avec les ensembles. Tout marche bien, sauf que tu n'as plus le tiers-exclus. Alors d'où ça vient que tu n'aies plus le tiers-exclus ? Eh bien, ça vient du fait que normalement, quand on travaille dans le topos des ensembles, quand on a un sous-ensemble, on peut le dire, on peut dire le sous-ensemble par la fonction qui vaut 1 si on est dans le sous-ensemble, disons vrai si on est dans le sous-ensemble et faux si on n'est pas dedans. D'accord ? Bon ! Parce que évidemment, tu as l'ensemble, et tu as son complémentaire, donc ça marche bien. Alors maintenant, prenons ce topos dont je t'ai parlé, qui est formé d'un ensemble et d'une transformation. Alors on va essayer de classifier les sous-ensembles. Qu'est-ce que c'est qu'un sous-ensemble, c'est un sous-ensemble qui est stable par la transformation, bien sûr, c'est un sous-objet, si tu veux. Alors est-il possible de prendre la fonction qui vaut 1 sur ce sous-ensemble, et 0 sur le complémentaire ? Non, pourquoi ? Parce que tu peux arriver à être dans le complémentaire, mais qu'au bout d'un certain nombre de pas, tu te retrouves dans l'ensemble de départ, donc en fait, c'est pas cette 0-1 qui va classifier les sous-objets, non, c'est le nombre de pas qu'il faut pour arriver dans le vrai.

Daniel Sibony : C'est la proximité

Alain Connes : C'est la proximité au vrai. Et à ce moment-là, qu'est-ce que tu as ? Tu as une théorie qui marche exactement comme la théorie des ensembles, mais dans laquelle le vrai et le faux, qui étaient simplement le vrai et le faux dans le sens ordinaire sont remplacés par les nuances sur le vrai, c'est-à-dire tu as le vrai, tu as le "à 1 pas du vrai", tu as le "à 2 pas du vrai", "à 3 pas du vrai" *(rires)* et tu as le faux. Et ça c'est merveilleux je veux dire, à partir de là, on peut faire des variations, on peut faire toutes sortes de variations et mon idée, maintenant, mon idée c'est la suivante : en lisant attentivement les écrits de ces gens-là, je me suis aperçu que ce qu'ils essayaient de dire en fait, c'était que, non pas dans le domaine des mathématiques, mais dans le domaine des sciences sociales, où par exemple, lorsqu'on assiste à une discussion à la télévision, où on va dire "celui-là a raison"... "Est-ce que Martine Aubry a raison de dire que les 35 heures ont été une réussite ?" Si tu veux. Des choses comme ça, dès qu'on est dans une situation comme ça, dire "untel a raison, untel a tort", c'est une hérésie, parce que c'est un point de vue incroyablement simpliste, par rapport à la complexité du problème auquel on s'attaque, et en règle générale, le seul outil que les gens ont pour essayer de pallier à leur défaut de concepts, c'est de dire "celui-là a 50% raison, etc." mais c'est ridicule. Alors ce que je dis, simplement, ma conclusion, si tu veux, c'est que dans tous ces cas-là, je pense qu'il y a un topos difficile à déterminer, mais qui permettrait, si tu veux, de... justement, de nommer toutes ces nuances sur la notion de vrai et de faux, et permettrait d'être infiniment plus efficace justement dans ce genre de situation. Et je pense que ces gens-là l'avaient compris, intuitivement.

Daniel Sibony : Alors, je pense que c'est une très bonne chose, évidemment, que ça s'élabore en mathématiques, et en langage mathématique, et sur des objets mathématiques, de façon précise et radicale. En même temps, tout ce qui s'élabore, dans l'art, dans une science, dans un domaine pratique, c'est que, ça existe dans la vie. Et dans la vie, moi, devant un débat, je me suis rendu compte que ma question, c'était pas "qui a raison ?" et "qui a tort ?", ma question, c'est que chacun est "entre deux", c'est-à-dire entre "ne pas menacer la vérité qui lui sert de support et s'approcher un peu de l'autre vérité, dont il est question, il est "entre deux". Et c'est très amusant d'observer que certains voient bien l'approximation de la vérité commune ou de la vérité qui est en question, mais ne trouvent pas la force de risquer la place, la leur, qu'ils identifient évidemment à la vérité, parce que c'est ce qu'en termes psy, on appelle ça un investissement narcissique, c'est à dire il y a un minimum d'amour de soi *(Il rit.)*.

Alain Connes : Laisse-moi rebondir sur ce que tu dis, laisse-moi t'interrompre. C'est que les topos ont des points, et quand tu es dans un point du topos, là, tu as le vrai ou le faux, c'est-à-dire que tu n'as pas de nuances. Et ça, c'est très important.

Daniel Sibony : C'est évident que c'est une théorie de la nuance, mais qui, ponctuellement n'est pas nuancée.

Alain Connes : Ponctuellement par définition du point, le point n'est pas nuancé. C'est à dire que le point, c'est la théorie des ensembles ordinaires, par définition.

Daniel Sibony : Et donc, pour revenir à ça, et par les temps qui courent, avec toutes sortes de tensions et de violences même, sous-jacentes, on sent que la dimension de la vérité en a pris un coup.

Alain Connes : Ah, terriblement, terriblement, bien sûr.

Daniel Sibony : Parce que quelqu'un que tu respectes, qui est quelqu'un de bien, il n'y a pas à en discuter, le voir en train de ne pas voir la vérité qui pourrait menacer la position qu'il est chargé de tenir, et qui souvent, s'identifie avec son poste, c'est-à-dire que s'il prend des risques avec cette vérité-là, il est sur siège ejectable.

Alain Connes : Il saute, oui.

Daniel Sibony : Voir ça, je t'assure que pour quelqu'un... s'il y a quelque-chose à quoi je suis sensible plus que tout, c'est la vérité, la justice, qui est un peu de vérité dans le partage, et le désir, qui est aussi un peu de vérité dans notre existence. Eh bien, j'ai eu des moments de souffrance, quand j'ai dû encaisser cette nouvelle parure de la vérité, qui est une espèce de parade, et qui ne me fait pas du tout juger les gens ou les mépriser, mais qui me dit que les places sont chères, pour défendre... Alors maintenant, je voudrais, avant qu'on termine, ce qui moi, m'a toujours passionné dans ce domaine du quantique, à travers ce que tu en dis. Tu as dit à un moment, "L'émergence du temps, elle tient au fait qu'on ne sait pas tout".

Alain Connes : Exactement, ça, c'est exactement la vérité.

Daniel Sibony : Il y a une chose, cette chose-là, et je voudrais rebondir sur l'autre, qui est "L'alea du quantique, c'est le tic-tac de l'horloge divine.". D'abord, l'alea du quantique, c'est le tic-tac de l'horloge, même s'il n'y a pas d'horloge, et le Divin, on ne sait pas trop où il est, mais cette phrase me plaît beaucoup, et je suis profondément d'accord avec elle, au sens suivant : au sens où ça veut dire que, et on est bien d'accord qu'il n'y a pas de temps universel, mais cette phrase, elle dit que le temps se prélève dans ce que j'appelle "l'infini des possibles".

Alain Connes : Tout à fait, c'est exactement ça, bien sûr.

Daniel Sibony : Et pour moi, l'infini des possibles, c'est ça le Divin, et le Divin, à la fois au sens religieux, et au sens non religieux. Les religieux font des prières au Divin pour qu'Il leur donne un petit possible de plus, et les non religieux cherchent du possible, et se disent "si je pouvais avoir un coup de chance !", etc. Donc cette phrase, elle dit très exactement que le temps a beau ne pas être le même ici et ailleurs, il a beau émerger, et ne pas être déjà donné, etc., entre nous, d'ailleurs, s'il émerge d'une situation, c'est qu'il y était déjà.

Alain Connes : Oui, d'une certaine manière, bien sûr.

Daniel Sibony : Le temps se prélève dans l'infini des possibles, ça veut dire, ce que j'appelle l'être, c'est-à-dire qu'il y a un temps de l'être, qui est insituable, qui est inabordable, mais qu'on prend, là où on peut. Et c'est ça le rôle des objets-temps, le sens que j'y donne, des objets porteurs de temps, des oeuvres d'art, une théorie, qu'elle soit du potentiel ou quantique, ou autre chose, c'est que l'important, ce sont des objets où on peut prendre du temps, et l'important, c'est la manière de le prendre. Alors maintenant, ça nous mène à la question de l'inconscient, du non-savoir. Toi tu dis "Le temps émerge du fait qu'on ne sait pas tout.". Et moi, je me pose une question, et peut-être qu'on terminera là-dessus, je me pose une question, en un sens, j'avais écrit dans ce texte il y a plus de 50 ans "le temps se lève avec le refoulement", ça veut dire quand le refoulement est levé, il y a une source de temps qui apparaît.

Alain Connes : Et là, tu identifies temps et liberté, d'une certaine manière, oui.

Daniel Sibony : Peut-être ça veut dire qu'en réalité, on prend une scène de ton deuxième roman, où l'héroïne est totalement inconsciente, et là, elle a une connaissance totale, mais elle n'est pas consciente d'avoir cette connaissance totale.

Alain Connes : Non pas du tout.

Daniel Sibony : Donc elle est totalement inconsciente.

Alain Connes : Puisque la conscience est reliée au temps, par définition.

Daniel Sibony : Et c'est en sortant de cet état d'inconscience vers le conscient...

Alain Connes : Qu'elle réalise ce qu'elle a vécu.

Daniel Sibony : Qu'il y a un flux de temps qui apparaît. Et ça, ça me fait penser à une petite histoire talmudique que j'ai connue autrefois qui dit que le nourrisson, euh, le foetus, dans le ventre de sa mère, jusqu'au moment de sa naissance, il connaissait tout.

Alain Connes : On est d'accord *(Il rit)*.

Daniel Sibony : Il avait la connaissance totale, et puis un ange passe, il fait une coupure, et, au passage, quand il entre dans le temps, il perd tout, et on s'aperçoit, en revenant cette fois au modèle quantique ou à ton roman, on s'aperçoit qu'il perd toutes les connaissances et que l'équivalent de ces connaissances qui étaient inconscientes, c'est le temps qu'il va mettre à les acquérir.

Alain Connes : Absolument.

Daniel Sibony : C'est-à-dire qu'il y a un équilibrage...

Alain Connes : Entre temps et connaissance.

Daniel Sibony : Entre temps et inconscient, ou temps et connaissance, c'est-à-dire que d'une certaine façon, le temps entre dans le monde en franchissant le seuil...

Alain Connes : Le seuil maternel.

Daniel Sibony : Le seuil entre l'inconscient et le conscient, ou entre le réel et le praticable.

Alain Connes : Eh bien écoute, je crois que c'est une très belle conclusion.

L'imagination joue un rôle crucial en mathématiques
Alain CONNES

Alain Connes, mathématicien, explique comment sa discipline peut décrypter le monde.

"Les maths c'est comme l'humour", osait l'un de vos collègues, "si on le comprend, on est du club, sinon, on est exclu". L'incommunicabilité des maths est-elle irréductible ?

Oui, et j'aborderai cette question en parallèle avec la notion d'imagination en mathématiques. Cette incommunicabilité est liée au fait qu'on ne peut comprendre les maths, ou simplement les percevoir, de manière passive mais seulement en les pratiquant. Si la géométrie peut donner l'illusion d'une perception, en raison du raffinement des aires cérébrales consacrées à la vision, tant qu'elle n'est pas travaillée, relayée par le langage formalisé et algébrique, cette perception reste une illusion, vague et confuse. L'imagination joue en fait un role crucial en mathématiques ; le chercheur ne l'utilise pas pour inventer des histoires farfelues, maispour créer des images mentales, à partir de la géométrie, bien sûr, mais aussi de l'écrit, des formules algébriques ou d'un texte qui sembleront opaques au profane, mais qui vont ainsi s'éclairer pour le mathématicien. Une page de formules n'acquiert de sens qu'à ce prix-là.

Difficile, alors, d'expliquer ce que fait un mathématicien...

On peut l'illustrer par une anecdote. Un jour, un journaliste se présente au domicile d'Henri Cartan - l'un des membres de Bourbaki [1] - et n'y trouve que sa femme de ménage. Il lui demande : "Que fait Henri Cartan lorsqu'il travaille ?". Elle répond qu'il passe son temps dans son bureau à écrire sur des bouts de papier qu'il froisse ensuite, avant de les jeter consciencieusement à la poubelle ! Décrire au non-mathématicien l'objet de la recherche mathématique pose un problème spécifique, qui a trait à la nature de la réalité mathématique. L'astronome peut désigner les étoiles, le physicien la matière, le géologue une pierre, mais le mathématicien...

Vous présentez souvent cette recherche comme une exploration géographique, à l'image de celle de la Terre. Est-ce plus qu'une métaphore ?

article de Sylvestre Huet, ou Week-end Rencontre du journal Libération, samedi 1er et dimanche 2 décembre 2001, p. 48.
https://next.liberation.fr/guide/2001/12/01/l-imagination-joue-un-role-crucial-en-mathematiques_385921

1. Un groupe de mathématiciens français qui, sous ce nom collectif, se fixa l'objectif de réécrire les bases des maths, dans les années 30.

Deux points de vue extrêmes s'opposent sur l'activité mathématique. Le premier, dans lequel je m'inscris volontiers est d'inspiration platonicienne : il postule qu'il existe une réalité mathématique, brute, primitive, qui préexiste à sa découverte. Un monde dont l'exploration passe par la création d'outils, comme il a fallu inventer les navires pour passer les océans. Le mathématicien va donc inventer, créer des théories dont le but est de lever un coin du voile sur cette réalité préexistante. Le second point de vue est celui des formalistes : il nie toute préexistence aux mathématiques, estimant qu'elles sont un jeu formel, fondé sur les axiomes et les déductions logiques, donc une pure création humaine. Ce point de vue paraît plus naturel au non-mathématicien, qui renâcle à postuler un monde inconnu dont il n'a aucune perception. Les gens comprennent que les mathématiques sont un langage, mais pas qu'elles constituent une réalité extérieure à l'esprit humain. Les grandes découvertes du XX$^{\text{ème}}$ siècle, en particulier les travaux de Gödel[2], ont pourtant montré que le point de vue formaliste n'est pas tenable. Quel que soit le moyen exploratoire, le système formel, il y aura toujours des vérités mathématiques qui lui échapperont, et on ne peut réduire la réalité mathématique aux conséquences logiques d'un système formel.

Radicalement distincts, pour vous, ce monde mathématique et celui exploré par les sciences de la nature se rencontrent toutefois ; comment est-ce possible ?

Les mathématiques représentent, de mon point de vue, la seule stratégie cohérente pour comprendre et désigner de manière non ambiguë la réalité matérielle extérieure. Toutes les autres stratégies, y compris la philosophie, reposent sur un système circulaire, analogue à celui des mots du dictionnaire. Ils ne sont compréhensibles que par référence à un autre mot. Si une intelligence extérieure, un jour, nous demande de spécifier où nous vivons dans l'Univers, répondre sur "la Terre" ne peut convenir, c'est un mot que nous avons choisi. Si l'on répond : "nous sommes sur la troisième planète d'un système planétaire autour d'une étoile, elle sera confondue avec les milliers d'autres planètes semblables. En mathématiques, on arrive à isoler certains objets par des considérations générales, et ce type de convergence n'a pas vraiment d'analogue ailleurs. Finalement, le langage mathématique est le meilleur instrument pour définir sans ambiguité ce qu'on lui oppose *a priori*, la réalité extérieure, dont l'existence nous paraît évidente.

Cela veut-il dire que nous pourrions parler maths avec n'importe quelle intelligence extraterrestre ?

Bien sûr ! La première chose que l'on peut transmettre, c'est le nombre. Un signal, absence de signal, à nouveau un signal : c'est clair... Mais si nous commençons par trans-

2. L'Autrichien Kurt Gödel démontra dans les années 30 l'"incomplétude" des systèmes formels.

mettre une phrase, nous n'avons aucune chance d'être compréhensible ! Alors qu'on peut communiquer la table d'addition ou de multiplication de manière non ambiguë. Même un spectre d'atome ne sera pas aussi fondamental, universel.

Même si les maths sont une exploration et non une pure création, elles ont tout de même une histoire où les relations avec les sciences de la nature semblent primordiales, au point qu'Eugène Wigner [3] a pu s'interroger sur leur efficacité "déraisonnable" en physique. Comment voyez-vous ces relations ?

D'abord à travers ce phénomène surprenant : ce sont souvent des développements mathématiques parmi les plus purs, les plus éloignés de toute application pratique qui se révèlent les plus utiles en sciences de la nature. A priori, quel problème plus gratuit que de savoir si l'un des axiomes de la géométrie est superflu ou pas ? En l'occurrence, celui de l'unique parallèle à une droite passant par un point. Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, des mathématiciens se sont aperçus que l'on pouvait construire des modèles cohérents où tous les axiomes de la géométrie euclidienne étaient vérifiés sauf celui-là. Pure théorie ? Mais c'est cette piste qui a conduit à la géométrie de Riemann [4], puis à la relativité générale d'Einstein, l'une des théories physiques majeures de notre temps. Le cheminement entre recherche mathématique et sciences de la nature est donc imprévisible et il ne faut surtout pas tenter de le conditionner par la rentabilité à court terme. Quand Jacobi [5] s'est vu reprocher, il y a plus d'un siècle et demi, de ne pas travailler sur des mathématiques "*utiles*", il répondit qu'il le faisait "*pour l'honneur de l'esprit humain*".

Que vouliez-vous dire par : "A bout de ressources, un physicien théoricien en arrive à devenir mathématicien, faute de mieux." ?

Il est rare que l'on soit en panne d'expériences, de données. Aujourd'hui, l'un des principaux défis des physiciens est de réconcilier la mécanique quantique (la théorie des particules élémentaires) et la gravitation (celle des relations de l'espace-temps avec la matière), aujourd'hui incompatibles. Ils disposent de nombreuses données expérimentales, comme les valeurs des masses des particules ou de l'intensité de leurs interactions. Ces paramètres sont livrés par l'expérience. Mais les physiciens ne disposent d'aucune explication théorique à ces valeurs. A court de concepts physiques, certains peuvent avoir tendance à se tourner vers les mathématiques, tant il est vrai que la frontière entre les deux est floue. Mais ce détour ne peut être productif, pour les physiciens, que s'il permet de développer un concept physique qui résistera à la confrontation avec l'expé-

3. L'Allemand Eugène Wigner fut Nobel de physique en 1963 pour ses travaux en mécanique quantique.
4. Bernhard Riemann, mathématicien allemand, créateur de la géométrie riemanienne qui fournit à Einstein le cadre géométrique nécessaire à la relativité.
5. Carl Jacobi, mathématicien allemand (1804-1851).

rience, sinon, au pire, il fera progresser les mathématiques.

Lui-même ou en provoquant la réflexion de mathématiciens ?

Dans mon propre travail, j'ai abordé, avec le physicien allemand Dirk Kreimer, le problème dit de la renormalisation, c'est-à-dire les tours de passe-passe opérés par les physiciens pour éliminer les infinis rencontrés lorsqu'ils font des calculs en théorie des champs, utilisée pour prévoir les interactions entre particules élémentaires comme l'électron, les quarks, etc. Evidemment, l'énergie d'une particule ne peut pas être infinie... Les physiciens ont trouvé une méthode, à la fin des années 40, baptisée "renormalisation", pour éliminer ces infinis des calculs. Du point de vue des concepts de la physique, elle est tout à fait justifiée. Pour prendre un exemple macroscopique, c'est comme pour le calcul de la force qui s'exerce sur une balle de ping-pong que l'on plonge sous cinq mètres d'eau. Si vous appliquez simplement la loi d'Archimède, le calcul dit qu'elle doit partir avec dix fois l'accélération de la pesanteur. C'est manifestement faux. Il faut corriger la loi de Newton en remplaçant la masse inerte ou "nue" de la balle par sa masse "effective" qui est différente en raison de la présence d'eau autour d'elle.

Au niveau microscopique, c'est pareil. Lorsque l'on prend en compte la masse "effective" de la particule, déterminée par son environnement, les infinis disparaissent des calculs, ce qui permet de parvenir à un résultat ayant un sens physique. Au plan mathématique, cela nous semblait horrible, dépourvu de sens ; essentiellement parce que la méthode n'avait rien d'analogue dans aucune branche des mathématiques. Or l'une de nos découvertes, avec Dirk, est que les physiciens avaient en réalité, et sans le savoir, utilisé un cas particulier d'une théorie mathématique connue. Autrement dit, la méthode, justifiée en physique, a rencontré un problème mathématique merveilleux, dont la résolution et la subtilité ouvrent la voie à une meilleure compréhension.

Parmi les interactions actuelles entre les sciences de la nature et les mathématiques, lesquelles vous semblent les plus fructueuses ?

Le dialogue entre physique et mathématiques est si serré que la frontière entre les deux est floue. Il existe cependant une différence notable dans le mode opératoire des physiciens et des mathématiciens. Les physiciens se comportent à l'instar des bosons (les particules portant les forces) et ont tendance à se regrouper autour d'un même problème. Les mathématiciens, eux, sont plutôt des fermions (les particules de matière) : ils s'excluent les uns les autres, travaillent rarement en groupe. L'un des sujets qui nous rapprochent est cette incompatibilité apparente entre mécanique quantique et théorie de la gravitation. Elle oblige les mathématiciens à réfléchir à ce qu'est la géométrie, à raffiner le paradigme de l'espace géométrique et du temps. C'est fondamental, y compris au plan philosophique. Les liens avec la biologie, l'exploration du génome, sont aussi une frontière intéressante, mais les mathématiques n'y ont pas encore montré la puissance qu'elles déploient en physique. Cela pourrait changer, comme le montrent des avancées récentes sous la direction de Misha Gromov qui travaille à l'IHES de Bures-sur-Yvette. Quelle partie des mathématiques leur sera utile ? Elles sont si riches, si complexes, offrent tant de facettes développées pour elles-mêmes qu'il est impossible de répondre. Je suis toutefois persuadé que ce sont les idées les plus abstraites qui seront les plus utiles aux biologistes pour percer les secrets de l'évolution comme la création de nouvelles fonctions.

Vous n'avez pas mentionné la simulation numérique, sur ordinateur, qui prend une importance considérable dans les laboratoires ?

On entend beaucoup de bêtises à cet égard. Comme la répétition simplette de la métaphore du battement de l'aile de papillon qui cause une tempête[6]... On peut se gargariser de modèles mathématiques possédant ce genre d'instabilité, mais si on se fie trop au modèle et au résultat mathématique qui en découle, calculé par l'ordinateur, on risque de graves déconvenues. Dans ce type de problèmes, comme celui de la simulation du climat et de son évolution, on se heurte à un nombre considérable de paramètres, dont une bonne part ne peut être prise en compte, et le modèle mathématique donne tout au plus une indication.

Il y a un autre danger, pour les mathématiciens, qui est le côté ludique de l'ordinateur. Je suis toujours un peu inquiet quand je pénètre maintenant dans un institut de mathématiques de voir les mathématiciens toujours plantés devant leur écran. Oppenheimer, dans les années 50, devait faire visiter l'institut de Princeton à un officiel très haut placé. Dans le deuxième bureau qu'ils ont ouvert, ils ont trouvé un mathématicien allongé sur sa table de travail apparemment en train de dormir. A l'époque, quand un mathématicien travaillait, il réfléchissait en regardant le plafond ! Cela dit, il n'en reste pas moins que l'ordinateur est un outil puissant comme aide au calcul dont on aurait tort de se priver. Si on l'utilise comme un esclave soumis, sans se laisser prendre par le côté ludique, c'est une aide extraordinaire.

6. Lire Raoul Robert dans la Gazette des mathématiciens d'octobre 2001.

DOMAINE D'UTILISATION DE LA MÉTHODE PAR TRANSFORMÉE DE FOURIER

Par J. CONNES,
C. N. R. S., Bellevue.

Résumé. — Étude de la mise en œuvre de la méthode de spectrométrie par transformation de Fourier. On montre que lorsque l'interféromètre à deux ondes utilisé est un interféromètre de Michelson associé à un diaphragme d'ouverture finie (ce qui est le cas réel) la fonction d'appareil est le produit de composition d'une fonction rectangulaire par une fonction en sin x/x ; le pouvoir de résolution théorique est proportionnel à la différence de marche maximum. On examine ensuite les domaines de longueurs d'onde et les valeurs du pouvoir de résolution qui paraissent accessibles à cette méthode. On donne également les résultats d'une application de la méthode à un cas particulièrement simple : la mesure de l'écart de deux raies isolées ; il a été possible d'obtenir la distance des deux raies D du sodium à 1/200 000 près, et à 1/1 000 près celle de deux composantes Zeeman dans un champ de 800 gauss.

Abstract. — A study of different problems arising in the application of the Fourier transform method has been made. It is shown that if the two beam interferometer is a Michelson interferometer with a beam of finite solid angle (which is the pratical case), the instrumental line shape is the convolution of a rectangular by a sin x/x function, and the resolving power is proportional to the maximum path difference. It is then examined in which wavelength regions this method appears to be useful, and the order of magnitude of the resolving power that can be reached. The results of measurements on a particularly simple spectrum, consisting of only two lines are given : the distance between the D lines of sodium has been measured with an estimated error of 1/200 000 and the separation of a Zeeman doublet in a 800 gauss field with an error of 1/1 000.

La nouvelle méthode de spectroscopie utilisant la transformée de Fourier peut être présentée de plusieurs façons différentes. P. Fellgett [1] l'introduit comme une méthode particulière de spectroscopie multiplex. P. Jacquinot [2] a montré qu'elle ne diffère de celles utilisant un réseau ou un étalon Fabry-Perot que par le nombre N de vibrations qui interfèrent pour former le signal. Mais dans le cas de l'interféromètre Fabry-Perot (N de l'ordre de quelques dizaines), pour obtenir des résultats semblables à ceux fournis par un spectromètre à réseau (N de l'ordre de quelques milliers) une opération supplémentaire est nécessaire : le débrouillage des enchevêtrements d'ordres. Il en est de même si on emploie un interféromètre à deux ondes (que l'on peut considérer comme un Fabry-Perot de finesse 2). En fait, dans ce dernier cas, le signal fourni par l'interféromètre est la transformée de Fourier du spectre de la source utilisée et la dernière phase du travail consiste à faire l'analyse de Fourier de ce signal.

Les interféromètres à deux ondes déjà employés dans ce but sont de plusieurs types : G. Strong, G. Vanasse et H. A. Gebbie ont utilisé dans l'infrarouge lointain un interféromètre constiué par un réseau lamellaire à différence de marche variable ; L. Mertz un interféromètre à polarisation dans le visible ; P. Fellgett un interféromètre de Michelson à trièdres dans l'infra-rouge proche, et nous-même un interféromètre de Michelson à miroirs dans le visible.

Le but de la première partie de l'étude qui va suivre est de déterminer une « fonction d'appareil » comparable à celle qui intervient dans les méthodes de spectroscopie classique et de calculer le pouvoir de résolution théorique. Dans la deuxième on donnera une application particulière de la méthode non pas à la détermination d'un spectre, mais à la recherche d'informations sur un objet partiellement connu, à savoir la mesure de la distance de deux raies constituant un doublet.

I. Fonction d'appareil d'un interféromètre à deux ondes employé en spectromètre.

Quand on enregistre un profil de raie avec un spectromètre à prisme, à réseau ou avec un étalon F.-P., la courbe obtenue est le produit de composition de la fonction source par la fonction d'appareil, cette dernière fonction étant ce que le spectromètre donnerait dans les conditions de l'expérience s'il était éclairé par une raie de largeur négligeable.

Rappelons brièvement les formes prises par cette fonction quand l'organe dispersif est un prisme ou un réseau, pour différentes conditions d'emploi [3] :

1) les fentes sont infiniment fines : c'est une fonction de diffraction dont la largeur est inversement proportionnelle à l'épaisseur du prisme ou à la largeur du réseau ;

2) les fentes sont très larges : c'est une fonction triangulaire pour un spectromètre dont les fentes d'entrée et de sortie sont égales ;

3) dans le cas général : c'est le produit de compo-

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:01958001903019700

sition de la fonction de diffraction par la fonction triangulaire.

Avec un spectromètre Fabry-Perot enregistreur muni d'un diaphragme dans le plan focal de l'objectif de sortie, la fonction d'appareil est le produit de composition de la fonction d'Airy (de largeur inversement proportionnelle à la distance des lames) par une fonction rectangulaire dont la largeur est proportionnelle à l'angle solide limité par le diaphragme. Avec l'interféromètre à deux ondes, nous allons montrer que le résultat est tout à fait comparable ; le profil obtenu est le produit de composition de la fonction source par la fonction d'appareil : celle-ci est le produit de composition d'une fonction en sin x/x dont la largeur est inversement proportionnelle à la différence de marche maximum entre les deux faisceaux par une fonction rectangulaire de largeur proportionnelle à celle du diaphragme explorateur. C'est la différence de marche maximum qui joue le même rôle que la dimension de l'organe dispersif. Ce résultat, fondamental quand on veut étudier des profils de raie, permet de déterminer rigoureusement les meilleures conditions d'emploi de l'interféromètre au point de vue luminosité et résolution.

1. Différentes étapes de l'analyse spectrale.

— La partie essentielle de l'interféromètre à deux ondes est la lame à faces parallèles fictive d'épaisseur e constituée par les deux grilles dans l'appareil de G. Strong ou par le miroir mobile M_1 et l'image M'_2 du miroir fixe M_2 donnée par la lame séparatrice dans le cas de l'interféromètre de Michelson (1) (*fig.* 1).

Supposons qu'on étudie une distribution spectrale étroite au voisinage du nombre d'onde σ_0. Un faisceau parallèle tombant sur l'interféromètre sous l'incidence i se divise en deux faisceaux qui se réfléchissent sur M_1 et M_2 et interfèrent avec une différence de marche δ. La luminance émergeant dans cette direction est la valeur de la fonction $\mathcal{T}$, transformée de Fourier de la fonction source, pour la valeur δ de la variable.

Faire une analyse spectrale avec un interféromètre à deux ondes comporte deux opérations différentes qui peuvent d'ailleurs être simultanées :

1) Il faut pour obtenir la fonction $\mathcal{T}$, faire varier linéairement la différence de marche, donc l'épaisseur e envisagée plus haut et enregistrer pour chaque valeur de la différence de marche, la luminance dans une direction fixe.

2) Il faut faire l'analyse harmonique de la fonction $\mathcal{T}$. Elle peut se faire soit *a posteriori* sur l'interférogramme, par exemple par des méthodes numériques (H. A. Gebbie, P. Fellgett), soit pendant l'exploration elle-même (J. Strong et G. A. Vanasse).

Mais pour plusieurs raisons le profil spectral obtenu après l'analyse harmonique ne redonne qu'approximativement la fonction source.

1) Une luminance n'est pas directement accessible. Ce qu'on mesure c'est un flux transporté dans un angle solide fini ayant pour direction moyenne la direction fixe envisagée. De sorte qu'on enregistrera une fonction A qui sera plus ou moins différente de $\mathcal{T}$ suivant que l'angle solide transportant le flux mesuré sera plus ou moins grand.

2) On ne peut faire varier la différence de marche qu'entre les limites δ_1 et δ_2 de sorte que l'analyse de Fourier ne portera que sur une partie de la fonction A comprise entre deux valeurs δ_1 et δ_2 de la variable δ.

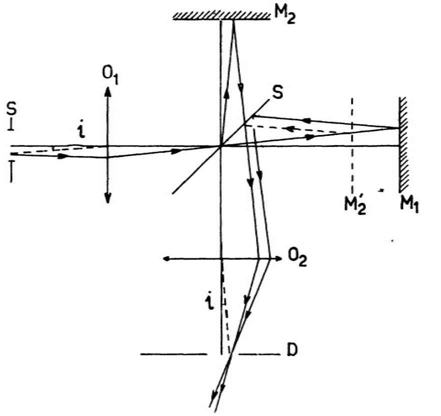


FIG. 1. — Schéma de principe
S : source, O_1 : objectif d'entrée, O_2 : objectif de sortie, i : angle d'incidence, M_2 : miroir fixe, M_1 : miroir mobile ; S : lame séparatrice, M'_2 : image de M_2 donnée par S ; D : diaphragme.

Déterminer la fonction d'appareil de l'interféromètre à deux ondes revient à étudier les déformations que fait subir à la fonction source, l'opération d'enregistrement de la fonction transformée de Fourier du spectre, en supposant que l'analyse de Fourier se fait sans perte d'informations.

Au cours de cette étude, nous allons rencontrer plusieurs fonctions dont deux sont des fonctions instrumentales : la fonction diaphragme D qui tiendra compte du fait qu'on mesure un flux transporté dans un angle solide fini, la fonction limitatrice E liée au fait que la différence de marche varie dans un domaine limité et non de $-\infty$ à $+\infty$; les autres fonctions seront les résultats de transformations successives que les diverses opéra-

(1) Toutes les considérations et les calculs qui vont suivre sont valables dans le cas où des trièdres remplacent les miroirs dans l'interféromètre de Michelson ; il suffit de remplacer la normale aux miroirs par la droite joignant les sommets des trièdres.

tions feront subir à la fonction source. L'interféromètre fournit la fonction $\mathcal{T}$ qui n'est accessible que sous la forme A après intervention de la fonction diaphragme. Finalement on n'enregistre qu'une portion I de la fonction A. Et c'est l'analyse de Fourier de la fonction I qui donne la fonction B′ cherchée reproduisant approximativement la fonction source.

2. Définitions des différentes fonctions utilisées.

— 2-1. Fonction source. — C'est la variation avec le nombre d'onde σ de la densité de luminance $B(\sigma - \sigma_0)$ d'une distribution spectrale symétrique autour de σ_0.

Si la source n'émet qu'une raie de largeur négligeable, la fonction source est une fonction δ de Dirac et on appellera $\mathcal{B}$ la luminance totale de la source.

2-2. Fonction $\mathcal{T}$. — On calcule la luminance transmise par l'interféromètre dans une direction quelconque δ_i [2]. Le coefficient de transmission de l'interféromètre pour la radiation σ_0 est :

$$\tau = \cos^2 \pi \delta_i \sigma_0$$

(nous supposerons dans toute la suite que l'absorption est nulle).

Si la raie a une largeur négligeable la partie variable de la luminance dans la direction δ_i est donc :

$$\mathcal{T}(\delta_i) = \frac{\mathcal{B}}{2} \cos 2\pi\delta_i \sigma_0. \qquad (1)$$

Dans le cas le plus général, puisque toutes les radiations sont transportées sous toutes les incidences $\mathcal{T}_{(\delta i)}$ prend la forme :

$$\mathcal{T}(\delta_i) = \frac{1}{2} \int_0^\infty B(\sigma - \sigma_0) \cos 2\pi\delta_i \sigma . \mathrm{d}\sigma. \qquad (2)$$

C'est la transformée de Fourier en cosinus de la fonction source ; elle peut encore s'écrire :

$$\mathcal{T}(\delta_i) = \frac{1}{2} G(\delta_i) \cos 2\pi\delta_i \sigma_0 \text{ en posant } G(\delta_i) = T[B(\sigma)]. \qquad (3)$$

Elle est représentée par une courbe dont les points ont pour abscisse une différence de marche et pour ordonnée une luminance.

2-3. Fonction diaphragme. — Le diaphragme joue le même rôle que dans le spectromètre Fabry-Perot enregistreur. S'il était infiniment petit il isolerait, à chaque instant, des rayons ayant traversé l'interféromètre sous une seule incidence.

Le détecteur (dans notre cas une cellule photoélectrique) recevrait alors un flux proportionnel à la luminance cherchée, mais ce flux serait infiniment petit. Le diaphragme doit donc avoir une dimension telle qu'il laisse passer des rayons présentant toutes les différences de marche comprises dans un certain intervalle $\Delta\delta_i$. Avec l'interféromètre de Michelson on doit utiliser un diaphragme circulaire de rayon angulaire i_M placé dans le plan focal de l'objectif de sortie, centré sur la direction δ_0 (celle des rayons normaux) et isolant une fraction de l'anneau central. Alors $\Delta\delta_i = \delta_0 i_m^2/2$. La fonc-

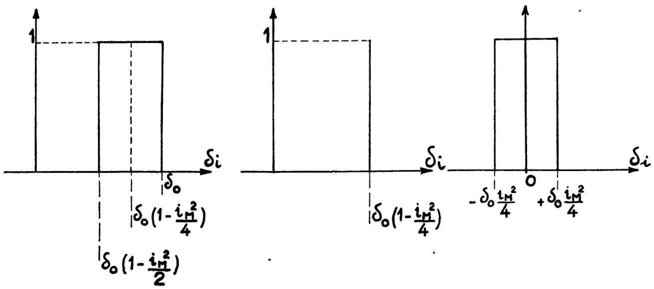


Fig. 2. — Fonction diaphragme $D = b * c$.

tion D, sans dimensions, est une fonction de δ (*fig.* 2). Elle est telle que :

$$D[\delta_i - \delta_0(1 - i_M^2/4)] = 1 \text{ pour } \delta_0 > \delta_i > \delta_0(1 - i_M^2/2)$$

$$D[\delta_i - \delta_0(1 - i_M^2/4)] = 0 \text{ pour } \delta_i < \delta_0(1 - i_M^2/2) \text{ et } \delta_i > \delta_0.$$

[2] Nous conviendrons de repérer une direction, non par l'angle i qu'elle fait avec la normale à l'interféromètre, mais par le retard optique δ_i que représentent entre eux des rayons appartenant aux deux faisceaux ayant traversé l'interféromètre sous l'incidence i ; i et δ_i sont liés par la relation $\delta_i = 2e \cos i$ et dans le cas des incidences faibles $\delta_i = 2e(1 - i^2/2) = \delta_0(1 - i^2/2)$.

2-4. Fonction accessible. — Le diaphragme explorateur détermine un certain angle solide de révolution transportant un flux qui sera reçu par le récepteur. Si l'on enregistre ce flux pendant que δ_0 varie linéairement en fonction du temps on obtient une courbe ayant pour abscisse δ_0 et pour ordonnée le flux transporté par l'angle solide au voisinage de la direction moyenne δ_0.

Le flux transporté par un angle solide élémentaire, annulaire, de révolution $\mathrm{d}\Omega$ au voisinage de la direction δ_i est :

$$\mathrm{d}A = S\,\mathcal{T}_{(\delta i)}\, D\, \mathrm{d}\Omega,$$

S étant la surface utilisée de l'objectif de sortie (*fig.* 3).

Remarquons qu'il existe une relation simple entre un angle solide élémentaire et l'écart entre

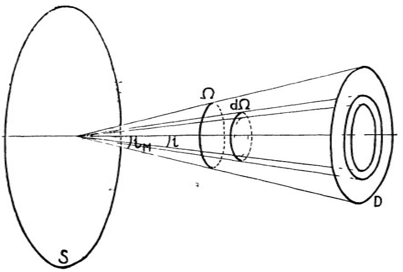


FIG. 3. — Étendue du faisceau de sortie.

les différences de marche qu'ont subi les rayons transportés sous les incidences i et $i + di$ qui limitent $d\Omega$. En effet, en comparant les relations

$$d\Omega = 2\pi i \, di \quad \text{et} \quad d\delta_i = 2ei \, di \quad \text{il vient :}$$

$$d\Omega = \frac{\pi}{e} d\delta_i = \frac{2\pi}{\delta_0} d\delta_i.$$

Le flux élémentaire prend la forme :

$$dA = S\frac{2\pi}{\delta_0} \mathcal{E}_{(\delta i)}.D \, d\delta_i$$

et le flux total traversant le diaphragme est :

$$A(\delta_0) = S\frac{2\pi}{\delta_0}\int_{-\infty}^{+\infty} D[\delta_i - \delta_0(1 - i_M^2/4)] \, \mathcal{E}(\delta_i) \, d\delta_i.$$

2-4-1. *Cas où la raie à une largeur négligeable.* — Dans ce cas $\mathcal{E}(\delta_i)$ à la forme simple (1) et $A(\delta_0)$ s'écrit :

$$\mathcal{A}(\delta_0) = S\frac{2\pi}{\delta_0}\frac{\mathcal{B}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} D[\delta_i - \delta_0(1 - i_M^2/4)] \cos 2\pi\delta_i \, \sigma_0 \, d\delta_i. \quad (5)$$

En remarquant que l'intégrale contenue dans (5) est la transformée de Fourier de la fonction D et en posant $S\pi i_M^2 = S\Omega = U$ étendue du faisceau qui traverse l'interféromètre, l'expression finale de $\mathcal{A}(\delta_0)$ est :

$$\mathcal{A}(\delta_0) = \frac{\mathcal{B}}{2} U \frac{\sin \pi\sigma_0 \, \delta_0 \, i_M^2/2}{\pi\sigma_0 \, \delta_0 \, i_M^2/2} \cos 2\pi\sigma_0 \, \delta_0(1 - i_M^2/4). \quad (6)$$

C'est une expression bien connue [5, 6].

La fonction $\mathcal{A}(\delta_0)$ est une fonction sinusoïdale dont l'amplitude est modulée par une fonction en $\sin x/x$; le terme périodique a un nombre d'onde $\sigma_0(1 - i_M^2/4)$ plus faible que le nombre d'onde σ_0 de la raie étudiée. Cela tient au fait que le diaphragme a admis des rayons ayant subi des différences de marche systématiquement inférieures à δ_0.

La modulation s'annule chaque fois que

$$\delta_0 = k\frac{2}{\sigma_0 \, i_M^2} = k\frac{2\pi}{\Omega}\lambda_0,$$

c'est-à-dire chaque fois que le rayon du diaphragme est égal au rayon du k$^{\text{ième}}$ anneau dans son plan.

L'expression $\mathcal{A}(\delta_0)$ peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{A}(\delta_0) = \mathcal{B}.\Phi(\delta_0) \quad \text{en posant :}$$

$$\Phi(\delta_0) = \frac{U}{2}\frac{\sin \pi\sigma_0 \, \delta_0 \, i_M^2/2}{\pi\sigma_0 \, \delta_0 \, i_M^2/4} \cos 2\pi\sigma_0 \, \delta_0(1 - i_M^2/4).$$

La fonction $\Phi(\delta_0)$ a les dimensions d'une étendue. Sa valeur est celle du flux que transporterait l'interféromètre utilisé avec le même diaphragme si la fonction source était une fonction de Dirac de luminance intégrée égale à l'unité. C'est une caractéristique instrumentale que nous utiliserons dans la suite.

2-4-2. *Cas d'une distribution spectrale étroite.* — L'avantage fondamental de la méthode par transformation de Fourier est qu'elle permet d'obtenir simultanément des informations sur toutes les régions d'un spectre aussi étendu que l'on veut. L'étude qui va suivre porte seulement sur une distribution spectrale étroite, car c'est uniquement dans ce cas que l'on peut définir une fonction d'appareil. Cette restriction est la même, d'ailleurs, pour toutes les méthodes de spectroscopie. Quand on étudie un spectre étendu, on définit une suite de fonctions d'appareil dont la forme reste la même, mais de largeur variable, chacune d'elles étant valable dans un domaine étroit de longueur d'onde.

Si on remplace dans (4) $\mathcal{E}(\delta_i)$ par sa valeur donnée par (3) l'expression du flux devient :

$$A(\delta_0) = \frac{1}{2} S\frac{2\pi}{\delta_0}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\delta_i) \, D[\delta_i - \delta_0(1 - i_M^2/4)] \cos 2\pi\delta_i \, \sigma_0 \, d\delta_i. \quad (9)$$

On montre facilement que lorsqu'on étudie une fonction source étroite, c'est-à-dire telle que la densité de luminance puisse être considérée comme négligeable à une distance $\Delta\sigma$ de σ_0 petite par rapport à σ_0, $G(\delta_i)$ peut être confondue avec $G(\delta_0)$ en négligeant un terme infiniment petit de l'ordre de $\Delta\sigma/\sigma_0$.

Le flux sortant s'écrit alors :

$$A(\delta_0) = G(\delta_0).\Phi(\delta_0) \quad (10)$$

ou en remplaçant $\Phi(\delta_0)$ par sa valeur donnée par (8) :

$$A(\delta_0) = \frac{U}{2} G(\delta_0)\frac{\sin \pi\sigma_0 \, \delta_0 \, i_M^2/2}{\pi\sigma_0 \, \delta_0 \, i_M^2/2} \cos 2\pi\sigma_0 \, \delta_0(1 - i_M^2/4). \quad (11)$$

L'équation (10) traduit le résultat très simple suivant : Si la fonction source est une distribution étroite, le flux modulé tombant sur le récepteur est égal au produit de la fonction $\Phi(\delta_0)$ par la transformée de Fourier du profil spectral à étudier [3].

2-5. Fonction limitatrice E. — Pour reconstituer correctement la fonction source sans perdre d'informations, il faudrait faire l'analyse de Fourier de la fonction A complète, c'est-à-dire pour des valeurs de δ_0 variant de $-\infty$ à $+\infty$; mais la différence de marche entre les deux faisceaux interférents ne varie que dans un domaine limité, par exemple entre deux valeurs symétriques $-L$ et $+L$ [4]. La fonction limitatrice, dans le cas le plus simple est $E_1(\delta_0)$ telle que (*fig.* 4) :

$$E_1(\delta_0) = 1 \text{ pour } -L < \delta_0 < +L \quad (14)$$

$$E_1(\delta_0) = 0 \text{ pour } -\infty < \delta_0 < -L \text{ et } L < \delta_0 < +\infty \quad (15)$$

On montrera dans la discussion de la fonction analysée qu'en modifiant $E(\delta_0)$ on peut modifier la fonction d'appareil, en particulier l'apodiser.

2-6. Interférogramme $I(\delta_0)$. — On donne ce nom à la portion de la fonction A comprise entre les valeurs $-L$ et $+L$ de la variable δ_0. C'est le produit de la fonction $A(\delta_0)$ par la fonction $E(\delta_0)$.

$$I(\delta_0) = A(\delta_0).E(\delta_0). \quad (16)$$

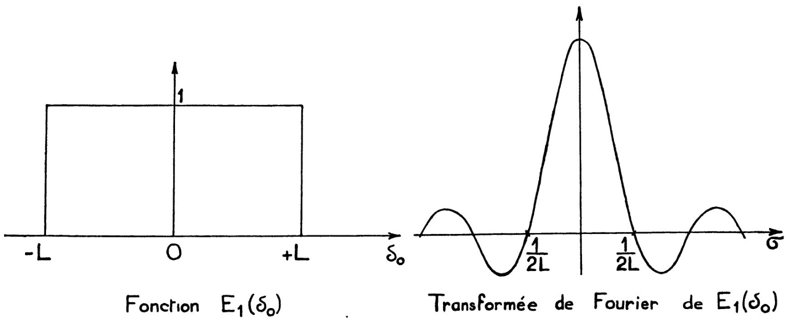


Fig. 4. — Fonction limitatrice.

2-7. Fonction analysée. — Ce sera une reconstitution approximative de la fonction source, obtenue par l'analyse de Fourier de l'interférogramme $I(\delta_0)$. C'est une distribution spectrale $B'(\sigma - \sigma')$ autour du nombre d'onde σ' différent de σ_0.

$$B'(\sigma - \sigma') = T[I(\delta_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\delta_0) \cos 2\pi\sigma\delta_0 . d\delta_0.$$

On sait en effet que la transformée de Fourier d'un produit est égale au produit de composition de chacun des termes du produit.

Dans le cas particulier d'une distribution spectrale de largeur négligeable, puis dans le cas général, les fonctions analysées sont :

$$\mathcal{B}'(\sigma - \sigma') = \mathcal{B}.T[\Phi(\delta_0)] * T[E_1(\delta_0)] \quad (17)$$

$$B'(\sigma - \sigma') = T[G(\delta_0)] * T[\Phi(\delta_0)] * T[E_1(\delta_0)]. \quad (18)$$

[3] Cas particuliers. — L'expression générale du flux étant établie, il est facile d'obtenir ses valeurs pour des distributions quelconques. Nous allons donner les résultats dans deux cas particuliers, ceux où la fonction source a une forme soit Döppler, soit de résonance, le cas général étant une combinaison des deux cas précédents.

a) *Fonction source de forme Döppler :* Elle s'écrit :

$$B(\sigma - \sigma_0) = B_M \exp\left(\frac{-4 \ln 2 (\sigma - \sigma_0)^2}{s^2}\right)$$

s étant la largeur à mi-hauteur et B_M la densité de luminance pour le nombre d'onde σ_0. L'expression du flux devient, d'après (11)

$$A(\delta_0) = \frac{U}{2} s B_M \left(\frac{\pi}{\ln 2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-s^2 \pi^2 \delta_0^2}{4 \ln 2}\right)$$

$$\frac{\sin \pi\sigma_0 \delta_0 i_M^2/2}{\pi\sigma_0 \delta_0 i_M^2/2} \cos 2\pi\sigma_0 \delta_0 (1 - i_M^2/4) \quad (12)$$

expression analogue à celle indiquée dans (6).

b) *Fonction de résonance :* La fonction source et le flux prennent les formes suivantes :

$$B(\sigma - \sigma_0) = B_M \frac{1}{1 + 4\frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{s^2}} \text{ et}$$

$$A(\delta_0) = \frac{U}{2} s B_M \exp\left(-\frac{s\,\delta_0}{2}\right)$$

$$\frac{\sin \pi\sigma_0 \delta_0 i_M/2}{\pi\sigma_0 \delta_0 i_M^2/2} \cos 2\pi\sigma_0 \delta_0 (1 - i_M^2/4). \quad (13)$$

[4] Quand la différence de marche varie seulement entre 0 et $+L$, on peut compléter l'interférogramme par symétrie et la fonction limitatrice sera toujours définie pour δ_0 variant entre $-L$ et $+L$.

En remarquant que si l'on fait $\mathcal{B} = 1$ dans l'équation (17) elle prend la forme :

$$H(\sigma - \sigma') = T[\Phi(\delta_0)] * T[E_2(\delta_0)]$$

et que $T[G(\delta_0)]$ n'est autre que $\mathcal{B}(\sigma)$, l'équation (18) traduit le résultat fondamental suivant :

La fonction analysée est le produit de composition du profil spectral à étudier par la fonction H obtenue dans le cas où la distribution spectrale est infiniment étroite et a une luminance intégrée égale à l'unité.

Par analogie avec des résultats comparables obtenus avec toutes les autres méthodes de spectroscopie, la fonction $H(\sigma - \sigma')$ est appelée fonction d'appareil.

2-8. Fonction d'appareil. — D'après sa définition même : $H = d * e$ (*fig.* 5) qu'on peut encore écrire :

$$H = \frac{2\pi SL}{\delta_0} h \quad (\textit{fig. } 6) \text{ avec } \quad h = f * g$$

f est une fonction rectangulaire telle que :

$$f[\sigma - \sigma_0(1 - i_M^2/4)] = 1 \quad \text{pour} \quad \sigma_0 > \sigma > \sigma_0(1 - i_M^2/4)$$

$$f[\sigma - \sigma_0(1 - i_M^2/4)] = 0 \quad \text{pour} \quad \sigma > \sigma_0$$

$$\text{et} \quad \sigma < \sigma_0(1 - i_M^2/4)$$

et $$g = \frac{\sin 2\pi\sigma L}{2\pi\sigma L}.$$

Si l'interférogramme est enregistré et la transformée de Fourier faite par des calculateurs numériques (méthode employée par P. Fellgett et H. A. Gebbie), ou si le signal subit une détection synchrone avant d'être analysé par des méthodes analogiques (méthode employée par J. Strong et G. A. Vanasse), la fonction d'appareil est le produit de composition d'une fonction rectangulaire par une fonction en $\sin x/x$.

Elle est représentée par une courbe dont la forme s'éloigne de plus en plus de celle de la fonction en $\sin x/x$ pour se rapprocher du rectangle à mesure

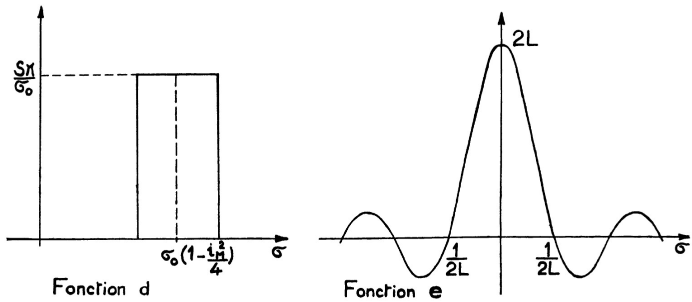


Fig. 5.

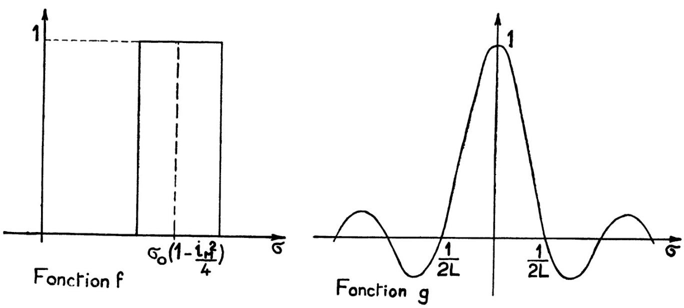


Fig. 6.

que croît le rapport r/s de la largeur de la fonction rectangle à la largeur à mi-hauteur de la fonction en $\sin x/x$.

La figure 7 donne la forme de la fonction d'appareil pour $r/s = 1$. Dans la figure 8 les courbes g et h ont été ramenées à la même hauteur pour

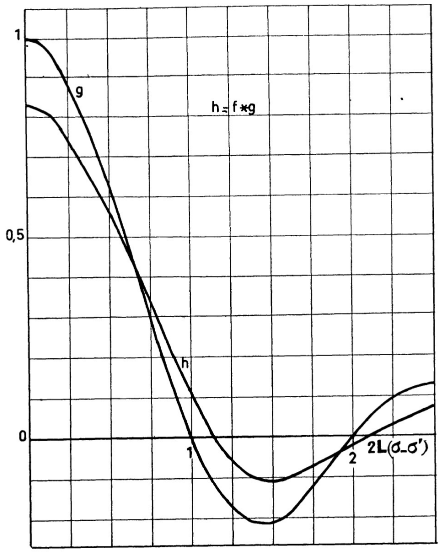


Fig. 7. — Fonction d'appareil ($r/s = 1$).

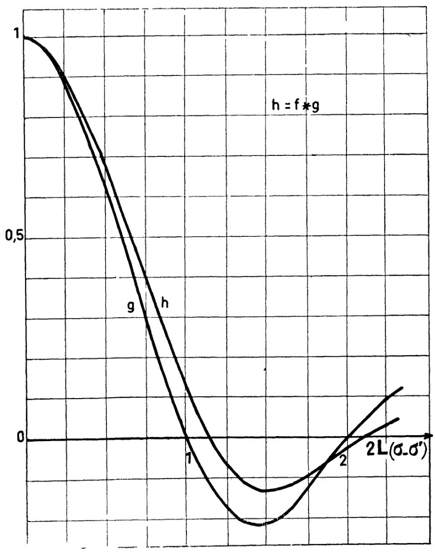


Fig. 8. — Fonctions d'appareil ramenées à la même hauteur.

mettre en évidence l'élargissement de la fonction h, le rapport des largeurs à mi-hauteur des fonctions h et g est $\alpha/s = 1{,}1$ pour $r/s = 1$.

3. **Discussion des résultats.** — 3-1. Limite de résolution théorique. — Dans le cas des spectromètres à prisme ou à réseau, on définit une limite de résolution théorique qui est celle de l'instrument utilisé avec des fentes infiniment fines. Dans le cas de l'interféromètre à deux ondes, on appellera limite de résolution théorique celle qui serait obtenue avec un diaphragme explorateur infiniment fin et une exploration limitée. D'après le critère de Lord Rayleigh, deux raies sont séparées quand le maximum central de la figure de diffraction donnée par l'une des raies coïncide avec le premier minimum de la figure de diffraction donnée par l'autre. Il est bien connu que dans ce cas la hauteur au centre de la courbe résultante est les 4/5 de la hauteur maximum.

Nous garderons cette dernière convention et la figure (9) montre que la hauteur au centre de la

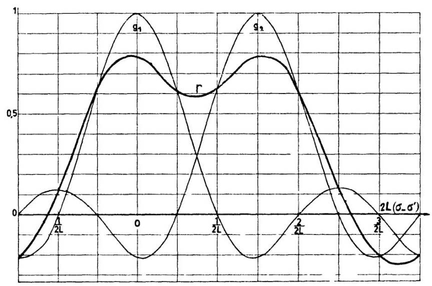


Fig. 9. — Limite de résolution.

courbe résultante r est sensiblement les 4/5 de la hauteur maximum quand le maximum de la fonction g_2 coïncide avec le premier minimum de la fonction g_1. Dans ce cas la distance séparant les centres des deux raies est $3/4\,L$ ce qui conduit à une limite de résolution théorique $\delta\sigma = 3/4\,L$, et à un pouvoir de résolution théorique $\mathcal{R} = \sigma/\delta\sigma = 4L\sigma/3$

3-2. Détermination des meilleures conditions d'emploi. — On choisit une méthode comparable à celle employée avec le spectromètre à réseau ou le Fabry-Perot [3, 4]. Quand on augmente le diamètre du diaphragme explorateur, la luminosité $\mathcal{L}$ de l'instrument croît, mais la résolution $\mathcal{R}$ pour la même différence de marche maximum décroît (on la calcule à partir de l'élargissement de la fonction d'appareil). Le maximum du produit $\mathcal{L}\mathcal{R}$ a lieu pour une valeur i du rayon angulaire du diaphragme qui réalise les meilleures conditions d'emploi de l'interféromètre de Michelson $i = 0{,}7\sqrt{2/R}$ (⁵).

3-3. APODISATION. — La fonction d'appareil de l'interféromètre employé comme l'indique la figure 7 a des pieds importants, ce qui est gênant dans un grand nombre de cas. Or on voit qu'il suffit pour apodiser de modifier la fonction $E(\delta_0)$. Nous n'entrerons pas ici dans le détail des calculs. Toutefois, signalons qu'on peut envisager plusieurs techniques différentes d'apodisation.

La méthode la plus simple consiste à changer la forme de $E(\delta_0)$ en conservant le diaphragme de diamètre fixe et en modifiant le flux tombant sur le récepteur à l'aide de filtres absorbants dont la densité varierait en fonction de la différence de marche. On peut, par exemple, réaliser ainsi la fonction $E_2(\delta_0)$ représentée par la figure 10. La

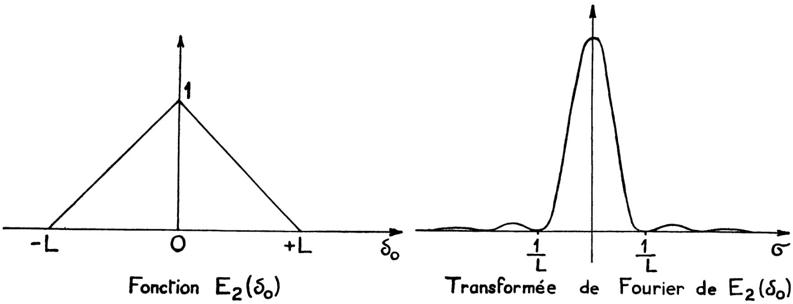


FIG. 10. — Fonction limitatrice.

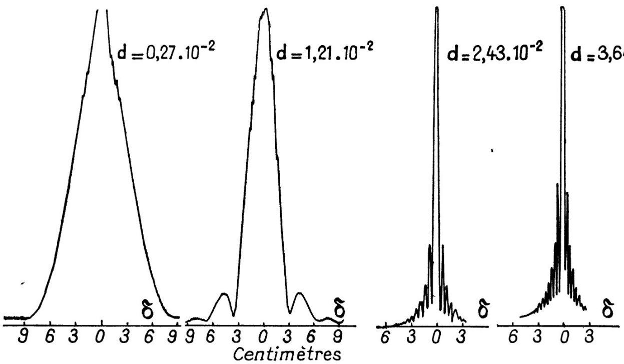


FIG. 11. — Variation de la modulation en fonction de la différence de marche
$\lambda = 6438$ du Cadmium
d, diamètre du trou de sortie en radian
$f = 33$ cm.

fonction d'appareil sera alors le produit de composition d'une fonction rectangulaire par une fonction en $(\sin x/x)^2$, mais on a diminué la luminosité et la résolution comme il arrive généralement quand on apodise (⁶).

4. Vérification expérimentale.

— Nous avons cherché à obtenir expérimentalement, non pas la fonction d'appareil elle-même, mais sa transfor-

(⁵) *Emploi des systèmes afocaux :* Remarquons que tous les calculs de la fonction d'appareil, du pouvoir de résolution, des meilleures conditions d'emploi ne sont plus valables si l'interféromètre est muni de systèmes afocaux destinés à augmenter l'angle solide utilisable, en donnant un état d'interférence constant dans tout le champ [7]. Les relations entre i et δ_1, donc la forme de la fonction A dépendent alors des aberrations des systèmes afocaux utilisés.

(⁶) H. A. Gebbie a proposé lors du Colloque d'apodiser la fonction d'appareil en multipliant toutes les ordonnées de l'interférogramme par des coefficients convenables.

mée de Fourier en enregistrant l'interférogramme

$$I'(\delta_0) = \frac{U}{2} G(\delta_0) \left| \frac{\sin \pi\sigma_0 \, \delta_0 \, i_M^2/2}{\pi\sigma_0 \, \delta_0 \, i_M^2/2} \right| . E(\delta_0).$$

4-1. DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL. — L'interféromètre utilisé est un interféromètre de Michelson à miroirs, un des miroirs est porté par un chariot poussé par une vis de pas 1 mm, celle-ci est entraînée par un moteur synchrone tournant à 750 tours/minute par l'intermédiaire d'une vis tangente qui donne une démultiplication de 100. Ce chariot avance donc de 1 mm en 8 secondes ; δ_0 varie dans nos expériences de — 9 cm à + 9 cm. La source utilisée est la raie 6 438 Å du cadmium isolé par un filtre dans le spectre d'une lampe Osram.

Le signal électrique fourni par un photomultiplicateur est amplifié dans un amplificateur alternatif, puis détecté linéairement et enregistré.

4-2. RÉSULTATS. — Nous avons fait plusieurs enregistrements avec des valeurs de d_m croissant de 0,006 à 0,018. Les minima ont bien lieu pour les valeurs calculées de la différence de marche. Ils ne sont pas complètement nuls à cause de l'influence des défauts de surface des miroirs sur la fonction d'appareil (question qui n'est pas étudiée dans cet exposé) ; dans le dernier cas, la largeur de la fonction source est négligeable devant celle de la fonction diaphragme et la courbe enregistrée est bien en $|\sin x/x|$.

II. Pouvoirs de résolution accessibles à la méthode par transformée de Fourier.

La méthode de spectroscopie par transformée de Fourier est applicable en principe dans tous les domaines de longueur d'onde. Si l'on veut employer un interféromètre de Michelson, il suffit de savoir trouver une substance transparente pour la lame séparatrice. Mais P. Jacquinot montrera dans sa communication que le gain de rapidité dû à la méthode ne sera effectif que dans l'infra-rouge où le bruit de récepteur est prépondérant ; dans le visible il est forment réduit par le bruit de lumière.

Pour obtenir des limites de résolution très réduites, il faut réaliser de grandes différences de marche. Les difficultés qu'on rencontre sont de deux ordres :

1) Dans le cas où l'appareil utilisé est un interféromètre de Michelson, le parallélisme des miroirs doit être assuré à une fraction de longueur d'onde près ; c'est d'autant plus facile à réaliser que la longueur d'onde est plus grande. C'est la première raison pour laquelle la méthode sera d'un emploi plus facile dans l'infra-rouge. Mais cette difficulté n'est pas la plus grande à résoudre. Nous avons réalisé un interféromètre dans lequel le parallélisme du miroir mobile est conservé à 1/10 de frange avec la raie rouge du cadmium pour un déplacement de 12 cm d'un miroir de 5 cm de diamètre.

2) Il faut que la fréquence du signal à analyser soit constante, ce qui revient à dire que la vitesse d'exploration v doit être constante. Si le dispositif d'entraînement du miroir mobile présente des défauts provoquant à chaque instant des écarts entre la position du miroir mobile et sa position théorique, la déformation de la fonction d'appareil est la même que si le dispositif d'entraînement était utilisé pour tracer un réseau de diffraction et ce réseau employé en montage Littrow sous incidence rasante, à condition d'imaginer que l'on dispose d'un récepteur qui soit sensible à l'*amplitude* de la vibration lumineuse, et non à l'intensité.

On en déduit facilement qu'une erreur périodique, d'amplitude $\varepsilon \ll \lambda$ provenant de la vis ou des engrenages, provoque l'apparition d'une paire de ghosts symétriques dont la position est la *même* que dans l'emploi du réseau ; mais leur hauteur relative vaut $\pi\varepsilon/\lambda$, tandis que dans l'emploi du réseau, la hauteur relative est seulement $(\pi\varepsilon/\lambda)^2$, donc beaucoup plus faible. Si l'erreur est du type progressif non linéaire elle se traduit par un élargissement de la fonction d'appareil et donc par une baisse du pouvoir de résolution. Le problème de la régularité de l'entraînement est pratiquement résolu avec les machines à graver les réseaux modernes puisque ceux-ci approchent effectivement du pouvoir de résolution théorique ; mais la difficulté est ici singulièrement augmentée du fait que l'enregistrement de l'interférogramme doit être beaucoup plus rapide que la gravure du réseau.

Il semble possible d'atteindre, mais difficile de dépasser, un pouvoir de résolution de l'ordre de 100 à 1 000 par des moyens purement mécaniques. Si l'on désire aller plus loin, une solution pourrait être l'enregistrement d'une raie de référence en même temps que celui du spectre ; la fréquence correspondante pourrait ultérieurement servir à piloter l'analyse de Fourier qui se ferait par détection synchrone.

III. Mesure de l'écart des deux raies d'un doublet.

Il y a un cas où l'on peut espérer obtenir simplement de hautes résolutions : celui de la mesure de l'écart de deux raies constituant un doublet, c'est-à-dire la mesure d'une différence de fréquences.

Nous avons ainsi étudié l'écart des raies D du sodium et des deux composantes π Zeeman données par la raie 4 678 du cadmium dans un champ de 800 Gauss.

1. **Principe.** — Théoriquement le problème est très simple ; quand la différence de marche varie d'une quantité δ, on observe le défilement de p_1 franges données par la raie de nombre d'onde σ_1,

de p_2 franges données par la raie de nombre d'ondes σ_2 et de P battements ; ces diverses quantités sont liées par la relation :

$$\delta = P_1/\sigma_1 = P_2/\sigma_2 = P/\Sigma \text{ en posant } \Sigma = \sigma_1 - \sigma_2$$

Le problème consiste donc à mesurer la variation de la différence de marche δ séparant P battements, qui pour des raisons évidentes seront situées symétriquement par rapport à la différence de marche σ. Exprimons la forme de la fonction A quand la source émet deux composantes ayant une forme Döppler, le nombre d'onde de l'une d'elles étant σ_0 et quand le diaphragme a un diamètre angulaire suffisamment petit pour que son effet soit négligeable ; d'après (12)

$$A(\delta) = \frac{U}{2}\, sB_{\mathrm{M}} \left(\frac{\pi}{\ln 2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{s^2\,\pi^2\,\delta^2}{4 \ln 2}\right) \times [\cos 2\pi\delta\sigma_0 + \cos 2\pi\delta(\sigma_0 + \Sigma)]$$

ou

$$A(\delta) = \frac{U}{2}\, sB_{\mathrm{M}} \left(\frac{\pi}{\ln 2}\right)^{1/2} \exp\left[-\left(\frac{s\,\delta}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{\ln 2}\right] \times \cos \pi\delta\Sigma \cos 2\pi\delta(\sigma_0 + \Sigma/2). \tag{13}$$

La fonction $A(\delta)$ est une fonction sinusoïdale dont l'amplitude est modulée par une fonction M qui est elle-même le produit de la fonction $C = \cos \pi\delta\Sigma$ (traduisant la présence de deux raies) par la fonction $G = \exp\left[\frac{-\pi^2}{\ln 2}\left(\frac{s\,\delta}{2}\right)^2\right]$, transformée de Fourier du profil spectral de l'une des raies, c'est-à-dire que la courbe représentant la fonction G est l'enveloppe de la courbe représentant la fonction M.

2. **Dispositif expérimental.** — La meilleure méthode consisterait à mesurer la distance séparant les positions 1 et 2 du miroir mobile correspondant au 1er et au $(P + 1)$ième battement en comptant le nombre de franges qui défilent quand le miroir se déplace d'un mouvement continu de la position 1 à la position 2.

Nous ne disposons pas d'un système de comptage de franges et une de nos techniques a consisté à mesurer la longueur δ en tours et fractions de tours de vis. L'erreur ainsi introduite est nettement inférieure à celle provenant du repérage du zéro de modulation. Pour trouver la position du chariot correspondant à un minimum de la fonction M, on tourne à la main très lentement la vis tangente. En même temps on fait varier sinusoïdalement la différence de marche avec un mouvement dont l'amplitude est d'au moins une longueur d'onde et la fréquence 200 Hz (par exemple en faisant vibrer d'un mouvement de translation le miroir fixe à l'aide d'un électro-aimant agissant sur son support). L'amplitude du signal obtenu, qu'on peut examiner à l'oscilloscope, est nulle quand la position du miroir mobile coïncide exactement avec celle correspondant à un zéro de modulation.

Une deuxième technique utilisée ne diffère de la première que par la façon de pointer le zéro de modulation. On enregistre la fonction $A(\delta)$ elle-même (et pas seulement son amplitude) au voisinage des valeurs de δ correspondant au 1er et au $(P + 1)$ième battement et on repère le minimum de la fonction M sur l'enregistrement en mesurant l'amplitude des franges enregistrées. Ce défilement lent des franges est obtenu en faisant tourner la compensatrice d'un mouvement continu ; le signal fourni par le photomultiplicateur est amplifié en courant continu et enregistré.

Dans les deux méthodes, la précision est limitée par le fait que la fonction présente des minima non nuls. (Les deux raies ne sont pas rigoureusement identiques.)

3. **Résultats.** — Nous avons fait plusieurs mesures de l'écart des deux raies D du sodium en comptant des nombres de battements différents et en mesurant chaque fois la distance séparant les deux battements extrêmes. Le nombre P est connu sans ambiguïté, l'erreur relative sur Σ est donc égale à l'erreur relative sur δ ; les résultats sont résumés dans le tableau suivant.

P	δ_{cm}	$\Sigma_{\text{cm}^{-1}}$	$\Delta\delta_{\text{cm}}$	Δ
380	22,0820	17,2086	1.10^{-4}	$\frac{1}{50\,000}$
276	16,0384	17,2087	$0,5.10^{-4}$	$\frac{1}{50\,000}$
104	6,04348	17,2086	$0,1.10^{-4}$	$\frac{1}{200\,000}$

La cohérence des résultats est bien de l'ordre de grandeur de la précision calculée.

Nous avons d'autre part enregistré la fonction

$$A'(\delta) = k \exp\left[-\frac{\pi^2}{\ln 2}\left(\frac{s\,\delta}{2}\right)^2\right] |\cos \pi\delta\Sigma|$$

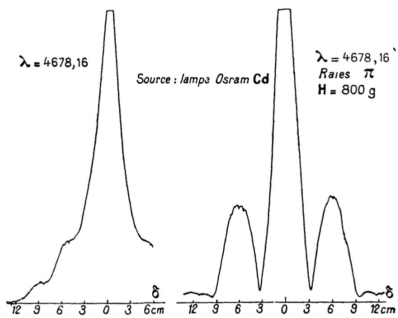


FIG. 12. — Variation de la modulation en fonction de la différence de marche.
Source : lampe Osram Cd

en utilisant comme source les deux composantes π Zeeman de la raie 4 678 du Cd isolées au moyen de polaroïdes. Le signal fourni par la cellule pendant le déplacement du miroir mobile était amplifié dans un amplificateur alternatif, puis détecté linéairement et enregistré. La première courbe de la figure 12 représente la fonction A quand la source utilisée est la composante centrale ; la deuxième courbe montre les battements obtenus avec les deux composantes π.

Deux battements consécutifs sont séparés par une longueur de l'ordre de 134 000 longueurs d'onde. Chaque zéro de la modulation est repéré à 60 longueurs d'onde près (c'est-à-dire que 60 franges sur l'enregistrement ont des hauteurs qui oscillent autour d'une même valeur moyenne). A 67 franges du minimum de la fonction M, la valeur de la fonction M est 1/1 000 de celle de la fonction G pour la même valeur de la variable δ. L'écart des composantes (161 mk) est mesuré avec une précision de l'ordre de 1/1 000.

Conclusion. — La fonction d'appareil d'un interféromètre de Michelson employé en spectromètre enregistreur est le produit de composition d'une fonction rectangulaire par une fonction en sin x/x. Les difficultés mécaniques rencontrées dans la réalisation montrent que, si on n'emploie pas la détection synchrone avec un signal fourni par l'interféromètre lui-même on ne peut pas dépasser des pouvoirs de résolution de l'ordre de quelques centaines. On peut cependant obtenir simplement de hautes résolutions quand on cherche un complément d'information sur un objet partiellement connu.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Fellgett (P.), *J. Physique Rad.* (N° du Colloque), 1958.
[2] Jacquinot (P.), Conférence du G. A. M. S., 1953.
[3] Jacquinot (P.) et Dufour (Ch.), *Journal de Recherches du C. N. R. S.*, 1948, n° **6**.
[4] Chabbal (R.), *Journal de Recherches du C. N. R. S.*, 1953, n° **24**.
[5] Peck (E. R.), *J. Opt. Soc. Amer.*, 1955, vol. **45**, n° 11, 931.
[6] Stroke (G. W.), *Bull. Res. Israel*, 1957, vol. **5** C, n° 4, 339.
[7] Connes (P.), *Revue d'Optique*, 1956, **35**, 37.

DISCUSSION

G. Stroke. — Avec la machine à graver les réseaux du M. I. T. nous contrôlons facilement la vitesse de déplacement du chariot à 0,1 % près ce qui permettait d'atteindre un pouvoir de résolution $\mathcal{R} = 1\ 000$.

P. Connes. — Le problème d'asservissement du mouvement du chariot élégamment résolu au M. I. T. est relativement plus simple que celui qui nous intéresse. En effet dans la machine à graver les réseaux, les franges d'interférence défilent à une vitesse très faible, de l'ordre de une frange par seconde, tandis que si l'on veut profiter du gain de rapidité procuré par la méthode de la transformation de Fourier il pourra être nécessaire de faire défiler des centaines de franges par seconde.

G. Stroke. — La fréquence normale est de 2,5 franges/s mais nous avons obtenu un fonctionnement correct jusqu'à 40 franges/s.

J. Terrien. — La détermination des profils spectraux nous préoccupe au B. I. P. M., car nous cherchons, pour constituer un étalon de longueur, à produire un profil symétrique, aussi voisin que possible du profil Doppler, et de faible largeur

Un bon étalon Fabry-Perot, de bande passante 2 à 2,5 mk, nous a permis de trouver des radiations à profil symétrique, et de mesurer leur largeur, 12 à 13 mk pour ^{86}Kr, et 20 mk pour ^{198}Hg, compte tenu des corrections indiquées par Chabbal. Mais le F.-P. renseigne mal sur les pieds du profil, où l'on distinguerait les effets tels que largeur naturelle, effet de pression, résonance quantique, qui se superposent à l'effet Doppler.

L'étude de la visibilité $V = \dfrac{M - m}{M + m}$ à l'interféromètre de Michelson est un test plus efficace. La symétrie constatée au F.-P. autorise que l'on remonte au profil $f(x)$ par transformation de Fourier de $V(D)$ sans considération de phase (D est la différence de marche). Pour déceler les déformations du profil par rapport à une courbe Doppler. la courbe de visibilité est d'une interprétation plus facile, comme le montre l'exemple suivant.

Soit une raie élargie simultanément par effet de pression ou par un autre effet produisant un profil

$$f_2(x) = \frac{1}{1 + x^2/\delta_2^2} \text{ (visibilité correspondante } v_2 = e^{-\delta_2 D k_2},$$

et par effet Doppler

$$\text{(profil} \qquad f_1(x) = e^{-\frac{x^2}{\delta_1^2}} \qquad V_1 = e^{-k_1 D^2 \delta_1^2}).$$

Le profil résultant est $\int f_1(u)\ f_2(x - u)\ \mathrm{d}u$, intégrale peu maniable. La visibilité résultante est $V = V_1 V_2$, et log V/D est une fonction linéaire de D, dont l'ordonnée à l'origine fournit δ_2 et la pente δ_1.

Exemple numérique. Le profil de la raie verte de ^{198}Hg, produite dans un tube sans électrode à 0 °C, déterminé au F.-P., est indiscernable du profil Doppler calculé pour une température d'agitation thermique de 200 °C. La visibilité, mesurée avec précision pour quelques valeurs de la différence de marche, est bien conforme à la loi prévue avec composantes Doppler correspondant à 30 ou 40 °C, valeur bien plus vraisemblable.

G. Stroke. — A propos de ce problème de la visibilité (photoélectrique) des franges d'interférence, et de la différence entre largeur effective de la raie et largeur Doppler, je mentionnerai que j'ai également fait, au moyen de la machine à réseaux du M. I. T., un grand nombre de mesures de visibilité avec une source de ^{198}Hg (expériences dont je reparlerai dans ma communication). Comme vous, je trouve un rapport largeur effective sur largeur Doppler de l'ordre de 2 (exactement 1,9 à 293 °K). De plus, à 313 °K seulement, la source (tube Megers), observée au Fabry-Perot était notablement renversée. Quant aux causes physiques de cet élargissement, elles sont, à ma connaissance, seulement en train d'être établies (bien que de nombreux travaux aient été publiés sur la question dans le passé). F. Bitter en a publié une explication partielle (*J. O. S. A.*, octobre 1956) où il montre que ce n'est pas la température Doppler T qui régit la largeur de la raie mais plutôt ce qu'il appelle une température de radiation (du plasma), T_r, plus élevée, mais moins élevée que la température du gaz électronique, Burger et Van Cittert (*Z. Physik*, 1928) ont fait des calculs semblables, conduisant à des valeurs comparables. Ceci corrobore peut-être la formule que vous avez donnée.

P. Jacquinot. — Je crois qu'il faut mettre l'accent sur le fait qu'on est ici dans des cas très particuliers d'application de la méthode par transformation de Fourier ; selon la terminologie introduite par Gabor il s'agit de rassembler des informations sur des objets partiellement connus (« collecting information about partially known objects »).

H. G. Kuhn. — Il est très malheureux que nous ne puissions pas avoir ici M. Michelson lui-même !

JOURNAL DE PHYSIQUE *Colloque C 2, supplément au n° 3-4, Tome 28, mars-avril 1967, page* C 2 - 120

SPECTROSCOPIE ASTRONOMIQUE PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

J. CONNES
Observatoire de Meudon, 92-Meudon, France

P. CONNES et J. P. MAILLARD
Laboratoire Aimé Cotton, CNRS, 92-Bellevue, France

Résumé. — De nouveaux progrès ont été réalisés dans la production de spectres planétaires par spectroscopie de Fourier, principalement par l'application d'une méthode de modulation réduisant l'effet de la turbulence. Un autre facteur important est la transmission immédiate de l'interférogramme à un ordinateur qui permet d'avoir un premier résultat au cours de la même nuit d'observation. Une limite de résolution de 0,3 cm^{-1} a été atteinte sur Jupiter, et de 0,07 cm^{-1} sur Vénus dans les fenêtres du proche infrarouge (8 000, 6 000 et 4 300 cm^{-1}).

Abstract. — Improved planetary spectra have been produced by Fourier Spectroscopy. The two most important factors have been the use of a new modulation method which reduces considerably the effects of atmospheric turbulence, and a fast transmission system which enables the experimenter to get preliminary results during the observation night. The spectral resolution is 0.3 cm^{-1} for Jupiter and 0.07 cm^{-1} for Venus, in the near infrared windows (8 000, 6 000 and 4 300 cm^{-1}).

1. **Introduction.** — Le principe de la méthode d'enregistrement pas à pas ainsi que les premiers résultats donnés par notre interféromètre dans le proche infrarouge ont été décrits ailleurs [1]. Nous ne ferons que les rappeler brièvement ici :

Dans un enregistrement pas à pas, le chariot mobile de l'interféromètre stationne sur chacune des valeurs de la différence de marche pour lesquelles un échantillon de l'interférogramme est désiré ; le flux sortant de l'interféromètre est mesuré par intégration. Le chariot est alors déplacé aussi rapidement que possible jusqu'au point suivant. Les déplacements sont mesurés par comptage de franges d'une raie monochromatique, et les positions d'arrêt définies par asservissement au moyen du même signal de franges. Ce système — déjà décrit — a été utilisé sans modifications dans le présent travail.

Les avantages par rapport à la méthode usuelle d'enregistrement continu sont les suivants :

1) La très grande précision avec laquelle la différence de marche peut être contrôlée entraîne une précision remarquable de la fonction d'appareil, qui peut avoir des maximum secondaires plus réduits et un contraste supérieur à ceux donnés par les meilleurs réseaux ou étalons Fabry-Perot.

2) Le nombre minimum de points permis par le théorème de l'échantillonnage peut être mesuré, ce qui est une nécessité dans le cas de spectres étendus, ou plus exactement contenant un grand nombre M, d'éléments spectraux ($M = \Delta\sigma/\delta\sigma$, avec $\Delta\sigma$ domaine spectral, et $\delta\sigma$ limite de résolution, ou largeur instrumentale).

3) Le temps d'intégration sur chaque point peut être variable, ce qui permet une compensation facile de l'effet des fluctuations d'intensité de la source.

4) L'enregistrement peut être interrompu et repris à volonté.

Les performances de l'interféromètre ont été vérifiées sur des sources de laboratoire. Une largeur instrumentale de 0,07 cm^{-1}, conforme à ce que l'on peut attendre de la différence de marche maximum de l'appareil, qui est égale à 11 cm, a été obtenue en émission et en absorption. Un rapport signal sur bruit supérieur à 10^4 a été mesuré sur des raies d'émission. Le défaut de reproductibilité des intensités pour un spectre d'absorption a été trouvé inférieur à 1/400, et le défaut de reproductibilité de position des raies inférieur à 1/500 de la largeur instrumentale (1).

(1) Un nouvel interféromètre de même conception générale, mais permettant d'atteindre une différence de marche maximum voisine de 2 m et une limite de résolution de 5×10^{-3} cm^{-1} est décrit par J. Pinard dans une autre communication à ce même Colloque [11].

Cet interféromètre, construit en collaboration avec le Jet Propulsion Laboratory (Pasadena, Californie) (2) est destiné à des études astronomiques, principalement planétaires. Au cours d'observations faites à Steward Observatory (Arizona) et à l'Observatoire de Saint Michel en Haute Provence, il a permis d'enregistrer des spectres de Vénus et Mars [1] avec une limite de résolution de l'ordre de 1 cm^{-1} dans les fenêtres atmosphériques du proche infrarouge (1,25 μ, 1,6 μ et 2,2 μ). Le gain en pouvoir de résolution par rapport aux mêmes spectres enregistrés par des méthodes classiques (spectromètre à réseau balayant le domaine spectral) était de l'ordre de 10 ; dans le cas de Mars, avait de plus été obtenue une importante amélioration du rapport signal sur bruit. L'analyse de ces spectres est en cours au Jet Propulsion Laboratory.

En raison de difficultés particulières aux observations astronomiques, et dues entièrement à la turbulence atmosphérique, le pouvoir de résolution maximum de l'appareil n'avait pas, jusqu'ici, été atteint sur les planètes. Le présent article décrit les dernières améliorations du système qui ont démontré leur efficacité au cours d'observations de Jupiter (janvier 1966) et de Vénus (mai-juin-juillet 1966) (3) à l'Observatoire de Haute Provence du Centre National de la Recherche Scientifique. Les modifications de l'interféromètre ont été exécutées au Laboratoire Aimé Cotton. Tous les calculs ont été effectués par le Centre de Calcul Numérique de l'Observatoire de Meudon.

2. Turbulence atmosphérique et spectroscopie de Fourier. — Les perturbations apportées par l'atmosphère terrestre peuvent (en simplifiant quelque peu) être groupées en trois catégories :

1) Les fluctuations de transparence achromatiques — au moins en première approximation et dans un domaine spectral pas trop étendu — dues essentiellement aux nuages légers à travers lesquels les observations doivent — trop souvent — être faites.

Ces variations peuvent être très importantes. Mais elles sont faciles à mesurer au moyen d'un récepteur supplémentaire, et leur compensation — par variation du temps d'intégration ou l'emploi d'autres dispositifs permettant d'enregistrer un rapport — est facile et ne mérite pas d'être étudiée en détail.

2) Les fluctuations de transparence fonction de la longueur d'onde à l'intérieur du domaine spectral étudié, pour lesquelles aucune compensation n'est possible.

Dans l'infrarouge, la cause la plus importante de fluctuations chromatiques de transparence est la variation de la teneur en vapeur d'eau de l'atmosphère, qui entraîne une fluctuation de profondeur de toutes les raies d'absorption correspondantes. Cet effet peut être réduit en limitant au moyen d'un filtre le domaine spectral à une « fenêtre » de transparence atmosphérique, pour laquelle les raies de la vapeur d'eau sont relativement peu intenses ; c'est ce que nous avons fait jusqu'ici. Cependant, les filtres utilisés ne coïncidaient pas exactement avec les fenêtres et dans plusieurs cas sur le côté de la bande passante étaient incluses de nombreuses raies de la vapeur d'eau dont les profondeurs d'absorption allaient jusqu'à 100 % (4). Même dans ces conditions, l'effet est négligeable par rapport à ceux qui seront étudiés plus loin.

Comme l'observation à partir du sol des régions spectrales où l'absorption de la vapeur d'eau est presque totale, est dépourvue d'intérêt en astronomie stellaire ou planétaire, les conséquences pratiques de l'effet discuté ici sont peu importantes et ne limitent pas jusqu'à présent, le gain considérable donné par le principe multiplex.

3) Les fluctuations d'indice — ou turbulence proprement dite — causent d'une part une fluctuation dans le flux total collecté par le télescope, ou scintillation, qui peut être considérée comme sensiblement indépendante de la longueur d'onde dans un domaine spectral d'étendue modérée (5), tel que celui limité par une « fenêtre » infrarouge. Sa compensation est donc facile. Mais d'autre part, la *structure* du faisceau reçu est profondément modifiée. Aucune de ses sections droites n'est stable ni homogène. Seules les images du miroir primaire ont un *contour* fixe ; mais elles ne sont pas uniformément éclairées (phénomène des ombres volantes).

(2) Et transporté en France grâce au contrat AF-61 (052) 842, European Office of Aerospace Research, United States Air Force.

(3) Nous avons inclu dans la rédaction du présent article certains résultats obtenus sur Vénus peu après le Colloque ; l'équipement était le même que celui utilisé sur Jupiter en janvier.

(4) Voir en particulier le spectre de Mars [1, p. 908].

(5) Ce ne serait plus vrai si l'on considérait, par exemple, l'ensemble du domaine compris entre 1 et 12 μ. Mais les récepteurs photoconducteurs ont, pour des raisons fondamentales, des domaines de sensibilité optimum limités. Si l'on cherchait à couvrir, en un seul enregistrement, l'ensemble de cette région spectrale — tout en obtenant le meilleur rapport signal sur bruit possible — il faudrait nécessairement disposer à la sortie de l'interféromètre un système disperseur et plusieurs récepteurs en parallèle, chacun d'eux étant choisi pour une fenêtre particulière.

Or, le faisceau possédant cette structure doit traverser un système optique quelque peu complexe, comportant un grand nombre de miroirs dont le pouvoir réflecteur n'est pas rigoureusement uniforme, ainsi qu'une lame séparatrice, pour aboutir sur un ou plusieurs récepteurs tels que des cellules au sulfure de plomb dont la sensibilité est *très peu* uniforme. Les défauts d'homogénéité du faisceau donnent alors naissance à des fluctuations supplémentaires du signal dont la compensation est beaucoup plus difficile que celle de la scintillation pure car elles *ne sont pas corrélées* pour deux récepteurs différents. Ce phénomène se produit même si — comme il est correct — c'est l'image du miroir et non celle de la planète qui est projetée sur les récepteurs.

Bien que ces fluctuations soient assez faibles (de l'ordre de quelques pour cent du signal moyen avec une bande passante de 1 Hz) elles ont constitué jusqu'ici la principale difficulté pour l'application astronomique de la spectroscopie de Fourier, alors qu'elles peuvent passer relativement inaperçues dans d'autres types de mesures ([6]).

Cette difficulté vient du principe même de la méthode. Le signal enregistré qui donne l'interférogramme, résulte en effet de la contribution de *tous* les éléments spectraux simultanément observés ; c'est précisément ce qui entraîne le multiplexage du détecteur et permet le gain fondamental égal à un facteur M sur le temps de mesure par rapport aux méthodes classiques d'exploration du spectre par balayage. Chaque élément spectral produit dans l'interférogramme une sinusoïde élémentaire dont l'amplitude est — en supposant le spectre rectangulaire pour simplifier — égale à la fraction $1/M$ de celle du pic central correspondant à la différence de marche zéro.

En conséquence, l'aspect habituel d'un interférogramme est celui donné par la figure 1 : lorsque la différence de marche augmente, les variations d'intensité de l'interférogramme deviennent très petites vis-à-vis de sa valeur moyenne ; or ces variations d'intensité constituent les détails utiles qui doivent être correctement enregistrés. Toute fluctuation accidentelle, même très faible, de la *valeur moyenne*, peut causer une déformation considérable du spectre calculé. Donnons un exemple très schématique (Fig. 2). Soit

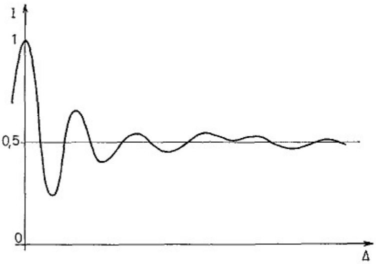


FIG. 1. — Aspect typique d'un interférogramme.

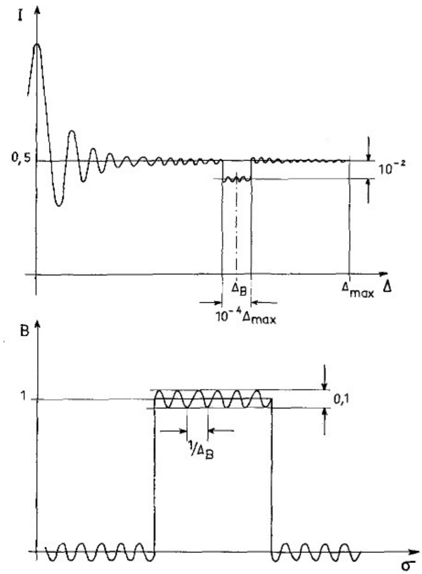


FIG. 2. — Interférogramme d'un spectre rectangulaire, perturbé par une brusque variation de niveau moyen et spectre correspondant. Figures non à l'échelle.

un spectre rectangulaire contenant $M = 10^4$ éléments spectraux, étudié avec un pouvoir de résolution $R = 10^5$ (valeurs correspondant effectivement à celles que nous avons atteintes sur Vénus vers 8 000 cm^{-1}). Supposons une baisse accidentelle de 1 % de l'intensité moyenne de l'interférogramme pendant le défilement de 10 franges, c'est-à-dire 10^{-4} fois la durée totale d'enregistrement. Au spectre réel, se trouve alors superposée une ondulation parasite dont la hauteur

([6]) En particulier, le temps d'intégration utilisé normalement en photométrie astronomique est de quelques dizaines de secondes ; nous verrons plus loin que le temps d'intégration par point pour un enregistrement d'interférogramme à haute résolution peut être d'une fraction de seconde.

pic à pic est égale à 0,1, et qui pourrait facilement être prise pour une bande d'absorption.

Si cette baisse du signal était due à une fluctuation d'intensité de la source, elle serait facilement compensée par le dispositif d'intégration à temps variable. Mais si elle provient d'un petit déplacement du faisceau dans le système optique et en particulier sur les récepteurs, elle n'est pas connue et il n'est pas possible d'en tenir compte.

Un premier remède, indiqué par Fellgett [3] et que nous avons systématiquement employé lors de nos premiers essais [1] consiste à enregistrer un interférogramme équilibré (Fig. 3*a*) en prenant la différence

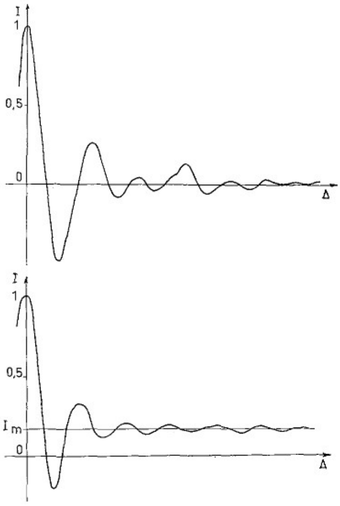


FIG. 3. — Interférogramme équilibré, de valeur moyenne nulle (en haut) et interférogramme imparfaitement équilibré (en bas).

entre les signaux donnés par deux récepteurs utilisant les deux faisceaux sortant de l'interféromètre et modulés en opposition. Cependant, ces deux faisceaux ne sont d'intensité égale que si le pouvoir réflecteur de la lame séparatrice est exactement 50 % (et l'absorption nulle), ce qui n'est pas réalisable dans un domaine spectral étendu. En conséquence, le résultat obtenu est normalement celui de la figure 3*b* ; il est pratiquement difficile d'obtenir pour I_m, intensité moyenne, une valeur inférieure à 0,1.

D'autre part, cet équilibrage résulte d'une différence entre deux faisceaux ayant parcouru des trajets optiques en partie différents et tombant sur des *récepteurs différents*. Lorsque le faisceau est instable, l'équilibrage est lui-même instable et les fluctuations observées de la valeur moyenne restent grandes même si I_m est faible. Nos tentatives pour réduire artificiellement I_m en atténuant par absorption l'un des faisceaux n'ont conduit à aucun résultat utile, les fluctuations restant les mêmes en valeur absolue.

Deux autres méthodes d'enregistrement destinées à réduire l'effet nuisible de la turbulence ont été indiquées, toutes les deux par Mertz. La première est la méthode de balayage rapide (« fast scan »), utilisée avec succès pour obtenir de nombreux spectres planétaires ou stellaires à basse résolution et décrite dans une communication à ce même Colloque [4].

Elle consiste à faire varier la différence de marche assez vite pour que les fréquences correspondant aux franges d'interférence qui défilent soient aussi élevées que le permet le récepteur utilisé (soit quelques centaines de Hz au plus pour une cellule au sulfure de plomb refroidie). Comme la turbulence atmosphérique possède un spectre de fréquences approximativement en $1/f$, les composantes des fluctuations qui coïncident avec les fréquences Fourier sont fortement réduites. Le signal modulé par l'interféromètre est enregistré directement (sans modulation extérieure).

L'extension de cette méthode aux problèmes à haute résolution présente deux difficultés. D'une part, elle est incompatible avec l'enregistrement pas à pas qui présente de nombreux avantages et a seul, jusqu'ici, permis d'atteindre des pouvoirs de résolution élevés en laboratoire. D'autre part, la durée d'enregistrement est nécessairement très courte (par exemple, 50 s pour un pouvoir de résolution égal à 10^4 si la fréquence moyenne des franges est de 200 Hz). Or pour obtenir un rapport signal sur bruit suffisant sur des sources astronomiques faibles, il est indispensable d'utiliser pleinement le temps disponible qui est de l'ordre de quelques heures. Il est donc nécessaire de sommer un très grand nombre d'interférogrammes ; ceci est facilement réalisable au moyen d'une mémoire digitale lorsque le nombre N des échantillons n'est pas trop élevé (de l'ordre de 1 000) mais devient difficile pour les grands nombres d'échantillons nécessaires pour nos enregistrements ($N = 58\,000$ jusqu'ici et vraisemblablement plus dans l'avenir lorsqu'un certain nombre de problèmes liés au temps de calcul auront été résolus).

La seconde méthode, décrite par Mertz lors du premier Colloque de Bellevue [5] mais non utilisée depuis, peut être appelée méthode de modulation interne et a été employée ici ; nous allons la discuter plus en détails.

3. **Méthode de modulation interne.** — La méthode classique consiste à enregistrer l'interférogramme en cosinus

$$I(\Delta) = \int_0^\infty B(\sigma) \cos 2\,\pi\sigma\Delta \, d\sigma = TF_{\cos}[B(\sigma)]$$

par mesure de l'intensité $I(\Delta_A)$ en des points tels que A, d'abscisse $\Delta = \Delta_A$. Cette mesure est normalement effectuée en modulant le flux lumineux *total* par un modulateur extérieur à l'interféromètre.

Eliminons toute modulation externe et faisons osciller à une fréquence $N = \omega/2\,\pi$ une pièce de l'interféromètre (Fig. 4) de telle façon que la différence de marche varie, par exemple, sinusoïdalement avec une amplitude. $\lambda_0/4$:

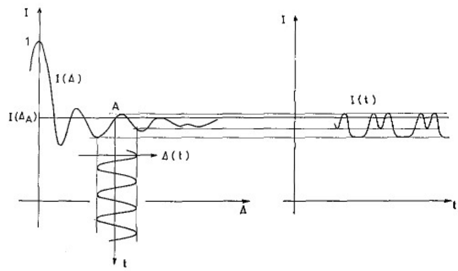


FIG. 4. — Modulation interne. La différence de marche varie suivant la loi $\Delta(t)$ au voisinage du point A, d'abscisse Δ_A ; il y a exploration rapide d'une partie de la courbe $I(\Delta)$ et production d'un signal périodique $I(t)$.

$$\Delta = \Delta_A + \frac{\lambda_0}{4} \cos \omega t \, .$$

L'intensité du signal sortant de l'interféromètre comprend un terme constant, qui ne sera pas utilisé, et des termes de fréquence $N, 2\,N, 3\,N, \ldots$ d'amplitudes $I_1, I_2, I_3, \ldots$

Posons $\sigma_0 = 1/\lambda_0$. On montre que, au point A :

$$I_1(\Delta_A) = \int_0^\infty 2\,J_1\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) B(\sigma) \sin 2\,\pi\sigma\Delta_A \, d\sigma$$

$$I_2(\Delta_A) = \int_0^\infty 2\,J_2\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) B(\sigma) \cos 2\,\pi\sigma\Delta_A \, d\sigma$$

$$I_3(\Delta_A) = \int_0^\infty 2\,J_3\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) B(\sigma) \sin 2\,\pi\sigma\Delta_A \, d\sigma \, ,$$

e c...

où $J_1, J_2, J_3, \ldots$ sont les fonctions de Bessel d'ordre 1, 2, 3, ... En opérant sur le signal des démodulations synchrones aux fréquences N, $2\,N$, $3\,N$, ... il est possible de mesurer les amplitudes des différents harmoniques pour toutes les valeurs utiles de Δ_A et par conséquent d'enregistrer les interférogrammes :

$$I_1(\Delta) = TF_{\sin}\left[2\,J_1\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) B(\sigma)\right]$$

$$I_2(\Delta) = TF_{\cos}\left[2\,J_2\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) B(\sigma)\right]$$

$$I_3(\Delta) = TF_{\sin}\left[2\,J_3\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) B(\sigma)\right] \text{, etc.}$$

En calculant alors leurs transformées de Fourier, en cosinus pour les termes pairs ou en sinus pour les termes impairs nous obtiendrons le spectre $B(\sigma)$ mais multiplié par l'une des fonctions $J_1, J_2, \ldots$ (Fig. 5).

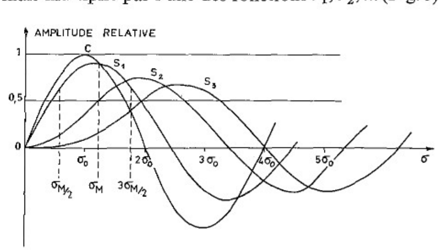


FIG. 5. — Facteur par lequel est multiplié le spectre $B(\sigma)$ dans le cas d'une modulation rectangulaire (C), ou d'une modulation sinusoïdale (S_1, S_2, S_3 correspondant aux trois premiers harmoniques).

Chacun de ces spectres n'est donc utilisable que dans un domaine limité — c'est la principale restriction apportée par la méthode — et le rendement (7) est partout inférieur à l'unité.

Cependant, ce rendement reste acceptable. On montre que, en détectant seulement le premier harmonique le rendement maximum est 0,91 pour $\sigma_M = 1{,}18\,\sigma_0$ et qu'il reste supérieur à 0,64 entre $\sigma_M/2$ et $3\,\sigma_M/2$, c'est-à-dire dans un domaine assez large pour correspondre à celui de la cellule au sulfure de plomb (3 000 à 9 000 cm^{-1} environ).

(7) Comparé à celui donné par une méthode de modulation externe optimum, c'est-à-dire une modulation rectangulaire avec modulateur réfléchissant, du type de celle que nous avons employée jusqu'ici (1). Dans les deux cas, les deux sorties de l'interféromètre sont supposées utilisées, ce qui nécessite deux récepteurs.

Remarquons enfin qu'une modulation *rectangulaire* de *même* amplitude conduit à un signal modulé dont les harmoniques ont pour amplitude :

$$I_1'(\Delta) = TF_{\sin}\left[\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)B(\sigma)\right]$$

$$I_3'(\Delta) = TF_{\sin}\left[\frac{4}{3\,\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)B(\sigma)\right] ,$$

etc...

Seul le terme I_1' est intéressant, les suivants ne permettant pas de couvrir un domaine spectral différent. Le rendement maximum est maintenant égal à l'unité pour $\sigma = \sigma_0$ et reste supérieur à 0,71 pour

$$\sigma_0/2 < \sigma < 3\,\sigma_0/2 .$$

Ce type de modulation est donc légèrement préférable à la modulation sinusoïdale (mais de réalisation plus difficile).

L'avantage essentiel de la modulation interne, comparée à l'enregistrement direct des intensités est celui indiqué par Mertz [5] : le niveau moyen de l'interférogramme est *rigoureusement nul*, quelles que soient les fluctuations de la source. Ce résultat reste vrai pour de petits déplacements des faisceaux ; en effet, il n'est *pas* nécessaire pour l'obtenir d'équilibrer les signaux de deux récepteurs différents. Il nous a donc paru utile de chercher à combiner cette propriété essentielle pour les observations à travers l'atmosphère et celles de l'enregistrement pas à pas.

4. **Réalisation.** — 1) PARTIE OPTIQUE. L'interféromètre a déjà été décrit [1]. Il est traversé par deux faisceaux différents géométriquement séparés : l'un est le faisceau infrarouge à mesurer et l'autre un faisceau de lumière verte du mercure utilisé pour le comptage et l'asservissement. Il a été employé ici sans autre modification que l'adjonction de 4 lames planes et parallèles de fluorine placées sur le faisceau infrarouge *seul*. Le faisceau de contrôle n'est donc pas affecté et le déplacement pas à pas du chariot reste conforme à la description déjà donnée.

La normale aux lames est inclinée d'environ 10° par rapport à la direction du faisceau. Chaque paire produit une translation nulle des rayons ; il n'y a donc pas décentrement des anneaux à l'infini donnés par l'interféromètre.

Une paire de lames est portée par les deux branches d'un diapason autoentretenu (Fig. 6) ; l'amplitude de l'oscillation — de l'ordre de quelques microns — est réglable. L'autre paire de lames, placée sur l'autre bras, sert seulement à conserver l'achromatisme de l'interféromètre ; l'une des lames possède un réglage fin d'inclinaison. Les lames sont planes, parallèles et d'épaisseurs égales à environ 1/2 frange (visible) près.

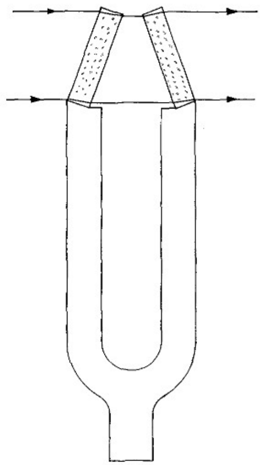


FIG. 6. — Paire de lames vibrantes en fluorine placée sur le trajet du faisceau infrarouge dans l'interféromètre.

Pour que la loi de variation $\Delta(t)$ cherchée soit obtenue, les lames vibrantes ne doivent introduire ni dérive de la différence de marche ni réaction oscillatoire sur le bâti de l'interféromètre. En effet, l'asservissement ne pourrait compenser ni une variation de l'inclinaison moyenne de l'une des lames — puisque le faisceau de contrôle ne les traverse pas — ni une légère oscillation du chariot mobile induite par couplage mécanique car la fréquence choisie (200 Hz) est trop élevée pour son temps de réponse (5 ms).

Bien qu'un diapason correctement équilibré n'exerce qu'une réaction minime sur son support, il a été nécessaire de le placer sur un bâti entièrement indépendant de celui de l'interféromètre. Dans ces conditions, de petites rotations relatives du support du diapason et de celui de l'interféromètre sont à craindre, mais la variation correspondante de la différence de marche est du second ordre, car le diapason se comporte alors comme une lame plane et parallèle unique, perpendiculaire au faisceau.

Enfin, l'amplitude de l'oscillation doit être stable. En effet, une variation de cette amplitude produit une affinité de la courbe $J_1(\sigma)$ par laquelle est multiplié le spectre, et une variation des intensités calculées. L'effet peut être faible si le domaine spectral est étroit et voisin du maximum de J_1.

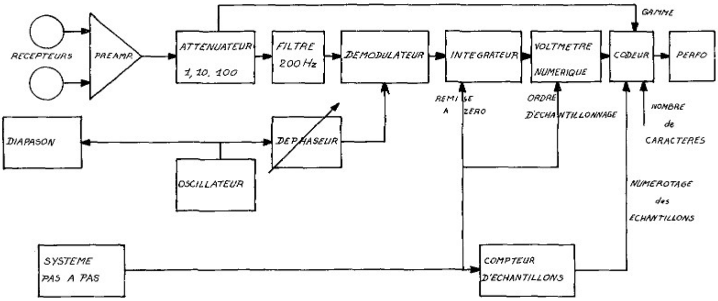


FIG. 7. — Schéma de principe du système d'enregistrement (partie analogique et partie digitale).

Un dispositif de stabilisation électronique de l'amplitude du diapason prévu à l'origine n'a pu être réalisé à temps pour les expériences, et l'amplitude de l'oscillation, bien que suffisamment stable au cours d'un enregistrement, n'était pas reproductible avec assez de précision d'un jour à l'autre. En conséquence, la reproductibilité des intensités dans les spectres calculés a été jusqu'ici un peu moins bonne ([8]) qu'avec la modulation externe utilisée auparavant [1].

2) PARTIE ÉLECTRIQUE (Fig. 7). Les deux récepteurs utilisant les deux sorties de l'interféromètre fournissent deux signaux en opposition ; leur différence est amplifiée par un préamplificateur à large bande. Le signal traverse ensuite un atténuateur à commande manuelle donnant des atténuations égales à 1, 10 ou 100, puis un filtre centré sur la fréquence de modulation (200 Hz) et de largeur de bande 40 Hz environ ; il est ensuite démodulé par un relais vibrant (choisi en raison de sa parfaite linéarité et de son absence de dérive) puis intégré.

Seul le premier harmonique de fréquence N doit être mesuré ; il est nécessaire que les harmoniques pairs en particulier soient aussi fortement atténués que possible : en effet, ils donneraient des interférogrammes $I_2, I_4, \ldots$ en quadrature avec l'interférogramme désiré I_1, ce qui se traduirait par une erreur de phase.

([8]) Ce dispositif de modulation interne de réalisation relativement simple et rapide n'est pas considéré comme la solution définitive. De meilleurs résultats devraient pouvoir être obtenus sans l'adjonction de pièces optiques supplémentaires en faisant osciller l'un des miroirs de l'interféromètre — par exemple le petit miroir de l'un des « œils de chat » — qui serait porté par une *céramique piezo électrique*. L'asservissement pourrait alors contrôler à la fois la valeur moyenne de la différence de marche et l'amplitude de l'oscillation ; une forme d'oscillation rectangulaire serait réalisable.

Le filtre donne une première atténuation (insuffisante par elle-même) des signaux de fréquence $2\,N$, $3\,N, \ldots$; il facilite en même temps le réglage de phase de la démodulation en donnant au signal transmis une allure sinusoïdale. La démodulation elle-même fournit une atténuation plus grande ([9]), de l'ordre de $2\,NT$ pour l'harmonique 2, où T est le temps d'intégration (soit environ 100 fois avec $N = 200$ Hz et $T = 0{,}25$ s). Cette atténuation pourrait être rendue infinie en prenant pour temps d'intégration un multiple entier de la période $1/2\,N$ de l'harmonique 2 — le plus gênant. Cette précaution n'a pas été jugée nécessaire jusqu'ici mais le deviendrait pour des temps d'intégration sensiblement plus courts.

A la différence de la modulation externe précédemment utilisée, la modulation interne ne permet pas d'obtenir un signal proportionnel à l'intensité totale du flux reçu, en vue de régler le temps d'intégration. Dans le cas de Jupiter (observations de nuit), le temps d'intégration a été réglé à partir du signal donné par les photomultiplicateurs du système de guidage [1] ; ce procédé est évidemment très grossier, les photomultiplicateurs mesurant l'intensité visible. Les résultats ont néanmoins été assez satisfaisants : des spectres reproductibles au bruit près ont été obtenus soit par ciel clair, soit par ciel très absorbant et même avec absorption rapidement fluctuante (cirrus).

Le cas de Vénus (observation de jour) est plus difficile : l'effet le plus gênant de nuages légers est alors non pas l'atténuation du signal utile mais la production d'un signal parasite non négligeable ; dans ces

([9]) A condition que dans le fonctionnement du relais les deux demi-périodes soient rigoureusement égales ; le réglage est contrôlé en appliquant à l'entrée du démodulateur une tension continue et en vérifiant que la sortie de l'intégrateur reste nulle.

conditions, nous n'avons pas essayé jusqu'ici de faire varier le temps d'intégration.

La solution à ces difficultés (non encore expérimentée) paraît être l'emploi simultané d'une modulation interne à une fréquence N et d'une modulation externe à fréquence N' par miroir vibrant, modulant sélectivement le flux de la planète et non celui du fond du ciel, ni l'émission thermique des miroirs. On obtiendrait alors, par détection synchrone à la fréquence N' un signal proportionnel à l'intensité totale de la planète dans la fenêtre infrarouge étudiée, qui permettrait de régler plus correctement le temps d'intégration. D'autre part, deux détections synchrones en cascade aux fréquences N et N' fourniraient un interférogramme débarrassé des composantes parasites (fond du ciel et émission thermique). Ce système d'enregistrement deviendra sans doute indispensable dans le cas d'astres plus faibles, ou pour l'étude de longueurs d'onde plus grandes (fenêtre 8-12 µ en particulier).

5. **Quantification et enregistrement de l'interférogramme.** — Le nombre élevé des points mesurés sur l'interférogramme (jusqu'à 42 000 sur Vénus et 58 000 sur des essais en laboratoire) impose de chercher à réduire le plus possible le volume des données à enregistrer sur la bande perforée, spécialement en vue de réduire le temps de transmission à l'ordinateur par la ligne téléphonique — dont le débit est limité.

D'autre part, le nombre des éléments spectraux (jusqu'à 20 000 sur Vénus) et par conséquent le rapport élevé entre l'intensité maximum et le bruit dans l'interférogramme obligent à accroître le plus possible la dynamique du système d'enregistrement : le signal maximum doit en effet rester *inférieur* à celui pour lequel un défaut de linéarité non négligeable de la partie analogique (préamplificateur et intégrateur) apparaîtrait ; par ailleurs, la valeur efficace du bruit doit rester nettement *supérieure* au signal minimum mesurable, fixé par la dérive de l'intégrateur d'une part, et le niveau de quantification d'autre part. Ces points ont déjà été brièvement discutés [1] ; il a été montré qu'un facteur $q = MS_{moy}/B_{eff}$ produit du nombre d'éléments spectraux M par le rapport du signal moyen S_{moy} à la valeur efficace du bruit B_{eff} *dans le spectre* définit la qualité du système complet à ce point de vue : toute erreur systématique ou aléatoire dans la mesure de l'intensité de l'interférogramme entraîne une réduction de q ; ce facteur mesure en quelque sorte la *perfection du multiplexage obtenu.*

Ces deux difficultés (réduction du volume des données et extension de la dynamique) ont été résolues de la façon suivante (Fig. 8) : au début de l'enregistrement, le signal de l'intégrateur est mesuré par un voltmètre numérique donnant 4 chiffres significatifs ; la portion centrale de l'interférogramme est donc quantifiée à 10^4 niveaux. Les indications du voltmètre sont codées en code BCD, qui nécessite un caractère par chiffre décimal ; chaque mesure est donc transcrite par 4 caractères sur une bande perforée.

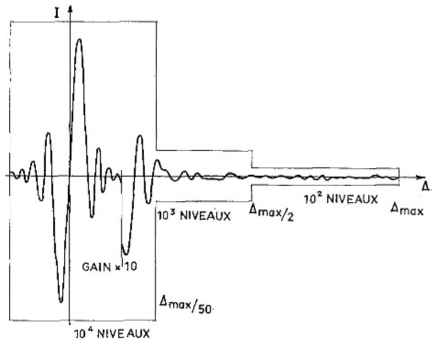


FIG. 8. — Quantification de l'interférogramme. Les valeurs de la différence de marche Δ pour lesquelles interviennent l'augmentation du gain et la réduction du nombre de niveaux sont très variables suivant les cas. La figure n'est pas à l'échelle.

Lorsque le signal modulé a suffisamment décru, on le multiplie par 10 au moyen de l'atténuateur ; le bruit du récepteur est multiplié par le même facteur et devient supérieur au niveau de quantification [10].

L'opération est pratiquement équivalente à une multiplication par 10 de la dynamique de l'intégrateur. L'emploi de 5 chiffres significatifs coûterait un caractère supplémentaire et ne donnerait pas de gain effectif de précision ; celle-ci serait alors limitée par la linéarité et la stabilité de la partie analogique. Le signal continuant à décroître, les décades de poids supérieur du voltmètre deviennent successivement nulles ; on peut réduire le nombre de caractères à 3 puis à 2, c'est-à-dire le nombre de niveaux à 10^3 et 10^2 sans perte de précision. Suivant la structure de l'interférogramme, cette réduction intervient plus ou moins tôt : la figure 8 donne des ordres de grandeur.

Les mesures sont groupées par blocs de 10 qui sont numérotés grâce à un compteur déclenché par l'avance de l'interféromètre. Au début de chaque bloc, sont perforés 8 caractères supplémentaires indiquant le

[10] Un deuxième changement de gain d'un facteur 10 peut être employé ; il est utile pour les spectres d'absorption en laboratoire, pour lesquels le rapport s/b peut être beaucoup plus élevé que pour les spectres planétaires, ou pour des spectres solaires.

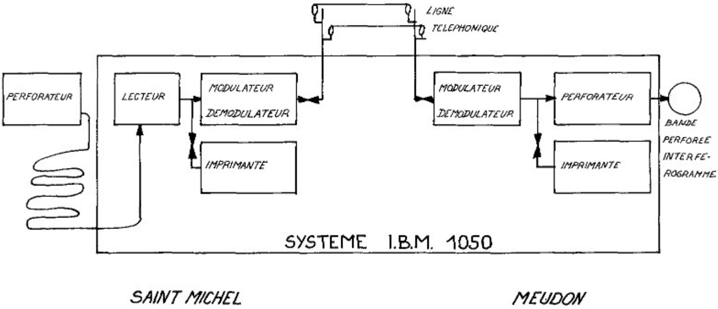


FIG. 9. — Transmission de l'interférogramme de l'Observatoire de Saint-Michel au Centre de Calcul Numérique de Meudon.

numéro du bloc (4 caractères permettant de repérer 10^4 blocs, soit 10^5 mesures), la gamme de l'atténuateur, le nombre de caractères par mesure et 2 caractères spéciaux nécessités par les contrôles pendant la transmission. Le nombre moyen de caractères par mesure est ainsi égal à 4,8 au début de l'interférogramme puis passe à 3,8 et 2,8.

De cette façon, le nombre total de caractères n'a pas dépassé 136 000 pour un enregistrement de 42 000 mesures (soit en moyenne 3,2 caractères/mesure) alors que sans ces artifices, pour la même précision, il aurait atteint 240 000. Comme il sera montré plus loin, cette réduction était indispensable.

6. **Transmission des données et calcul du spectre.** — Afin de faire le plus rapidement possible les vérifications indispensables sur le spectre, la bande perforée est aussitôt transmise à Meudon en une opération continue, sans stockage intermédiaire (Fig. 9), grâce à une ligne téléphonique ordinaire. Le système 1050 IBM qui permet de transmettre 10 caractères/s est utilisé et reproduit à Meudon une bande perforée identique. De plus, deux imprimantes, à chaque bout de la ligne, donnent en clair la liste des valeurs de l'interférogramme.

La durée maximum normale ([11]) d'un enregistrement a été prise égale à 3 heures, ce qui permet de faire en une journée, 3 enregistrements planétaires, dont l'un au voisinage du méridien et les deux autres à des élévations plus basses, et un enregistrement de comparaison avec le soleil. La durée totale d'enregistrement effectif est alors de 12 heures, réparties sur 13 ou 14 heures environ, en raison des contrôles divers au début de chaque enregistrement, et des changements nécessaires pour passer de la planète au soleil.

La durée de *transmission* dans le cas d'un enregistrement de 136 000 caractères est alors de 3 h 45 mn, soit environ 15 h par journée de 4 interférogrammes, et la transmission a tendance à prendre du retard par rapport aux enregistrements. La situation que nous venons de décrire est d'ailleurs quelque peu théorique, les nuages venant à tout instant ralentir les enregistrements, et les incidents sur la ligne téléphonique, les erreurs de transmission et les messages indispensables ralentissant la transmission. La bande perforée joue le rôle nécessaire de volant et permet de donner une indépendance suffisante aux deux opérations.

Après la fin de chaque transmission, la bande perforée transmise est lue à Meudon par un lecteur IBM 1011 et les données décodées et transférées sur bande magnétique par un ordinateur 1401 (périphérique de l'ordinateur central 7040) (Fig. 10). La rapidité relative de cette lecture (500 caractères/s, durée maximum : 5 minutes) rend inutile de l'effectuer pendant la transmission elle-même. Au cours de cette opération, la bande est vérifiée et des corrections peuvent être introduites au moyen de cartes perforées manuellement pour éliminer les erreurs de perforation (à St-Michel ou à Meudon) et de transmission. Comme ces corrections exigent de transmettre des messages (avec les imprimantes) elles font souvent perdre beaucoup de temps.

([11]) C'est-à-dire, en l'absence de nuages ; en pratique, dans de nombreux cas, les interruptions par les nuages ont été fréquentes et la durée des enregistrements s'est trouvée augmentée. La durée de 3 heures correspond pratiquement à la cadence maximum possible avec le système actuel : pour mesurer 42 000 points, il faut faire 4 mesures/s, c'est-à-dire que l'on dispose de 250 ms par point de l'interférogramme. Environ 70 ms étant nécessaires pour le déplacement du chariot de l'interféromètre, la remise à zéro de l'intégrateur et la mesure par le voltmètre, le temps *utile* restant pour l'intégration est seulement 180 ms. Une cadence plus rapide gaspillerait une fraction excessive du temps d'enregistrement. Les valeurs données ici correspondent au cas de Vénus — le plus difficile. Pour Jupiter, on avait $N_{\max} = 13\,000$ et la cadence était donc plus lente.

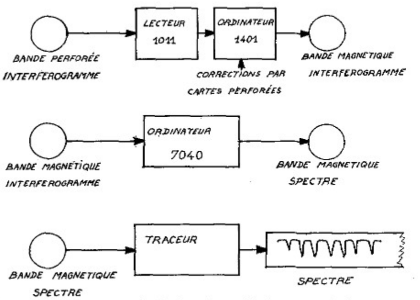


FIG. 10. — Lecture de la bande, calcul et tracé du spectre.

Le calcul de 3 étroites tranches du spectre (contenant environ 100 éléments spectraux chacune) est alors effectué par l'ordinateur central. La position des 3 tranches est choisie à l'avance : l'une est prise au voisinage du maximum de transmission du filtre dans une région où une (ou plusieurs) raie d'absorption fine et isolée est attendue, les deux autres de part et d'autre de la bande passante du filtre. On obtient ainsi les renseignements indispensables : rapport signal/bruit, et résolution effective. Le temps de lecture du programme et les données (toujours pour $N = 42\,000$) est de 15 minutes, et le temps de calcul des 3 échantillons est de 60 minutes ([12]).

Les résultats sont alors présentés sous forme de courbe par un traceur digital rapide (Benson-France, 300 pas/s) et les résultats communiqués à l'expérimentateur 80 à 90 minutes après la fin de la transmission. Les spectres reconnus bons sont calculés ultérieurement dans toute leur étendue.

On voit que dans ces conditions, les résultats de l'interférogramme n sont connus à temps pour corriger (éventuellement) le mode opératoire pour l'interférogramme $n + 2$ mais non pas pour l'interférogramme $n + 1$. Une réduction des temps de transmission et de calcul est donc très souhaitable ([13]).

([12]) Durant les expériences, le seul programme disponible était encore celui — déjà décrit [6] — qui effectue la transformée de Fourier point par point, et pour lequel le temps de calcul obéit à la formule $T = MN \times 3 \times 10^{-4}$ s avec un ordinateur 7040. Après la fin des expériences, un nouveau programme utilisant la méthode de Cooley et Tukey [7] et de Forman [8] est devenu utilisable ; il a permis de ramener le temps de calcul à 5 heures jusqu'à $M = N = 58\,000$ et a été employé pour le calcul des spectres complets.

([13]) Cependant, dans quelques cas, nous avons aussi effectué le calcul du spectre — à résolution réduite — à partir de la fraction d'interférogramme déjà transmise pendant que l'enregistrement de celui-ci se poursuivait. Le calcul était alors beaucoup plus rapide et le résultat obtenu *avant* la fin de l'enregistrement.

La réduction du temps de transmission peut être obtenue de deux façons différentes. D'une part, la capacité du système de transmission a jusqu'ici été mal employée ; il permet en effet de reproduire 64 caractères différents, donc de transmettre 6 bits par caractère. Or, seuls les 10 caractères numériques étaient effectivement utilisés, ce qui donnait $\mathrm{Log}_2\, 10 = 3{,}32$ bits par caractère. L'emploi d'un codeur binaire permettrait de transmettre $6/3{,}32 = 1{,}80$ fois plus d'information avec le même nombre de caractères ; la longueur de la bande perforée et le nombre moyen d'erreurs seraient réduits dans la même proportion.

De plus, des équipements plus rapides, transmettant jusqu'à 150 caractères par seconde sont maintenant disponibles. Il est donc possible de réduire le temps de transmission par un facteur de l'ordre de 30 par rapport à nos expériences ; dans ces conditions, il ne serait plus indispensable de disposer d'une ligne téléphonique louée en permanence. La transmission ne durerait plus que quelques minutes et pourrait se faire sur le réseau commuté.

Il est nécessaire d'autre part, de réduire non seulement le temps de calcul lui-même mais aussi celui pris par les diverses manipulations de bandes à l'arrivée des données. C'est précisément ce que permettent les ordinateurs de la nouvelle génération auxquels plusieurs utilisateurs peuvent avoir simultanément un accès direct (time sharing).

Dans ces conditions, et compte tenu des nouveaux programmes, il est raisonnable de penser que le calcul à la résolution maximum d'une tranche d'un spectre assez large pour vérifier sa qualité quelques minutes après la fin de l'enregistrement sera d'ici quelques temps une opération courante. Il sera également possible, sans que cela pose aucun problème supplémentaire, de généraliser le calcul (à résolution réduite) d'une tranche spectrale à partir de la fraction d'interférogramme déjà enregistrée, ce calcul pouvant même être effectué à plusieurs reprises. Ce résultat sera aussi commode que celui donné par un calcul en temps réel, et ceci sans que l'ordinateur ou la ligne de transmission soient bloqués en permanence.

7. **Résultats.** — 1) RÉDUCTION DES EFFETS DE LA TURBULENCE. La figure 11 illustre l'effet perturbateur de la turbulence tel qu'il se présentait avec le dispositif de modulation *extérieure* précédemment utilisé [1]. Elle représente un enregistrement du signal infrarouge obtenu après démodulation et filtrage, l'interféromètre étant maintenu stationnaire en une position de différence de marche élevée telle que l'interférogramme coïncide pratiquement avec sa valeur

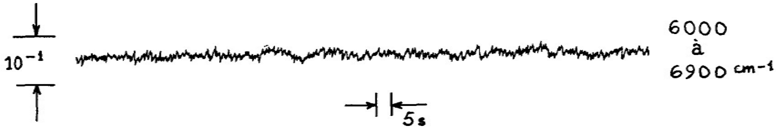


FIG. 11. — Bruit de turbulence, modulation externe, faisceau de Mars, rapporté à l'amplitude de l'interférogramme au centre. Constante de temps $T = 0{,}4$ s.

FIG. 12. — Bruit de récepteur seul (cellules dans l'obscurité), et bruit de turbulence avec modulation interne. Faisceau de Vénus. Constante de temps 0,1 s.

moyenne. On notera en particulier la présence dans cet enregistrement du « bruit de turbulence », de composantes basses fréquences très supérieures à celles du bruit de récepteur et dont l'amplitude est de l'ordre de 1 à 2 % de celle de la portion centrale de l'interférogramme. Le signal provenait de Mars, à travers un filtre isolant sensiblement la fenêtre à 1,6 μ (observation de nuit, hauteur au-dessus de l'horizon : $h = 52^o$).

La figure 12 montre le progrès considérable donné par la modulation interne malgré des conditions de turbulence beaucoup plus sévères (Vénus, observation de jour : $h = 32^o$). L'accroissement par rapport au pur bruit de récepteur est négligeable dans le cas d'un domaine spectral restreint, et appréciable seulement lorsque la totalité du domaine accessible aux récepteurs est utilisée.

2) JUPITER. La figure 13 donne à titre de comparaison les meilleurs spectres de Jupiter obtenus jusqu'ici dans le proche infrarouge (1 μ à 1,65 μ) par des procédés classiques par Kuiper [9] et par Moroz [10]. De même, la figure 14 reproduit un spectre obtenu par Delbouille, Roland et Gebbie [11] par transformation de Fourier. Pour permettre d'évaluer la résolution (qui est peu différente dans les 3 cas), nous donnons dans la figure 15 un spectre obtenu par transformation d'un de nos interférogrammes (enregistré sans filtre afin de couvrir un domaine étendu) dont la longueur a été réduite, lors du calcul, jusqu'à ce que son aspect reproduise approximativement celui des spectres précédents. La limite de résolution

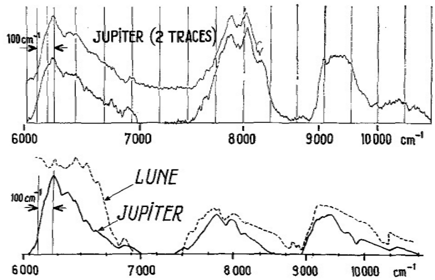


FIG. 13. — Spectres de Jupiter dans le proche infrarouge obtenus avec des spectromètres à réseau :

En haut, Kuiper ([9], Fig. 12 et 13), Observatoire de Mac Donald, télescope de 205 cm, 2 spectres de Jupiter.

En bas, Moroz ([10], Fig. 9), Observatoire de Crimée, télescope de 125 cm. Un spectre de la lune et un spectre de Jupiter (moyenne de 3 spectres indépendants) sont présentés. Temps d'observation total pour Jupiter : 50 minutes. Dans les 2 cas, nous avons inversé les figures de droite à gauche et ajouté une échelle en cm^{-1} pour rendre les spectres comparables à ceux des figures 14 et 15.

ainsi trouvée est égale à 30 cm^{-1}. L'accord entre les 4 courbes est raisonnable ; mais comme il s'agit d'un domaine spectral large, il faudrait tenir compte de facteurs tels que l'angle de blaze des réseaux, le rendement des lames séparatrices et (dans notre cas) du facteur $J_1(\pi/2 \ \sigma/\sigma_0)$ avec $\sigma_0 \simeq 6\,500$ cm^{-1}.

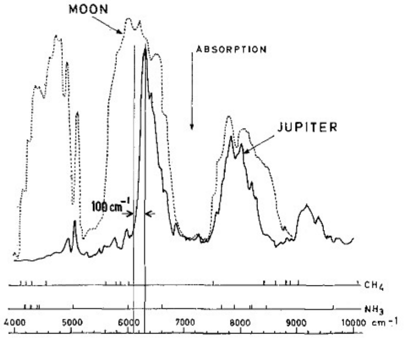


FIG. 14. — Spectre de Jupiter couvrant une région un peu plus étendue obtenu par spectroscopie de Fourier par Delbouille et al. ([11], Fig. 1). Observatoire de Lick, télescope de 3 m. Temps d'observation : 8 minutes.

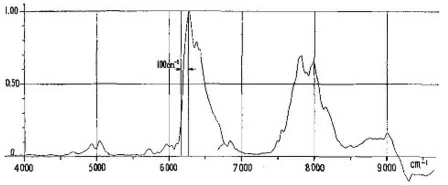


FIG. 15. — Spectre de Jupiter obtenu par réduction de la longueur d'un de nos interférogrammes, enregistré sans filtre avec un pas égal à 1 frange de référence ($\sigma_r = 18\,300$ cm^{-1}). Résolution $\delta\sigma = 30$ cm^{-1} sensiblement égale à celle de Kuiper, comme le montre la bande de O^2 (tellurique) à 7 900 cm^{-1} et légèrement meilleure que celle des deux autres courbes. Au-delà du point $\sigma = \sigma_r/2 = 9\,150$ cm^{-1}, le spectre se répète identique à lui-même ; entre 8 500 et 9 150 cm^{-1}, les intensités sont perturbées (phénomène de recouvrement d'ordre) par celles de la région 9 150-9 800 cm^{-1}. Temps d'observation : 5 minutes. Observatoire de Saint-Michel, télescope de 193 cm.

De plus, dispersion et résolution sont variables sur la figure 12 et constantes sur les figures 14 et 15.

La figure 16 montre deux spectres de Jupiter présentant la meilleure résolution que nous ayons atteinte jusqu'ici (0,3 cm^{-1}). La portion représentée a une largeur de 100 cm^{-1}, soit environ 1/10 du spectre entier qui est limité par un filtre interférentiel isolant la bande 6 000-7 000 cm^{-1}. D'autres spectres présentant la même résolution ont été pris à travers un autre filtre couvrant la région 7 500-8 500 cm^{-1}. Chacune des deux traces reproduites ici est en fait une moyenne pondérée de 3 spectres différents. Les 6 spectres utilisés ont été pris au cours de plusieurs nuits par des conditions atmosphériques variables, parfois franchement médiocres ; ils présentent des rapports s/b inégaux, mais pas de différences systématiques supérieures au bruit. Les meilleurs ont reçu, dans le calcul des deux moyennes, des coefficients plus élevés. Cette opération nous paraît justifiée *a posteriori*, du fait que les différences aléatoires entre les deux traces résultantes présentées ici sont plus faibles qu'entre deux quelconques des traces composantes. L'amélioration du rapport s/b est sensiblement celui que des considérations élémentaires laissent attendre. Le temps total d'observation utilisé pour obtenir les deux traces est égal à 21 heures ; nous estimons que par des conditions de transparence excellente, des résultats équivalents auraient pu être obtenus en 12 heures environ.

La figure 16 présente également un spectre lunaire de résolution identique, qui donne les raies solaires et telluriques (principalement dues à CO_2) dans cette région. La plupart des raies du spectre de Jupiter sont dues à CH_4. La figure 17 compare une portion différente du même spectre lunaire avec la région correspondante du spectre solaire tel qu'il est donné par le Mac Math-Hulbert University of Michigan Atlas, dont la résolution est voisine de 0,25 cm^{-1} dans cette région.

En résumé, nos spectres de Jupiter présentent une résolution comparable à celle de l'Atlas solaire d'usage courant dans le proche I R ([14]) et 100 fois meilleure que les meilleurs spectres de Jupiter obtenus jusqu'ici.

L'impossibilité pratique d'obtenir de tels résultats par le procédé classique de balayage du spectre est facile à démontrer. Les spectromètres utilisés pour enregistrer les spectres de la figure 13 étaient capables d'utiliser la lumière du disque entier, mais seulement avec le pouvoir de résolution relativement faible qui était demandé. Pour multiplier ce pouvoir de résolution par un facteur 10^2, il aurait fallu consentir une réduction d'un facteur 10^4 sur l'énergie transmise au récepteur : la fente d'entrée n'aurait plus accepté que 1/100 du disque planétaire, et la fente de sortie une fraction 100 fois plus faible de l'énergie présente dans le spectre continu. Pour conserver le même rapport signal/bruit ([15]) il aurait fallu multiplier le

([14]) Cette résolution peut naturellement être améliorée — sur le soleil — par nombre de grands spectromètres à réseau existant maintenant.

([15]) En théorie, il aurait été possible de réduire simultanément la surface du récepteur. En pratique, il existe une dimension minimum réalisable peu inférieure à celle qui était employée pour les spectres de la figure 13, de sorte que le gain effectif aurait été très modeste, et l'ordre de grandeur de notre résultat ne serait pas modifié.

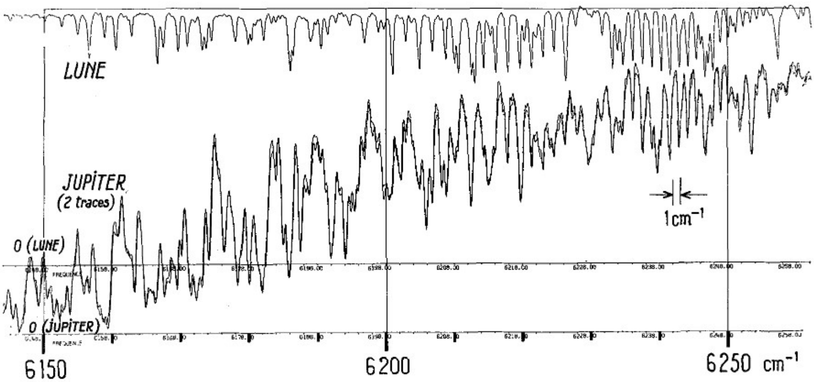


FIG. 16. — Deux spectres de Jupiter. Chaque trace est une moyenne pondérée de 3 enregistrements pris les 1, 3, 4 et 5 janvier 1966. La portion du spectre présentée ici est marquée à gauche des figures 13, 14 et 15. Paramètres : $\Delta\sigma = 1\,400$ cm^{-1}, $\delta\sigma = 0{,}3$ cm^{-1} (avec apodisation due en partie à l'ouverture finie du faisceau traversant l'interféromètre), $M = 4\,700$, $N = 12\,900$, nombre de franges Hg entre échantillons $n = 5$, rapport $S_{max}/B_{eff} = 200$ et $S_{moy}/B_{eff} = 55$, facteur de qualité $q = 2{,}6 \times 10^5$. Temps d'observation total : 21 h. En haut, spectre lunaire de comparaison, résolution identique.

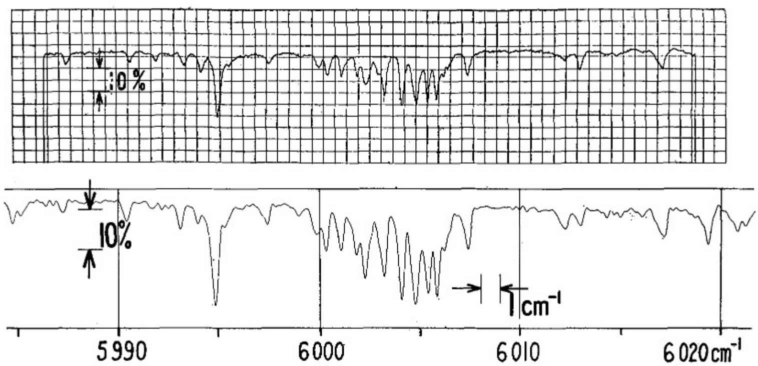


FIG. 17. — Une autre région du spectre lunaire de la figure 16, mais tracée ici avec une dispersion double (en bas), comparée à la portion correspondante (en haut) de l'Atlas solaire de l'Université de Michigan, pris au Mont Wilson (altitude 1 750 m). Les échelles de nombres d'onde sont identiques mais non celles des intensités. Le niveau zéro des enregistrements n'est pas donné, mais une intensité égale à 10 % du fond continu est indiquée. La plupart des raies sont dues au méthane tellurique. Les différences d'absorption s'expliquent par les différences d'altitude (Haute Provence : 650 m). La résolution de l'Atlas solaire est légèrement meilleure (0,25 cm^{-1} contre 0,3 cm^{-1}).

temps passé sur chaque élément spectral par 10^8, et pour couvrir le même domaine, contenant maintenant 100 fois plus d'éléments spectraux, multiplier le temps *total* de mesure par 10^{10}.

L'emploi d'un appareil utilisant même à la résolution de 0,3 cm^{-1} *tout* le flux disponible, par exemple un spectromètre à grille [12], un SISAM [13] ou un interféromètre Fabry-Pérot, aurait permis d'éviter la perte due à la fente d'entrée, donc de multiplier l'énergie tombant sur le récepteur par 10^2 par rapport

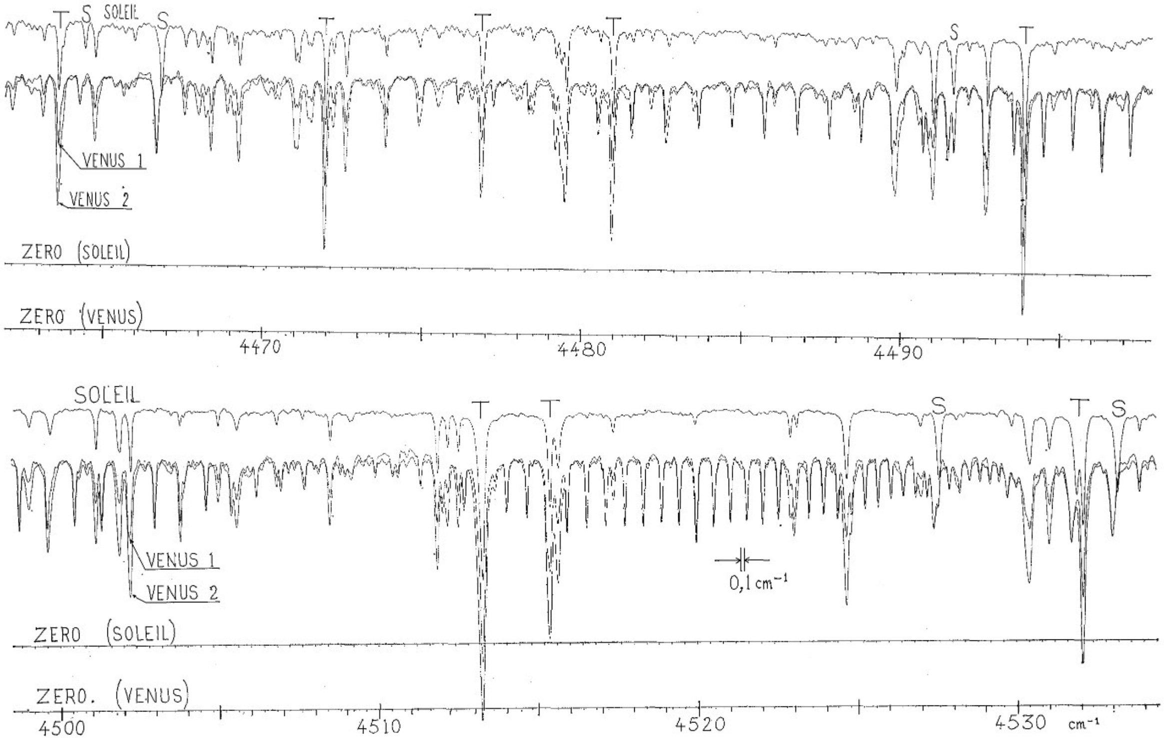


FIG. 18. — Portion des spectres de Vénus et du Soleil en deux sections contenant chacune trois traces. Trace supérieure : Soleil près du méridien ($\sec_{moy} z = 1{,}13$). En dessous deux traces superposées (et décalées verticalement par rapport à la trace solaire) : Vénus 1 (près du méridien, $\sec_{moy} z = 1{,}18$, donc épaisseur d'air peu différente de celle du spectre solaire), et Vénus 2 (loin du méridien, $\sec_{moy} z = 1{,}65$, épaisseur d'air nettement plus grande). Les raies telluriques (dont quelques-unes des plus intenses sont marquées *T*) apparaissent plus profondes sur V_2 que que V_1. Les raies solaires (marquées *S*) conservent la même profondeur mais sont décalées par l'effet Doppler (valeur moyenne calculée 0,16 cm^{-1}). L'intensité apparente négative égale à — 0,03 présentée par la raie T intense à 4 513 cm^{-1} sur Vénus 2 est une conséquence normale de l'emploi d'une fonction d'appareil présentant des parties négatives. La plupart des raies de Vénus sont dues à une faible bande de CO_2. Vénus 1 est une moyenne de 4 spectres, et Vénus 2 une moyenne de 3 spectres pris aux environs du 3 juillet 1966 ($\pm$ 8 jours). Paramètres : $\Delta\sigma = 1\,500\ cm^{-1}$, $\delta\sigma = 0{,}08\ cm^{-1}$ (avec apodisation comme pour figure 16), $M = 19\,000$, $N = 42\,300$, $n = 5$, $S_{max}/B_{eff} = 250$, $S_{moy}/B_{eff} = 160$, $q = 3 \times 10^6$. Temps d'observation total 27 h.

au spectromètre à fente ; l'augmentation du temps de mesure aurait alors été seulement égale à 10^6.

Ces résultats illustrent bien l'avantage considérable obtenu dans un problème où le gain dû au facteur multiplex, et celui qui provient de l'accroissement d'étendue jouent simultanément. Ils appellent cependant deux remarques. D'une part, pour les problèmes *stellaires*, et avec les télescopes actuels, le gain d'étendue à attendre est plus faible. En effet, un spectromètre équipé d'un grand réseau ($L = 25$ cm) travaillant sous incidence élevée ($\varphi = 60^o$) est capable d'accepter un faisceau dont l'étendue est définie par le diamètre du télescope ($D = 2$ m) et la turbulence atmosphérique (prenons $\varepsilon = 2''$ pour donner un ordre de grandeur) jusqu'à un pouvoir de résolution $R = 20\,000$. Les étoiles assez brillantes pour permettre de dépasser cette valeur dans l'infrarouge sont très peu nombreuses. Mais la supériorité d'étendue du spectromètre interférentiel pourra néanmoins être exploitée, car la totalité du flux collecté par un télescope de précision optique très médiocre, donnant une tache d'aberration de l'ordre de la minute d'arc serait utilisable. De ce fait, la construction d'un télescope de dimensions nettement supérieures à celles des instruments existants devient concevable.

D'autre part, dans un problème pour lequel l'exploration d'un domaine spectral très étroit est considéré comme suffisant (mesure du profil *d'une* raie d'absorption), l'avantage à attendre du multiplexage devient faible et il reste permis de songer à utiliser, par exemple, un étalon Fabry-Pérot.

3) VÉNUS. La figure 18 illustre les progrès réalisés par rapport à nos premiers spectres de Vénus [1]. La résolution est ici égale à 0,08 cm^{-1}, soit 12 fois meilleure. Le spectre complet, dans *une* fenêtre de transmission, se présente sous la forme d'une courbe de 75 m de long à l'échelle de 3 mm par élément spectral (échelle qui est lisible, mais totalement insuffisante pour utiliser pleinement la précision avec laquelle sont donnés les nombres d'ondes). Cette précision est telle que non seulement l'effet Doppler, mais encore la variation de l'effet Doppler au cours de la période d'observation, sont facilement mesurables (Fig. 19) ([16]).

([16]) *Note ajoutée à la correction.* La précision de l'échelle des nombres d'onde a depuis été vérifiée en comparant les positions de 38 raies de Vénus dues à CO, situées vers 4200 cm^{-1}, aux meilleures valeurs mesurées en laboratoire (D. H. Rank et al., *J. Mol. Spectr.*, 1960, **4**, 518). La différence moyenne est inférieure à 10^{-3} cm^{-1} et de l'ordre de l'incertitude sur la correction d'effet Doppler diurne (qui varie de 4×10^{-3} cm^{-1} pendant la durée d'un enregistrement). La valeur efficace de l'écart quadratique moyen est 2×10^{-3} cm^{-1}.

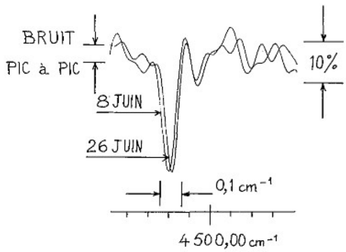


FIG. 19. — Une raie de Vénus extraite de deux spectres pris à 18 jours d'intervalle. Variation de l'effet Doppler calculée 0,016 cm^{-1}. Valeur mesurée sur cette seule raie 0,014 cm^{-1} avec pour erreur probable 0,005 cm^{-1}. La précision est limitée essentiellement par le bruit ; elle s'améliore lorsqu'une moyenne est prise sur plusieurs raies. Le niveau de bruit est ici plus élevé que celui de la figure 18 car les deux spectres ne sont pas des moyennes. La largeur de raie est plus faible (0,07 cm^{-1}) pour deux raisons : sur la figure 18 les raies de Vénus sont légèrement élargies par la variation d'effet Doppler, et d'autre part l'amélioration du rapport signal/bruit a nécessité l'emploi d'une apodisation plus forte.

Le cas de Vénus dans le domaine de sensibilité des récepteurs à sulfure de plomb, réunit pratiquement les difficultés maximales pour les applications astronomiques de la spectroscopie de Fourier. En effet, il s'agit de l'astre le plus brillant dans la région où il est possible d'atteindre le pouvoir de résolution le plus élevé, et par conséquent les valeurs les plus grandes de M et de q. D'autre part, les observations exigeant des temps d'intégration de plusieurs heures sont nécessairement faites en plein jour, donc dans des conditions de turbulence beaucoup plus sévères que les observations de nuit.

Il est juste de remarquer à ce propos que dans le cas d'étoiles relativement faibles, qui représentent évidemment la majorité des objets observables, l'énergie disponible ne permettra jamais de dépasser des pouvoirs de résolution beaucoup plus modestes. Des spectromètres de Fourier astronomiques plus simples que le nôtre, tels que ceux construits par Sinton [14] Mertz [5], Delbouille et Roland [15] et Moroz [16] devraient alors permettre d'obtenir d'aussi bons résultats.

8. **Conclusion.** — Les principaux résultats que nous pensons avoir établis sont les suivants :

1) La turbulence atmosphérique ne constitue pas un obstacle aux applications astronomiques de la spectroscopie de Fourier. Si elle doit un jour limiter le gain apporté par le principe multiplex, cette limite n'est pas encore atteinte.

2) Des fluctuations de transparence considérées comme inadmissibles pour la photométrie astronomique par exemple, sont parfaitement tolérables ; une transparence très médiocre augmente seulement le temps d'intégration nécessaire.

3) Des spectres obtenus lors de séances différentes sont reproductibles au bruit près ; il est facile d'en prendre la moyenne, ce qui améliore le rapport signal/bruit, et permet d'exploiter pleinement le temps d'observation disponible.

4) La liaison par ligne téléphonique à un grand ordinateur permet d'obtenir sur le spectre les renseignements indispensables dans un délai raisonnable. Seul, un grand ordinateur est capable de traiter le volume considérable des données produites dans le cas d'astres brillants.

La conclusion générale nous paraît être que c'est à présent le temps d'observation disponible seul qui limite l'extension de la spectroscopie infrarouge astronomique et la construction d'un grand collecteur de lumière spécialisé pour ce travail semble justifiée.

Remerciements. — Nous adressons nos remerciements à la Cie IBM France pour avoir, à deux reprises, prêté aimablement le système de transmission 1050.

Messieurs Dornbusch, Mars et Moure se sont dévoués sans compter pour assurer son installation et son entretien et ont largement contribué au succès des observations. Monsieur Collet s'est chargé d'écrire le programme de lecture et décodage des bandes. Madame Gelugne et Monsieur Delouis, à Meudon, ont assuré la réception des bandes. Madame Tualy a surveillé la mise en route des calculs et toute l'équipe des opératrices et opérateurs a assuré l'exploitation en grande partie en dehors des heures normales de service.

A Saint-Michel, Messieurs Bouchareine, Cuisenier, Michel, Pinard, Roizen et Seguin, ont participé à l'installation et au réglage de l'appareil et aux observations.

Nous remercions aussi pour leur aide indispensable et leur dévouement, Monsieur Lamour et toute l'équipe du télescope de 193 cm.

Bibliographie

[1] CONNES (J.) et (P.), *J. Opt. Soc. Amer.*, 1966, **56,** 896.
[2] PINARD (J.), *J. Physique*, 1967, **28,** supplément C2-136.
[3] FELLGETT (P.), *J. Physique*, 1958, **19,** 187.
[4] MERTZ (L.), *J. Physique*, 1967, **28,** supplément C2-165.
[5] MERTZ (L.), *J. Physique*, 1958, **19,** 233.
[6] CONNES (J.), *Rev. Opt.*, 1961, **40,** 45, 116, 171, 231.
[7] COOLEY (J. W.) et TUKEY (J. W.), *Math. of Computation*, 1965, **19,** 297.
[8] FORMAN (M.), *J. Physique*, 1967, **28,** supplément C2-58.
[9] KUIPER (G.), *Mem. Soc. Roy. Sci. Liège*, 1964, **9,** 365.
[10] MOROZ (W. I.), *Mém. Soc. Roy. Sci. Liège*, 1964, **9,** 406.
[11] DELBOUILLE (L.), ROLAND (G.), GEBBIE (H. A.), *Mém. Soc. Roy. Sci. Liège*, 1964, **9,** 125.
[12] GIRARD (A.), *J. Physique*, 1967, **28,** supplément C2-172.
[13] VERGES (J. L.), *J. Physique*, 1967, **28,** supplément C2-176.
[14] SINTON (W. M.), *Jour. Quant. Spec. Rad. Transfer*, 1963, **8,** 551.
[15] ROLAND (G.), *J. Physique*, 1967, **28,** supplément C2-26.
[16] MOROZ (W. I.), *Arc. Astr. Ac. Sci.*, 4 juin 1964, **302.**

DISCUSSION

G. STROKE. — The importance of the advantage of « stop and go » motion in your instrument is also related to grating ruling engines. I recently found (in examining a number of gratings ruled on interferometrically controled engines, both « stop and go », and « continuously » moving) that « stop and go » engines (such as Babcok's in Pasadena and Jobin et Yvon, Paris) did tend to produce considerably less « satellites » than the continuously moving engines (e. g. such as our M. I. T. engine).

LE FILTRAGE MATHÉMATIQUE DANS LA SPECTROSCOPIE PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

Par J. CONNES (*) et V. NOZAL,
Laboratoire Aimé-Cotton, Bellevue.

Résumé. — On est conduit pour obtenir le rapport signal/bruit maximum dans le spectre calculé numériquement à partir d'un interférogramme à utiliser un nombre de points très supérieur au nombre d'éléments spectraux, d'où un temps de calcul très élevé. Dans la méthode du filtrage mathématique on calcule d'abord la convolution de l'interférogramme enregistré par la réponse percussionnelle du filtre idéal isolant les fréquences Fourier. Il suffit ensuite de faire la transformée de Fourier du nouvel interférogramme avec un nombre de points minimum d'où une réduction considérable du temps de calcul total.

Abstract. — In order to obtain the maximum signal to noise ratio when computing a spectrum from an interferogram, the number of points that have to be measured is much greater that the number of spectral elements; hence the computing time is excessive. With the method of " mathematical filtering " one first compute the convolution of the interferogram by the impulse response of an ideal filter isolating the wanted domain of Fourier frequencies. Then one computes the Fourier transform of the new interferogram with a smaller number of points ; the computing time is thus much reduced.

Une étude précédente de la méthode de spectroscopie par transformation de Fourier a montré dans quelles conditions le spectre pouvait être calculé en faisant la transformée de Fourier de l'interférogramme à partir de valeurs discrètes relevées sur cet interférogramme [1]. En l'absence de bruit, il suffit pour reconstituer le spectre de relever un nombre de points égal au nombre d'éléments spectraux à étudier. Mais on montre que pratiquement le spectre du bruit étant plus étendu que celui des fréquences de Fourier, pour obtenir un rapport signal/bruit dans le spectre calculé voisin du rapport signal/bruit maximum qu'on obtiendrait en calculant le spectre par une intégrale de Fourier, le nombre de points à utiliser est beaucoup plus grand. La durée et le prix de revient du calcul d'une transformée de Fourier étant proportionnels au nombre de points d'entrée sont augmentés d'autant. On a donc intérêt à limiter le spectre du bruit au domaine du spectre à étudier. Plusieurs méthodes d'enregistrement de l'interférogramme sont alors possibles pour obtenir ce résultat : emploi d'un filtre passe bande, méthode du changement de fréquence de Mertz [2]. Mais elles présentent toutes une certaine complication instrumentale. Par exemple, un filtre passe bande avec une bande passante centrée sur la valeur moyenne des fréquences à étudier est difficile à réaliser aux fréquences basses généralement utilisées.

La méthode de filtrage mathématique utilise l'interférogramme $I'(\delta)$ enregistré à travers un simple filtre passe bas. A partir de valeurs discrètes de $I'(\delta)$ on calcule un second interférogramme $I''(\delta)$ en effectuant la convolution de $I(\delta)$ par la réponse percussionnelle d'un filtre dont la bande passante coïncide avec le domaine des fréquences de Fourier à étudier. Il suffit de faire ensuite la transformée de Fourier de $I''(\delta)$ avec le nombre de points minimum pour obtenir dans le spectre un rapport signal/bruit maximum. Comme le temps de calcul du produit de composition est faible par rapport à celui de la transformée de Fourier, le temps de calcul est voisin du temps de calcul minimum.

(*) Adresse actuelle : Service de Calcul Numérique. Observatoire de Meudon.

I. Principe de la méthode.

— Considérons un interférogramme $I'(\delta)$ enregistré à travers un simple filtre passe-bas. C'est la superposition de l'interférogramme $I(\delta)$ qu'on aurait en l'absence de bruit et d'un bruit $x(\delta)$ (*fig.* 1). Le spectre correspondant $B'p(\sigma)$ obtenu par calcul de l'intégrale de Fourier donc avec le rapport s/b maximum compatible avec le temps d'enregistrement T de l'interférogramme, est composé du spectre optique à étudier $Bp(\sigma)$ limité au domaine $\Delta\sigma_0$ compris entre

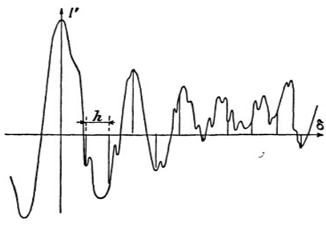


FIG. 1. — Interférogramme enregistré $I'(\delta)$.

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:01961002206035900

σ_1 et σ_2 auquel se superpose un bruit $X(\sigma)$ (*fig.* 2). La figure 3 indique la position relative du spectre

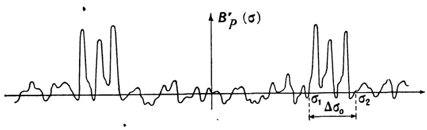


FIG. 2. — Spectre correspondant à $I'(\delta)$.

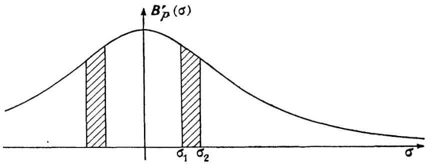


FIG. 3. — Position relative du spectre du bruit et du spectre optique.

optique $Bp(\sigma)$ et du spectre de puissance du bruit contenu dans $I'(\delta)$. Dans une transformée de Fourier numérique la fonction d'appareil est constituée d'une série de pics semblables distants de $1/h$ si h est la distance entre 2 points relevés sur l'interférogramme (*fig.* 1). Si on choisit h le plus grand possible pour reconstituer le spectre sans ambiguïté : $h = 1/2\Delta\sigma_0$ (¹), un seul pic de la fonction d'appareil explore le spectre à étudier, mais plusieurs pics de la fonction d'appareil explorent le spectre du bruit, d'où une augmentation du bruit

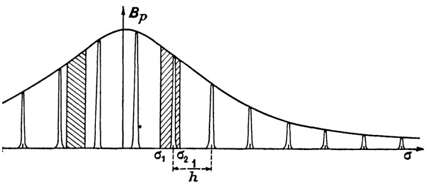


FIG. 4. — Fonction d'appareil explorant le spectre optique et le spectre du bruit.

dans le spectre calculé (*fig.* 4). Dans ce cas, avec apodisation (²), le nombre de points utilisés pour faire la transformée de Fourier est $n = 2M$, M étant le nombre d'éléments spectraux à étudier. Ce que nous nous proposons, c'est d'obtenir à partir de $I'(\delta)$ un interférogramme $I''(\delta)$ dont le spectre calculé par une intégrale de Fourier serait

$$B''p(\sigma) = B'p(\sigma) \,.\, G(\sigma) \quad (\textit{fig. } 5) \tag{1}$$

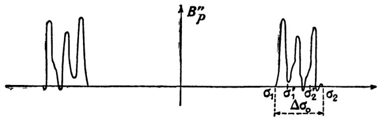


FIG. 5. — Transformée de Fourier de $I''(\delta)$.

$G(\sigma)$ étant une fonction créneau qui vaut 1 dans les domaines $\Delta\sigma_0$ symétriques par rapport à l'origine et est nulle ailleurs (*fig.* 6). Le bruit qu'il

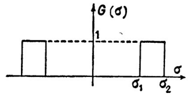


FIG. 6. — Filtre idéal.

contient est donc bien nul pour toutes les fréquences extérieures au domaine σ_1, σ_2. Si, momentanément, on ne s'intéresse qu'aux fréquences comprises entre σ_1 et σ_2, le gain du filtre qu'on choisira aura la forme représentée par la figure 7*a* et le

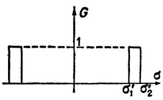


FIG. 7*a*

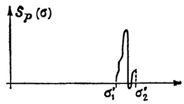


FIG. 7*b*.

spectre $Sp(\sigma)$ sera nul en dehors des fréquences σ'_1, σ'_2 (*fig.* 7*b*).

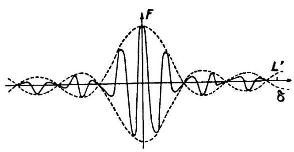


FIG. 8. — Réponse percussionnelle du filtre idéal.

Soit $F(\delta)$ la réponse percussionnelle du filtre dont la courbe de gain est $G(\sigma)$. C'est par définition la transformée de Fourier de $G(\sigma)$.

$$F(\delta) = \Delta\sigma \frac{\sin \pi\Delta\sigma\delta}{\pi\Delta\sigma\delta} \cos 2\pi\sigma_m \delta \tag{2}$$

$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$ étant la fréquence moyenne du spectre à étudier (*fig.* 8).

(¹) Pour choisir le pas h convenant à chaque cas, il faut tenir compte de la largeur du spectre optique et de sa position par rapport à l'origine. Si $\sigma_2 = k\Delta\sigma_0$, on a $h = 1/2\Delta\sigma_0$; dans les autres cas h est légèrement inférieur [1].

(²) La fonction d'appareil est une fonction en $\sin \alpha/\alpha$ qui présente des pieds qui peuvent être gênants. Pour l'apodiser il faut pondérer l'interférogramme par une fonction $A(\delta)$. Si c'est une fonction en triangle, pour obtenir la même résolution que sans apodisation, il faut employer un interférogramme 2 fois plus long et le nombre de points à relever est double.

De l'équation (1) on déduit immédiatement la relation intéressante entre $I''(\delta)$ et $I'(\delta)$.

$$I''(\delta) = I'(\delta)\, A(\delta) * F(\delta) \tag{3}$$

$A(\delta)$ étant la fonction d'apodisation utilisée pour calculer $B'p(\sigma)$ à partir de $I'(\delta)$ (éventuellement égale à l'unité s il n'y a pas d'apodisation). Il suffit donc de faire la convolution de $I'(\delta)$ avec la réponse percussionnelle d'un filtre passe-bande centré sur le domaine à étudier pour obtenir un interférogramme dans lequel le spectre du bruit est nul en dehors des fréquences intéressantes.

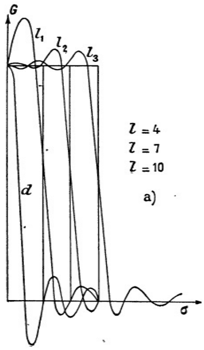
Pratiquement pour calculer $I''(\delta)$ on utilise une réponse percussionnelle $F'(\delta)$ limitée à $\delta = L'$ soit

$$F'(\delta) = F(\delta) . D(\delta) \tag{4}$$

$D(\delta)$ étant une fonction créneau valant 1 pour $|\delta| < L'$ et 0 ailleurs.

Les courbes de gain G' des filtres pratiquement réalisés ont pour expression :

$G'(\sigma) = G(\sigma) * d(\sigma)$ avec $d(\sigma) = T[D(\delta)]$ (*fig.* 8*a* et 8*b*).



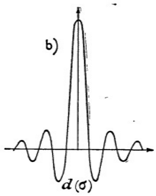


FIG. 8*a*. — Filtres non apodisés. FIG. 8*b*. — $d(\sigma)$.

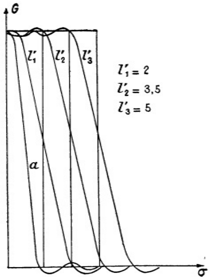
Elles présentent donc des oscillations (phénomènes de Gibbs) et s'éloignent d'autant plus des courbes théoriques que le quotient $l = \Delta\sigma_0 / 1/2L'$ est plus petit. Pour amortir ces oscillations, il faut pondérer la réponse percussionnelle $F'(\delta)$ par une fonction convenable, par exemple

$$A'(\delta) = [1 - (\delta / L')^2]^2.$$

Alors :

$G''(\sigma) = G(\sigma) * a(\sigma)$ avec $a(\sigma) = T[A'(\sigma)]$ (*fig.* 9*a* et 9*b*).

Pour les fréquences limites le filtre introduit une altération de l'amplitude. Si on appelle $\Delta\sigma$ la zone utilisable du filtre pour laquelle l'altération est, par



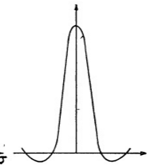


FIG. 9*a*. — Filtres apodisés. FIG. 9*b*. — $a(\sigma)$.

exemple, inférieure à 1/100 (*fig.* 10*a*), on peut définir un facteur de qualité du filtre par :

$$\varphi = \Delta\sigma / \Delta\sigma_0.$$

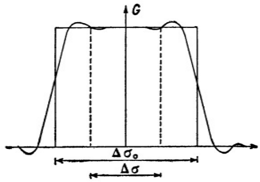


FIG. 10*a*.

Par exemple avec la fonction de pondération $A'(\delta)$ envisagée :

$$\varphi = \frac{L'\Delta\sigma_0 - 2,2}{L'\Delta\sigma_0} \quad (\textit{fig. } 10b).$$

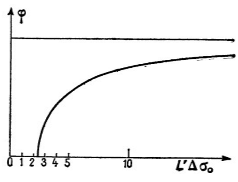


FIG. 10*b*.

II. **Réalisation.** — Pour réaliser avec un ordinateur la convolution :

$$I''(\delta) = I'(\delta) . A(\delta) * F(\delta) . A'(\delta) \tag{5}$$

on ne peut utiliser que des valeurs discrètes de l'interférogramme et de la réponse percussionnelle.

Nous allons montrer que lorsqu'on fait avec des valeurs discrètes équidistantes la convolution de 2 fonctions à spectre limité on obtient bien des valeurs discrètes du produit de composition ; mais si les fonctions ont un spectre illimité, on ne peut obtenir par cette méthode que des valeurs approchées du produit de composition, l'approximation étant d'autant meilleure que le pas h' est choisi plus petit.

1° Convolution de 2 fonctions a spectre limité. — Soient 2 fonctions $E(\delta)$ et $K(\delta)$ ayant des spectres limités $e(\sigma)$ et $k(\sigma)$ comme l'indiquent les figures 11*a* et 11*b*. Leur convolution s'écrit :

$$P(\delta) = E(\delta) * K(\delta). \quad (6)$$

Comparons $P(\delta)$ et la convolution :

$$P'(\delta) = h'[E(\delta).R_{h'}(\delta) * K(\delta).R_{h'}(\delta)] \quad (7)$$

$R_{h'}(\delta)$ étant une distribution de Dirac à support périodique de pas h'. La transformée de Fourier de ce produit de composition s'écrit :

$$p'(\sigma) = \frac{1}{h'}[e(\sigma) * R_{1/h'}(\sigma)].[k(\sigma) * R_{1/h'}(\sigma)]$$

(*fig.* 11*c*, 11*d*, 11*e*).

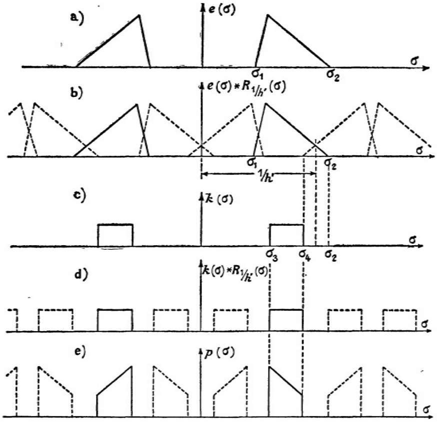


Fig. 11*a*, 11*b*, 11*c*, 11*d*, 11*e*.

C'est une fonction périodique de pas h'. Supposons que h' ait été choisi de telle sorte que les zones qui se recouvrent de la fonction

$$e(\sigma) * R_1/h'(\sigma)$$

ne pénètrent pas dans le domaine occupé par $k(\sigma) * R_1/h'(\sigma)$, ce qui correspond dans notre cas à : $1/h' = (\sigma_2 - \sigma_4)/2$. On voit immédiatement que dans ce cas :

$$p'(\sigma) = \frac{1}{h'}[e(\sigma) * k(\sigma)].R_{1/h'}(\sigma).$$

On en déduit que sa transformée de Fourier a pour expression :

$$P'(\delta) = P(\delta).R_{h'}(\delta). \quad (8)$$

Les nombres calculés $P'(\delta)$ sont donc bien une série de valeurs discrètes équidistantes du produit de composition cherché $P(\delta)$.

2° Convolution de deux fonctions a spectre illimité. — Quand les deux fonctions ont des spectres illimitées les relations entre $P(\delta)$ et $P'(\delta)$ sont beaucoup plus complexes. Nous examinerons en détail uniquement un cas particulier, celui de la convolution d'un interférogramme $I'(\delta)$ enregistré à travers un simple filtre RC, de constante de temps $\tau = R\,C$, et de la fonction $F'(\delta)$ définie précédemment, puisque c'est celui qui nous intéresse. La fonc tion calculée a alors la forme :

$$P'(\delta) = I''(\delta).R_{h'}(\delta). \quad (8\ bis)$$

Elle ne prend que des valeurs discrètes et a évidemment un spectre périodique. L'interférogramme continu $I''(\delta)$ qui aurait les valeurs précédemment calculées pour des points d'abscisse $\delta = ph'$ a lui un spectre non périodique.

Sans nous préoccuper de l'expression exacte de $I''(\delta)$ ainsi défini nous allons préciser le spectre du bruit contenu dans $I''(\delta)$ et dans sa transformée de Fourier.

La courbe de gain correspondant à la réponse percussionnelle $F'(\delta).R_{h'}(\delta)$ est une fonction périodique de période I/h' (*fig.* 12). Le spectre du bruit

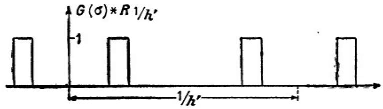


Fig. 12. — Filtre périodique.

contenu dans l'interférogramme continu $I''(\delta)$ a alors pour expression :

$$\mathcal{B}''_p(\sigma) = \mathcal{B}_p(\sigma)\,[|G(\sigma)|^2\,R_{1/h'}(\sigma)] \quad (\textit{fig. } 13) \quad (9)$$

et l'écart moyen quadratique des fluctuations dans $I''(\delta)$ vaut :

$$\sigma'^2_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}''_p(\sigma)\,d\sigma.$$

Il est évidemment inférieur à l'écart moyen quadratique des fluctuations dans $I'(\delta)$ qui vaut

$$\sigma^2_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}_p(\sigma)\,d\sigma$$

et sera d'autant plus faible que I/h' sera plus grand donc que le pas h' utilisé pour faire la convolution sera plus petit. Étant donnée la méthode de calcul, le pas h utilisé pour faire la transformée de Fourier de $I''(\delta)$ qui ne dépend plus que de la largeur $\Delta\sigma$ du spectre optique à étudier et de sa position par rapport à l'origine est obligatoirement un multiple de h' :

$$h = \chi h'.$$

La distance séparant deux pics de la fonction d'appareil est alors :

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{\chi}\frac{1}{h'}.$$

C'est un sous-multiple de I/h'. Rappelons que la puissance moyenne des fluctuations dans le spectre obtenu par transformation de Fourier de l'interférogramme est égale à l'énergie découpée dans le spectre du bruit par le carré de la fonction d'appareil [1]. L'écart moyen quadratique des fluctuations dans le spectre calculé à partir de $I''(\delta)$ avec un pas h est rigoureusement le même que celui qu'on aurait obtenu avec un pas h' puisque les pics supplémentaires de la fonction d'appareil tombent en des endroits où le spectre du bruit est nul (*fig.* 13).

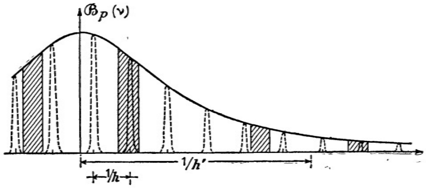


Fig. 13. — Fonction d'appareil de période $1/h$. explorant le spectre du bruit contenu dans $I''(\delta)$.

Le problème du calcul de l'écart moyen quadratique des fluctuations dans le spectre obtenu par transformée de Fourier numérique d'un interférogramme enregistré à travers un simple filtre RC a déjà été traité [1]. On montre que la variance dans le spectre calculé avec un pas h : $\sigma_x'^2$ est liée à la variance σ_x^2 qu'on aurait dans le spectre calculé par une intégrale de Fourier par la relation :

$$\sigma_x'^2 = \sigma_x^2\,\Phi_{\nu_0}(h/\tau)$$

avec

$$\Phi_{\nu_0}(h/\tau) = \frac{h}{2\tau}\frac{\sin h\,h/\tau}{\cos h\,h/\tau - \cos 2\pi\nu_0 h}$$

ν_0 étant la fréquence particulière envisagée.

Donc, dans notre cas, l'écart moyen quadratique des fluctuations dans le spectre final $\sigma_x''^2$ sera lié à l'écart moyen quadratique minimum qu'on aurait eu en calculant directement par une intégrale la transformée de Fourier de $I'(\delta)$ par la relation :

$$\sigma_x''^2 = \sigma_x^2\,\Phi_{\nu_0}(h'/\tau)$$

avec

$$\Phi_{\nu_0}(h'/\tau') = \frac{h'}{2\tau}\frac{\sin h\,h'/\tau}{\cos h\,h'/\tau - \cos 2\pi\nu_0 h'} \quad (\textit{fig. } 14) \qquad (10)$$

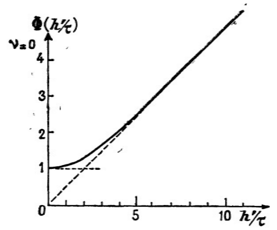


Fig. 14. — Fonction $\Phi_0(h'/\tau)$.

h' étant cette fois le pas choisi pour faire la convolution [1].

Donc pour obtenir à partir de $I''(\delta)$ le même rapport s/b dans le spectre que lorsqu'on fait directement la transformée de $I'(\delta)$, il faut relever autant de valeurs sur $I'(\delta)$. Mais le nombre de valeurs de $I''(\delta)$ qu'on calculera et qu'on utilisera pour faire la transformée de Fourier sera notablement inférieur. Il sera déterminé uniquement par la largeur du spectre optique et sa position par rapport à l'origine.

On peut évaluer la perte S en rapport s/b qui résulte du fait que h' est fini en faisant le quotient du rapport s/b obtenu avec h' ayant une valeur déterminée à celui qu'on obtiendrait avec h' infiniment petit :

$$S = \sqrt{\frac{\Phi(0)}{\Phi_{\nu_0}(h'/\tau')}} \quad (\textit{fig. } 14 \textit{ bis}).$$

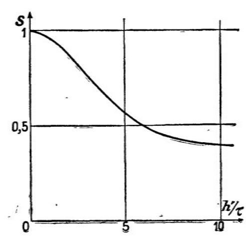


Fig. 14 *bis*. — Variation du rapport s/b dans le spectre final en fonction du pas h' avec lequel est faite la convolution.

On voit d'après la figure 14 *bis* qu'il y a intérêt,

(1) Les courbes $\Phi_{\nu_0}(h/\tau')$ sont pratiquement indépendantes de ν_0.

comme dans le cas d'une transformée de Fourier directe, à choisir h' de l'ordre de τ.

Méthode de calcul. — Le calcul comprend 5 parties distinctes :

1° Calcul des N' valeurs de la réponse percussionnelle $F'(\delta)$ du filtre avec $N' = L'/h'$.

2° Pondération de ces N' valeurs de $F'(\delta)$ par $A'(\delta)$.

3° Pondération de l'interférogramme $I'(\delta)$ par $A(\delta)$.

4° Calcul du produit de composition

$$I''(\delta) = I'(\delta).A(\delta) * F'(\delta).A'(\delta).$$

5° Calcul de la transformée de Fourier en cosinus de $I''(\delta)$.

La durée des 3 premières opérations est négligeable devant celle des deux dernières (1). Le temps du calcul du produit de composition peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{C}_c = kN'n \text{ secondes}$$

N' étant le nombre de valeurs discrètes de $F'(\delta)$ utilisées, n le nombre de points de $I''(\delta)$ calculées et k un coefficient numérique qui dépend de la machine utilisée. Nous donnons sa valeur pour l'ordinateur 704 IBM utilisé dans un problème pour lequel le nombre de points d'entrée N (qui n'intervient pas directement dans le calcul de $\mathcal{C}_c$, mais seulement par l'intermédiaire de n) est supérieur au nombre de mémoires rapides. Ceci oblige à faire entrer les valeurs N en plusieurs fois et augmente considérablement le temps de calcul. Dans ces conditions : $k = 10^{-3}$. Rappelons que le temps de calcul d'une transformée de Fourier classique à partir des N valeurs relevées sur l'interférogramme serait :

$$\mathcal{C}_F = 0{,}8.10^{-3}\, NN_1 \text{ secondes}$$

N_1 étant le nombre de points de sortie ; on peut l'évaluer en fonction de n, nombre minimum de points utilisés pour faire la transformée de Fourier n est de l'ordre de $2M$, M étant le nombre d'éléments spectraux. Si on calcule 3 points par élément spectral pour faciliter le tracé du spectre :

$$N_1 = 3M = (3/2)n.$$

Dans ce cas :

$$\mathcal{C}_F = 1{,}2.10^{-3}\, Nn \text{ secondes}$$

ce qui conduit avec l'ordinateur 704 utilisé dans les conditions que nous avons précisées à :

$$\mathcal{C}_c/\mathcal{C}_F = 0{,}8\, N'/N.$$

(1) Les sinus et cosinus qui interviennent dans le calcul de $F'(\delta)$ aussi bien que dans le calcul de la transformée de Fourier de $I''(\delta)$ sont calculés par récurrence à l'aide des formules de Tchébicheff :

$$\cos (p + 1)\, x = 2 \cos x \cos px - \cos (p - 1)\, x$$
$$\sin (p + 1)\, x = 2 \cos x \sin px - \cos (p - 1)\, x.$$

Examinons dans un cas particulier le gain de temps qu'on peut réaliser en faisant un filtrage mathématique. Supposons que le spectre à étudier s'étende sur un domaine

$$\Delta\sigma = \sigma_M - \sigma_m = \sigma_M/5 \quad (\textit{fig. } 15)$$

et que l'interférogramme soit enregistré à travers un simple filtre passe-bas. Ce filtre introduit des déphasages pour les diverses fréquences contenues dans le signal. Ces déphasages se traduisent dans le spectre reconstitué par une dissymétrie de la fonction d'appareil [1]. Si on tolère une dissymétrie de 1/100 entre les hauteurs de deux premiers pieds négatifs on peut choisir une constante de temps :

$$\tau = 1/2\pi\sigma_M.$$

Le spectre optique et le spectre du bruit ont alors la position indiquée dans la figure 15. Si on

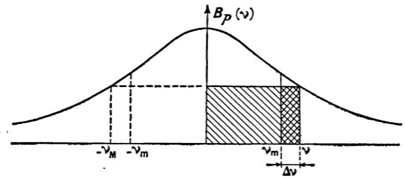


FIG. 15. — $h' = 1/2\nu_M \quad h/\tau = \pi \quad S = 0{,}7 \quad h = 5h'$.

veut obtenir dans le spectre final un rapport s/b qui soit les 7/10 du rapport s/b maximum, il faut choisir h' tel que [1] :

$$h'/\tau = \pi$$

c'est à dire :

$$h' = 1/2\sigma_M.$$

Supposons de plus que nous voulions traiter ce problème à la résolution 6 000 ; des relations :

$$N = 1/h' \quad \text{et} \quad R = L\sigma_M.$$

On déduit que :

$$N = 12\ 000.$$

L'élément spectral vaut :

$$\delta\sigma = \sigma_M/6\ 000$$

et le spectre à étudier contient :

$$M = \Delta\sigma/\delta\sigma = 12\ 000 \text{ éléments spectraux.}$$

Si on calcule 3 points par élément spectral, le calcul de la transformée de Fourier directe durerait :

$$\mathcal{C}_F = 0{,}8.10^{-3} \times 12\ 000 \times 3\,600 = 9 \text{ heures } 36 \text{ minutes.}$$

Pour réaliser un filtrage numérique pratiquement parfait : $\varphi = 0{,}98$, il faut d'après la figure 10b choisir

$$\Delta\sigma\, L' = 60 \quad \text{soit} \quad L' = 300/\sigma_M \quad \text{et} \quad N' = L'/h' = 600.$$

Le temps de calcul du produit de composition correspondant est

$$\mathcal{T}_c = 600 \times 2\,400 \times 10^{-3}\text{ s} = 24 \text{ minutes.}$$

La nouvelle transformée de Fourier demande alors :

$$\mathcal{T}_F = 0{,}8.10^{-3} \times 2\,400 \times 3\,600\text{ s} = 1 \text{ h } 55 \text{ minutes.}$$

d'où une réduction du temps de calcul total par un facteur 4,15.

III. **Vérifications expérimentales.** — Elles portent sur deux points précis : calcul de l'écart moyen quadratique des fluctuations dans $I''(\delta)$ et comparaison de deux spectres obtenus à partir d'un même interférogramme, l'un par transformée de Fourier directe avec un pas h', l'autre après filtrage numérique, le pas utilisé pour faire la convolution étant également h'.

1° Écart moyen quadratique des fluctuations dans $I''(\delta)$. — Soit un interférogramme $I'(t)$ constitué uniquement par du bruit (*fig.* 16*a*) [1].

Constante de temps : $\tau = 2s$.

Spectre de puissance du bruit :

$$\mathcal{B}_p(\nu) = \frac{\mathcal{B}_p(0)}{1 + (2\pi\nu\tau)^2} \qquad (\textit{fig. } 16b).$$

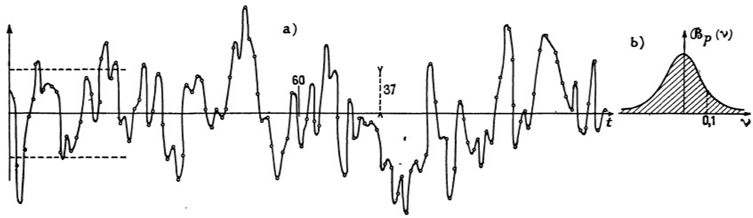


FIG. 16*a*. — $I'(t)$, $h' = 1{,}2$ s. FIG. 16*b*.

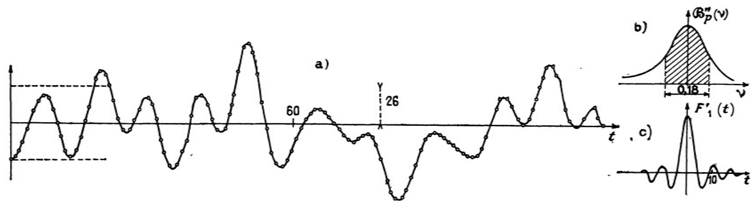


FIG. 17*a*. — $I_1(t)$, FIG. 17*b*. — Courbe de gain du filtre, FIG. 17*c*. — Réponse percussionnelle du filtre.

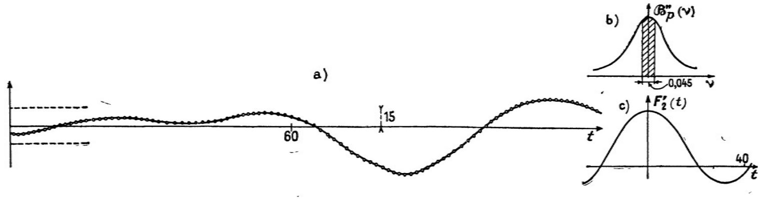


FIG. 18*a*. — $I_2(t)$, FIG. 18*b*, FIG. 18*c*.

Écart moyen quadratique des fluctuations :

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{B}_p(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \mathcal{B}_0/4.$$

Avec l'échelle arbitraire employée : $\sigma_x = 37$ u.

[1] Les variables sont ici t et ν, proportionnelles à δ et σ puisqu'on a $\delta = Vt$ et $\nu = \sigma V$, V étant le double de la vitesse du miroir mobile de l'interféromètre à 2 ondes employé.

a) 1^{er} *filtrage.* — Le filtre est centré sur l'origine ; largeur du filtre : $\Delta\nu_0 = 0{,}09$ Hz (*fig.* 17*b*).

Sa réponse percussionnelle est représentée par la figure 17*c*.

Si h' était nul, l'écart moyen quadratique des fluctuations dans $I_1''(t)$ aurait pour valeur :

$$\sigma_x'^2 = \mathcal{B}_p(0) \int_{-\frac{\Delta\nu_0}{2}}^{+\frac{\Delta\nu_0}{2}} \frac{\mathrm{d}\nu}{1 + (4\pi\nu)^2}$$
$$= \mathcal{B}_p(0)\,[\mathrm{Arc\ tg}\ 4\pi\nu|_{-\Delta\nu/2}^{+\Delta\nu/2}.$$

Avec les unités choisies on trouverait :

$$\sigma_x'^2 = \sigma_x^2\, 1{,}68/\pi \quad \text{et} \quad \sigma_x' = 27 \text{ u.}$$

Le pas utilisé h' étant de 1,2 s, le bruit dans $I_1''(t)$ est légèrement supérieur. D'après la courbe 14 *bis* pour $h'/\tau = 0{,}6$, $S = 0{,}98$ donc σ_x' devrait être :

$$\sigma_x' = 27 \times 1{,}02 = 27{,}54.$$

La valeur expérimentale est : 26 u (*fig.* 17*a*).

b) 2^e *filtrage.* — Le filtre est centré sur l'origine ; largeur du filtre $\Delta\nu_0 = 0{,}0225$ Hz (*fig.* 18*b*). Sa réponse percussionnelle est représentée sur la figure 18*c*.

Écart moyen quadratique des fluctuations prévues avec $h' = 1{,}2$ s.

$$\sigma_x' = 14{,}5 \text{ u.}$$

Valeur expérimentale : 15 *u* (*fig.* 18*a*).

Les 2 interférogrammes $I_1''(t)$ et $I_2''(t)$ paraissent lissés par rapport à $I'(t)$. Leurs rayons de corrélation sont de l'ordre de l'inverse du double des fréquences de coupure soit 6 s pour le premier et 24 s pour le second.

2° Comparaison d'un spectre obtenu par transformée de Fourier directe avec un spectre obtenu après filtrage mathématique. — Soit un interférogramme synthétique $\mathcal{I}'(t)$ obtenu en ajoutant au bruit précédent $I'(t)$ une constante. Le spectre correspondant se compose d'une raie à la fréquence 0 à laquelle se superpose un bruit $X(\sigma)$.

Dans le spectre $B_p'(\nu)$ obtenu par transformée de Fourier directe avec le pas $h' = 1{,}2$ s, l'écart moyen quadratique des fluctuations mesuré sur le spectre vaut $\sigma_x' = 1\,280$ u (*fig.* 19*a*).

La transformée de Fourier de l'interférogramme $I_2''(t)$ obtenu avec le filtre de largeur 0,0225 Hz donne le spectre 19*b*. Elle a été effectuée avec le pas h maximum soit $h = 18\,h'$.

Le spectre $B_p''(\nu)$ est évidemment périodique de période 0,045 Hz, donc il est différent dans son ensemble de $B_p'(\nu)$, mais les parties comprises entre $\nu = 0$ et $\nu = 0{,}0225$ Hz sont rigoureusement identiques et l'écart moyen quadratique des fluctuations σ_x' vaut aussi 1 280 u.

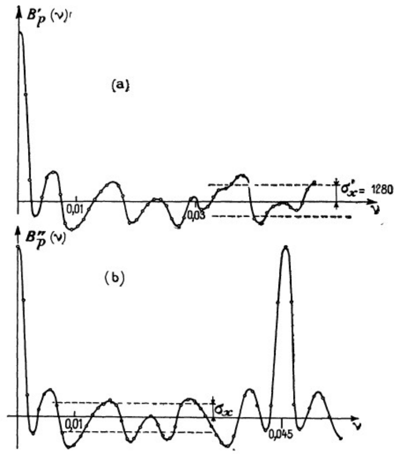


Fig. 19*a*. — Spectre obtenu par TF directe : $h' = 1{,}2$ s.
Fig. 19*b*. — Spectre obtenu après filtrage numérique : $h' = 1{,}2$ s ; $h = 18\,h'$.

IV. **Conclusion.** — Pour obtenir, avec un filtrage mathématique, un rapport s/b donné dans le spectre, le pas h' qui est à utiliser pour faire la convolution est exactement le même que celui qui serait utilisé pour faire la transformée de Fourier directe. On doit donc choisir h' de l'ordre de τ, constante de temps qui a servi à enregistrer l'interférogramme. Donc on relève autant de points sur l'interférogramme. Mais la transformée de Fourier est faite à partir du nombre de points minimum pour qu'il n'y ait pas recouvrement des spectres optiques, la valeur du pas h ne dépendant plus que de la largeur du spectre optique et de sa position par rapport à l'origine, d'où une réduction considérable du temps de calcul (1).

Les auteurs remercient le Comité Européen de Calcul Scientifique pour ses attributions d'heures de calcul à l'ordinateur 704 IBM.

Manuscrit reçu le 14 janvier 1961.

(1) La méthode du filtrage numérique a permis d'étudier dans un temps raisonnable, par transformation de Fourier, la lumière de recombinaison intrinsèque dans le germanium.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Connes (J.), *Revue d'Optique*, à paraître, février 1961.
[2] Mertz (L. W.), Symposium de Stockholm, 1959.

ÉTUDE DU CIEL NOCTURNE DANS LE PROCHE INFRA-ROUGE

Par Mme J. CONNES et H. P. GUSH (*),
Laboratoire Aimé-Cotton, C. N. R. S., Bellevue.

Résumé. — Le spectre du ciel nocturne a été étudié par la méthode de Transformée de Fourier, à une résolution de deux mille vers 1,6 μ et à une résolution de mille vers 1,0 μ. La structure rotationnelle des bandes de vibration-rotation du radical OH a été résolue, ce qui a permis une détermination de la température ; trois observations ont donné les températures : 227 °K, 242 °K, 245 °K. Le rapport des intensités des branches Q et P d'une même bande est plus faible que celui prévu par la théorie.

Abstract. — The spectrum of the night sky has been studied by the Fourier Transform method at a resolution of two thousand in the region 1.6 μ and at a resolution one thousand near 1.0 μ. The rotational structure of the rotation-vibration bands of the OH radical has been resolved and the rotational temperature determined. Three different experiments yield the temperatures 227 °K, 242 °K, 245 °K. It is observed that the intensity of the Q branch is lower with respect to the P branch than is predicted by a theoretical calculation.

Le spectre du ciel nocturne au delà de 1,2 μ est resté inconnu jusqu'à un temps relativement récent. En 1955 les observations de Gush et Vallance Jones [1] ont mis en évidence les bandes moléculaires du radical libre OH vers 1,6 μ. La résolution qu'ils ont pu atteindre avec leur instrument : spectromètre à réseau associé à un détecteur à sulfure de plomb, était cependant insuffisante pour séparer les raies de vibration-rotation. Il était souhaitable d'améliorer les résultats pour résoudre la structure rotationnelle et en déduire une bonne mesure de la température des couches de l'atmosphère où prennent naissance les radicaux OH. Seule une amélioration considérable de la résolution pouvait permettre de déceler la présence éventuelle de raies simples atomiques ou d'autres bandes moléculaires. En outre on pouvait espérer à partir d'une mesure de l'intensité relative des branches P, Q et R vérifier les probabilités de transition dans le radical OH calculées par Benedict, Plyler et Humphreys [2] ce qu'il est difficile de faire au laboratoire, étant données les difficultés de construction de sources convenables.

L'étude du ciel nocturne a donc été reprise en utilisant la méthode par transformation de Fourier qui est la plus puissante pour l'étude des sources faibles dans l'infrarouge [3], [4]. Des résultats partiels ont déjà été publiés [5].

I. Méthode utilisée.

— L'interférogramme a été enregistré avec un interféromètre de Michelson à différence de marche variable. Suivant la région spectrale étudiée on a utilisé comme détecteur un photomultiplicateur Lallemand ou une cellule à sulfure de plomb associée à un condenseur de microscope permettant de choisir pour l'étendue disponible un détecteur de surface minimum. Le spectre de bruit de l'ensemble détecteur-amplificateur à détection synchrone était limité par un simple filtre passe-bas de constante de temps τ choisie de telle sorte que le déphasage introduit entre les deux fréquences extrêmes du spectre étudié soit négligeable.

Les spectres ont été calculés à l'aide des ordinateurs I. B. M. 704 et 650. On a déjà montré la nécessité de pondérer l'interférogramme par une fonction $A(\delta)$ choisie de telle sorte que la fonction d'appareil ait une forme convenable [7]. Nous avons utilisé :

$$A(\delta) = (1 - \delta^2/L^2)^2$$

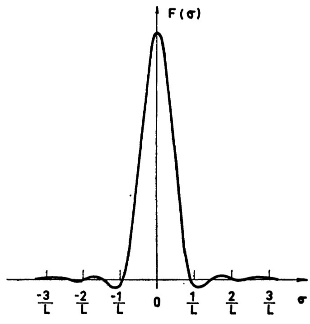


FIG. 1. — Fonction d'appareil.

ce qui conduit à la fonction d'appareil indiquée dans la figure 1.

Quand on fait la transformée de Fourier numérique à partir de valeurs discrètes relevées sur un

(*) Boursier du National Research Council of Canada pendant les années 1957-1959.

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:01960002108-9064500

interférogramme enregistré à vitesse constante, le rapport s signal/bruit dans le spectre calculé est toujours inférieur à s_M, rapport signal/bruit qui serait obtenu si on utilisait tous les points de l'interférogramme [6]. La figure 2 montre la varia-

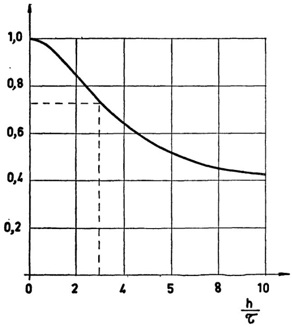


FIG. 2. — Variation de $S = s/s_M$ en fonction de h/τ.

tion du rapport $S = s/s_M$ en fonction du quotient h/τ, h étant le pas (en unités de temps) de la fonction réseau qui relève les points sur l'interférogramme. Ici

$$\tau = s/4 \qquad h/\tau = 3 \quad \text{et} \quad S = 0{,}73.$$

On a enregistré simultanément l'interférogramme et un signal de référence comme il a déjà été expliqué précédemment [5]. Ce signal était fourni par la raie rouge du cadmium illuminant l'interféromètre dans les mêmes conditions que la lumière à analyser. Il donne une échelle des différences de marche. Il a déjà été montré comment le fait d'employer une étendue finie pour enregistrer l'interférogramme, déplaçait le spectre calculé du côté des faibles longueurs d'onde [7]. Ces corrections peuvent être faites automatiquement en remplaçant dans le calcul de la transformée de Fourier le pas h mesuré sur l'interférogramme, par :

$$h_2 = h\left(1 - \frac{\Omega}{4\pi}\right)\left(1 + \frac{\Omega'}{4\pi}\right)$$

Ω et Ω' étant les angles solides sous lesquels sont vus, depuis le centre de la lentille de sortie [6] les diaphragmes de sortie placés sur le faisceau à étudier et le faisceau de référence.

II. **Résultats.** — Deux spectres à la résolution 1 000 et 900 ont déjà été publiés [5]. (Nous les appellerons dans la suite de cette étude spectres II et III.) Nous présentons ici un spectre à la résolution 2 000 dans la région de 6 000 cm^{-1} (spectre IV) et un spectre à la résolution 1 000 dans la région de 10 000 cm^{-1}.

La figure 3 montre des portions d'un interfé-

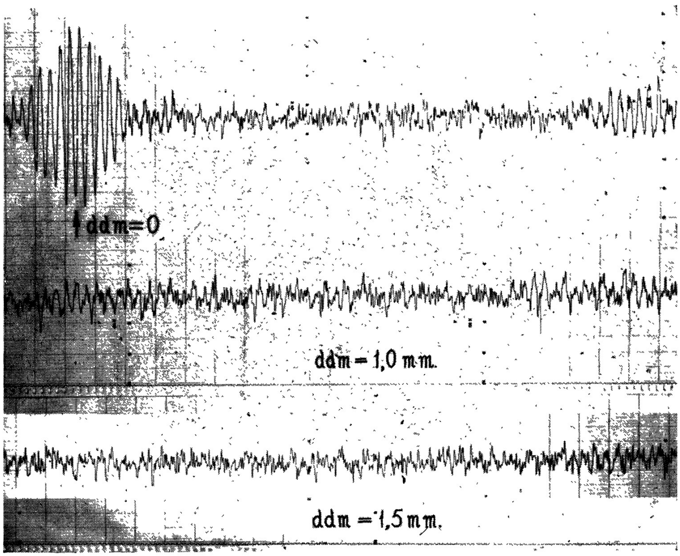


FIG. 3. — Interférogramme du ciel nocturne.

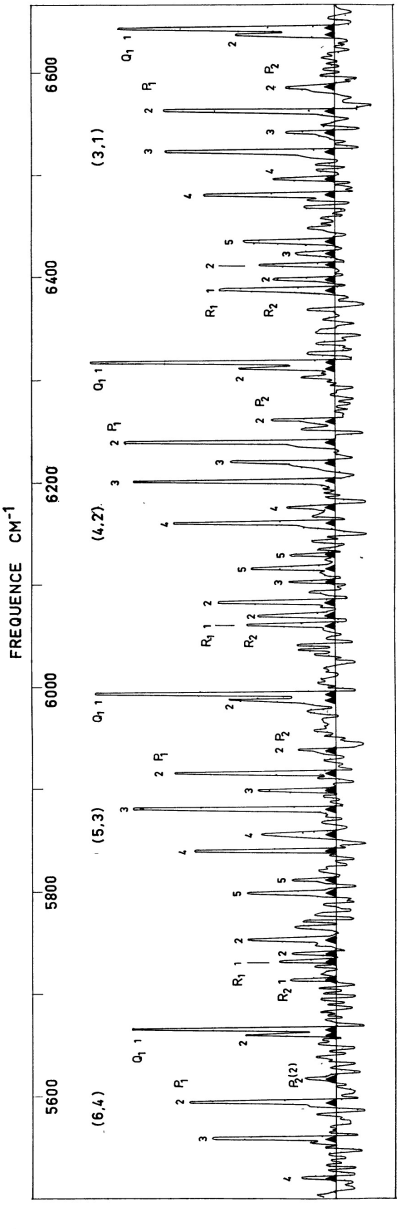


FIG. 4. — Spectre IV du ciel nocturne dans la région de 1,6 μ, $R = 2\,000$.

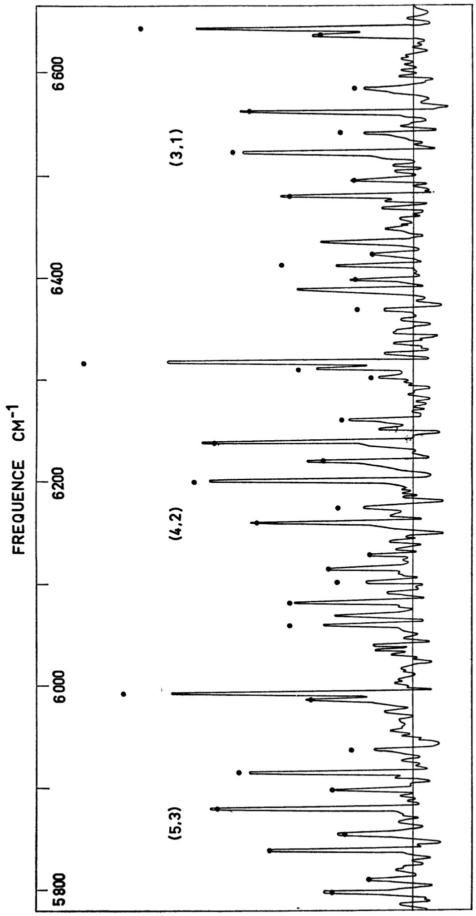


FIG. 9. — Comparaison entre le spectre IV et le spectre calculé pour une température de 227°. Les points indiquent les intensités théoriques.

rogramme enregistré le 8 mars 1959 à 3 h 30 à l'Observatoire de Haute-Provence. L'instrument visait au N.-O. à 20° au-dessus de l'horizon. L'enregistrement a duré 2 h 30 mn. La différence de marche maximum atteinte est 3,84 mm, ce qui correspond à une résolution théorique $R_0 = 2\ 500$.

Le diaphragme de sortie a été choisi pour que l'instrument travaille dans des conditions où le produit Luminosité $\times$ Résolution est maximum ; son rayon angulaire satisfait à la relation $\alpha = \sqrt{2/R_0}$ et la résolution effective qu'on pouvait attendre vaut [6] :

$$R = 0{,}82\ R_0 \# 2\ 000.$$

Le spectre calculé à partir de cet interférogramme (spectre IV) est donné par la figure 4 (1). Toutes les raies observées peuvent être attribuées au radical OH. On voit les bandes de rotation-vibration (3,1), (4,2), (5,3), (6,4). Les bandes (2,0), (7,5), (8,6) disparaissent à peu près complètement à cause des absorptions atmosphériques. La bande (9,7) est elle-même très faible (bien que l'absorption à 2,2 μ soit négligeable) comme l'avaient déjà constaté Noxon, Harrison et Vallance-Jones [8] et on n'a pu identifier que les raies les plus intenses Q_1 (1) et P_1 (3). La résolution effective sur le spectre calculé est bien 2 000.

Le tableau I donne les fréquences de toutes les raies observées dans la séquence $\Delta v = 2$ et leurs intensités relatives (non corrigées par le facteur de transmission de l'appareil). Il n'existe pas à notre connaissance dans la littérature de table des valeurs théoriques ; on les a donc calculées à partir des niveaux d'énergie mesurés par Dieke et Cross-White [9] et Hornbeck et Herman [10]. Les longueurs d'onde dans l'air ont été calculées avec la formule de dispersion d'Edlen [11].

La figure 5 montre deux spectres obtenus dans la région de 10 000 cm^{-1} à partir d'un même interférogramme enregistré à l'aide d'un photomultiplicateur Lallemand, mis à notre disposition par M. M. Dufay. Pour le premier, la résolution vaut 350, $L = 0{,}43$ mm ; et pour le second, la résolution vaut 1 000, $L = 1{,}22$ mm. Le spectre est limité du côté des basses fréquences par la sensibilité du détecteur et du côté des hautes fréquences par un filtre interférentiel. En effet, lorsque dans la méthode par transformation de Fourier un photomultiplicateur est employé comme détecteur, il est essentiel de limiter par un filtre optique la région spectrale à étudier pour réduire le bruit de photons au minimum. L'enregistrement a duré 2 heures pour le spectre à la résolution 1 000. Pour obtenir un spectre semblable avec un spectrographe à réseau, il avait fallu un temps de pose de 48 heures [12]. On a calculé la transformée de Fourier à partir de 6 000 points relevés sur l'interférogramme.

(1) Le calcul effectué à partir des 12 000 points relevés sur l'interférogramme a duré 120 h sur I. B. M. 650. S'il avait été effectué sur 704, on aurait pu utiliser un procédé de filtrage numérique, qui nécessite un ordinateur ayant un grand nombre de mémoires rapides [6]. On aurait obtenu le même rapport s/b dans le spectre calculé à partir de 1 400 valeurs seulement, déduites des 12 000 précédentes par la convolution de l'interférogramme avec la réponse percussionnelle d'un filtre idéal isolant la région spectrale intéressante. Ce filtrage aurait divisé le temps de calcul sur 704 par 6 ou 7.

Toutes les raies peuvent être attribuées au radical OH, comme l'avait déjà constaté Vallance-Jones [12]. On reconnaît les bandes (3,0), (4,1), (9,5). A partir de spectres observés à une résolution d'environ 400 [13] il semblait que la branche R de la bande (9,5) avait une intensité anormale. En passant de $R = 350$ à $R = 1\ 000$, ce qui est suffisant pour résoudre partiellement la structure de la blanche, les intensités reprennent un aspect normal. Un calcul des fréquences théoriques révèle un enchevêtrement considérable de la branche P de la bande (3,0) et de la branche R de la bande (9,5). Une résolution de l'ordre de 5 000 serait nécessaire pour résoudre complètement la structure.

La branche Q de la bande (3,0) est très faible comme l'avait déjà constaté Vallance-Jones [12].

III. **Discussion.** — La mesure des intensités relatives des raies d'une bande de vibration-rotation permet la détermination de la température du gaz contenant les radicaux OH, si l'on fait l'hypothèse suivante utilisée par Meinel [14] et tous ceux qui ont étudié les bandes OH depuis leur découverte [15] : si un radical OH se trouve dans un état vibrationnel excité, il subit suffisamment de collisions avant de rayonner pour que la population des niveaux rotationnels ait atteint un équilibre thermique. Si le rapport s/b dans le spectre calculé était très élevé les intensités des raies seraient connues avec une grande précision et on calculerait la température par une méthode classique. Il suffirait de mesurer les intensités de deux raies appartenant à une même branche et d'en déduire deux valeurs de la fonction

$$\text{Log}\ I_K/S_K\,\nu_K^4 = C - (E_K/KT)$$

I_K est l'intensité de la raie, ν_K sa fréquence, S_K le produit de la probabilité de transition par le facteur de dégénérescence, C une constante et E_K l'énergie de l'état initial. La pente de la droite représentant cette fonction permettrait le calcul de la température cherchée. Pour avoir le meilleur résultat possible à partir d'un spectre réel présentant des fluctuations, il faut faire l'analyse pour le plus grand nombre possible de raies appartenant à toutes les branches observées dans une même bande.

Ici la détermination de la température a été faite par une autre méthode. On a calculé une série de spectres synthétiques pour des températures différentes variant entre 200° et 280 °K. La température la plus probable a été déterminée par une méthode de moindres carrés. On a évalué la somme V des produits du carré des écarts entre les intensités I_K du spectre observé et celles ki_K du spectre synthétique, par le poids statistique a_K affecté à chaque raie, proportionnel à son intensité (k a été choisi de telle sorte que la somme

$$V = \Sigma a_K (I_K - ki_K)^2$$

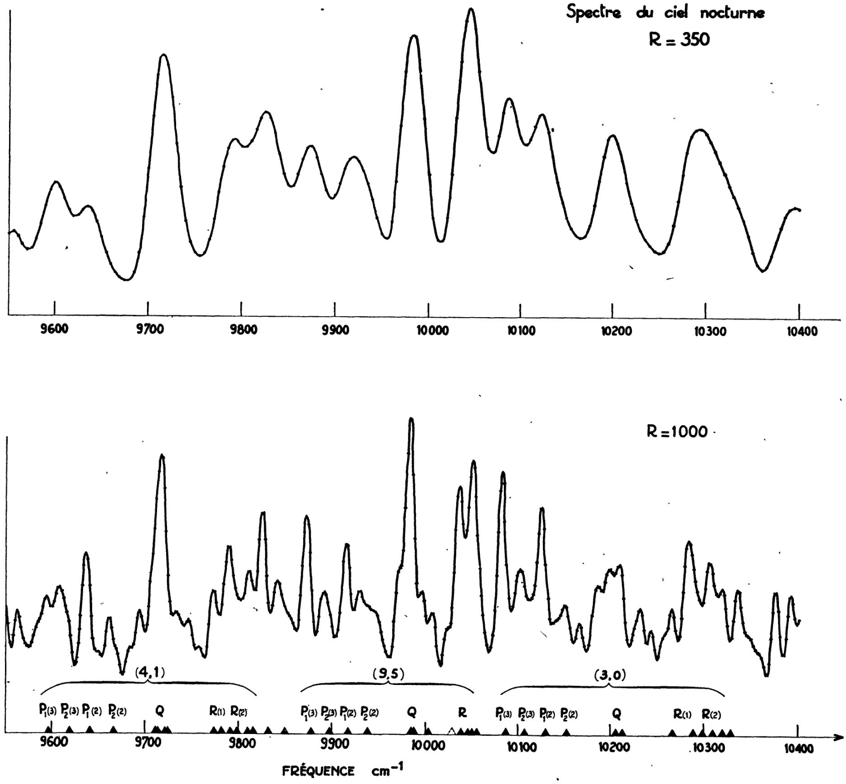


FIG. 5. — Spectre du ciel nocturne dans la région de 1,0 μ.

soit minimum). La courbe représentant V en fonction de T passe par un minimum pour la température cherchée. L'étude a été faite en plusieurs étapes.

1° Un premier essai a porté sur l'ensemble des raies appartenant aux branches P, Q, R d'une même bande. La courbe V ne présentait pas de minimum net.

2° Le même calcul a été repris à partir des branches P uniquement. La figure 6 donne les variations de V en fonction de T pour les bandes (3,1), (4,2), (5,3) observées dans le spectre IV. La somme V' des trois fonctions V correspondantes présente un minimum net à 227°.

La même étude à partir des bandes (3,1), (4,2), (5,3) observées du spectre II à la résolution 1 000 (suffisante pour que la structure des branches P soit complètement résolue) conduit à $T = 242°$ (*fig.* 7).

De l'étude de la branche P de la bande (4,2) observée dans le spectre III on déduit $T = 245°$. L'analyse classique des 4 raies les plus intenses $P_1(2)$, $P_1(3)$, $P_1(4)$, $P_1(5)$ de cette même branche avait donné une température de 270°. L'écart entre

TABLEAU I

Identification		Fréquence obs.	Intensité	Fréquence calc.	λ_{air}
$P_{1d}(4)$	(6,4)	5 519.2	2.1	5 519.01	18 114.25
$P_{1c}(4)$	»			5 519.35	18 113.13
$P_{1d}(3)$	»	5 557.5	7.7	5 557.47	17 988.89
$P_{1c}(3)$	»			5 557.56	17 988.60
$P_{1d}(2)$	»	5 592.5	9.1	5 592.50	17 876.21
$P_{1c}(2)$	»			5 592.64	17 875.76
$P_{2c}(2)$	»	5 616.0	2.0	5 614.11	17 807.40
$P_{2d}(2)$	»			5 614.36	17 806.61
$Q_{1c}(2)$	»	5 658.5	5.7	5 658.42	17 667.95
$Q_{1d}(2)$	»			5 659.07	17 665.92
$Q_{1c}(1)$	»	5 665.0	12.8	5 664.31	17 649.58
$Q_{1d}(1)$	»			5 664.62	17 648.62
$Q_{2d}(1)$	»			5 665.44	17 646.06
$Q_{2c}(1)$	»			5 665.68	17 645.31
$R_{2c}(1)$	»	5 712.7	2.9	5 712.11	17 501.89
$R_{2d}(1)$	»			5 712.17	17 501.70
$R_{1c}(1)$	»	5 730.7	3.5	5 730.54	17 445.60
$R_{1d}(1)$	»			5 730.74	17 444.99
$R_{2c}(2)$	»	5 738.5	2.8	5 738.15	17 422.46
$R_{2d}(2)$	»			5 738.36	17 421.82
$R_{1c}(2)$	»	5 752.3	5.5	5 751.28	17 382.69
$P_{1d}(6)$	(5,3)			5 751.34	17 382.51
$R_{1d}(2)$	(6,4)			5 751.56	17 381.84
$P_{1c}(6)$	(5,3)			5 752.83	17 378.00
$P_{1d}(5)$	(5,3)	5 797.5	5.6	5 797.07	17 245.38
$P_{1c}(5)$	»			5 797.17	17 245.09
$P_{2d}(5)$	»	5 810.5	2.9	5 810.11	17 206.68
$P_{2c}(5)$	»			5 810.34	17 206.00
$P_{1d}(4)$	»	5 840.0	8.8	5 839.74	17 119.38
$P_{1c}(4)$	»			5 839.84	17 119.08
$P_{2d}(4)$	»	5 854.7	4.7	5 855.17	17 074.26
$P_{2c}(4)$	»			5 855.22	17 074.12
$P_{1d}(3)$	»	5 879.5	12.7	5 879.26	17 004.30
$P_{1c}(3)$	»			5 879.33	17 004.10
$P_{2d}(3)$	»	5 897.5	4.8	5 897.84	16 950.73
$P_{2c}(3)$	»			5 898.83	16 947.89

TABLEAU I *(suite)*

Identification		Fréquence obs.	Intensité	Fréquence calc.	λ_{air}
$P_{1d}(2)$	»	5 916.0	10.1	5 915.67	16 899.64
$P_{1c}(2)$	»			5 916.58	16 897.04
$P_{2d}(2)$	»	5 938.2	2.4	5 937.95	16 836.23
$P_{2c}(2)$	»			5 940.15	16 830.00
$Q_{1c}(2)$	»	5 985.4	6.7	5 984.52	16 705.21
$Q_{1d}(2)$	»			5 985.89	16 701.39
$Q_{1c}(1)$	»	5 991.1	15.4	5 990.12	16 689.60
$Q_{1d}(1)$	»			5 990.76	16 687.81
$Q_{2d}(1)$	»			5 992.25	16 683.66
$Q_{2c}(1)$	»			5 992.75	16 682.27
$R_{1d}(1)$	»	6 060.1	5.6	6 059.43	16 498.70
$R_{1c}(1)$	»			6 059.61	16 498.21
$R_{2d}(2)$	(5,3)	6 068.8	5.0	6 068.04	16 475.29
$P_{1c}(6)$	(4,2)			6 068.94	16 472.84
$P_{1d}(6)$	(4,2)			6 069.18	16 472.19
$R_{2c}(2)$	(5,3)			6 070.22	16 469.37
$R_{1d}(2)$	»	6 081.5	7.4	6 081.88	16 437.79
$R_{1c}(2)$	»			6 082.52	16 426.06
$R_{1c}(3)$	»	6 102.4	2.9	6 101.19	16 385.77
$R_{1d}(3)$	»			6 101.60	16 384.67
$P_{1d}(5)$	(4,2)	6 115.5	5.2	6 115.55	16 347.29
$P_{1c}(5)$	»			6 115.74	16 346.79
$P_{2d}(5)$	»	6 128.5	2.8	6 128.43	16 312.94
$P_{2c}(5)$	»			6 128.52	16 312.70
$P_{1d}(4)$	»	6 159.5	10.2	6 159.15	16 231.57
$P_{1c}(4)$	»			6 159.40	16 230.91
$P_{2d}(4)$	»	6 175.0	3.1	6 174.87	16 190.25
$P_{2c}(4)$	»			6 174.94	16 190.07
$P_{1d}(3)$	»	6 200.3	12.7	6 200.04	16 124.52
$P_{1c}(3)$	»			6 200.19	16 124.13
$P_{2d}(3)$	»	6 219.5	6.5	6 218.88	16 075.67
$P_{2c}(3)$	»			6 218.95	16 075.49
$P_{1d}(2)$	»	6 238.5	13.2	6 237.96	16 026.50
$P_{1c}(2)$	»			6 238.07	16 026.22
$P_{2d}(2)$	»	6 260.5	4.0	6 260.38	15 969.11
$P_{2c}(2)$	»			6 260.71	15 968.27

TABLEAU I *(suite)*

Identification		Fréquence obs.	Intensité	Fréquence calc.	λ_{air}
$Q_{1c}(3)$	»	6 302.0	2.2	6 300.90	15 866.41
$Q_{1d}(3)$	»			6 301.79	15 864.17
$Q_{1c}(2)$	(4,2)	6 310.5	6.0	6 309.63	15 844.46
$Q_{1d}(2)$	»			6 310.19	15 843.06
$Q_{1c}(1)$	»	6 316.0	15.4	6 315.74	15 829.13
$Q_{1d}(1)$	»			6 316.10	15 828.23
$Q_{2d}(1)$	»			6 318.20	15 822.97
$Q_{2c}(1)$	»			6 318.52	15 822.17
$R_{2d}(1)$	»	6 368.5	1.8	6 369.60	15 695.29
$R_{2c}(1)$	»			6 369.77	15 694.87
$P_{1d}(6)$	(3,1)	6 387.5	7.3	6 386.44	15 653.90
$P_{1c}(6)$	(3,1)			6 387.22	15 651.99
$R_{1c}(1)$	(4,2)			6 387.77	15 650.64
$R_{1d}(1)$	»			6 387.86	15 650.42
$R_{2d}(2)$	»	6 397.5	4.0	6 396.99	15 628.08
$R_{2c}(2)$	»			6 397.31	15 627.59
$R_{1c}(2)$	»	6 411.6	4.8	6 411.05	15 593.81
$R_{1d}(2)$	»			6 411.23	15 593.37
$R_{2c}(3)$	»	6 423.0	2.6	6 422.42	15 566.20
$R_{2d}(3)$	»			6 422.51	15 565.98
$R_{1c}(3)$	»	6 434.5	5.8	6 432.12	15 542.73
$R_{1d}(3)$	»			6 432.59	15 541.59
$P_{1d}(5)$	(3,1)			6 434.44	15 537.12
$P_{1c}(5)$	»			6 435.04	15 535.68
$P_{1d}(4)$	»	6 479.7	8.2	6 479.68	15 428.65
$P_{1c}(4)$	»			6 480.04	15 427.79
$P_{2c}(4)$	»	6 495.5	4.0	6 494.46	15 393.53
$P_{2d}(4)$	»			6 495.31	15 391.52
$P_{1c}(3)$	(3,1)	6 522.3	10.7	6 521.28	15 330.22
$P_{1d}(3)$	»			6 522.00	15 328.53
$P_{2c}(3)$	»	6 541.5	3.1	6 538.82	15 289.10
$P_{2d}(3)$	»			6 541.10	15 283.77
$P_{1c}(2)$	»	6 561.5	10.8	6 561.21	15 236.93
$P_{1d}(2)$	»			6 561.49	15 236.28
$P_{2d}(2)$	»	6 584.5	3.1	6 583.65	15 184.99
$P_{2c}(2)$	»			6 583.75	15 184.76
$Q_{1c}(2)$	»	6 635.0	6.1	6 635.03	15 067.40
$Q_{1d}(2)$	»			6 636.30	15 064.52
$Q_{1c}(1)$	»	6 642.5	13.6	6 641.82	15 052.00
$Q_{2d}(1)$	»			6 642.26	15 051.00
$Q_{1d}(1)$	»			6 642.46	15 050.55
$Q_{2c}(1)$	»			6 642.87	15 049.62

ces deux températures s'explique par le fait que dans l'analyse classique on n'avait pas tenu compte des raies P_2(K).

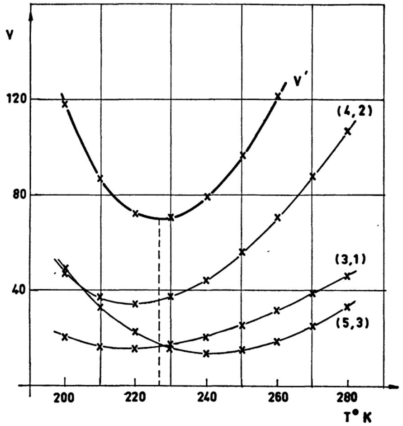


FIG. 6. — Étude des branches P du spectre IV.

3° Pour les 3 spectres IV, II, III on a calculé les intensités théoriques des branches Q dans les 3 bandes étudiées en faisant l'hypothèse que les températures étaient respectivement 227°, 242° et 245°. Dans les 3 cas les intensités observées sont

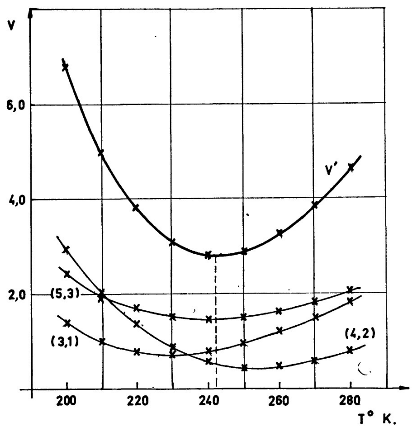


FIG. 7. — Étude des branches P du spectre II.

plus faibles que les intensités théoriques. L'écart est 2 ou 3 fois plus grand que les fluctuations les plus importantes contenues dans le spectre calculé. La température en accord avec l'intensité des raies des branches Q dans le spectre IV est 270°. La figure 9 donne la comparaison entre le spectre IV observé et le spectre synthétique calculé pour une température $T = 227°$.

Il semble donc qu'à partir d'une température donnée on ne puisse pas obtenir un accord entre les intensités calculées et les intensités observées dans les branches P, Q et R simultanément.

Une explication possible est que les probabilités de transition calculées par Benedict, Plyler et Humphreys [2], utilisées dans le travail ci-dessus soient fausses. Les auteurs avaient d'ailleurs prévu cette possibilité parce qu'ils ont négligé l'interaction vibration-rotation. Cet effet a été calculé récemment pour certaines molécules légères par

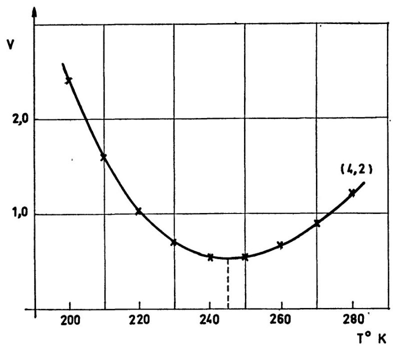


FIG. 8. — Étude des branches P du spectre III.

Herman, Rothery et Rubin [16] et il paraît souhaitable que ces calculs soient étendus au radical OH.

Les auteurs remercient M. M. Dufay, le C.N.R.S. qui leur a accordé deux séjours à l'Observatoire de Haute-Provence, M. J. Dufay et Fehrenbach, Directeurs de cet Observatoire et le Comité Européen de Calcul Scientifique pour ses attributions d'heures de calcul à l'ordinateur 704 I. B. M. Ils adressent leur reconnaissance à M. W. H. Watson, Directeur du Centre de Calcul de l'Université de Toronto, à MM. Richardson et Sears. Ils expriment leur gratitude à M. Jacquinot pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Manuscrit reçu le 3 mai 1960.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gush (H.) et Vallance-Jones (A.), A. T. M., *J. Terr. Phys.*, 1955, **7**, 285.
[2] Benedict (W. S.), Plyler (E. K.) et Humphreys (C. J.), *J. Chem. Phys.*, 1953, **21**, 398.
[3] Fellgett (P.), *Thèse*, Cambridge, 1951.
[4] Jacquinot (P.), Conférence du G. A. M. S., 1953.
[5] Connes (J.) et Gush (H.), *J. Physique Rad.*, 1959, **20**, 915.
[6] Connes (J.), *Rev. Optique*, à paraître.
[7] Connes (J.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 13.
[8] Noxon (J. F.), Harrison (A. W.) et Vallance-Jones (A.), *J. Atm. Terr. Phys.*, 1959, **16**, 246.
[9] Dieke (G. H.), Crosswhite (H. M.) et Bumblebee, Series Report, 1948, **87**.
[10] Herman (R. C.) et Hornbeck (G. A.), *Astrophys. J.*, 1953, **118**, 214.
[11] Edlen (B.), *J. Optique Soc. Amer.*, 1953, **43**, 339.
[12] Vallance-Jones (A.), *Nature*, 1955, **175**, 950.
[13] Dufay (M.), *C. R. Acad. Sc.*, 1958, **246**, 2281.
[14] Meinel (A. B.), *Astrophys. J.*, 1950, **111**, 555.
[15] Chamberlain (J. W.) et Meinel (A. B.), The Earth as a planet, 1954, p. 564. Édit. Kuiper, University of Chicago Press.
[16] Herman (R.), Rothery (R. W.) et Rubin (R. J.), *J. Molecular Spectrosc.*, 1958, **2**, 369.

LETTRES A LA RÉDACTION

SPECTROSCOPIE DU CIEL NOCTURNE DANS L'INFRAROUGE PAR TRANSFORMATION DE FOURIER

Par Mme J. CONNES et H. P. GUSH (*),
Laboratoire Aimé-Cotton, C. N. R. S., Bellevue.

Les premiers spectres du ciel nocturne dans la région de 1,6 micron ont été obtenus par Gush et Vallance Jones avec un spectromètre à réseau [1]. La résolution était de l'ordre de 150 et permettait de mettre en évidence les bandes du radical libre OH, mais était insuffisante pour résoudre la structure rotationnelle. L'étude de ces spectres avait permis néanmoins de calculer une température rotationnelle relativement basse de l'ordre de 240 °K.

Ce travail a été repris avec une méthode particulièrement bien adaptée à l'étude, à des résolutions moyennes, des sources faibles dans le proche infrarouge.

Description sommaire de la méthode. — Le flux recueilli sur l'axe d'un interféromètre à deux ondes dans lequel la différence de marche varie linéairement en fonction du temps est la transformée de Fourier du spectre de la lumière incidente. Inversement la transformée de Fourier du signal enregistré pendant que la différence de marche varie (l'interférogramme) donne le spectre cherché [2]. Pour obtenir un spectre par cette méthode il faut donc réaliser deux opérations successives :

(*) Boursier du National Research Council of Canada pour les années 1957-1959.

1) enregistrer l'interférogramme ;
2) en faire la transformée de Fourier.

Pour cette dernière partie du travail, on a utilisé jusqu'à présent, des calculateurs digitaux auxquels on fournit des données équidistantes relevées sur l'interférogramme.

Dans ces conditions on remplace le calcul de l'intégrale par celui d'une somme. Une étude complète du meilleur traitement à faire subir à l'interférogramme va être publiée prochainement.

Cette méthode de spectroscopie permet d'atteindre dans l'infra-rouge où les détecteurs photo-résistants sont exigés, un spectre avec un rapport signal/bruit supérieur à celui donné par un instrument classique de même résolvance, ayant la même étendue, et pour le même temps de mesure. Ce gain est dû au fait que lors de l'enregistrement de l'interférogramme, tous les éléments du spectre impressionnent le détecteur pendant la durée totale de la mesure, alors que dans un instrument classique un élément spectral n'est reçu que pendant une petite fraction du temps d'exploration du spectre. Si M est le nombre d'éléments spectraux contenus dans le spectre, le gain de rapidité attendu pour un rapport signal/bruit donné est de l'ordre de M [3], [4].

La méthode a déjà permis à divers auteurs de traiter des problèmes à très basse résolution dans l'infrarouge [5], [6], [7], [8], [9].

Nous l'avons améliorée en enregistrant simultanément l'interférogramme et la sinusoïde fournie par une raie de référence illuminant l'interféromètre de Michelson dans les mêmes conditions que le spectre à étudier (*fig.* 1). Nous disposons ainsi d'une échelle des différences de marche qui permet d'éliminer les effets des défauts d'entraînement du miroir mobile.

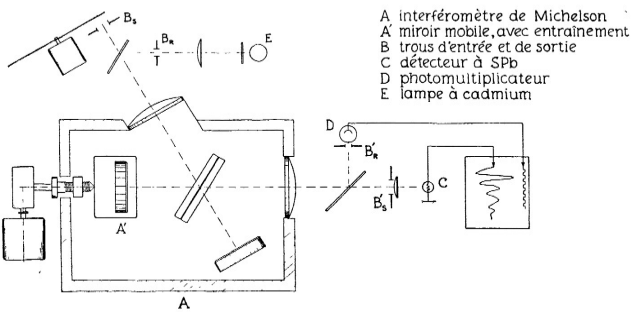


FIG. 1. — Schéma de principe de l'appareil utilisé.

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:019590020011091500

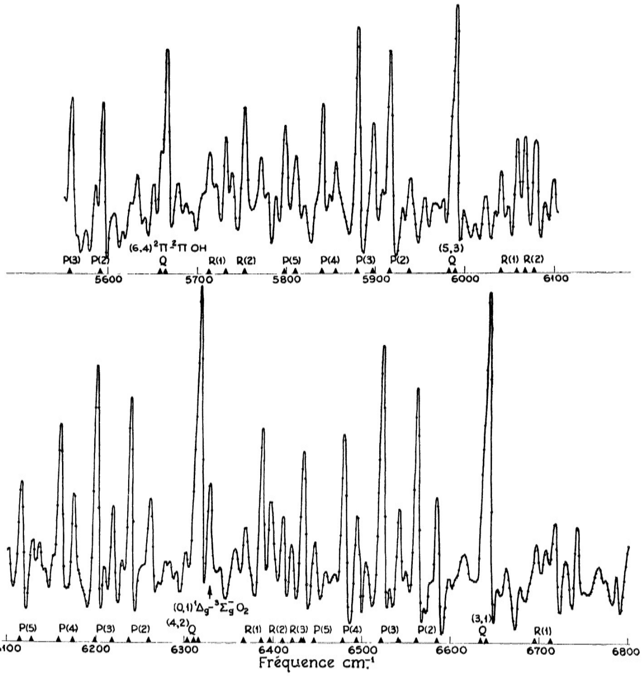


FIG. 2. — Spectre du crépuscule calculé à partir d'un interférogramme enregistré le 7 mars 1959 à 19,30 heures.

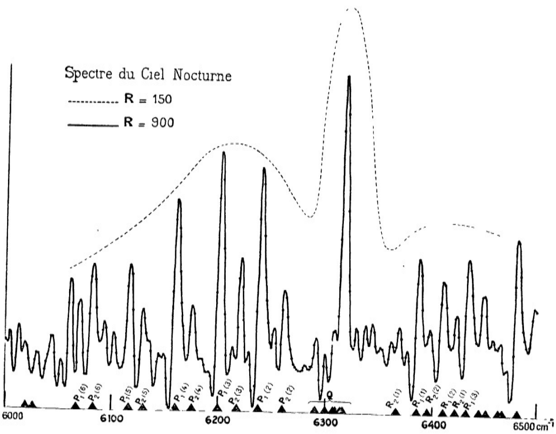


FIG. 3. — Spectre calculé à partir d'un interférogramme enregistré le 6 décembre 1958 à 22 heures.

Les transformées de Fourier ont été calculées par l'ordinateur 704 IBM.

Résultats. — La figure 2 montre le spectre du ciel nocturne vers 1,6 micron, calculé à partir d'un interférogramme enregistré le 7 mars 1959 à l'Observatoire de Haute-Provence. L'instrument visait au N.-O. à 20° au-dessus de l'horizon. L'enregistrement a commencé lorsque le soleil se trouvait à 6° au-dessous de l'horizon et a duré 40 minutes. La résolution calculée qui est de 900 est en accord avec celle effectivement obtenue.

L'analyse des fréquences et des intensités des raies montre qu'elles peuvent presque toutes être attribuées au radical libre OH. On observe les bandes de rotation-vibration (3,1), (4,2), (5,3) et (6,4) appartenant à la séquence $\Delta v = 2$. Les autres bandes de cette séquence sont très atténuées par les absorptions atmosphériques. La structure rotationnelle des branches P et R est bien résolue, ce qui permet une détermination de la température de rotation. La valeur trouvée 270 °K est en accord raisonnable avec d'autres mesures faites à partir des bandes vers 8 000 Å [10], [11], [12], [13].

La même figure montre vers 6 330 cm^{1} la bande (0,1) $^1\Delta_g$ — $^3\Sigma_g$ de O_2 qui a été découverte dans le spectre du crépuscule du soir par Vallance Jones et Harrison [14]. Son intensité relative est faible : l'interféromètre ne visait pas dans la meilleure direction pour l'observation de cette bande ; de plus la durée de l'enregistrement était trop longue par rapport à la durée de vie de l'émission. Cette bande n'est pas visible dans les spectres calculés à partir des interférogrammes enregistrés plus tard dans la nuit (*fig.* 3).

Les calculs de spectres à plus haute résolution dans les régions de 1,6 micron, 1,0 à 1,3 micron et 2,0 microns sont en préparation. Une étude complète sera publiée ultérieurement.

Nous adressons nos remerciements au C. N. R. S. qui nous a accordé deux séjours en novembre 1958 et février 1959 à l'Observatoire de Haute-Provence, aux directeurs et au personnel de l'Observatoire, et au Comité Européen de Calcul Scientifique pour ses attributions d'heures de calcul à la machine IBM 704. Nous exprimons notre gratitude à M. Jacquinot pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Lette reçue le 14 septembre 1959.

RÉFÉRENCES

[1] Gush (H.) et Vallance Jones (A.), *J. Atm. Terr. Phys.*, 1955, **7**, 285.
[2] Connes (J.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 13.
[3] Jacquinot (P.), Conférence du G. A. M. S., 1953.
[4] Fellgett (P.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 3.
[5] Gebbie (H.) et Vanasse (G.), *Nature*, 1956, **178**, 432.
[6] Gebbie (H.), *Phys. Rev.*, 1957, **107**, 1194.
[7] Fellgett (P.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 237.
[8] Vanasse (G.), Strong (J.) et Loevenstein (E.), *J. Opt. Soc. Amer.*, 1959, **49**, 309.
[9] Vanasse (G.) et Loevenstein (E.), *J. Opt. Soc. Amer.*, 1959, **49**, 512.
[10] Meinel (A. B.), *Astrophys. J.*, 1950, **112**, 120.
[11] Dufay (J. et M.), *C. R. Acad. Sc.*, 1951, **232**, 426.
[12] Chamberlain (J. W.) et Oliver (N. J.), *Phys. Rev.*, 1953, **90**, 1118.
[13] Dufay (M.), *C. R. Acad. Sc.*, 1958, **246**, 2281.
[14] Vallance Jones (A.) et Harrison (A. W.) *J. Atm. Terr. Phys.*, 1958, **13**, 45.

JOURNAL DE PHYSIQUE *Colloque C 2, supplément au n° 3-4, Tome 28, mars-avril 1967, page* C 2 - 57

MÉTHODES DE CALCUL DIGITAL

J. CONNES
Observatoire de Meudon, 92-Meudon, France

P. CONNES,
Laboratoire Aimé Cotton, CNRS, 92-Bellevue, France

Résumé. — Les spectres planétaires, décrits dans une autre communication, sont calculés à partir d'interférogrammes échantillonnés en $M = 15\,000$ points (valeur maximum) enregistrés entre les valeurs extrêmes de la différence de marche $\Delta = 0$ et $\Delta = \Delta$ max. Aucun échantillon ne coïncidant rigoureusement avec le point zéro il est nécessaire de déterminer par le calcul (avec une précision de l'ordre de l'angström) la distance entre le premier échantillon et le vrai zéro, puis de calculer un interférogramme « secondaire » par interpolation de l'interférogramme enregistré « primaire » ; l'opération utilise une convolution. On calcule ensuite la transformée en cosinus, en une série de points « primaires » du spectre dont l'écart est choisi légèrement inférieur à la limite de résolution. Des points « secondaires » 5 à 10 fois plus serrés sont ensuite calculés par convolution, en même temps qu'est introduite l'apodisation désirée.

Pour réduire le temps de calcul de la transformée de Fourier (proportionnel à M^2 par les méthodes conventionnelles), on peut appliquer la méthode suivante : le spectre est divisé en k tranches égales et les M/k points primaires correspondant à chaque tranche sont calculés à partir des M/k échantillons d'un interférogramme déduit du précédent par convolution, et dans lequel l'écart entre échantillons est multiplié par k. Pour chaque tranche du spectre le temps de calcul est proportionnel à M^2/k^2, et pour le spectre entier à M^2/k, donc réduit d'un facteur k.

[Depuis le Colloque nous avons d'autre part adapté la méthode de Cooley et Tuckey (*Math. of Comput.*, 1965, **19**, 297), signalée par M. Forman dans sa communication, à un ordinateur 7040 muni de 4 dérouleurs de bandes et avons pu traiter des interférogrammes contenant jusqu'à $M = 58\,000$ échantillons (à paraître au *Journal de Physique*)].

La description complète des méthodes utilisées doit paraître comme seconde partie de l'article Near Infrared Planetary Spectra by Fourier Spectroscopy, *J. Opt. Soc. Amer.*, 1966, **56**, 896.

Abstract. — The planetary spectra described in another communication are computed from interferograms with $M = 15\,000$ samples (or less), recorded between $\Delta = 0$ and $\Delta = \Delta$ max. Since no sample coincides with the zero point it is necessary first to compute (with an accuracy of the order of 1 Å) the distance between the first sample and the true zero, then to compute a « secondary » interferogram by interpolation of the « primary » recorded interferogram ; this is done by convolution. One computes then the cosine transform for a set of « primary » spectral samples, the separation of which is taken slightly less than the resolution. A set of between 5 and 10 times as many « secondary » spectral samples is then computed, again by a convolution ; the necessary apodization is simultaneously performed.

In order to reduce the computation time of the Fourier transform (proportional to M^2 by standard methods) it is possible to apply the following principle : the spectrum is divided into k equal sections, and the M/k primary spectral samples of each slice are computed from the M/k samples of an interferogram deduced from the recorded one by convolution, and in which the sample separation is multiplied by k. For each section the computation time is proportional to M^2/k^2, and for the entire spectrum to M^2/k ; it is thus reduced by a factor of k.

[After the Colloquium we have also adapted the Cooley-Tuckey method (*Math. of Comput.*, 1965, **19**, 297), discussed by M. Forman in his communication, to a 7040 computer with 4 tape transports ; thus we have been able to transform interferograms with up to 58 000 samples (to be published, *J. de Physique*).

The complete description of the methods we use will be published as Part II of the paper Near Infrared Planetary Spectra by Fourier Spectroscopy, *JOSA*, 1966, **56**, 896.

Transcription[1] de l'entretien entre
Jean-Pierre Serre
et
Alain Connes
au sujet de la correspondance
Serre-Grothendieck

ALAIN CONNES : Alors ce que je propose, c'est que notre discussion commence justement en l'année 1955, je lis ce que dit Grothendieck, il dit : "l'année 1955 marque un tournant crucial dans mon travail mathématique, celui du passage de l'analyse à la géométrie". Et il dit : "je me rappelle encore de cette impression saisissante, toute subjective certes, comme si je quittais des steppes arides et revêches".

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, et c'est pas gentil pour ce qu'il faisait avant...

ALAIN CONNES : Non ! Non, non !

JEAN-PIERRE SERRE : Parce que, il faut vous expliquer que Grothendieck avait été à Nancy et que là, sur un certain sujet qui était assez à la mode mais un peu restreint quand-même...

ALAIN CONNES : Oui, c'étaient les espaces vectoriels topologiques...

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, c'est ça, il avait presque résolu tous les problèmes du coin.

ALAIN CONNES : C'est-à-dire qu'on lui avait donné 14 problèmes, c'était Dieudonné je crois, qui les lui avait donnés, ou Schwartz.

JEAN-PIERRE SERRE : Je sais pas si c'est 8, ou...

ALAIN CONNES : Ils lui avaient donné 14 problèmes à résoudre...

1. Transcription : Denise Vella-Chemla, 26.1.2019.

Jean-Pierre Serre : qu'ils ne savaient pas faire...

Alain Connes : qu'eux ne savaient pas faire... et Grothendieck et je pense que c'était la première fois que Grothendieck appliquait sa méthode que Serre a décrite comme étant : "pour résoudre des problèmes, il faut les laisser se dissoudre dans une marée montante de théories générales".

(Rires)

Jean-Pierre Serre : C'était un sujet qui était un peu bouché, quand-même.

Alain Connes : Oui, c'est ça, quand-même.

Jean-Pierre Serre : On a eu l'impression qu'il avait résolu à peu près toutes les questions. En fait, c'est pas tout à fait vrai. Il y avait des contre-exemples à trouver.

Alain Connes : Oui, des contre-exemples à trouver...

Jean-Pierre Serre : Il y avait les Banach, il y avait des jolis contre-exemples à trouver, mais il ne les a pas trouvés. Mais, il en avait assez, quand-même.

Alain Connes : Mais il en avait assez et alors la question que je me suis posée, parce que j'ai regardé la thèse de Grothendieck, quand il a passé sa thèse, j'ai regardé la deuxième thèse. Et alors la deuxième thèse de Grothendieck, ça c'était, ça, c'est très intéressant, la deuxième thèse de Grothendieck, c'était : "Théorie des faisceaux"

Jean-Pierre Serre : Ah ?! *(étonné et intéressé)*

Alain Connes : donc ça veut dire, enfin, c'est ma conjecture, que le moment où il a... il a bifurqué des espaces de l'analyse fonctionnelle...

Jean-Pierre Serre : Et il avait envie sûrement.

Alain Connes : Et il avait sûrement envie de bifurquer, c'est au moment de sa deuxième thèse, on lui a demandé d'exposer la théorie des faisceaux...

Jean-Pierre Serre : Alors il faut vous expliquer ce que c'est que la deuxième thèse parce que ça n'existe plus. A l'époque quand on passait sa thèse, on avait la thèse principale, ce qu'on avait fait, et puis le jury vous donnait un autre sujet. C'était un sujet que l'on donnait à l'intéressé avec son accord en général, ça se passait assez en famille, ça, souvent, pas toujours, pas toujours. Et alors, la personne en question parlait une demi-heure ou 20 minutes de ça et c'était très bien. Et je pense que Grothendieck avait dû plus ou moins choisir son sujet. En plus, tu vois, le lien avec les faisceaux, c'est que, déjà à l'époque, on se rendait compte que sa théorie des espaces nucléaires était si bonne que tu pouvais faire des produits tensoriels...

Alain Connes : C'est ça, qui étaient uniques bien sûr.

Jean-Pierre Serre : où, par exemple, Kunneth, que la formule de Kunneth marchait et par exemple, j'ai vendu la théorie de Grothendieck à Bott...

Alain Connes : Oui, bien sûr, à cause de ça...

Jean-Pierre Serre : ...un an ou deux ans après pour quelque chose, je lui ai dit : "tu sais, tu as un produit de variétés, eh ben, tu dois faire comme si c'était un produit tensoriel et puis voilà, tout marche !".

Alain Connes : et puis, non seulement ça, absolument, mais l'idée philosophique en fait qui est derrière les espaces nucléaires, c'est que ce sont des espaces de dimension finie. C'est-à-dire en fait, on les traite...

Jean-Pierre Serre : Oui, ils se comportent...

Alain Connes : ... , ils se comportent comme des espaces de dimension finie.

Jean-Pierre Serre : Bon, ça, c'est un peu technique.

Alain Connes : C'est un peu technique. Ah, mais, on va rentrer dans la technique.

Jean-Pierre Serre : Il est passé très naturellement...

Alain Connes : à la théorie des faisceaux. Enfin, à la géométrie algébrique.

Jean-Pierre Serre : Enfin, d'abord à la topologie...

Alain Connes : Absolument. Alors, la question que je voulais te poser, là-dessus, justement, c'est "quand est-ce que Grothendieck est rentré dans le groupe Bourbaki ?", tu te souviens ?

Jean-Pierre Serre : Oh, ça a été un petit peu, oh, je ne sais pas. Je n'ai pas de souvenir du tout de date. C'est nettement après ça.

Alain Connes : C'est nettement après ça, bon, ben d'accord. C'est ce que je voulais savoir, que c'est nettement après ça.

Jean-Pierre Serre : Nettement.

Alain Connes : Nettement, d'accord, parce qu'en fait...

Jean-Pierre Serre : Nettement, bon attends... Là, tu parles de 55. Est-ce qu'en 55... Quelle est l'année où il est parti au Kansas ?

Alain Connes : Bon, eh bien, ça, je ne pourrais pas te le dire.

Jean-Pierre Serre : Parce qu'il m'a écrit une lettre du Kansas, alors.

Alain Connes : La lettre sur...

Jean-Pierre Serre feuillette son exemplaire de la correspondance qu'il prend sur la table.

Jean-Pierre Serre : Elle est de 55.

Alain Connes : La lettre sur le diplodocus... homologicus. Et il parle d'une emmerdante rédaction pour Bourbaki.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est donc en 55, je pense, le Kansas. Et je dirais qu'il a dû entrer à Bourbaki, il a dû y être pris vers 57, peut-être.

Alain Connes : Ah bon, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui, un truc comme ça.

Alain Connes : D'accord, d'accord, d'accord, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Je sais pas : il s'est mis à faire des rapports pour Bourbaki, d'énormes rapports bien sûr.

Alain Connes : Oui bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Nous parlons de Bourbaki ensemble en 59. En 59, il y était, certainement.

Alain Connes : Non, sûrement, mais il me semble...

Jean-Pierre Serre : Donc, c'est par là.

Alain Connes : Oui.

Jean-Pierre Serre continue de feuilleter son exemplaire à la recherche de l'information précise.

Jean-Pierre Serre : Je lui dis... Moi, je lui parle de Bourbaki en 58 déjà donc visiblement...

Alain Connes : Non, je pense que... il y était avant.

Jean-Pierre Serre : Non, en 58, je lui dis "le congrès Bourbaki a été très agréable.". Donc, c'est que, il aurait pu y être. C'est 57, je pense, Bourbaki.

Alain Connes : 57 , d'accord, 57. Ce qui m'a beaucoup frappé, moi, en lisant la correspondance, c'est euh, vraiment euh, au moins au début, puis après je parlerai d'autres choses, mais à quel point Grothendieck justement, arrive à gagner ta confiance d'une certaine manière, et je pense qu'il y a un point qui m'a beaucoup frappé, c'est le moment où il comprend ta dualité à travers les *Ext*, c'est-à-dire, là, tu lui dis : "c'est vraiment rupinant, etc..."

Jean-Pierre Serre : Oui, mais la confiance entre nous, elle était venue au moins 2 ans avant, tu vois : j'étais allé à Nancy...

Alain Connes : Ah bon ? Ah d'accord !

Jean-Pierre Serre : Eh oui ! *(en éclatant de rire)* J'enseignais la mécanique rationnelle à Nancy...

Alain Connes : Ah d'accord !

Jean-Pierre Serre : Je l'avais en horreur, mais je faisais aussi un séminaire de topologie, je discutais avec Grothendieck, donc j'ai vu de près ses espaces nucléaires, tu vois, et ça m'a beaucoup frappé parce que c'était très bon comme idée, ces produits tensoriels, et donc on était en confiance, depuis longtemps.

Alain Connes : Vous étiez déjà en confiance depuis longtemps, mais bon au niveau mathématiques, il y a déjà dès le début de la correspondance, il y a plusieurs points qui frappent assez et qui sont par exemple tout son traité sur l'algèbre homologique, c'est-à-dire ce qu'on appelle le Tohoku.

Jean-Pierre Serre : Oui ça m'intéressait pas spécialement.

Alain Connes : Ca t'intéressait pas spécialement ?

Jean-Pierre Serre : Non, je considérais ça comme plus ou moins évident, tu vois ? !

Alain Connes : C'est-à-dire, il y avait le Cartan-Eilenberg.

Jean-Pierre Serre : Pour moi, c'était de la rédaction. D'ailleurs pour lui aussi, c'était pareil.

Alain Connes : C'était de la rédaction.

Jean-Pierre Serre : Il le dit : “Pour comprendre quelque chose, j’ai besoin de l’écrire.”.

Alain Connes : Oui, tout à fait.

Jean-Pierre Serre : Et du coup, il le rédigeait mais pour moi il y avait rien d’original dedans.

Alain Connes : Ah ? ! Moi, il y a quand-même quelque-chose qui m’a beaucoup frappé là-dedans.

Jean-Pierre Serre : Bon, il y avait les axiomes sur les catégories abéliennes.

Alain Connes : Voilà. Non, il y avait les axiomes sur les catégories abéliennes, mais pas seulement. Il y avait au niveau des exemples. C’est-à-dire au niveau des exemples, c’est-à-dire bon, bien sûr, l’exemple principal, c’était les faisceaux de groupes abéliens sur...

Jean-Pierre Serre : Alors ça n’a pas vraiment été fait mais bon, c’était connu que c’était faisable, bon...

Alain Connes : Bien sûr, que ça marchait, d’accord ?. Mais bon il y avait la nuance entre l’aspect Cech, enfin l’aspect si tu veux pour calculer la cohomologie, mais, en fait, moi, ce qui m’a beaucoup plus frappé quand j’ai lu cet article en détail, c’était un autre exemple, qui a l’air de rien, mais j’y reviendrai après, et c’est l’exemple de ce qu’il appelait les catégories de diagrammes.

Jean-Pierre Serre : Catégories de ?

Alain Connes : de diagrammes. Alors ça, ça passe inaperçu dans l’article...

Jean-Pierre Serre : Alors, oui effectivement parce que je ne m’en souviens pas du tout.

Alain Connes : Tu ne t’en souviens pas ? Voilà !

Jean-Pierre Serre : Eh bien, même maintenant.

Alain Connes : Alors, je vais t'expliquer ce que c'est. Et le rôle que ça a joué je pense après, mais c'est aussi une conjecture. Donc en fait, qu'est-ce qu'il fait ? Il a tout un chapitre enfin, sur cet exemple-là et qu'est-ce qu'il dit ? Eh bien, il dit...

Jean-Pierre Serre : Tiens, c'est curieux, je ne me souviens pas du tout de ça !

Alain Connes : Il dit : on prend une petite catégorie et on prend les foncteurs de cette petite catégorie vers les groupes abéliens.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est ça, c'est une catégorie de diagramme.

Alain Connes : Voilà, c'est ça une catégorie de diagrammes, pour lui. Et après, il vérifie bien-sûr que bon, c'est une catégorie abélienne, tout marche, etc.

Jean-Pierre Serre : Oui, effectivement, c'est une idée qui était certainement pas dans l'air, ça, non.

Alain Connes : Voilà. Donc, si tu veux, moi, c'est cette partie-là qui m'a beaucoup intéressé, comme partie novatrice, et j'y reviendrai après.

Jean-Pierre Serre : Mais moi, elle ne m'intéressait pas parce que ça ne représentait rien de concret pour moi. Il ne calculait pas des groupes d'homotopie, il ne calculait rien avec, tu comprends ?

Alain Connes : Oui, je suis bien d'accord.

Jean-Pierre Serre : Alors, j'ai tendance à être comme ça.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr, bien évidemment, bien évidemment, mais j'y reviendrai après... Alors, en fait, donc, j'ai entendu dans une des interviews que tu as données que, je veux dire, ça te fait réagir lorsque les gens, et je pense qu'ils ont tort, parlent d'une révolution à propos de la théorie des schémas. Ca, je pense qu'on est bien d'accord, c'était dans l'air et en fait, tu fais remonter ça à Krull ?

Jean-Pierre Serre : Parce que Krull, bon, c'était un algébriste, Krull. Mais on avait le sentiment qu'il devinait la géométrie qui était derrière. Et en tout cas, il construisait les anneaux locaux, la localisation...

Alain Connes : Il construisait la localisation qui est l'essentiel, oui.

Jean-Pierre Serre : ...mais il n'avait pas fait le pas d'aller au projectif, tu vois, il était affine, et ça, la géométrie quand elle reste affine, elle est pas collée.

Alain Connes : Ah d'accord...

Jean-Pierre Serre : La géométrie, quand elle est affine, ça marche pas...

Alain Connes : Il faut la recoller, non, bien sûr, sinon, ça ne marche pas, c'est sûr, la cohomologie...

Jean-Pierre Serre : C'est pas assez intéressant.

Alain Connes : Et alors, ce qui m'a aussi beaucoup frappé, c'est à quel point, justement, Grothendieck est arrivé dans un monde idéal. Pourquoi ? Parce que Serre et plusieurs autres personnes faisaient un séminaire à Princeton sur les schémas, au moment où ils les écrivaient. Dieudonné l'aidait à rédiger.

Jean-Pierre Serre : Mais ça, c'est un petit peu après quand-même.

Alain Connes : C'est un petit peu après.

Jean-Pierre Serre : Au début, ça a été purement, la correspondance avec moi, quand il était à Kansas, tu vois ?

Alain Connes : C'est ça, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Ca a été pour lui, ça, le changement net, c'était Kansas, et il m'écrivait, Alain Connes : C'est ça. Ca a donné lieu au développement. D'accord.

Jean-Pierre Serre : Et puis après, il a été recruté par Motchane. Alors je sais pas comment ça marche au point de vue des années...

Alain Connes : C'est 58, le recrutement par Motchane, c'est 58.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, tandis que Kansas, c'est 55. Il y a eu une période intermédiaire. Il était au CNRS, alors, peut-être ?...

Alain Connes : Je ne sais pas, alors ça, je ne sais pas.

Jean-Pierre Serre : Il était apatride, alors, c'était pas si simple.

Alain Connes : C'était assez difficile pour lui sur ce plan-là. Donc au niveau des... au niveau des schémas, bon, c'est clair. Aussi, pareil, je veux dire la correspondance est idéale au niveau des motifs, ça c'est formidable, parce qu'on voit en 64, votre correspondance, toi, tu parles de la métaphysique des motifs, etc.

Jean-Pierre Serre : Et alors, ce que la correspondance ne montre pas, c'est que c'est en fait une conséquence de tas de remarques que je lui faisais : je lui disais "tu sais, entre variétés, si on admet les conjectures de Weil, ça suggère que la cohomologie se coupe en morceaux et des choses comme ça."

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Et ça, ça a mijoté dans son crâne. Mais alors, il a fait quelque chose que moi, je n'aurais jamais fait, il a eu l'idée de définir ça, avec un courage ! ! !

Alain Connes : qui le caractérise !

Jean-Pierre Serre : intellectuel extraordinaire parce que j'aurais jamais pensé que les cycles algébriques, c'était assez fort pour faire...

ALAIN CONNES : Oui.

JEAN-PIERRE SERRE : ça, mais il a eu le courage de le faire. C'est peut-être faux d'ailleurs, c'est peut-être faux, mais en tout cas, c'était un bon départ.

ALAIN CONNES : C'est la conjecture de Hodge. C'était un bon départ. Mais alors il y a une autre partie pour moi absolument essentielle, et je vais te raconter ce que je sais, et tu vas me corriger, d'accord ? C'est pour la cohomologie étale. Alors ce que j'ai entendu dire, mais je ne sais pas si c'est vrai, tu me corriges, ce que j'ai entendu dire c'est que c'est toi qui as donné un séminaire, non, au séminaire Chevalley, en 58...

JEAN-PIERRE SERRE : oui bien sûr, tout cela est correct, oui, c'était en 58.

ALAIN CONNES : ...dans lequel tu as expliqué que pour avoir des fibrés localement triviaux en terme de groupes algébriques, il fallait prendre des revêtement étales...

JEAN-PIERRE SERRE : C'est ça.

ALAIN CONNES : alors, et que, à la sortie de ton séminaire...

JEAN-PIERRE SERRE : C'est absolument correct. Et j'ai fait mon exposé, je me vois encore, au tableau...

(Rires d'Alain Connes)

JEAN-PIERRE SERRE : ...parlant à Poincaré de ça...

ALAIN CONNES : C'était à Poincaré, d'accord.

JEAN-PIERRE SERRE : et à la fin de l'exposé, Grothendieck me disant : "ça va faire la cohomologie de Weil". Parce que ça s'appelait cohomologie de Weil, c'était la cohomologie que nous voulions en tout cas.

ALAIN CONNES : Mais alors...

Jean-Pierre Serre : Instantanément.

Alain Connes : Instantanément ?

Jean-Pierre Serre : Instantanément : moi, j'avais présenté, effectivement et systématiquement, je fais un H^0, bon le H^0, c'est trivial. Je fais le H^1.

Alain Connes : Toi, c'était le H^1 ?

Jean-Pierre Serre : Oui, mais j'ai pas eu le courage intellectuel de me dire "ça pourrait faire un H^2". Tandis que lui, il a dit, tout de suite, instantanément, et c'est parfaitement correct. Cette légende, pour une fois, elle est juste.

Alain Connes : C'est le courant, qui est passé...

Jean-Pierre Serre : Ca a déclenché. Et... en un sens... tu regarderas le texte que j'ai écrit, je l'avais vraiment rédigé comme ça, c'était avec, j'avais écrit H^1, tu vois ?

Alain Connes : Oui, oui ! Ah ? Tu avais déjà écrit la suite cohomologique, tu avais noté H^1, d'accord, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, j'avais écrit H^1. J'avais la bonne cohomologie en dimension 1, c'était ça mon idée. J'étais partie de l'idée que le H^1, de Zariski, pour les revêtements, est ridicule puisqu'on trouve rien. Alors tu les mets de force, dans la machine.

Alain Connes : Tu les mets de force ? Ah, d'accord...

Jean-Pierre Serre : Et j'avais constaté que ça faisait un bon machin. Mais j'avais pas eu l'idée que ça pourrait... On m'aurait posé la question, j'aurais dit qu'il fallait peut-être des idées nouvelles en dimension plus grande, tu vois.

Alain Connes : Oui, c'est ça, c'est ça.

JEAN-PIERRE SERRE : Tandis que lui, était...

ALAIN CONNES : ...était convaincu que ça marchait pour les dimensions plus grandes.

JEAN-PIERRE SERRE : Eh bien, il était d'un optimisme extraordinaire.

ALAIN CONNES : Et toi, souvent, on voit bien dans ta correspondance à quel point, tu lui donnes des contre-exemples *(éclats de rires)*.

JEAN-PIERRE SERRE : *(souriant franchement)* Un peu moins optimiste.

ALAIN CONNES : De manière régulière...

JEAN-PIERRE SERRE : Un peu moins optimiste. Oh, eh bien, tu sais, Weil m'a dit un jour, ça m'avait frappé : "ce sont les optimistes qui démontrent les théorèmes".

ALAIN CONNES : Oh, un petit peu, bon, il ne faut pas être trop optimiste non plus. Il faut une certaine dose d'optimisme.

JEAN-PIERRE SERRE : Bon, en tout cas, cette légende, elle est absolument correcte, donc, ça, c'est bien.

ALAIN CONNES : D'accord, ça, c'est bien, alors il y a une notion que je voudrais aborder, Je pense savoir quelle sera ta réaction mais je vais...

JEAN-PIERRE SERRE : Eh bien, dis toujours.

ALAIN CONNES : Mais j'y vais toujours. Voilà, pour moi, une des grandes découvertes de Grothendieck, c'est la notion de *topos*.

JEAN-PIERRE SERRE : C'est la notion de... ?

ALAIN CONNES : C'est la notion de *topos*.

JEAN-PIERRE SERRE : Alors, je ne sais même pas ce que c'est. Je n'ai même jamais fait l'effort de comprendre exactement parce que... dès qu'il y avait des catégories dedans, en abondance, je m'arrêtais d'écouter.

Alain Connes : D'accord, d'accord.

Jean-Pierre Serre : C'est, c'est, mon crâne s'est un peu bloqué sur ces choses-là.

Alain Connes : Alors, j'avoue que j'avais exactement la même attitude jusqu'à quelques années... et que finalement je pense que c'est une notion qu'on ne peut apprécier que quand on la rencontre indépendamment.

Jean-Pierre Serre : Voilà, ça c'est sûr.

Alain Connes : Tu es d'accord, hein ?

Jean-Pierre Serre : Mais je n'en ai jamais eu besoin.

Alain Connes : Tu n'en as jamais eu besoin, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Donc en fait, si je te pose la question "à quel moment Grothendieck a inventé les topos ?"...

Alain Connes : Je ne sais pas et je m'en fiche.

Jean-Pierre Serre : Tu ne saurais pas, tu t'en fiches.

Alain Connes : Bon, je ne m'en fiche pas vraiment.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, oui, c'est sûr.

Alain Connes : Ca ne me dit rien.

Jean-Pierre Serre : Ca ne te dit rien, OK, d'accord...

Alain Connes : Non alors là, vraiment.

Jean-Pierre Serre : Je sais qu'on en fait beaucoup de... qu'on en parle énormément, que c'est très à la mode et tout ça, mais...

(Rires d'Alain Connes)

Alain Connes : Mais c'est pas quelque chose qui te... Et c'est exactement ce que je pensais, hein, je pensais que...

(Rires d'Alain Connes)

Alain Connes : ...quand j'avais bossé dessus.

Jean-Pierre Serre : Ca ne me dit rien... du tout.

Alain Connes : Voilà. Il y a une autre, comment dire, il y a une autre distinction, que tu fais, dans plusieurs interviews, et qui ressemble un peu à la distinction entre justement, que faisait Grothendieck entre l'analyse fonctionnelle et la géométrie algébrique, c'est..., tu fais une distinction un peu entre la géométrie algébrique et la théorie des formes modulaires.

Jean-Pierre Serre : Ah, ça a beaucoup plus de charme dans ma tête, eh bien, c'est-à-dire que... Non, là, nous allons dans une direction vraiment différente, ce sont des directions différentes et que, Grothendieck quand-même ne s'intéressait qu'aux théories qui se développaient logiquement par elles-mêmes, tu vois ?

Alain Connes : Eh bien, la *marée montante de théories générales*.

Jean-Pierre Serre : La *marée montante*, c'est ça. Or, l'un des charmes justement des formes modulaires et du programme de Langlands, c'est que, et ça n'est absolument pas logique du tout, c'est que, c'est une brillante idée qui dit "deux choses sont essentiellement presque identiques, enfin, elles *se correspondent*, or il n'y a aucune raison, a priori, du tout pour que ça soit vrai.

Alain Connes : Pour que ça soit vrai, d'accord. Et ça, c'est d'un charme extraordinaire.

Jean-Pierre Serre : Ca, pour moi, c'est d'un charme absolument incomparable par rapport à...

Alain Connes : à quelque chose qui se développe comme ça.

Jean-Pierre Serre : Pour moi, ce sont les choses qui se développent petit à petit, comme ça.

Alain Connes : Oui, ça je comprends très bien.

Jean-Pierre Serre : Alors ça pour moi, ça s'incarnait dans des choses précises avec les formes modulaires. Ma conjecture par exemple...

Alain Connes : Bien sûr.

Jean-Pierre Serre : ...sur les extensions Galoisiennes.

Alain Connes : Bien sûr, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : La conjecture sur les courbes elliptiques. Tout ça pour moi a pris forme... vers 67. 67 est une grande année pour moi. Pour la théorie des nombres, parce que c'est l'année où il y a eu les motifs, j'ai vu tout de suite que les motifs étaient, étaient liés, tu vois ?

Alain Connes : En 64, c'étaient les motifs, déjà, dans la correspondance, c'est en 64.

Jean-Pierre Serre : Non, mais pour moi, c'est en 67 seulement que je... que je vois que ça doit être lié.

Alain Connes : D'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui parce que c'est à ce moment-là qu'il y a eu l'article de Weil sur les courbes elliptiques...

Alain Connes : Ah oui, ce qu'on appelle la conjecture de Taniyama-Weil.

Jean-Pierre Serre : ...qui confirmait que les courbes elliptiques devaient correspondre à des formes modulaires. Jusque là, c'était une espèce d'espoir vague, mais...

Alain Connes : Je comprends.

Jean-Pierre Serre : C'était pas concret, tandis que... Weil n'avait pas tout à fait la notion de conducteur mais presque. En tout cas, moi, je l'avais la notion de conducteur, et donc je pouvais, je pouvais énoncer beaucoup plus précisément la conjecture, et alors du coup, elle devenait absolument convaincante. C'était incroyable ! Je l'ai raconté quelque part, après discussion avec Weil, je crois, je suis rentré chez moi, j'ai regardé : "Ah ! !" (je savais qu'il n'y avait pas de courbes elliptiques de conducteur 1), "Ah ben oui, mais il n'y a pas de forme modulaire correspondant, tu vois ?"

(Rires partagés)

Jean-Pierre Serre : Ah et puis, il n'y en a pas non plus avec 8, oh ben, c'était pareil, et par contre, il y en a... Ah ! ! ! C'était lumineux, tu vois ? C'était lumineux. Et ça, c'est le genre de chose par exemple, qui n'est absolument pas Grothendieckien.

Alain Connes : C'est totalement orthogonal à... Mais ça, ça transparaît très clairement dans votre correspondance, complètement.

Jean-Pierre Serre : Ca, évidemment, ça me fait beaucoup plus d'effet, tu vois ? Alors à des niveaux plus élémentaires, à chaque fois qu'il y a des correspondances qui sont un peu surprenantes, ça me touche.

Alain Connes : Ca t'excite, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Alors que au contraire, Grothendieck, ça...

Alain Connes : (*s'exclamant*) : il n'aimait pas !

Jean-Pierre Serre : Il n'aime pas, il n'aime pas ça.

Alain Connes : Et tout ça ressort parfaitement de la correspondance.

Jean-Pierre Serre : Ce sont des points de vue un peu... : c'est bien plus romantique, quand il n'y a pas de relation évidente, et que les trucs sont les mêmes, enfin, c'est *(chuchotant presque)* un mariage fut au ciel, tu vois, enfin, c'est le... le coup de foudre, tu vois...

(Rires)

ALAIN CONNES : Justement, on se rapproche d'une période, de 68, enfin cette période un peu trouble par rapport à Grothendieck, donc on va moins parler de mathématiques.

JEAN-PIERRE SERRE : Eh bien, c'est... Il commence à quitter les maths, en 68.

ALAIN CONNES : Il commence à quitter les maths.

JEAN-PIERRE SERRE : Enfin, c'est pas loin, c'est en 70 à peu près, c'est vers 70 qu'il quitte à peu près.

ALAIN CONNES : Voilà. C'est en 70 qu'il quitte l'IHES ?...

JEAN-PIERRE SERRE : Je ne me rappelle pas des dates.

ALAIN CONNES : Bon, je ne sais pas. Mais en tout cas, il passe 2 ans au Collège de France, c'est toi qui l'invites au Collège de France, sur 2 ans.

JEAN-PIERRE SERRE : Alors c'était une chaire de savant étranger.

ALAIN CONNES : C'était une chaire de savant étranger, qui durait 2 ans.

JEAN-PIERRE SERRE : qui était pour un an. Qui était pour un an, et puis on l'a renouvelée, pour la seconde année. Mais on n'a pas voulu le renouveler pour la troisième fois.

ALAIN CONNES : Pourquoi, il s'était fait des ennemis ? Tu veux dire ? Il s'était...

JEAN-PIERRE SERRE : Comment ?

ALAIN CONNES : Il s'était mal comporté, qu'est-ce qui s'était passé ?

Jean-Pierre Serre : Bah, *(soupir)*, c'était pas sa place parce que, écoute, il passait son temps à ce moment-là à dire qu'il fallait plus faire de sciences. Tu vois, il fallait plus faire de maths, il fallait plus faire de sciences, que c'était l'écologie. Bon ben s'il ne voulait plus en faire, qu'il aille ailleurs quoi, c'était... Non non, et j'étais pas content même que le CNRS le prenne. Je trouvais que c'était... que c'était pas bien...

Alain Connes : Que c'était une erreur... Mais ça, c'était longtemps après, ça, le CNRS.

Jean-Pierre Serre : Pas très longtemps, non.

Alain Connes : C'était en 84 qu'il a été pris au CNRS.

Jean-Pierre Serre : Non mais à ce moment-là. Non, c'était, il jouait un assez vilain jeu parce que il ne voulait plus faire de maths, tout ça, mais il voulait bien être payé, il voulait bien avoir un poste, tu vois, c'était quand-même, pour quelqu'un qui était en principe si... rigoureux.

Alain Connes : Mais il faisait pas ses cours, ou il faisait ses cours ?

Jean-Pierre Serre : Ah, eh bien, tu connais bien l'histoire des cours au Collège, non ?

Alain Connes : Non. Absolument pas.

Jean-Pierre Serre : Alors, la première année, il n'y a pas eu de problème. La première année, il a fait un cours. Il a fait un cours, je sais pas sur quoi.

Alain Connes : Si, c'était sur les groupes de Barsotti-Tate ou un truc comme ça.

Jean-Pierre Serre : Non, je crois que ça, c'est la seconde. La seconde année, il nous a donné comme sujet de cours, tu sais bien, les sujets que nous proposons au mois de juin...

Alain Connes : Oui, au mois de juin.

Jean-Pierre Serre : Il nous a donné un truc d'écologie.

Alain Connes : Ouh la !

Jean-Pierre Serre : Alors euh...

Alain Connes : Ah c'était à ce point-là alors... Je croyais qu'il avait donné deux sujets.

Jean-Pierre Serre : Non, non, pas du tout. Un sujet d'écologie. Alors l'administrateur a disjoint cette proposition-là du reste, nous avons voté sur tout le reste, on a voté oui pour tous les copains et puis ensuite, on a voté séparément sur le truc de Grothendieck, on a voté non à une large majorité. Moi j'ai voté non bien-sûr, sur l'écologie ! Alors Grothendieck a accepté, ça, il n'avait pas le choix. Et il a fait un cours sur Barsotti-Tate ou un truc comme ça, mais dans lequel il a commencé par "je ne peux pas vous parler de Barsotti-Tate sans vous expliquer que..." et puis, 4 heures d'écologie, tu vois, et...

Alain Connes : Mon Dieu !... D'accord !

(Eclats de rires)

Jean-Pierre Serre : Je crois que le pauvre Illusie a assisté. Je crois qu'il a pas dû y avoir grand monde à ce cours.

Alain Connes : Ah c'était un cours d'écologie alors...

Jean-Pierre Serre : De Survivre [2], enfin... Des bons sentiments quoi, des bons sentiments de Grothendieck, ça.

Alain Connes : D'accord.

Jean-Pierre Serre : Et alors, tu imagines, on n'avait pas du tout envie de le renouveler, tu comprends, avec un truc pareil.

2. Mouvement écologiste fondé par Grothendieck et ses amis.

Alain Connes : Mais ça me rappelle, d'ailleurs, dans la correspondance, une dissenssion que vous aviez eue, qui était au moment où Grothendieck avait voulu, enfin, je crois qu'il l'avait écrit, il avait écrit une lettre à Cartan

Jean-Pierre Serre : Ca c'est différent, il avait écrit une lettre à Cartan sur la guerre d'Algérie...

Alain Connes : sur la guerre d'Algérie, il voulait dispenser les normaliens de service militaire ou un truc comme ça, oui.

Jean-Pierre Serre : oui, dispenser les mathématiciens de service militaire.

Alain Connes : Ca t'avait un peu...

Jean-Pierre Serre : Je lui avais répondu que c'étaient quand-même délicat quand la peau des gens était en jeu de... oui, c'est ce que je lui avais dit, que certains ne se fassent pas tuer alors que d'autres peuvent... se font tuer. Alors il est exact que certains pays, effectivement, protégeaient leurs scientifiques, je crois que l'URSS par exemple...

Alain Connes : protégeait les scientifiques...

Jean-Pierre Serre : *(riant :)* Ils les tuaient pour des raisons politiques éventuellement, mais ils ne les envoyaient pas se faire tuer à la guerre.

Alain Connes : D'accord, lui parlait des Etats-Unis, c'est sûr, oui.

Jean-Pierre Serre : Et Grothendieck, lui, anarchiste d'origine, lui, son point-de-vue était "Si n'importe quelle raison peut marcher pour ne pas aller dans l'armée, alors on la prend, c'était ça son... Mais ça n'a pas été une discussion sérieuse. Il a écrit ça à Cartan et on n'en a plus parlé après.

Alain Connes : Il y a un certain nombre de lettres, effectivement, qui sont un peu restées sans réponse.

Jean-Pierre Serre : Et puis c'est la guerre d'Algérie, ça, oui, c'est la guerre d'Algérie.

Alain Connes : Oui, c'était en 61. Un certain nombre de lettres dont on voit qu'il n'a pas répondu et il y avait une lettre sur laquelle j'étais très très curieux de savoir si tu l'avais vue après ou quoi ?... Et c'est quand Dwork a démontré la rationalité des fonctions ζ. Ca, je suis très curieux de savoir comment il a réagi.

Jean-Pierre Serre : Oh ben, il s'en foutait.

Alain Connes : Ah il s'en foutait ? Alors que...

Jean-Pierre Serre : C'était en dehors de son truc.

Alain Connes : En dehors de son schéma, il s'en foutait, c'est incroyable, parce que la démonstration de Dwork est magnifique.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, je l'avais exposée à Bourbaki, je m'étais régalé.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Elle était magnifique mais, euh, par exemple, j'avais essayé de regarder ce que ça donnait pour la cohomologie avec des coefficients, et je ne me rappelle plus mais il y avait des difficultés quand-même, avec un groupe qui opère... Non mais de toute façon, il avait raison de son point de vue : il la voulait d'une certaine façon,...

Alain Connes : Il la voulait d'une certaine façon, il ne voulait pas se détourner de son objectif.

Jean-Pierre Serre : Non, c'était un accident, un accident, quoi, on avait démontré ça, quoi, un peu plus tôt qu'on aurait dû.

Alain Connes : Bon, mais est-ce qu'il n'y a pas là-dedans, plus ou moins, ...

Jean-Pierre Serre : *(l'interrompant)* : Tu vois, j'ai eu quand-même, je te raconte, vers euh... Quand est-ce que j'ai réfléchi à Riemann-Roch, moi ?... C'est vers...

Alain Connes : Ah oui, mais tu le dis ça, dans l'interview de Colliot-Thélène, c'est toi le premier qui as eu l'idée que c'était une caractéristique d'Euler.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'était... *(petit rire modeste)*

Alain Connes : Et ça, c'est très important en fait. C'est très important, mais tu l'as jamais publié !

Jean-Pierre Serre : Non, c'était pas la peine parce que, quand j'ai correspondu avec Kodaira-Spencer, j'ai vu qu'ils avaient eu la même idée mais ils n'avaient pas mon théorème de dualité. Alors ils ont publié leur truc et moi, j'ai publié le théorème de dualité.

Alain Connes : Bon, donc ça va, quoi, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui, c'était... Mais alors, quand j'ai réfléchi à ça, à Riemann-Roch, ce qui m'a amusé, c'était que j'ai essayé de le démontrer pour les courbes, tu vois...

Alain Connes : Oui, ben là, c'était juste H^1 et H^0 donc...

Jean-Pierre Serre : Eh, tu parles, oui ! Oui, oui, d'accord, mais alors, j'essayais là de démontrer quelque chose, qui était connu depuis environ 100 ans, quoi, c'est ça. Mais j'avais une idée des démonstrations qu'on pouvait faire, mais je les voulais pas.

Alain Connes : Non, mais excuse-moi, mais excuse-moi, c'est-à-dire quand tu dis que tu faisais ça, tu faisais ça avec des faisceaux Zariski, etc., ou... ?

Jean-Pierre Serre : C'est ça.

Alain Connes : C'est ça, c'est ça, hein, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Euh... Non, à l'époque, attends, à l'époque, est-ce que j'étais Zariski ou est-ce que j'étais, non, j'étais analytique-complexe à l'époque.

Alain Connes : Ah, tu étais analytique-complexe, c'était avant, euh...

Jean-Pierre Serre : C'était avant GAGA. J'ai fait FAC et GAGA en même temps. Non c'était analytique-complexe et, simplement, je voulais pas les démonstrations existantes. Je les voulais pas parce que, quand j'ai trouvé celle que je voulais, celle que je voulais, tu dois la connaître, c'est... tu as un diviseur d et ce que tu montres, c'est que si tu le sais pour d, alors tu le sais pour $d + p$ où p est un point. Or comme tu peux te balader, comme ça, et puis, quand $d = 0$, c'est...

Alain Connes : Une espèce de récurrence, quoi, d'accord.

Jean-Pierre Serre : Alors, je me vois encore à ma table de travail, quand j'ai trouvé ça, je l'ai écrit quelque part, je sais que 3 minutes après, j'avais la dimension 2, la théorie des surfaces.

Alain Connes : Paf ! Donc tu savais déjà que c'était une caractéristique d'Euler.

Jean-Pierre Serre : Ah, oui, oui, oui, oui, oui. Je savais qu'avec ce style-là...

(Claquement de langue d'admiration d'Alain Connes)

Alain Connes : D'accord, d'accord, parce que comment il fallait l'énoncer ?...

Jean-Pierre Serre : Et tu vois bien comment il fallait faire ? ! Il fallait que je montre que si j'ai un diviseur sur la surface, et si je lui ajoute quelque-chose, et si je l'avais pour le diviseur, je l'ai encore pour...

Alain Connes : Ca continue à être vrai...

Jean-Pierre Serre : Et grâce au Riemann-Roch précédent, un p'tit peu plus, non non, ça m'a pris 3 minutes, je crois. Dimension 3, je pouvais pas parce qu'il y avait des choses à démontrer que...

ALAIN CONNES : Oui, bien sûr...

(Rires d'Alain Connes)

JEAN-PIERRE SERRE : Mais typiquement, ça nous arrive souvent ça, on n'est pas content d'une démonstration parce qu'on en veut une qui fasse autre chose.

ALAIN CONNES : Bien sûr, bien sûr.

JEAN-PIERRE SERRE : Et celle-là, c'était formidable.

ALAIN CONNES : Et ça, c'était en quelle année, que tu as fait ça, en gros ? 53 ?

JEAN-PIERRE SERRE : Oh, c'est en gros 53.

ALAIN CONNES : 53 ?

JEAN-PIERRE SERRE : Oh à peu près, oui. Ma thèse est de 51. Je me suis arrêté de faire des groupes d'homotopie à peu près tout de suite. En 52, c'était le séminaire Cartan des variétés de Stein, et très rapidement, j'ai été élevé en taupe, comme toi d'ailleurs, avec l'idée que c'est la géométrie projective qui est bonne. La géométrie affine, c'est de la blague.

ALAIN CONNES : C'est sûr.

JEAN-PIERRE SERRE : Or Cartan, c'est de la géométrie affine, tu vois. Les variétés de Stein, ce sont des machins ouverts, c'est pas... Et les trucs compacts ont quand-même un charme...

ALAIN CONNES : D'ailleurs, votre correspondance commence par une grosse bêtise de Grothendieck qui dit que le quotient d'une variété de Stein par un groupe...

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, non, mais je pense que ça, c'est une faute de frappe de Grothendieck, il a oublié de mettre fini.

Alain Connes : Fini, bien sûr, oui, je suis d'accord.

Jean-Pierre Serre : Après coup, je m'en suis rendu compte, c'était sûrement ça qu'il voulait dire. Mais il ne le corrige pas dans ça. Peut-être qu'il le croyait... Mais en tout cas, c'est pour ça que j'ai quitté le point de vue Cartan. C'est parce que pour moi, c'est la taupe qui m'a fait.

Alain Connes : Mais il y a un point essentiel dans ce que tu as fait, c'est l'utilisation de la topologie de Zariski, des faisceaux pour la topologie de Zariski.

Jean-Pierre Serre : Ca c'est juste après, et ça, c'est... *(se reprenant)* Bon mais ça, c'est parler de moi, c'est pas parler de Grothendieck.

Alain Connes : Mais ça ne fait rien parce que, si tu veux, c'est complètement clair, en fait, quand on regarde avec une certaine distance, moi en tant que non spécialiste du tout, c'est, si tu veux, l'influence en fait, de Leray...

Jean-Pierre Serre : Oh oui, sur les premières années de Grothendieck, oui, oui, j'ai... oui, je l'ai influencé énormément, ça c'est clair.

Alain Connes : Tu l'as influencé énormément, donc...

Jean-Pierre Serre : Non, ce qui s'est passé, c'est que... sur l'espace projectif, sur les faisceaux sur l'espace projectif complexe, tu vois, j'ai pu voir qu'il y avait des modules, parce que j'ai pris les sections.

Alain Connes : Non mais, j'ai bien vu la preuve de ton article sur GAGA, justement.

Jean-Pierre Serre : Eh bien, c'était dans un séminaire Cartan, c'était dans un séminaire je ne sais plus, en tout cas, j'ai fabriqué dans ce cas-là, et j'ai vu un dictionnaire avec les modules, alors je me suis dit “bon après, c'est pas possible, ça va marcher sur un corps quelconque.” Et alors, c'est comme ça que je suis passé à FAC[3] qui s'est écrit alors, incroyable...

3. Faisceaux algébriques cohérents

ALAIN CONNES : Oui, ça tu le dis plusieurs fois, que tu n'as pas eu à réfléchir.

(Rires)

JEAN-PIERRE SERRE : *(faisant le geste d'un papier interminable sortant d'une machine à écrire)* La machine a tapé, comme ça, un article de 100 pages, comme s'il existait déjà.

ALAIN CONNES : Oui, alors donc là, justement, on va aborder une période qui est beaucoup plus délicate si tu veux, et qui est la fin de la correspondance, c'est-à-dire qu'il y a une très grande interruption dans la correspondance.

JEAN-PIERRE SERRE : Oh, ben y en a plus, au fond, de correspondance.

ALAIN CONNES : Ah il n'y en a plus. Quand-même, il y a la lettre que tu lui as écrite, et que je trouve très très pertinente si tu veux, quand tu as reçu *Récoltes et Semailles*. *(On entend un gros soupir de Jean-Pierre Serre.)*. Donc quand tu as reçu *Récoltes et Semailles*, c'était en 86, je pense, hein ? Là, tu lui as écrit, et si tu veux, je m'en voudrais de mal te citer mais c'est très important...

JEAN-PIERRE SERRE : Tu as fait des photocopies !

ALAIN CONNES : Ah oui, bien sûr. Alors, je te lis, hein, pour être sûr, donc : *"J'ai bien reçu le fascicule de Récoltes et semailles que tu m'as fait envoyer. Merci beaucoup. Il me manque encore l'avant-dernier fascicule, dont j'ai seulement quelques pages isolées."*

JEAN-PIERRE SERRE : *(riant)* il manque quelques centaines de pages, c'est tout !

ALAIN CONNES : Oui, c'est ça. *"Une chose me frappe. Dans les textes que j'ai pu voir, tu t'étonnes et tu t'indignes de ce que tes anciens élèves n'aient pas continué l'œuvre que tu avais entreprise et menée en grande partie à bien. Mais tu ne te poses pas la question la plus évidente, celle à laquelle tout lecteur s'attend à ce que tu répondes : "Pourquoi toi, tu as abandonné l'œuvre en question ?"."*

Jean-Pierre Serre : Bien sûr, c'est évident comme question, et il passe 600 pages à ne pas y répondre.

Alain Connes : A ne pas y répondre, *(s'exclamant)* mais, ce qui est le plus intéressant, c'est que tu as une idée...

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Oh oui, j'ai une idée, je la connais, je suis encore d'accord avec cette idée.

Alain Connes : Alors, tu dis : *"J'ai l'impression que malgré ton énergie bien connue..."* Alors c'est vrai que...

Jean-Pierre Serre : Oui, l'énergie, alors ça c'est vrai, il aurait fallu le connaître : physiquement et intellectuellement, c'était pareil, c'était phénom..., il pouvait travailler presque 24 heures, c'était extraordinaire. Il était une force, je connais personne qui avait autant de force que lui... Même, il y a des gens, je connais des gens qui sont intellectuellement très forts comme Thompson par exemple, Bombieri, sont très forts, mais Grothendieck, c'était une force, euh... animale !

Alain Connes : Tu dis, alors : *"Tu étais tout simplement fatigué (rires), quand-même, de l'énorme travail que tu avais entrepris. D'autant plus, qu'il y avait aussi les SGA."* Alors je rappelle que les SGA, bon, SGA3, je crois que c'est les groupes algébriques, y avait SGA4, c'étaient les topos, bon et alors tu dis : *"Je me souviens notamment de l'état plutôt désastreux de SGA5"*.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Oui, parce que alors, il était vraiment désastreux tu vois, il avait été ronéotypé par l'IHES mais il y avait trop de commutativité à vérifier, et Illusie qui était pourtant, Illusie qui était sérieux, sur un théorème vraiment décisif, avait écrit : "j'ai été incapable de vérifier"...

Alain Connes : Ouah, oui donc ça, c'était terrible.

Jean-Pierre Serre : Oui, "j'ai été incapable de vérifier..."

Alain Connes : Tu dis : *"Ils en étaient réduits à affirmer sans preuve la commutativité, au signe près en étant optimistes, et ces commutativités étaient essentielles pour la suite."*

Jean-Pierre Serre : *(s'exclamant)* Mais oui, c'était... Alors, évidemment, vu les résultats auxquels elle est appliquée, le signe, y avait pas de problème parce que... ils auraient trouvé des nombres négatifs pour les nombres de points, ben tu vois, alors évidemment !

(Eclats de rire)

Alain Connes : Fallait forcément que...

Jean-Pierre Serre : Non mais alors c'est précieux d'avoir des trucs comme ça, c'est précieux.

Alain Connes : Ca veut dire qu'on peut détecter une erreur.

Jean-Pierre Serre : Ca veut dire qu'on peut détecter une erreur, mais ça ne veut pas dire qu'on a une démonstration.

Alain Connes : Non, ça ne veut pas dire qu'on a une démonstration.

Jean-Pierre Serre : Non, Illusie avait écrit carrément dans le texte : "le rédacteur s'excuse de n'avoir pas été capable de vérifier la commutativité du diagramme".

Alain Connes : Alors mais alors là, ce que tu dis et qui est vraiment, vraiment très très intéressant, tu dis quelque chose, je pense que je devrais lire la suite parce que c'est, je vais m'arrêter au milieu, tu dis : *"on peut se demander par exemple s'il n'y a pas une explication plus profonde...*

Jean-Pierre Serre : Oui.

Alain Connes : *"...que la simple fatigue d'avoir à porter à bout de bras tant de milliers de pages. Tu décris quelque part ton approche des maths, où l'on n'attaque pas un problème de front, mais où on l'enveloppe et le dissout* *dans une marée montante de théorie générale. Très bien. C'est ta façon de travailler et ce que tu as fait montre que ça marche effectivement pour les EVT*[4] *et la géométrie algébrique."* Et après tu dis, et je vais te laisser parler : *"C'est beaucoup moins clair pour la théorie des nombres"*.

Jean-Pierre Serre : Oui, je pensais à par exemple, je ne sais pas si j'y pensais à ce moment-là, mais justement à la théorie de Langlands, à ce genre de choses.

Alain Connes : Tu pensais aux formes modulaires.

Jean-Pierre Serre : Aux formes modulaires, il n'y avait rien compris aux formes modulaires. Et il avait... Il était extraordinaire d'incompréhension quelquefois, parce que quand ça ne rentrait pas dans son cadre...

Alain Connes : D'accord, je comprends.

Jean-Pierre Serre : Je lui racontais des formes modulaires, et il disait : "Mais tes formes modulaires, ça n'a aucun sens !", parce que tu vois la variété des modules, elle est affine et donc, à l'infini, tu mets des conditions artificielles, alors...

Alain Connes : Alors que c'est une variété algébrique, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Alors que moi, j'avais 100 ans ou 150 ans de formes modulaires derrière moi, où je savais que c'était bon, cette théorie, quand on la voit, on résiste pas quoi. Eh bien lui, si, alors là ! "Aucun sens... Des formules !..." Il pouvait pas supporter les formules.

Alain Connes : Donc ce que tu dis là, en fait, tu dis plus loin qu'en fait en théorie des nombres justement, toutes les mathématiques peuvent rentrer et...

Jean-Pierre Serre : Et qu'on ne sait pas... Et qu'on ne sait pas comment ça marche.

Alain Connes : On ne sait pas comment ça va marcher, on ne sait pas du

4. Espaces vectoriels topologiques

tout où...

Jean-Pierre Serre : Ca, c'est passionnant en théorie des nombres.

Alain Connes : Exactement, exactement. Mais alors maintenant, ce que je voulais avoir, c'était... Donc là, on voit ta réaction, j'ai lu la...

Jean-Pierre Serre : En tout cas, tu peux constater que je suis d'accord avec tout ce que tu cites. Autrement dit, je n'ai pas changé d'avis depuis.

Alain Connes : Non, non, tu n'as pas changé d'avis, tu n'as pas changé d'avis. C'est important. Il y a la réponse de Grothendieck, elle est dans la correspondance, je ne vais pas la lire.

Jean-Pierre Serre : Non il y a peut-être des choses où j'ai dit peut-être des bêtises dans la correspondance, c'est possible mais...

Alain Connes : Non.

Jean-Pierre Serre : Mais probablement je les ai corrigées dans les notes, parce qu'il y a des notes. Donc si j'ai dit quelque chose que je trouvais idiot, je...

Alain Connes : Non, non, je ne pense pas. Je pense si tu veux, je pense que, moi, ce que j'ai essayé de faire, c'est de me glisser dans la peau de Grothendieck pour comprendre, essayer de comprendre comment il avait pu, comment dire, euh, *(soupir)*, si tu veux... Je ne dis pas qu'il est devenu paranoïaque, parce que je n'aime pas le mot du tout, je pense qu'il y a un mot pour ça, c'est un mot à la mode, c'est obsidional mais si tu veux...

Jean-Pierre Serre : Pour te donner ma comparaison à moi...

Alain Connes : Oui, vas-y.

Jean-Pierre Serre : Grothendieck me faisait penser à une centrale nucléaire. *(Rire d'Alain Connes)*. Et les centrales nucléaires, il faut les refroidir, il faut les protéger, etc. Et tant qu'il a été dans le monde mathématique normal, nous lui servions au fond de protection. Dès qu'il a été seul, la centrale a explosé. Bon c'est... C'est pas très gentil comme comparaison mais...

Alain Connes : Peu importe, peu importe. Ce qu'il y a, c'est, le texte qu'il a écrit.

Jean-Pierre Serre : *Les* textes, il a écrit des milliers de textes, des dizaines de milliers de pages.

Alain Connes : Il a écrit des dizaines de milliers de pages. Si tu veux en fait...

Jean-Pierre Serre : Tu parles de quel texte, alors ?

Alain Connes : Je parle de plusieurs textes, en fait, j'ai compris en... J'avais dû faire un exposé au Collège de France sur... on m'avait demandé de faire un exposé sur les réfugiés, bon. Il y avait un colloque sur les réfugiés, un colloque de rentrée.

Jean-Pierre Serre : *(étonné)* : Sur les réfugiés ?

Alain Connes : Sur les réfugiés. Attends, c'était un truc général, donc, évidemment, bon, j'avais dit d'accord, et puis tu sais comment c'est quand c'est un mois avant, tu commences à te dire "sur quoi je vais parler..."

Jean-Pierre Serre : T'as quelque chose à dire sur les réfugiés, toi ?

Alain Connes : Et puis, bon, j'étais dans des circonstances très spéciales, parce que je m'occupais de ma mère qui était très malade, et la nuit, je lisais, et je lisais la Clef des songes, qui est un des textes de Grothendieck.

Jean-Pierre Serre : Ah celui-là, je ne connais pas la Clef des songes.

Alain Connes : Tu ne connais pas la Clef des songes. Et je suis tombé...

Jean-Pierre Serre : Ah si, j'ai dû regarder quand-même, si.

Alain Connes : Tu as peut-être regardé quoi...

Jean-Pierre Serre : Parce que j'étais impressionné par certains rêves de Grothendieck qui sont d'un détail de description, je me rappelle, il y a eu une princesse, quelque chose comme ça, avec des décorations...

Alain Connes : Des détails absolument incroyables.

Jean-Pierre Serre : Je sais que je n'ai jamais de rêve avec des précisions, mon crâne ne fabrique pas, c'est une question de puissance du crâne, tu vois...

Alain Connes : D'accord.

Jean-Pierre Serre : De fabriquer mentalement avec tes petits neurones, que tu fabriques des décorations d'une dame. Et la puissance de son crâne se voyait même dans ses rêves.

Alain Connes : Absolument. Et alors je suis tombé par hasard en lisant ce texte sur un passage qui est absolument magnifique et qui est le passage sur son père, ce qui est arrivé à son père, donc, qui était un anarchiste, quand il était en prison, parce qu'il est resté, je crois, plus de 10 ans en prison en Russie et ce qui lui est arrivé à un moment donné, et qui a été transmis à Grothendieck par sa mère. Et Grothendieck le décrit d'une manière incroyablement précise comme tu dis.

Jean-Pierre Serre : Mais c'était dans un rêve alors...

Alain Connes : Non ! Non, non, c'était dans la réalité. Ca, c'est dans la réalité. Il décrit ce qui est arrivé à son père, qui était : on avait promis à son père qu'il serait libéré, je crois, au bout de 10 ans, bon, il comptait les jours, en fait, etc. Et au moment où la date est arrivée, il n'a pas été libéré. Il a commencé une grève de la faim. Et au bout de je sais pas, peut-être 3 semaines ou un mois de grève de la faim, là, il a eu une illumination... mystique.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est pas surprenant, ça.

Alain Connes : C'est pas très surprenant, mais, si tu veux, la manière dont... et dans cette illumination, il pardonnait à ses geôliers enfin, etc. Et la manière dont c'est écrit, donc, si tu veux que ça a fait que, la première fois que je l'ai lu à ma femme, avant d'en parler au Collège, j'ai été obligé de m'arrêter dans la lecture tellement c'était émouvant. Donc en fait, bon, je l'ai lu au Collège, mais c'est à cette occasion-là si tu veux que je me suis aperçu du fait qu'au milieu de 36 choses différentes, il y avait dans ses textes, de temps en temps, des choses extraordinaires.

Jean-Pierre Serre : Oui, ça, je pense qu'effectivement, c'est vrai qu'il y a, je suis un peu... je ne trouve pas d'adjectif, j'ai commencé par penser méprisant mais c'est pas tout à fait le cas, sceptique en tout cas, sur les choses de Grothendieck des 30 dernières années, mais quand-même, c'est clair qu'il y a des choses dedans.

Alain Connes : Il y a des choses.

Jean-Pierre Serre : *(soupirant)* Son crâne n'a jamais dégénéré. Non, c'est pas comparable à ceux de nos amis dont...

Alain Connes : ...dont nous ne parlerons pas.

Jean-Pierre Serre : ...dont nous ne parlerons pas, et qui n'ayant même pas 90 ans...

Alain Connes : Non, on n'en parle pas.

(Rires)

Jean-Pierre Serre : N'en parlons pas, son crâne n'a jamais dégénéré, non, il a plutôt explosé qu'autre chose.

Alain Connes : Tout à fait, tout à fait.

Jean-Pierre Serre : Et toujours intelligemment.

Alain Connes : Toujours intelligemment et, si tu veux, ce que ce texte m'a appris, ce texte que j'avais découvert, ce qu'il m'a appris, c'est qu'en fait, son père n'avait jamais réussi à faire ce qu'il voulait faire. Son père voulait être écrivain.

Jean-Pierre Serre : Ah bon.

Alain Connes : Son père voulait écrire, et il n'avait jamais réussi à le faire, parce qu'il était tout le temps par monts et par vaux, quoi, etc.

Jean-Pierre Serre : Faut pas être anarchiste et écrire à la fois, c'est un peu...

Alain Connes : C'est vrai. Mais donc en fait, Grothendieck apparemment, au bout d'un moment, a décidé d'écrire.

Jean-Pierre Serre : Ah ça, pour écrire, il a écrit.

Alain Connes : Pour écrire, il a écrit, et ce que personne ne sait, qu'on a trouvé dans sa demeure quand il est mort, on a trouvé un nombre incroyable de pages, qui sont pour le moment inaccessibles.

Jean-Pierre Serre : Enfin, non, elles ne sont pas inaccessibles.

Alain Connes : Si, si, elles sont gardées par un avocat parce que les enfants ne sont pas d'accord.

Jean-Pierre Serre : Ah oui, mais ça sera accessible, un jour, ça sera accessible. Ils ne les ont pas perdues quoi, elles ne sont pas perdues.

Alain Connes : Exactement mais apparemment, et alors ça, je trouve ça tout à fait incroyable, apparemment, le sujet principal, tu sais que bon, Grothendieck a quand-même une évolution mystique, hein, je veux dire, hein, c'est clair.

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est un peu bizarre, oui.

Alain Connes : Un peu bizarre, mystique, mais apparemment, le sujet principal de ces milliers de pages, c'est, euh, en fait, c'est le problème du Mal. C'est à dire que, en fait, il s'est aperçu en étant mystique, en étant religieux d'une certaine manière, hein bon, qu'en fait, il y avait un problème fondamental, et il s'est attaqué à ce problème-là. On ne sait pas ce qu'il y a dedans.

Jean-Pierre Serre : J'appelle pas ça des problèmes, ces choses-là. Les littéraires ont tendance à appeler ça Le problème, avec l'idée que surtout, on n'essaye pas de les résoudre, mais on en parle...

(Rires)

Alain Connes : Oui, mais lui, alors lui, il a essayé justement. Donc moi je suis vraiment quand-même très curieux de... alors, je ne sais pas si ce sera possible de, bien sûr, apparemment, c'est au moins 30000 pages...

Jean-Pierre Serre : 30000 ?

Alain Connes : 30000 pages. Si ce n'est plus.

Jean-Pierre Serre : 30000, oh c'est possible avec Grothendieck...

Alain Connes : Bien classées.

Jean-Pierre Serre : ...parce qu'il écrivait à une allure, vraiment incroyable. Et... elles sont tapées à la machine ou elles sont écrites, tu ne sais pas ?

Alain Connes : Ca, je ne sais pas, mais maintenant avec l'intelligence artificielle, on pourra.

Jean-Pierre Serre : En même temps, il tapait très très vite.

Alain Connes : Oui, on pourra maintenant, non, je crois que c'est manuscrit.

Jean-Pierre Serre : Parce que son écriture n'était pas terrible, hein ?

Alain Connes : Mais on mettra au point un petit logiciel qui transformera ça en Latex, donc ça c'est pas un problème. Ca, c'est pas un problème, non, c'est pas un problème.

Jean-Pierre Serre : On va pas s'occuper de ça.

Alain Connes : Non, on va pas s'occuper de ça mais alors maintenant, je voulais te signaler un autre fait, dont je ne sais pas si tu le connais. Bien sûr, tu as connu sûrement Paulo Ribenboim.

Jean-Pierre Serre : Ribenboim. Ah oui, oui, charmant, charmant !

Alain Connes : Tu vois qui c'est ? ! Charmant, charmante personne.

Jean-Pierre Serre : Attends, il est d'Afrique du Sud ou il est...

Alain Connes : Non, il est du Brésil.

Jean-Pierre Serre : Ah du Brésil.

Alain Connes : Du Brésil, et puis il alterne entre Kingston, le Brésil, et puis Paris aussi.

Jean-Pierre Serre : Il fait de la théorie des nombres.

Alain Connes : Oui, et il fait de la théorie des nombres. Alors, je l'ai vu récemment, je l'ai vu récemment, et il m'a appris quelque chose.

Jean-Pierre Serre : Il est presque aveugle, je crois ?...

Alain Connes : Oui, malheureusement, il est presque aveugle, mais si tu veux, il utilise les moyens informatiques pour y voir, c'est-à-dire que bien qu'étant presque aveugle, il a une machine qui amplifie considérablement les caractères,

Jean-Pierre Serre : Ah !

Alain Connes : Et donc en fait il est encore capable de...

Jean-Pierre Serre : De taper à la machine ?

Alain Connes : Non, pas de voir, mais de lire ce qu'on lui envoie, etc. Et alors, j'ai discuté avec lui, et il m'a appris quelque chose de très intéressant. Il m'a appris qu'en fait, Grothendieck était venu dans les années 2000 secrètement à Paris, tu n'étais pas au courant ?

Jean-Pierre Serre : Ah bon ?

Alain Connes : Tu ne le savais pas, ça ?

Jean-Pierre Serre : Mais, euh, faire quoi ?

(Rires)

Alain Connes : Et alors, il était venu parce qu'il voulait absolument encore faire une tentative pour faire publier *Récoltes et Semailles*. Donc apparemment, il est venu, il est resté dans l'appartement de Paulo Ribenboim, qui a un appartement à Paris.

Jean-Pierre Serre : Ah.

Alain Connes : Et il a voulu...

Jean-Pierre Serre : Avec Odile Jacob, peut-être ?

Alain Connes : Non, je ne pense pas. Non, elle me l'aurait dit.

Jean-Pierre Serre : Parce que initialement, il avait été question d'Odile Jacob.

Alain Connes : Bien sûr, mais Odile m'a raconté ce qui s'était passé, si tu veux.

Jean-Pierre Serre : J'avais été, on m'avait contacté, mais il y a longtemps de ça, bien avant 2000, sur la publication de ça, et finalement, j'avais hésité, puis j'avais donné un avis défavorable parce que, il dit vraiment des choses méchantes sur Deligne, Illusie, et vraiment, pour ces gens-là, qui sont des gens bien, de voir ça écrit, publié, et auquel ils ne peuvent pas répondre, tu vois, c'est, c'était vraiment désagréable.

Alain Connes : De ce point de vue-là, c'est très désagréable.

Jean-Pierre Serre : Pour Deligne, en particulier.

Alain Connes : C'est sûr. Non, non, ça, c'est évident que...

Jean-Pierre Serre : Je crois que c'est peut-être bien la SMF aussi qui voulait...

Alain Connes : Ah bon ?!

Jean-Pierre Serre : ...qui s'était posé la question. Peut-être que c'était la SMF qui m'avait contacté.

Alain Connes : D'accord, d'accord, oui.

Jean-Pierre Serre : Il avait dû... Mais j'avais hésité parce que c'est intéressant, il n'y a pas de doute.

Alain Connes : Il y a quand-même beaucoup de choses intéressantes. C'est-à-dire tout le côté polémique, bon, ben, si on pouvait le laisser de côté, le reste est intéressant...

Jean-Pierre Serre : Quelle longueur ça a, je ne me souviens plus...

Alain Connes : C'est pas si long que ça, une fois que c'est tapé, une fois que c'est tapé, ça fait à peu près...

Jean-Pierre Serre : 600 pages ?

Alain Connes : Oui, c'est ça, ça fait à peu près entre 500 et 600 pages. Donc, c'est pas...

Jean-Pierre Serre : Oui, ça fait un livre.

Alain Connes : Oui, c'est publiable. La question, et ça, il le dit très bien au début, c'est qu'il a essayé d'écrire quelque-chose qui appâte le lecteur, etc, ça, il n'a pas réussi, je veux dire le lecteur non mathématicien.

Jean-Pierre Serre : Non, en tout cas, un jour, ce sera publié.

Alain Connes : Oui, je crois que ça va même être publié, il me semble que... Je sais pas si c'est pas Hermann qui va... En tout cas, j'ai entendu ça.

Jean-Pierre Serre : Bon.

Alain Connes : J'ai entendu ça, j'ai entendu ça récemment.

Jean-Pierre Serre : Bon, écoute, on ne m'a pas demandé.

Alain Connes : Non, non, bon, mais enfin, bon, je veux dire, il vaut mieux se tenir à l'écart de ça. Mais si tu veux, c'est vrai que moi, j'ai quand-même, j'ai quand-même regretté que les passages vraiment intéressants, parce qu'il y a des passages intéressants, soient inaccessibles.

Jean-Pierre Serre : Alors, c'est quand-même difficile d'extraire, alors, ça m'est arrivé, j'ai extrait 3 pages, sur les motifs, tu sais, j'ai écrit quelque chose sur les motifs, et j'ai recopié les 3 à 4 pages de lui, splendides !

Alain Connes : Oui, bien sûr.

Jean-Pierre Serre : Splendides, et où il n'engueule personne, il ne dit pas de mal de quelqu'un, et j'ai eu son autorisation.

Alain Connes : Tu as eu son autorisation ?

Jean-Pierre Serre : A l'époque.

Alain Connes : C'était pas trivial d'avoir son autorisation. Et tu sais ce qui s'est produit, personne ne le sait ça, je ne sais pas si je devrais en parler mais bon.

Jean-Pierre Serre : Si, tu peux en parler.

ALAIN CONNES : Ce qui s'est produit, au 50ème anniversaire de l'IHES, c'était un peu avant, c'était au mois de septembre.

JEAN-PIERRE SERRE : C'était quand, ça, le cinquantième anniversaire de l'IHES ?

ALAIN CONNES : ben, c'était il y a 10 ans, donc, c'était en 2008, l'année de la mort de Cartan, il y a 10 ans. Et au mois de septembre, Grothendieck a écrit à la bibliothécaire de l'IHES pour lui demander des livres.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah oui, j'avais entendu parler de ça.

ALAIN CONNES : Tu es au courant de ça ?

JEAN-PIERRE SERRE : Non, je ne suis pas au courant, mais j'avais entendu parler de quelque chose comme ça. Et alors, on lui a envoyé ces livres, ou pas ?

ALAIN CONNES : Non non, il s'est fait, malheureusement, ça a été malencontreux, que la bibliothécaire était en vacances à ce moment-là. Donc, la lettre de Grothendieck n'a pas eu de réponse, bon, n'a pas eu de réponse immédiate.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais enfin, elle va rentrer de vacances au bout d'un certain temps quand-même.

ALAIN CONNES : Oui, bon, mais il s'est un peu impatienté et donc il a écrit au directeur.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, d'accord, en effet, pourquoi pas ?

ALAIN CONNES : Pourquoi pas ? Il se fait que le directeur était absent à ce moment-là...

JEAN-PIERRE SERRE : Aïe !

ALAIN CONNES : Et qu'à ce moment-là, la personne qui a répondu à Grothendieck n'était pas le directeur, enfin, si tu veux, c'était... Alors là, il a commencé à y avoir un embrouillaminis parce que finalement la réponse était un peu une réponse un peu générique, si tu veux, en disant que bon, etc. Et là, le ton est monté.

Jean-Pierre Serre : En disant que c'était pas possible, quoi.

Alain Connes : Pas en disant que c'était pas possible, mais en disant que, pfff, peut-être y aurait des délais, enfin, etc. Enfin...

Jean-Pierre Serre : Bon, enfin, c'était pas ce qu'il voulait, quoi.

Alain Connes : Enfin, c'était pas ce qu'il voulait, donc le ton est monté. Et Grothendieck a écrit une lettre beaucoup plus virulente comme il était capable de le faire...

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Oui, plus énergique, oui, déjà qu'il est énergique par nature.

Alain Connes : Après, bon, le directeur était rentré et le directeur a essayé de répondre.

Jean-Pierre Serre : Qui c'était le directeur à l'époque ?

Alain Connes : C'était Jean-Pierre Bourguignon, qui était un excellent directeur.

Jean-Pierre Serre : Bourguignon, qui sait arranger les choses.

Alain Connes : Oui, oui, bien sûr, alors il a essayé d'arranger les choses, en expliquant que bon, il était absent, etc. Mais le ton est monté. Et Grothendieck a en fait téléphoné à Lafforgue, à Laurent Lafforgue, chez lui. Alors Lafforgue est un admirateur de Grothendieck absolument inconditionnel comme tu sais, il a sa photo sur son bureau, etc. Et un jour, Laurent Lafforgue était rentré chez lui, le téléphone sonne et il entend une voix !

Jean-Pierre Serre : Mais, qu'il ne connaissait pas... !

Alain Connes : Mais bien sûr que non ! Et alors là...

(Rires)

Jean-Pierre Serre : Ah, il a cru que c'était un canular ?

Alain Connes : Non, non, non, non, non, il était absolument abasourdi parce qu'il entend, au téléphone : "C'est Alexandre Grothendieck." Donc évidemment, et alors là...

(Rires)

Alain Connes : ... ce que Grothendieck lui a demandé, il lui a demandé de transmettre à tous les membres du Conseil Scientifique, à l'époque, je faisais partie du Conseil Scientifique, une copie de ses lettres, et de l'échange qui avait eu lieu. Et c'est là que j'ai appris que Grothendieck était réfugié, je savais pas où il était, je n'avais aucune idée d'où il était...

Jean-Pierre Serre : Il était déjà dans les Pyrénées, à ce moment-là, oui ?

Alain Connes : Bien sûr, il était dans les Pyrénées depuis 90, donc là, on était en 2008, hein, on était en 2008 déjà. Depuis, je pense 91 ou 92, il était déjà dans les Pyrénées.

Jean-Pierre Serre : Il était déjà à Lasserre, ou un endroit comme ça ?

Alain Connes : Peut-être, écoute, tu vas rigoler : moi, j'ai pensé que c'était pas un hasard...

(Rires)

Alain Connes : Si l'endroit où Grothendieck s'était réfugié...

Jean-Pierre Serre : Peut-être, en tout cas, c'est joli...

Alain Connes : L'endroit s'appelait Lasserre. Parce que, je veux dire dans *Récoltes et Semailles*, il y a tout un développement, sur le yin et le yang, etc., et sur l'idée que Grothendieck, justement, a un côté féminin dans son approche des mathématiques, qui est pas complètement dénuée de sens, hein, je veux dire, et alors, le fait qu'il soit réfugié...

Jean-Pierre Serre : Oui, c'est ça qui est curieux, effectivement, ça peut intéresser qu'il considérait qu'il avait un esprit féminin en maths, et que moi, j'avais un esprit masculin. Alors que moi, j'ai jamais connu quelqu'un d'aussi masculin que lui, quoi, c'était...

Alain Connes : D'aussi, tu veux dire...

Jean-Pierre Serre : D'aussi, ah, c'était incroyable !

Alain Connes : Ah ! Et dans la correspondance, c'est clair, aussi, quand-même, germanique !

Jean-Pierre Serre : Il se considérait lui comme à caractère féminin, et moi comme au contraire, à caractère masculin.

Alain Connes : Tout à fait. Pour lui, toi, tu étais le prototype du caractère masculin.

Jean-Pierre Serre : Oui, oui.

Alain Connes : Bon mais tout ça, c'est expliqué en grand détail dans *Récoltes et Semailles*, moi, ça m'a beaucoup amusé.

Jean-Pierre Serre : Ca, c'est rigolo quand même, mais non, mais ça, il le prenait au sérieux, ça.

Alain Connes : Ah, il le prenait au sérieux.

Jean-Pierre Serre : Au contraire, il le prenait au sérieux. D'ailleurs, c'est une caractéristique de Grothendieck, il prenait *tout* au sérieux.

Alain Connes : Et d'ailleurs, c'est une question que je voulais te poser : que finalement, ce qui ressort beaucoup de ses écrits, c'est qu'on n'a pas l'impression qu'il a un sens de l'humour.

Jean-Pierre Serre : Non ! Non, non, non, il a un sens de... un espèce de devoir intellectuel, de pousser les idées jusqu'au maximum, de les approfondir, c'était une grande honnêteté intellectuelle de Grothendieck.

Alain Connes : Oui, mais pas de sens de l'humour, pas de sens de l'humour.

Jean-Pierre Serre : Ah non, c'est pas compatible.

Alain Connes : C'est pas compatible, pas de sens de l'humour.

Jean-Pierre Serre : J'imagine pas, je ne me souviens pas de l'avoir entendu rigoler, ou peut-être pour d'autres choses, mais...

Alain Connes : Tu dis c'est pas compatible mais, en voyant l'interview de Cartan, on ne peut pas ne pas être frappé par le fait que Cartan avait un sens de l'humour incroyable, tout en étant très sérieux.

Jean-Pierre Serre : Oui, mais Cartan n'aurait pas pu faire l'œuvre de Grothendieck, c'est évident, avec un caractère comme ça, moi non plus d'ailleurs.

Alain Connes : Oui, oui, je comprends ce que tu veux dire.

Jean-Pierre Serre : Il y a une certaine, je ne sais pas comment dire, il y a une force, ça demande une force énorme. Et ça n'est pas compatible avec rigoler.

(Rires d'Alain Connes)

QUELQUES REMARQUES SUR LA CROISSANCE DE LA FONCTION $\zeta(s)$

par M. Ernst Lindelöf

1. Nous commençons par rappeler quelques propriétés connues de la fonction

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots,$$

dont nous aurons à nous servir dans la suite.

En posant

$$s = \sigma + it,$$

on conclut d'abord de l'expression donnée par Euler :

$$\zeta(s) = \prod \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \right),$$

que les inégalités

$$\prod \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{p^\sigma}} \right) < |\zeta(\sigma + it)| \leq \prod \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^\sigma}} \right)$$

sont vérifiées pour $\sigma > 1$, d'où cette première propriété :

L'expression $|\zeta(\sigma + it)|$ reste comprise entre des limites finies et positives dans le domaine $\sigma \geq 1 + \varepsilon$, le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on voudra.

En se servant de la relation fonctionnelle

(1) $$\chi(s) = \chi(1 - s),$$

où

$$\chi(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

on peut en conclure comment se comporte $|\zeta(\sigma + it)|$ pour $\sigma < 0$.

Référence : *Bulletin des Sciences mathématiques*, Série 2, Tome 32, décembre 1908, p.341-356.
Transcription en Latex : Denise Vella-Chemla, juillet 2022.

En effet, la formule de Stirling fournit l'égalité asymptotique

$$|\Gamma(\sigma+it)| = e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}[1+\varepsilon(\sigma,t)],$$

l'expression $\varepsilon(\sigma,t)$ tendant vers zéro lorsque $|t|$ augmente indéfiniment, et cela *uniformément* pour les valeurs σ comprises dans un intervalle fini quelconque. À l'aide de cette égalité on conclut de (1), en observant que

$$|\zeta(\sigma+it)| = |\zeta(\sigma-it)|$$

$$|\zeta(\sigma+it)| = \left|\frac{t}{2\pi}\right|^{\frac{1}{2}-\sigma}|\zeta(1-\sigma+it)|[1+\varepsilon(\sigma,t)], \tag{2}$$

$\varepsilon(\sigma,t)$ jouissant de la même propriété que ci-dessus. Or nous venons de voir que, si

$$1-\sigma \geq 1+\varepsilon$$

d'où

$$\sigma \leq -\varepsilon$$

l'expression

$$|\zeta(1-\sigma+it)|$$

reste comprise entre deux limites finies et positives, quel que soit t, et nous arrivons donc au résultat suivant :

L'expression

$$\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{t^{\frac{1}{2}-\sigma}}\right| \tag{3}$$

reste comprise entre des limites finies et positives pour

$$-\sigma_0 \leq \sigma \leq -\varepsilon, \qquad |t| \geq t_0 (> 0),$$

les nombres positifs ε et σ_0 étant donnés respectivement aussi petit et aussi grand qu'on voudra.

Quant à l'*intervalle critique*,

$$0 \leq \sigma \leq 1$$

il nous suffira provisoirement de savoir que $|\zeta(\sigma+it)|$ *croît moins vite qu'une puissance finie de $|t|$ pour les valeurs σ faisant partie de cet intervalle.* Ce résultat s'obtient le plus facilement par la formule sommatoire d'Euler, qui, sous sa forme la plus simple, nous donne[1]

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau^{s+1}}d\tau, \tag{4}$$

ou encore, en intégrant par parties,

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - \frac{s(s+1)}{1.2}\int_1^\infty \frac{\varphi_2(\tau)}{\tau^{s+2}}d\tau, \tag{5}$$

$\varphi_1(\tau)$ et $\varphi_2(\tau)$ désignant les fonctions périodiques de période 1 qui, dans l'intervalle $0 < \tau < 1$, se réduisent respectivement aux polynomes $\tau - \frac{1}{2}$ et $\tau^2 - \tau + \frac{1}{6}$. En effet, la formule (4) nous montre tout de suite que l'expression

$$\left|\frac{\zeta(\sigma + it)}{t}\right|$$

reste au-dessous d'une limite finie pour $\sigma \geq \varepsilon, |t| \geq t_0 (> 0)$, et la formule (5), qu'il en est de même de l'expression

$$\left|\frac{\zeta(\sigma + it)}{t^2}\right|$$

pour $\sigma \geq -1 + \varepsilon, |t| \geq t_0 (> 0)$, le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on voudra.

Pour les valeurs particulières $\sigma = 1$ et $\sigma = 0$, nous aurons toutefois besoin d'un résultat plus précis, dû à M. Mellin[2], suivant lequel *les expressions*

$$\frac{|\zeta(1+it)|}{\log|t|} \quad \text{et} \quad \frac{|\zeta(it)|}{|t|^{\frac{1}{2}}\log|t|} \tag{6}$$

restent au-dessous d'une limite finie pour $|t| \geq t_1 (> 1)$. Ce résultat se déduit le plus aisément de la formule (4), en l'écrivant sous la forme

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^s} + \frac{1}{2n^s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} - s\int_n^\infty \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau^{s+1}}d\tau.$$

En effet, il en résulte immédiatement, pour $s = 1 + it$,

$$|\zeta(1+it)| < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{|t|} + \sqrt{1+t^2}\int_n^\infty \frac{|\varphi_1(\tau)|}{\tau^2}d\tau.$$

1. Voir par exemple notre Ouvrage : *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*, p. 80-83.

2. *Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicœ*, t. XXIX, n° 4, 1900, p. 48-49)

En observant qu'on a

$$|\varphi_1(\tau)| \leq \frac{1}{2},$$

d'où

$$\int_n^\infty \frac{|\varphi_1(\tau)|}{\tau^2} d\tau < \frac{1}{2n},$$

et, d'autre part,

$$\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} < \int_1^n \frac{d\tau}{\tau} = \log n,$$

on en conclut l'inégalité plus simple

$$|\zeta(1+it)| < 1 + \log n + \frac{1}{|t|} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{2n}.$$

Pour $|n| = [t]$, cette inégalité nous montre que la première des expressions (6) reste au-dessous d'une limite finie pour $|t| \geq t_1$, et, d'après l'égalité (2), il en est de même de la seconde de ces expressions.

2. Voici maintenant le lemme très simple sur lequel nous aurons à nous appuyer, et qui n'est d'ailleurs qu'un cas très particulier d'un théorème établi par M. Phragmén et par nous dans un Mémoire récent[3] :

Soit $f(s)$ une fonction monogène de la variable $s \equiv \sigma + it$ jouissant des propriétés suivantes :

1° *Elle est régulière pour tout point à distance finie faisant partie du domaine*

(7) $$\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, \qquad t \geq t_0 (> 0).$$

2° *Sur le contour de ce domaine, on a*

(8) $$|f(s)| \leq C,$$

C étant une constante finie.

3° *Il existe un nombre fini μ tel que l'expression*

$$\frac{|f(\sigma + it)|}{t^\mu}$$

reste dans le domaine (7) au-dessous d'une limite finie.

3. E. Phragmén et Ernst Lindelöf, *Sur l'extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier* (*Acta mathematica*, t. XXXI, 1908).

Dans ces conditions, on peut affirmer que l'inégalité (8) subsiste pour tout point du domaine (7).

Nous indiquerons brièvement la démonstration de ce lemme, en renvoyant pour plus de développements au Mémoire cité.

Considérons la fonction

$$F(s) = e^{i\varepsilon s} f(s) \qquad (\varepsilon > 0),$$

qui est évidemment régulière dans le domaine (7). Le module

$$|e^{i\varepsilon s}| = e^{-\varepsilon t}$$

étant inférieur à 1 pour $t > 0$, on aura, d'après la condition 2°,

$$|F(s)| < C$$

sur le contour de ce domaine. D'autre part, comme $e^{-\varepsilon t} t^{\mu}$ tend vers zéro lorsque t augmente indéfiniment, quelque petit qu'on se donne le nombre ε, il résulte de la condition 3° que $F(\sigma + it)$ tend également vers zéro, et cela uniformément pour $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$.

Ayant pris arbitrairement un point $s' = \sigma' + it'$ à l'intérieur du domaine (7), on pourra donc choisir un nombre T, supérieur à t', tel qu'on ait

$$|F(s)| < C$$

pour

$$\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2, \qquad\qquad t = T.$$

D'après ce qui précède, l'inégalité $|F(s)| < C$ sera alors vérifiée sur tout le contour du rectangle retranché du domaine (7) par la droite $t = T$, et il en résulte, en vertu d'un principe bien connu, que cette inégalité subsiste aussi à l'intérieur de ce rectangle et, en particulier, au point s', en sorte qu'on aura

$$|F(s')| < C,$$

ou bien

$$|f(s')| < C\, e^{\varepsilon t'}.$$

Ce résultat étant démontré quelque petit que soit ε, il faut bien qu'on ait

$$|f(s')| \leq C,$$

et notre lemme se trouve ainsi démontré.

3. Le lemme qui précède nous permet d'établir, relativement à la croissance de la fonction $\zeta(s)$ dans l'intervalle critique, le résultat suivant, qui comporte une plus grande précision que ceux qu'on avait obtenus jusqu'à présent[4].

L'expression

$$\frac{|\zeta(\sigma+it)|}{|t|^{\frac{1-\sigma}{2}}\log|t|}$$

reste au-dessous d'une limite finie dans le domaine

$$0 \leq \sigma \leq 1, \qquad |t| \geq t_1(>1). \tag{9}$$

Pour faciliter le langage, nous conviendrons de désigner indistinctement par h toute fonction réelle des variables σ et t qui, pour les valeurs σ faisant partie d'un intervalle donné, reste comprise entre des limites finies et *positives* à partir d'une certaine valeur de $|t|$. La lettre h ne désignera donc pas la même fonction dans les différentes formules où elle figure.

En adoptant cette notation, on peut écrire le résultat relatif à l'expression (3) établi plus haut, sous la forme

$$|\zeta(s)| = h|t|^{\frac{1}{2}-\sigma} \qquad \text{pour} \qquad -\sigma_0 \leq \sigma \leq -\varepsilon.$$

En désignant par μ un nombre réel, il en résulte

$$|\zeta^{\mu}(s)| = h|t|^{\mu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}.$$

On a d'ailleurs, σ restant dans un intervalle fini quelconque,

$$|s^{\nu}| = h|t|^{\nu},$$

4. Dans le Mémoire cité plus haut, M. Mellin avait démontré qu'on a

$$|\zeta(\sigma+it)| < M_{\sigma}|t|^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour} \quad 0<\sigma\leq\frac{1}{2}, \qquad |t|\geq t_0(>0),$$
$$|\zeta(\sigma+it)| < M_{\sigma}|t|^{1-\sigma} \quad \textit{pour} \quad \frac{1}{2}\leq\sigma<1, \qquad |t|\geq t_0(>0),$$

M_{σ} ayant une valeur finie pour chaque valeur σ comprise dans l'intervalle en question.

D'autre part, dans une Note intitulée : *Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann* (*Bulletin de la Societé mathématique de France*, t. XXXIII, 1905), M. Landau a remplacé les inégalités de M. Mellin par les suivantes qui sont plus précises :

$$|\zeta(\sigma+it)| < M_{\sigma}|t|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma}\sqrt{\log|t|} \quad \text{pour} \quad 0<\sigma\leq\frac{1}{2}, \qquad |t|\geq t_1(>1),$$
$$|\zeta(\sigma+it)| < M_{\sigma}|t|^{\frac{3}{4}(1-\sigma)}\sqrt{\log|t|} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2}\leq\sigma<1, \qquad |t|\geq t_1(>1),$$

M_{σ} ayant la même signification que ci-dessus.

ν étant un nombre réel, et, d'autre part,

$$|\log s| = h \log |t|.$$

Si l'on pose

$$F_1(s) = s^\nu \zeta^\mu(s) \log s,$$

on trouve donc

$$|F_1(s)| = h|t|^{\mu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)+\nu} \log |t|,$$

σ restant compris entre deux limites finies et négatives.

Prenons maintenant un intervalle de longueur 1 faisant partie de l'axe réel négatif, par exemple l'intervalle

$$-2 \leq \sigma \leq -1,$$

et déterminons les nombres μ et ν de telle sorte que l'exposant

$$\mu\left(\frac{1}{2} - \sigma\right) + \nu$$

de $|t|$ dans l'égalité ci-dessus se réduise à zéro pour $\sigma = -1$ et à $\frac{1}{2}$ pour $\sigma = -2$. On trouve

$$\mu = \frac{1}{2}, \qquad \nu = -\frac{3}{4},$$

et, par suite,

$$F_1(s) = s^{-\frac{3}{4}} \zeta^{\frac{1}{2}}(s) \log s,$$

$$|F_1(s)| = h|t|^{-\frac{1+\sigma}{2}} \log|t| \qquad (-2 \leq \sigma \leq -1).$$

Posons enfin[5]

$$F(s) = F_1(s-2) \equiv (s-2)^{\frac{3}{4}} \zeta^{\frac{1}{2}}(s-2) \log(s-2).$$

Cette fonction $F(s)$ est régulière et différente de zéro pour

$$0 \leq \sigma \leq 1, \qquad |t| > 0,$$

5. Au lieu de F(s), on pourrait employer, par exemple, la fonction

$$\frac{s^{\frac{1-s}{2}} \log s}{\sin \frac{\pi s}{4}}$$

et vérifie pour

$$0 \leq \sigma \leq 1$$

l'égalité asymptotique

$$|F(s)| = h|t|^{\frac{1-\sigma}{2}} \log |t|, \tag{10}$$

d'où il résulte, en particulier,

$$|F(1+it)| = h \log |t|, \qquad |F(it) = h|t|^{\frac{1}{2}} \log |t|. \tag{11}$$

Après ces préliminaires, nous allons étudier la fonction

$$f(s) = \frac{\zeta(s)}{F(s)}$$

dans le domaine $0 \leq \sigma \leq 1$. On voit d'abord qu'elle y est régulière dès que $|t| > 0$, puisque la fonction $F(s)$ est alors différente de zéro. D'autre part, il résulte des égalités (11) et de la proposition établie relativement aux expressions (6), que $|f(s)|$ reste au-dessous d'une limite finie pour $\sigma = 0$ et pour $\sigma = 1$, à partir d'une certaine valeur de $|t|$. Enfin on pourra trouver un nombre fini μ tel que l'expression

$$\left| \frac{f(s)}{t^{\mu}} \right|$$

reste au-dessous d'une limite finie pour

$$0 \leq \sigma \leq 1, \qquad |t| \geq t_0 (> 0).$$

En effet, de l'égalité (10) et de ce que nous avons dit au n° 1 sur la croissance de $\zeta(s)$, il résulte que cette condition est certainement vérifiée si l'on prend $\mu > 2$.

Le lemme du n° 2 est donc applicable à la fonction $f(s)$ dans chacun des domaines

$$0 \leq \sigma \leq 1, \qquad t \geq t_0 (> 0)$$

et

$$0 \leq \sigma \leq 1, \qquad t \leq -t_0 (< 0),$$

et nous apprend que $|f(s)|$ y reste au-dessous d'une limite finie, en sorte qu'on aura

$$|\zeta(s)| < \text{const.} |F(s)|.$$

En remontant à l'égalité (10), on en conclut bien l'exactitude du théorème énoncé plus haut.

4. Par un raisonnement analogue à celui qu'on vient de lire, on peut établir encore quelques autres résultats généraux relatifs à la croissance de $\zeta(s)$, que nous nous permettrons de signaler ici sans démonstration[6].

À toute valeur donnée σ correspond un nombre déterminé $\mu(\sigma)$ tel que, $|t|$ tendant vers l'infini, le rapport

$$\frac{|\zeta(\sigma+it)|}{|t|^{\mu(\sigma)+\varepsilon}}$$

reste au-dessous d'une limite finie ou non, suivant que ε est plus grand ou plus petit que zéro.

Considérons la courbe dont l'équation est

$$t=\mu(\sigma). \tag{12}$$

On démontre facilement qu'elle jouit de la propriété suivante :

Si $\mu(\sigma_1)\leq t_1$ et $\mu(\sigma_2)\leq t_2$, l'ordonnée de la courbe (12) n'est en aucun point de l'intervalle (σ_1,σ_2) supérieure à celle de la droite qui joint les points (σ_1,t_1) et (σ_2,t_2).

En tenant compte des résultats rappelés au n° 1, on en conclut la proposition qui suit :

La courbe (12) est continue pour toute valeur de σ et n'est en aucun point convexe vers le haut. Son ordonnée vérifie la relation

$$\mu(\sigma)=\mu(1-\sigma)+\frac{1}{2}-\sigma.$$

Pour $\sigma\geq 1$, cette courbe se réduit à l'axe réel et, pour $\sigma\leq 0$, elle se confond avec la droite

$$t=\frac{1}{2}-\sigma.$$

Dans l'intervalle $0<\sigma<1$, elle fait partie du triangle formé par les points

$$\left(\sigma=0,t=\frac{1}{2}\right),\qquad\left(\sigma=\frac{1}{2},t=0\right),\qquad(\sigma=1,t=0).$$

5. En tant qu'il s'agit d'une limite inférieure de la croissance de $\zeta(s)$ pour les valeurs σ comprises dans l'intervalle critique, la proposition ci-dessus nous permet d'énoncer le résultat suivant :

6. Une question analogue se trouve traitée en détail dans la dernière partie du Mémoire que nous avons publié avec M. Phragmén.

Si $\varepsilon > 0$, l'expression

$$t^{\varepsilon}\zeta(\sigma + it),$$

lorsque $|t|$ augmente indéfiniment, ne tend vers zéro pour aucune valeur σ comprise dans l'intervalle

$$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1,$$

et l'expression

$$t^{\varepsilon}\frac{\zeta(\sigma + it)}{t^{\frac{1}{2}-\sigma}}$$

ne tend vers zéro pour aucune valeur σ de l'intervalle

$$0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}.$$

Mais on peut aller plus loin, en démontrant que *ce résultat subsiste encore pour $\varepsilon = 0$.* D'une manière plus précise, si l'on pose

$$\zeta(\sigma + it) = \xi(\sigma, t) + i\eta(\sigma, t),$$

on peut à l'égard des fonctions ξ et η établir la proposition que voici :

Lorsque $|t|$ augmente indéfiniment, σ ayant une valeur donnée quelconque, les expressions

$$\xi(\sigma, t) - 1 \quad \text{et} \quad \eta(\sigma, t) \tag{13}$$

changent de signe une infinité de fois et, pour chacune d'elles, les limites inférieures et supérieures pour $t = \pm\infty$ sont différentes de zéro.

6. Pour démontrer cette proposition, nous aurons à nous servir de la *formule de Poisson*[7].

Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique qui est régulière dans le cercle

$$x^2 + y^2 < R^2,$$

et désignons par r, φ les coordonnées polaires du point (x, y) par rapport à l'origine, par x_0, y_0 les coordonnées d'un point pris à l'intérieur du cercle, et par r_0, φ_0 les valeurs de r, φ en ce point.

7. On aurait pu se servir aussi de cette formule pour établir le lemme du n° 2.

Si l'on admet d'abord que la fonction $u(x, y)$ soit continue pour

$$x^2 + y^2 \leq R^2,$$

la formule de Poisson nous donne

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2} \overline{u}(R, \varphi) d\varphi, \tag{14}$$

en posant

$$u(x, y) = \overline{u}(r, \varphi).$$

Supposons maintenant qu'il existe sur la circonférence du cercle envisagé un certain point, soit le point

$$x = R, \qquad y = 0,$$

où la fonction $u(x, y)$ cesse d'être continue, tout en restant continue pour les autres points de ce cercle et de sa circonférence, et admettons en outre qu'on peut trouver un nombre réel μ *inférieur à l'unité*, tel que l'expression

$$\rho^\mu \, |u(x, y)|, \tag{15}$$

où ρ désigne la distance du point (x, y) au point $x = R, y = 0$, reste au-dessous d'une limite finie pour

$$x^2 + y^2 \leq R^2,$$

Dans ces conditions, la formule (14) reste encore valable.

En effet, on a évidemment pour $r_0 < R' < R$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R'^2 - r_0^2}{R'^2 - 2R'r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2} \overline{u}(R', \varphi) d\varphi, \tag{14'}$$

Or il résulte de la condition admise relativement à l'expression (15), d'une part, que l'intégrale figurant dans la formule (14) garde dans l'hypothèse actuelle une valeur finie, et, d'autre part, que la différence entre cette intégrale et celle qui figure dans la formule (14') tend vers zéro lorsque R' tend vers R. Cette dernière formule restant vraie, quelque petite que soit la différence $R-R'$, on en conclut bien l'égalité (14).

Les conditions restant les mêmes que ci-dessus, admettons que

$$u(x, y) \geq C$$

sur un certain arc de la circonférence

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

comprenant intérieurement le point

$$x = R, \qquad y = 0$$

D'après les propriétés bien connues de l'intégrale de Poisson[8], on peut en conclure que, le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on voudra, l'inégalité

$$u(x, y) > C - \varepsilon$$

est vérifiée pour tout point (x, y) du domaine

$$x^2 + y^2 \leq R^2,$$

dont la distance ρ du point

$$x = R, \quad y = 0$$

est inférieure à une certaine limite positive. On en déduit le lemme suivant, dont nous aurons à nous servir :

En désignant par r, φ les coordonnées polaires du point (x, y) par rapport à un point fixe, admettons que la fonction harmonique $u(x, y)$ soit finie et continue pour tout point (x, y) à distance finie faisant partie du domaine

$$\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \frac{\pi}{\alpha}, \qquad r \geq r_0, \tag{16}$$

et régulière à l'intérieur de ce domaine, et qu'il existe un nombre ν inférieur à α, tel que le produit

$$r^{-\nu}|u(x, y)|$$

reste au-dessous d'une limite finie dans ce même domaine.

Cela étant, si, sur chacun des rayons $\varphi = \varphi_0$ et $\varphi = \varphi_0 + \dfrac{\pi}{\alpha}$ la limite supérieure de $u(x, y)$ pour $r = \infty$ est égale à ou plus petite que zéro, ou respectivement la limite inférieure de $u(x, y)$ pour $r = \infty$ égale à ou plus grande que zéro, on aura dans le domaine (16), à partir d'une certaine valeur de r,

$$u(x, y) < \varepsilon,$$

respectivement

$$u(x, y) > -\varepsilon,$$

le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on voudra.

8. Voir H.-A. Schwarz, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, t. II, p. 175-210 et 360-361.

Pour la démonstration de ce lemme, il suffit d'effectuer un changement de variable réalisant la représentation conforme du domaine (16) sur l'aire d'un cercle. En effet, ce changement transformera $u(x, y)$ en une fonction harmonique qui est finie et continue dans le cercle en question et sur sa circonférence, excepté peut-être le seul point qui correspond au point à l'infini du domaine (16) ; mais en ce point l'ordre d'infinitude de la fonction transformée est au plus égal à $\frac{\nu}{\alpha}$ et, par suite, inférieur à l'unité. L'exactitude de notre lemme résulte dès lors immédiatement de la remarque faite ci-dessus.

7. Après ces préliminaires, revenons à la proposition énoncée à la fin du n° 5.

σ_0 étant une valeur réelle quelconque, posons

$$s - \sigma_0 = re^{i\varphi}$$

et étudions la fonction $\zeta(s)$ dans l'angle d'étendue $\frac{\pi}{\alpha}$ défini par les inégalités

$$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \tag{17}$$

en supposant α supérieur à chacun des nombres 2 et $\mu(\sigma_0)$, $\mu(\sigma)$ désignant la fonction dont il était question au n° 4.

La fonction $\zeta(s)$ est régulière pour tout point à distance finie faisant partie de cet angle (excepté son sommet dans le cas où $\sigma_0 = 1$), et, si l'on choisit le nombre ν de telle sorte que

$$\mu(\sigma_0) < \nu < \alpha,$$

il résulte du n° 4 que le produit

$$r^{-\nu}|\zeta(s)|$$

et, par suite, aussi les produits

$$r^{-\nu}|\xi(\sigma, t) - 1| \qquad \text{et} \qquad r^{-\nu}|\eta(\sigma, t)|$$

restent au-dessous d'une limite finie dans le domaine (17), à partir d'une certaine valeur de r.

Or $\zeta(s)$ tend vers 1 sur le rayon

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)$$

lorsque r augmente indéfiniment et, par suite, les expressions (13) tendront dans les mêmes conditions vers zéro, Si sur l'autre côté de l'angle (17), c'est-à-dire sur la droite

$\sigma = \sigma_0$, la limite supérieure pour $t = \infty$ de l'une des expressions (13) était égale à ou plus petite que zéro, cette expression devrait donc, d'après le lemme démontré au n° 6, rester inférieure à ε dans l'angle (17), à partir d'une certaine valeur de r, et si, sur la même droite, la limite inférieure pour $t = \infty$ de l'une des expressions dont il s'agit était égale à ou plus grande que zéro, cette expression serait dans les mêmes conditions supérieure à $-\varepsilon$, et cela quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε.

Or, ces conclusions ne sont ni l'une ni l'autre conformes à la réalité et, pour s'en assurer, il suffit d'examiner comment se comportent les expressions (13) par exemple sur la droite $\sigma = 4$ (en admettant qu'on ait $\sigma_0 < 4$). En effet, on a, sur cette droite,

$$\left|\frac{1}{2^s}\right| = \frac{1}{16},$$

et, d'autre part,

$$\left|\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\right| \leq \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots < \int_2^\infty \frac{d\tau}{\tau^4} = \frac{1}{24}\ ;$$

on en conclut que chacune des expressions (13) prend, sur la droite en question, au delà d'un quelconque de ses points, aussi bien des valeurs supérieures à $\frac{1}{16} - \frac{1}{24} = \frac{1}{48}$ que des valeurs inférieures à $-\frac{1}{48}$.

Donc, pour chacune des expressions (13), la limite supérieure pour $t = \infty$ est positive et la limite inférieure pour $t = \infty$ négative, et de même pour $t = -\infty$, d'où résulte notre proposition.

8. Le lemme du n° 6 conduit encore à certains résultats relatifs à la croissance du module $|\zeta(s)|$ que nous signalerons en terminant.

L'expression $\log |\zeta(s)|$ définit évidemment une fonction harmonique régulière pour $\sigma \geq 1$, en exceptant le seul point $s = 1$. Cette fonction tend vers zéro lorsque le point s s'éloigne indéfiniment suivant une droite quelconque qui forme avec l'axe réel positif un angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$; d'autre part, on peut démontrer[9] qu'elle reste, pour

$$\sigma \geq 1, \qquad |t| \geq t_0 (> 0),$$

numériquement inférieure à une certaine puissance finie de t. Le lemme cité permet d'en conclure, par un raisonnement identique à celui du n° 7, que la limite inférieure pour $|t| = \infty$ de l'expression $\log |\zeta(s)|$ est négative sur l'une quelconque des droites

9. Voir, par exemple, le paragraphe 11 du Mémoire de M. Landau, *Beiträge zur analytischen Zahlentheorie* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXVI, 1908), où se trouvent d'ailleurs établis des résultats bien plus précis que celui dont nous avons besoin ici.

$\sigma = \sigma_0$, où $\sigma_0 \geq 1$. En d'autres termes, *le module* $|\zeta(s)|$ *prendra sur chacune de ces droites, à une distance aussi grande qu'on voudra de l'axe réel, des valeurs inférieures à une certaine quantité finie plus petite que l'unité.*

En admettant que $\zeta(s) \neq 0$ pour

$$\sigma > \vartheta, \qquad \frac{1}{2} \leq \vartheta < 1,$$

on peut démontrer[10] que la fonction $\log|\zeta(s)|$ reste, pour

$$\sigma \geq \vartheta + \varepsilon, \qquad |t| \geq t_0 (> 0), \qquad \varepsilon > 0,$$

numériquement inférieure à une certaine puissance finie de $|t|$; d'où il résulte que, dans cette hypothèse, la conclusion ci-dessus sera vraie dès que $\sigma_0 > \vartheta$.

D'ailleurs, le module $|\zeta(s)|$ ne resterait-il pas inférieur à une limite finie pour

$$\sigma \geq \frac{1}{2} + \varepsilon, \qquad |t| > t_0 (> 0),$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε ?

S'il en est ainsi, on aura des résultats relativement simples concernant la croissance de $\zeta(s)$. Ainsi, la fonction $\mu(\sigma)$ définie au n° 4 se réduira à zéro pour $\sigma > \frac{1}{2}$ et à $\frac{1}{2} - \sigma$ pour $\sigma < \frac{1}{2}$ et, de plus, si l'on admet avec Riemann que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\sigma > \frac{1}{2}$, on peut démontrer que, pour $\sigma > \frac{1}{2}$, l'expression $|\zeta(\sigma + it)|$ et, pour $\sigma < \frac{1}{2}$, l'expression $\left|\dfrac{\zeta(\sigma+it)}{t^{\frac{1}{2}-\sigma}}\right|$ restent comprises entre des limites finies et positives à partir d'une certaine valeur de $|t|$.

Si la supposition émise ci-dessus n'est pas vraie, on arrive au contraire à des conclusions assez curieuses. Il existe alors un nombre bien déterminé σ', faisant partie de l'intervalle

$$\frac{1}{2} < \sigma \leq 1,$$

tel que, si $\varepsilon > 0$, le module $|\zeta(\sigma + it)|$ reste inférieur à une limite finie pour

$$\sigma \geq \sigma' + \varepsilon, \qquad |t| \geq t_0 (> 0),$$

10. Cf. le paragraphe 13 du Mémoire cité dans la Note précédente.

tandis que ceci n'a pas lieu pour $\varepsilon < 0$, et l'on peut en conclure[11] que l'équation

$$\zeta(s) = C,$$

pour toute valeur finie de C, excepté peut-être *une seule* valeur, admet une infinité de racines dont les parties réelles tendent vers σ' en même temps que leurs modules augmentent indéfiniment.

11. Voir notre travail : *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes, et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXV, nº 7, 1908). On trouve des tirages à part de ce Mémoire à la librairie A. Hermann.

GROUPES D'ORDRE IMPAIR

MICHAEL ATIYAH

Pour Alain Connes et l'Université de Fudan[1]

RÉSUMÉ. Le théorème de Feit-Thompson qu'un groupe d'ordre impair est résoluble a toujours été un défi pour ceux qui croient que les beaux théorèmes devraient avoir de belles preuves.

1. Histoire et stratégie

La théorie des groupes et la théorie de Galois se sont développées ensemble il y a deux siècles lorsqu'on cherchait les conditions de résolubilité. C'est environ 150 ans plus tard que Feit et Thompson ont démontré leur théorème célèbre [1].

Théorème 1. *(Feit-Thompson) Tous les groupes d'ordre impair sont résolubles.*

Cela a été, à cette époque, le point de départ d'un effort collectif colossal par des théoriciens des groupes pour trouver tous les groupes simples finis. Pour un compte-rendu historique à ce sujet, voir [2].

Dans cette note, je présenterai une preuve du théorème 1 inspirée par les idées d'Emil Artin. En fin de compte, un groupe d'ordre impair est résoluble parce qu'un polynôme réel de degré impair a une racine réelle. Ce polynôme apparaîtra comme polynôme caractéristique d'une matrice sur un corps réel.

Je vais maintenant esquisser la stratégie de la preuve du théorème 1. Il s'agit de construire une grande famille de caractères complexes (homomorphes à $\mathbb{C}^*$) du groupe G (d'ordre impair N) et de montrer alors qu'ils ne peuvent pas être tous triviaux. Ceci, énoncé en section 4 comme théorème 2, amène facilement au théorème 1.

Ces caractères sont construits dans la section 5 à partir des déterminants des matrices représentatives qui proviennent de l'idée d'Artin de considérer l'action d'un groupe fini G sur tous ses sous-ensembles et alors d'utiliser les extensions d'algèbres de $\mathbb{Q}$. Les caractères complexes de G sont mieux compris à travers la ruse *unitaire* de Hermann Weyl, qui s'applique aux groupes de Lie compacts et en particulier aux

[1] En souvenir de la Conférence d'anniversaire pour les 70 ans d'Alain Connes et pour les Nominations comme Professeurs honoraires par l'Université Fudan de Shanghai, le 1er avril 2017. Date : 30 janvier 2018.

Traduction : Denise Vella-Chemla, septembre 2022.

groupes finis.

Nous utiliserons à la fois des nombres algébriques et des fonctions algébriques. Notons qu'une fonction algébrique définit une courbe algébrique qui en général est constituée de plusieurs courbes irréductibles. S'il n'y en a qu'une, les fonctions forment un corps. La théorie de Galois est traditionnellement définie seulement pour les corps. C'est une théorie beaucoup plus délicate que la théorie pour les algèbres. En particulier elle dépend grandement de l'arithmétique de l'entier N, le degré de la courbe. La preuve du théorème 1, par Feit et Thompson, fait intervenir ces considérations arithmétiques et la manière dont elles sont implémentées dans la structure du groupe G. Tout ceci est intimement relié à la théorie de Galois. Par contraste, notre approche, en se focalisant sur les algèbres et en ignorant les questions d'irréductibilité est plus grossière. C'est précisément parce qu'elle **ignore la théorie de Galois** qu'elle amène à une démonstration simple du théorème 1. Mais, par constraste avec la preuve de Feit-Thompson, elle n'amène aucune information à propos de la structure interne de G. Elle ne dit rien de la manière dont les sous-groupes de Sylow pour différents nombres premiers sont entremêlés. Notre preuve demande moins et donne moins. Mais elle donne une preuve courte et simple du théorème 1, répondant au défi énoncé dans le résumé, d'une **belle preuve d'un beau théorème**. Comme digression philosophique, laissez-moi donner une analogie. Si on vous demande, en tant que spectateur, si l'animal devant vous est un chameau ou un dromadaire, il y a deux manières de le savoir. La façon externe est de compter le nombre de bosses, facile. La façon interne est d'examiner l'ADN des deux animaux et de trouver la différence génétique. C'est trivialement beaucoup plus difficile, mais cela donne beaucoup plus d'information. Mais compter les bosses est suffisant pour répondre à la question. Feit et Thompson sont des généticiens, alors que je ne fais que compter les bosses.

En retournant maintenant à la stratégie de la preuve, on note que cela amène à notre première tranche de caractères et que cela permettra de détecter les groupes méta-abéliens.

2. Préliminaires algébriques

Un corps de nombres réels signifiera un corps de nombres algébriques k enchâssé dans les réels :

$$\mathbb{Q} \subset k \subset \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

De façon similaire, un **corps de nombres complexes** signifiera un corps de nombres algébriques associé à un choix de plongement dans $\mathbb{C}$. Si on commence à partir d'une extension complexe de $\mathbb{Q}$, cela amènera à une complexification de (2.1). Le cas qui servira de cas de base à cet article est l'extension $\mathbb{Q}(\rho) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ dont les entiers sont appelés les entiers de Eisenstein E. C'est un domaine de factorisation unique et les unités fondamentales sont (en excluant 1 et en faisant un choix de signes)

(2.2) $$\rho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \exp\frac{2\pi i}{3}, \quad \overline{\rho} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \exp\frac{-2\pi i}{3},$$

les solutions de l'équation

(2.3) $$u^2 + u + 1 = 0.$$

Finalement, parlons des déterminants. Si V est un espace vectoriel de dimension N sur le corps des nombres réels k, le **déterminant** est un homomorphisme :

(2.4) $$\det : \mathrm{Aut}(V) \to k^* \subset \mathbb{R}^*$$

De façon similaire, si V et l'automorphisme sont définis sur le corps des nombres complexes $k(\rho)$, det prend ses valeurs dans $k(\rho)^* \subset \mathbb{C}^*$.

Passons maintenant au recouvrement double de spins donné par le **changement de variable**

(2.5) $$z = u^2 + u + 1.$$

Cela nous amène au corps de fonctions réelles $K := k(u)$ et à sa complexification $K(\rho) := k(\rho)(u)$, où u est une variable. De telles fonctions peuvent être évaluées aux points complexes (ou nombres) et donnent des nombres complexes dans le corps associé. Pour K, l'évaluation en ρ ou en $\sqrt{\rho} = -\rho^2$ fournit des valeurs dans $k(\rho)$.

Sur la surface de Riemann définie par (2.5), les fonctions peuvent être paires ou impaires selon l'involution

(2.6) $$u \mapsto -u$$

et il y a (voir [10])

(2.7) une structure de spin distinguée

qui peut être paire ou impaire selon la valeur de

(2.8) l'invariant de Arf d'une fonction quadratique.

Comme module sur $k(z)$, K est de rang 2 et donc les endomorphismes de K peuvent être vus comme des matrices 2×2 sur $k(z)$: une algèbre non-commutative.

En termes de groupes d'éléments inversibles, on a que

(2.9) $$\mathrm{End}(K)^* = k(u)^* \ltimes (\pm 1)$$

est un produit semi-direct avec l'involution $u \mapsto \overline{u}$ sur $k(u)^*$. Ainsi on voit $\mathrm{End}(K)^*$ comme un sous-groupe d'indice 2 dans les éléments unimodulaires de l'algèbre matricielle ; les deux choix correspondent à $\mathbb{C}^+$ et $\mathbb{C}^-$, les deux moitiés du plan complexe moins la ligne réelle. Note : les géomètres peuvent reconnaître ici les deux classes des fibrés projectifs avec la fibre $P_1(\mathbb{C})$ déterminée par la parité de la première classe de Chern i.e. par la seconde classe de Stiefel-Whitney, dont l'évanouissement fournit le spin.

La distinction entre les fonctions paires et impaires, selon l'involution $u \mapsto -u$ s'étend aux vecteurs, aux matrices et aux valeurs propres.

3. Déterminants

Puisque K est une élévation de $k(z)$, toute matrice réelle $A \in GL(N, K)$ peut être vue comme une matrice dans $GL(2N, k(z))$, qui a comme valeurs propres les $2N$ variables conjuguées complexes :

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \quad \text{et} \quad (\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_N})$$

Les λ_l et $\overline{\lambda_l}$ se distinguent en choisissant

$$\lambda_l \in \mathbb{C}^+ \quad \text{et} \quad \overline{\lambda_l} \in \mathbb{C}^-.$$

Prendre le déterminant de A donne alors un homomorphisme

$$\det \; : \; GL(N, K) \to K^*.$$

Cela va maintenant être exprimé en plus grand détail en fonction des valeurs propres. Notons que $\zeta = \exp\frac{\pi i}{N}$ engendre le groupe cyclique d'ordre $2N$ qui se sépare en puissances paires et puissances impaires. Les puissances impaires ne sont jamais égales à $+1$ et donc, puisque N est impair, on a

$$\zeta^N = -1. \tag{3.1}$$

Les unités fondamentales de K_N, les matrices $N \times N$ inversibles sur K, ont des valeurs propres dans le demi-plan supérieur

$$\sqrt{\rho}\zeta^r \quad \text{où} \quad \zeta = \exp\frac{\pi i}{N} \quad \text{et} \quad 1 \leq r \leq N. \tag{3.2}$$

Ici ρ est l'élément primitif dans le corps $k(\rho)$ et ζ est une valeur complexe de la variable u. La figure 1 ci-dessous montre comment ces deux nombres sont reliés et comment la variable z dans (3.3) correspond au paramètre le long de la corde les joignant.

Étant donnée une base ordonnée pour un espace vectoriel, les automorphismes peuvent être exprimés comme des matrices et cela est naturel dans notre contexte puisque notre groupe G fournira des bases. Notons que les déterminants sont inchangés par n'importe quelle permutation paire de la base.

Une matrice complexe A de taille $N \times N$, avec N impair, a N valeurs propres complexes. Si A est réel, i.e. $A = \overline{A}$, alors le polynôme caractéristique

$$\varphi(A, z) = \det(A - zI) \tag{3.3}$$

est réel et a un degré impair N. Par conséquent il doit avoir une racine réelle, donnant une valeur propre réelle λ_1 de A.

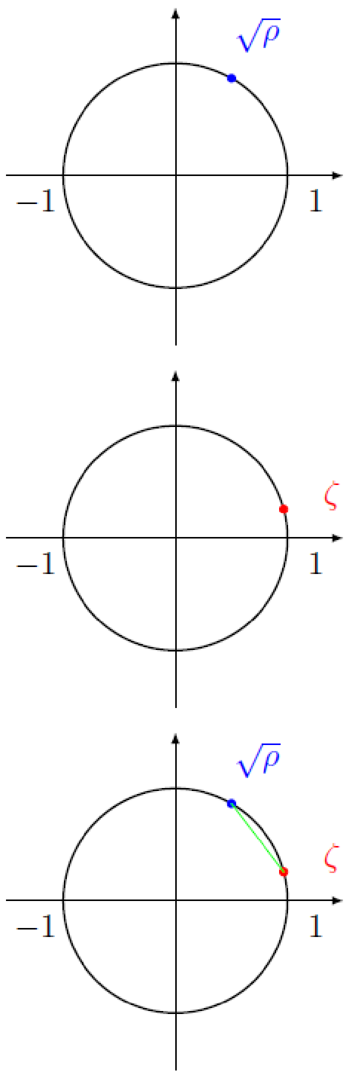


FIGURE 1. Relation entre les nombres $\sqrt{\rho}$ et ζ dans le plan complexe $\mathbb{C}$.

Le problème de trouver une racine réelle λ_1 est d'une profondeur inattendue. Alors que des algorithmes existent, ils ne sont pas robustes, de telle façon que de petites variations dans les données (les coefficients) peuvent amener à sautiller autour des racines. Ceci est pertinent pour le théorème 1 si on veut trouver une chaîne résoluble d'extensions de corps. Ceci est une tâche difficile précisément à cause de l'*embarras du choix* mais, pour notre objectif, cela peut être ignoré.

Comme noté après (2.4), une matrice complexe A sur le corps complexe $k(\rho)$ a, quand elle est non singulière, un déterminant complexe det A qui donne un homomorphisme de groupes :

$$\det\ : GL(N, k(\rho)) \to k(\rho)^*. \tag{3.4}$$

La formule habituelle $|z^2| = z\bar{z}$ devient dans la version matricielle

$$\|A\|^2 = \det A \, \det \overline{A} \tag{3.5}$$

Le déterminant complexe det A est le produit de toutes les valeurs propres :

$$\det A = \prod_{l=1}^{N} \lambda_l. \tag{3.6}$$

où nous choisissons λ_l (comme opposé à son conjugué $\overline{\lambda_l}$) par la même convention que précédemment de telle façon que $\lambda_l \in \mathbb{C}^+$.

En supposant que A est unitaire et en remplaçant A par $A - zI$, avec z une variable, on obtient un homomorphisme

$$\det\ :\ GL(N, k(\rho)(z)) \to k(\rho)(z)^*. \tag{3.7}$$

On peut spécialiser la variable z à n'importe quelle valeur qui n'est pas une valeur propre de $A \in GL(N, k(\rho))$, puisqu'on a besoin d'un déterminant non nul. En fait, après le relèvement dans K, $z = u^2 + u + 1$ et on peut prendre $u = \sqrt{\rho}$ parce que les valeurs propres de la matrice $(A - \sqrt{\rho}I)$ sont, en utilisant (3.2):

$$\lambda - \sqrt{\rho}\zeta^r \ \text{ où } \ \lambda^N = 1. \tag{3.8}$$

et, parce que N est impair, aucun de ceux-ci n'est nul. Voir les figures 2 et 3. Le calcul de δ_3 vient de

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \tag{3.9}$$

qui mesure l'écart sur le cercle unité entre i et $\sqrt{\rho}$, en comparant les entiers de Gauss et les entiers de Eisenstein. Notons que les 3 points $-1, \sqrt{\rho}, i$, et la corde reliant i et $\sqrt{\rho}$ sont tous dans le disque unité fermé $|\lambda| \leq 1$, et correspondent aux 3 fractions apparaissant en (3.9). Le remplacement de 3 par 5, qui fait que les triangles réguliers deviennent des pentagones réguliers est illustré sur la figure 3. À nouveau, on a des pentagones pair et impair. Une équation comme (2.5) et ses généralisations donne des doubles recouvrements branchés sur les sommets d'un polygone pair avec un nombre impair de côtés comme 3, 5. Les points des polygones impairs sont clairement distincts de ceux des polygones pairs. Quand on commence à itérer ces constructions, comme nous le ferons dans la section 5, on aura une séquence de points de branchement w_j indexée par j. En passant de j à $j+1$, on aura deux ensembles de points de branchement ; les "anciens" points étiquetés par j et les "nouveaux" étiquetés par $j+1$. On veut éviter qu'un quelconque nouveau point ne coïncide avec un quelconque ancien point et c'est ce à quoi l'on parvient par notre séparation en pairs et impairs. On a utilisé un autre symbole u à la place de w, puisqu'on veut que u soit pris successivement comme un w_j, permettant à notre argument d'être un argument inductif, avec les corps et les points de branchements étiquetés correctement. Notons que u_1 est la solution de l'équation (2.5). Cette explication est destinée à aider le lecteur à se repérer dans le formalisme de la section 5, qui sinon pourrait paraître déconcertant.

Par conséquent $A - \sqrt{\rho} I$ est non singulière et son déterminant donne le caractère impair

$$\varphi : GL(N, k(\rho)) \to K^*(\sqrt{\rho}). \tag{3.10}$$

Nous développerons à ce sujet dans la prochaine section. Notons que les nombres complexes (3.8) sont à l'intérieur mais non pas sur le cercle unité, de telle façon que le caractère (3.10) est *non unimodulaire*. Cela vient du fait que, dans les figures 2 et 3 (avec $N = 3$), $i - \sqrt{\rho}$ est la corde (ligne droite) joignant i à $\sqrt{\rho}$ et non l'arc de cercle d'angle $\pi/6$ apparaissant dans (3.9). Le point essentiel est que le cercle est convexe (voir la section 12 de [11] pour une discussion élargie de la convexité dans les groupes de Lie compacts).

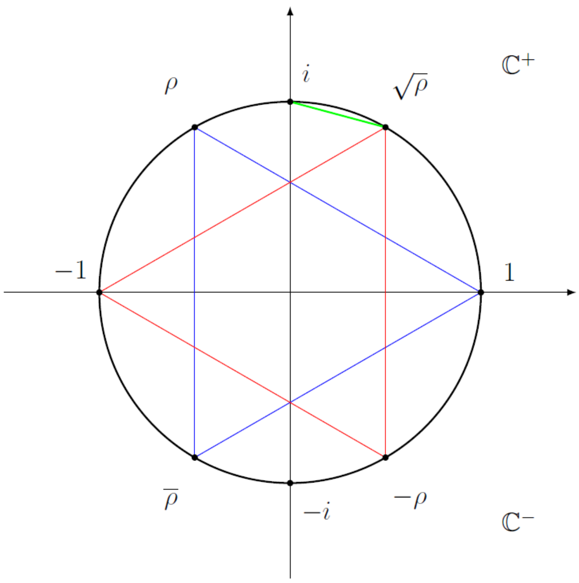


Figure 2. Pour $N = 3$, détail du cercle unité avec les unités pertinentes et la corde dont le point médian est à une distance de l'arc de $\delta_3 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le triangle impair (bleu) correspond à ρ et le triangle pair (rouge) correspond à $\sqrt{\rho}$.

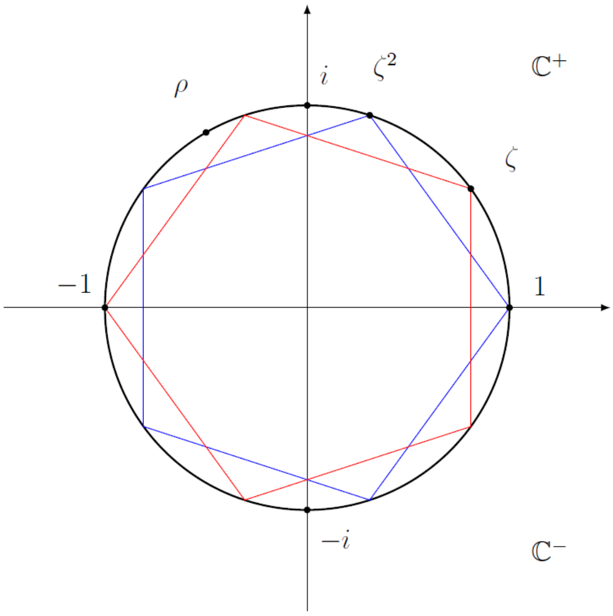


Figure 3. Pour $N = 5$, détail du cercle unité avec les unités pertinentes ; le diagramme donnera la distance δ_5. Plus généralement $\delta_N = 1 - \sin\frac{\pi}{N}$. Comme dans la figure précédente, le pentagone rouge est pair et le pentagone bleu est impair, pour $N = 5$.

Nous utiliserons deux symboles différents, n et N avec $n \leq N$ pour distinguer entre l'ordre n de ρ et l'ordre N de ζ^2.

Quand on considère un groupe fini G, comme nous le ferons dans la section ci-dessous, N sera l'ordre de G et n l'exposant de G, i.e. le plus petit n tel que $g^n = 1$ pour tout $g \in G$.

4. Groupes et ensembles

La section 2 était une révision des matrices et des déterminants et la section 3 était une révision des déterminants. Maintenant, nous commencerons à partir d'un groupe abstrait G d'ordre impair N et, suivant Artin, nous le verrons comme agissant sur l'ensemble S de ses éléments. Il agit via les permutations σ et, puisque N est impair, $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ et G agit sur S via le sous-groupe alterné du groupe symétrique.

Un ensemble fini S avec un élément choisi s_1 (le point-base) est un **ensemble avec base**. S'il y a une involution (non-triviale) $s \mapsto s^{-1}$ fixant le point-base, on appellera S un **ensemble symétrique**. G agit sur S par une action à gauche $s \to \sigma s$ et une action à droite $s \to s\sigma^{-1}$. Les deux actions ensemble $s \to \sigma s \sigma^{-1}$ donnent l'**action de conjugaison** qui préserve la structure symétrique de S, où l'involution est l'inversion de groupe et où l'identité 1 est le point-base. Le centre $Z(G)$ est le noyau de l'action de G et les orbites sont les classes de conjugaison. Les classes de conjugaison sont dites **réelles** si elles sont fixes par inversion et paires de **complexes conjuguées** sinon.

Si S est n'importe quel G-ensemble symétrique (i.e. un ensemble dont la G-action préserve la symétrie), on dénote par S^* l'ensemble S avec le point-base s_1 retiré. L'ensemble de tous les sous-ensembles de S est dénoté par 2^S avec cardinalité $|2^S| = 2^{|S|}$. Il y a un sous-ensemble distingué, notamment l'ensemble vide $\varnothing$. En l'enlevant de 2^S, il reste l'ensemble $(2^S)^*$ de *sous-ensembles non vides* de cardinalité $2^{|S|}-1$. Notons que si $|S| \neq 0$ alors $2^{|S|}-1 \neq 0$ et est **impair**. En fait, si $|S| \geq 3$ alors $2^{|S|}-1 \geq 7$.

En plus de $\varnothing$, il y a un autre sous-ensemble également distingué de S, notamment l'ensemble complet Ω. Il y a une dualité (en prenant les complémentaires) qui échange $\varnothing$ et Ω.

La théorie pourrait être poursuivie entièrement dans le paradigme des ensembles finis et des algèbres booléennes et c'était essentiellement l'idée d'Artin. En fait, pour relier cela à la théorie des corps, on se déplace maintenant vers l'algèbre linéaire en utilisant des matrices et des déterminants.

Si S est une base d'un espace vectoriel réel ou complexe V, alors 2^S est une base de l'algèbre extérieure $\wedge^\bullet(V)$ avec l'ensemble vide $\varnothing$ comme base de $\wedge^0(V)$ et l'ensemble plein Ω comme base de $\wedge^N(V)$ où $N = |S|$. Si V est un k-espace vectoriel alors, comme expliqué dans la section 2, on obtient le caractère impair φ de (3.10).

Garder trace de la parité d'un caractère de G devient assez délicat lorsqu'on procède à cette itération. La délicatesse de l'entreprise provient de l'invariant de Arf de (2.8). Mais il y a une alternative et un moyen plus facile de montrer la non trivialité d'un caractère complexe et cela consiste à montrer qu'il est *non unimodulaire*. C'est ce que nous allons maintenant faire effectivement en nous basant sur les remarques à la fin de la section 3, après la formule (3.9).

5. Le processus itératif

Ayant commencé par le processus d'Artin consistant à utiliser l'action de conjugaison de G sur ses sous-ensembles non vides, nous nous proposons maintenant d'itérer ce processus N fois. Comme expliqué à la fin de la section 3, le but de cette itération est de gérer les groupes de n'importe quel exposant impair $n \leq N$. L'index j augmente avec l'exposant n mais s'arrête finalement à la valeur N.

Notre processus interactif produira une séquence finie, indexée par j (avec $1 \leq j \leq N$)

(5.1) $$\text{d'entiers impairs } \mathrm{N}_j, \text{avec } N_1 = N = |G|, N_{j+1} = 2^{N_j} - 1$$

(5.2) d′ensembles S_j avec $|S_j| = Nj, \;\; S_1 = G, \;\; S_{j+1} = (2^{S_j})^*$

(5.3) de corps réels k_j avec $k_1 = \mathbb{Q}$ et $k_{j+1} = N_j \times N_j$ matrices sur k_j

de telle façon que k^*_{j+1} contienne les matrices inversibles scalaires $N_j \times N_j$ sur k_j. On a aussi besoin d'itérer l'extraction des racines carrées définissant la séquence des variables w_j par

(5.4) $w_j = w^2_{j+1} + w_{j+1} + 1.$

(5.5) les corps de fonctions K_j

(5.6) les liens par translation $K_j(w_j) = K_{j-1}(w_{j-1} - \sqrt{\rho_j - 1})$ pour $j > 1$

où ρ_{j+1} est une racine du polynôme du côté droit de (5.6),

(5.7) les modules $V_j = V(S_j)$ sur les corps dans (5.3) à (5.6)

(5.8) les éléments de volume $\Omega_j \in \wedge^{N_j}(V_j)$.

Les éléments inversibles de chaque algèbre agissent sur l'élément de volume par le déterminant

(5.9) $\det \; : \; GL(N_j, K_j) \to K^*_j,$

en donnant un caractère par la formule

(5.10) $\psi_j(A_j) = \det(A_j - \sqrt{\rho_j} I).$

où les ρ_j sont définis dans (5.6).

La translation $w_j \to w_j - \sqrt{\rho_j}$ induit une application affine

(5.11) $\alpha_j \; : \; K_j \to K_{j-1}$

qui est consistante avec les caractères ψ_j, de telle façon que l'on a le diagramme commutatif :

(5.12)
$$\begin{array}{ccc} GL(N_j, K_j) & \xrightarrow{\phi} & GL(N_{j-1}, K_{j-1}) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_j} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{j-1}} \\ K^*_j & \xrightarrow{\alpha_j} & K^*_{j-1} \end{array}$$

où l'application du haut est une conséquence du théorème de Cayley-Hamilton appliqué à notre contexte.

À la fin de la section 3, on explique la raison pour laquelle la formule inductive ci-dessus semble compliquée. Il y a un autre point que le lecteur pourrait trouver utile et qui concerne le diagramme commutatif (5.12) et la référence au théorème de Cayley-Hamilton. L'étape inductive de j à $j+1$ implique de remplacer un espace vectoriel par son algèbre extérieure, et une matrice A de taille $m \times m$ par les matrices $\binom{m}{r} \times \binom{m}{r}$, $A(r)$ agissant sur la $r^{\text{ième}}$ puissance extérieure. Pour tout scalaire z, la matrice translatée $A - zI$ (avec I la matrice identité) agit alors sur l'algèbre exérieure comme

$$\sum_r (-z)^{(m-r)} A(r) \tag{5.13}$$

Le déterminant de cette action est juste le polynôme caractéristique

$$\det(A - zI) \tag{5.14}$$

Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que remplacer le scalaire z par la matrice A dans (5.13) donne zéro. Bien sûr la somme (5.13) ou le déterminant dans (5.14) sont maintenant les traces ou les déterminants de matrices beaucoup plus grandes. Dans (5.14) les matrices sont de tailles qui vont de $m \times m$ à $2^m \times 2^m$. En notation moderne, le théorème de Cayley-Hamilton semble évident parce que $A - AI = 0$. Mais l'algèbre moderne a été créée principalement par Hamilton et Cayley pour faire qu'un fait profond semble évident. Une façon sophistiquée d'interpréter le théorème de Cayley-Hamilton est de dire qu'un module projectif et sa résolution de Koszul, par l'algèbre extérieure, définissent des éléments équivalents de K-théorie sur l'anneau de base.

Cela explique le diagramme commutatif (5.12), en se rappelant que $r = 0$ indexe le module résolu. Notons que l'index j dans ces formules est naturellement décroissant, impliquant une descente décroissante (finie) commençant à partir de N. L'indexation de la variable u se termine par u_0 qui correspond à l'ensemble vide (c'est la fibre du point qui est en train d'être résolu). L'élévation vers w_1 correspond au module libre défini par V.

Ainsi, nous avons en effet construit une séquence de N caractères complexes et notre objectif est de montrer qu'ils ne peuvent pas tous être triviaux. En fait, nous montrerons que le caractère ψ_N de G est non unimodulaire et par conséquent est non trivial.

L'action de G sur l'espace vectoriel V_N sur le corps de fonctions complexes K_N peut ne pas être unitaire pour n'importe quelle métrique alors qu'il peut rester cependant unimodulaire, i.e. de déterminant 1. Nous montrerons que cela ne se produit pas. La raison est qu'au moins l'une des valeurs propres λ de la matrice adéquate a un module qui est *strictement inférieur à 1.* Cela est clair à partir de la géométrie des figures 2 et 3, montrant que la corde est à l'intérieur du cercle. La déviation à partir de 1 est extrêmement petite, une estimation asymptotique grossière de la borne inférieure est

$$1 - |\lambda| \sim 2^{-N_j} \quad \text{pour de grandes valeur de } j. \tag{5.15}$$

Le déterminant est par conséquent juste inférieur à 1, et le caractère ψ_N est non trivial. C'est ce que nous avons entrepris de prouver.

Donc nous avons maintenant démontré le

Théorème 2. *Un groupe G d'ordre impair a un caractère complexe non trivial.*

Le théorème 1 est une conséquence facile du théorème 2 comme nous allons le montrer maintenant. Supposons que le théorème 1 est faux, alors il doit y avoir un groupe G d'ordre minimal impair N qui n'est pas résoluble. Appliquer le théorème 2 à G amène à une séquence exacte de groupes

$$1 \to H_1 \to G \to H_2 \to 1 \tag{5.16}$$

où $|H_1|$ et $|H_2|$ sont tous les deux inférieurs à N et par conséquent résolubles (par la supposition minimale : en fait, $H_2 \subset \mathbb{C}^*$ est nécessairement abélien). Mais alors (5.16) fournit une chaîne de sous-groupes de G, chacun étant normal dans son successeur, et avec un quotient abélien. C'est une définition de la résolubilité et cela fournit la contradiction souhaitée, établissant ainsi le théorème 1.

Ceci complète la démonstration formelle du théorème 1. Dans la dernière section ci-dessous, je ferai des commentaires sur la nature de la preuve et discuterai de ses implications.

6. Commentaires

Dans cet article, j'ai présenté une preuve courte du théorème de Feit-Thompson, en utilisant seulement des idées élémentaires d'algèbre linéaire et de théorie des nombres. La principale nouveauté a été l'utilisation d'un processus itératif basé sur des idées d'Artin et d'Hermann Weyl. Pour des raisons de simplicité, j'ai évité des idées plus sophistiquées et je suis resté dans la *lingua franca* commune à tous les mathématiciens et physiciens (excepté pour des remarques explicatives qui se sont éloignées vers l'algèbre moderne commutative). J'ai fait cela parce qu'il semblerait vraisemblable que les idées de cet article puissent s'appliquer à une classe plus étendue de problèmes, tirés de la géométrie, de la théorie des nombres et de la physique.

Pour prouver le théorème de Feit Thompson sans information arithmétique à propos de l'ordre N, on avait à utiliser le très grand nombre $M(N)$ et les bornes numériques extrêmement petites (5.15). Ce programme peut être raffiné de façon évidente de différentes manières comme on l'indique brièvement ci-dessous :

5.1 Le nombre de fois où l'on doit élever à la puissance, en remplaçant N par 2^N, est l'exposant n du groupe G, qui peut être bien plus petit que son ordre. Cela amène à toute l'arène des problèmes de type Burnside reliés au travail de Zuk.

5.2 Les entiers qui ont beaucoup de facteurs premiers sont rares, et donc les méthodes probabilistes peuvent fournir des bornes bien meilleures.

Le fait que $|G|$ soit impair a été utilisé de différentes manières, mais la stratégie générale devrait encore marcher pour des groupes d'ordre pair, et faire la lumière sur la structure de tous les groupes finis. En particulier, cela devrait fournir une meilleure compréhension du programme complet décrit dans [2].

En théorie des nombres, le dernier théorème de Fermat, démontré de façon célèbre par Andrew Wiles, est un autre défi pour ceux qui cherchent des preuves simples. Les idées de cet article offrent un espoir pour cette tâche, comme on peut le déduire de mon exposé à l'Université de Fudan.

En physique, le processus d'itération que nous avons utilisé fait intervenir une mise à l'échelle et amène aux fractals et à la renormalisation. Les très petits nombres dans (5.15) sont importants pour la théorie mais pas dans les expériences, où on peut les ignorer.

La célèbre *mer* de particules et d'anti-particules de Dirac a des niveaux d'énergie modélisés ici par des puissances positives et négatives de 2, quand on exprime N dyadiquement. Est également relié à la mécanique quantique le fait que les points du cercle unité correspondant aux racines de l'unité, utilisés dans nos extensions de corps, définissent des polygones convexes d'une manière similaire à ce qui est fait dans [9].

J'espère illustrer cela dans des publications à venir avec des collègues plus jeunes. Mais plusieurs de mes articles précédents ont déjà utilisé les idées dans différents contextes. La non-existence d'une structure complexe sur la 6-sphère est traitée dans deux articles séparés [4] [6]. Une application en chimie faisant intervenir les éléments remarquables que sont l'hélium 4 et l'hélium 3 est décrite dans [3].

Il y a d'importants problèmes en topologie algébrique qui sont pertinents. Le premier d'entre eux est la solution maintenant ancienne du problème de l'invariant de Hopf par J.F. Adams et la courte preuve ultérieure dans mon article avec Adams [7]. Plus récemment, un théorème similaire mais plus profond à propos de l'invariant de

Kervaire a été (presque) complètement résolu par Hill, Hopkins et Ravenel [8]. Il est probable que les méthodes du présent article amèneront pareillement à une preuve plus courte.

L'article [8] est né à partir d'idées des théories des cordes et j'en anticipe des applications significatives dans cette direction. Ma tentative d'écriture d'un court article avec Greg Moore [5] s'adaptera, je l'espère, naturellement dans ce paradigme.

Le processus d'Artin a amené à des sous-groupes et son itération a amené à des micro-sous-groupes, beaucoup étudiés en physique, indiquant que notre modèle fournit un bon paradigme à toutes les échelles.

Finalement, je commenterai la finitude. La preuve du théorème 1 a utilisé, de façon essentielle, la finitude de l'ordre N du groupe. Il sera très intéressant de rechercher ce qui se passe quand on permet à N de croître à l'infini. En théorie des nombres, étudier ce qui se passe lorsque $N \to \infty$ a été le problème fondamental depuis les époques d'Euler et Riemann mais, comme cela est bien connu, on a besoin d'estimations plus précises maintenant.

En physique, garder N fini entraîne un cut-off de l'énergie et laisser $N \to \infty$ amène à des problèmes conceptuels difficiles et non résolus.

Il semble clair que des qualités logiques sérieuses sont nécessitées dans le processus de calcul des limites (à la fois en théorie des nombres et en physique). Cela nous ramène à la grande controverse d'il y a une centaine d'années entre Brouwer, Hilbert, Weyl et Gödel. En fin de compte, cette controverse dépend de notre compréhension des nombres réels.

Remerciements.

J'ai une dette envers tous ceux qui ont corrigé des erreurs ou fait des suggestions utiles, notamment envers Thomas Espitau. Mais je dois particulièrement remercier Graeme Segal, avec qui j'ai écrit précédemment de nombreux articles pertinents. Finalement, je remercie Andrew Ranicki d'Edimbourg pour son assistance technique, ainsi que Joseph Malkoun de Beyrouth et Carlos Zapata-Carratala d'Edimburgh.

Références

[1] Walter Feit, John G. Thompson, *Solvability of groups of odd order.* Pacific J. Math., vol. 13, n° 3 (1963).

[2] Ronald Solomon, *A brief history of the classification of the finite simple groups.* American Mathematical Society. Bulletin. New Series, 38 (3): 315-352 (2001).

[3] Michael F. Atiyah, *Geometric Models of Helium.* Modern Physics Letters A, vol 32, n° 1 (2017).

[4] Michael F. Atiyah, *The Non-Existent Complex 6-Sphere.* arXiv:1610.09366 (2016) https://arxiv.org/pdf/1610.09366.pdf.

[5] Michael F. Atiyah, Gregory W. Moore, *A Shifted View of Fundamental Physics.* Singer 85 J.Diff. Geometry vol 15 (2011).

[6] Michael F. Atiyah, *Understanding the 6-sphere.* The paper will be published in a Springer Book in the same special collection of Hilbert Books of 1917 about Foundations of Mathematics and Physics (2017).

[7] John F. Adams, Michael F. Atiyah, *K-Theory and the Hopf Invariant.* The Quarterly Journal of Mathematics, Volume 17, Issue 1, Pages 31-38 (1964).

[8] Michael A. Hill, Michael J. Hopkins, Douglas C. Ravenel, *On the non-existence of elements of Kervaire invariant one.* Annals of Mathematics, Pages 1-262, Volume 184, Issue 1 (2016).

[9] Michael F. Atiyah, Andrew N. Pressley, *Convexity and Loop Groups.* Progress in Mathematics 36 (1983), 33-64.

[10] Michael F. Atiyah, *Riemann surfaces and spin structures.* Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4 (1971), 47-62.

[11] Michael F. Atiyah, Raoul Bott, *Yang-Mills Equations over Riemann Surfaces.* Phil. Trans. R. Soc Lond, A 308, (1982), 523-615

Michael Atiyah
m.atiyah@ed.ac.uk
École de mathématiques
Université d'Edinburgh
Building James Clerk Maxwell
Buildings du RoiKing
Route Peter Guthrie Tait
Edimbourg EH9 3FD
Écosse, Royaume-Uni.

L'incroyable efficacité des mathématiques

Dominique Lambert

En 1905, peu après avoir écrit l'article fondateur de la relativité restreinte, une conséquence de son travail précédent vient à l'esprit d'Albert Einstein : la masse serait une mesure de l'énergie contenue dans un corps. "La chose est plaisante et séduisante à considérer ; mais Dieu n'est-il pas en train d'en rire et me mène-t-il par le bout du nez ?", écrit-il. Quelques semaines plus tard, Einstein publie la démonstration d'une formule au destin imprévisible : $E = mc^2$. Dieu y a bien sûr laissé la place aux mathématiques. Au-delà de cet exemple, comment renouveler l'examen de la vieille question de l'efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature ?

Les succès de la physique classique, puis de la relativité et de la mécanique quantique, ont mis en pleine lumière la fécondité des mathématiques. Aujourd'hui, cette efficacité s'étend progressivement à un grand nombre de disciplines relevant d'autres sciences de la nature ou même des sciences humaines. En biologie, par exemple, on parvient à expliquer et à classer les formes qui apparaissent sur les ailes des papillons ou sur le pelage des mammifères en utilisant des équations aux dérivées partielles. En économie, les divers types d'équilibre des marchés se caractérisent par des méthodes sophistiquées issues de la théorie des systèmes dynamiques, de la théorie des jeux ou de la topologie. Comment rendre compte de ces nouveaux succès ?

En 1960, le physicien Eugene Wigner avait publié un célèbre article au titre provocateur : "La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles". Si l'efficacité des mathématiques pose aux scientifiques et aux philosophes des sciences un problème profond, est-il vraiment judicieux, comme l'indique l'adjectif choisi par E. Wigner, de le transformer en un mystère complet ? Voire de le résoudre par une position philosophique a priori, sans avoir exploré toutes les pistes que la raison nous propose ?

Avant de nous engager sur l'une de ces pistes, attardons-nous sur cette notion d'efficacité. Comment l'appliquer aux mathématiques ? Elle signifie en premier lieu une "capacité prédictive" : les mathématiques sont efficaces dans la mesure où elles suggèrent la réalisation d'expérimentations ou d'observations, et fournissent des résultats numériques qui, à une certaine marge d'erreur près, rejoignent les résultats empiriques issus de ces expérimentations ou observations. La prédiction, par la relativité générale, de la courbure des rayons lumineux au voisinage d'une étoile est un bel exemple de cette sorte d'efficacité.

Mais l'efficacité peut être seulement liée à une "capacité rétrodictive" : dans ce sens, les mathématiques sont efficaces parce qu'elles reproduisent des résultats déjà connus en les organisant dans un formalisme concis. Les mathématiques fournissent ici des outils servant seulement à "sauver les phénomènes". L'illustration la plus éclairante de cette capacité se manifeste sans doute dans les

Magazine La Recherche n° 316, Janvier 1999.

techniques de moindres carrés, grâce auxquelles on recherche des courbes passant au plus près des points expérimentaux. Pourtant, la prédiction, et encore moins la rétrodiction, ne suffisent pas à donner une caractérisation assez fine des formalismes mathématiques que l'on voudrait qualifier d'efficaces. En effet, l'efficacité signifie aussi une "capacité explicative" et, selon le mot très juste de René Thom, "Prédire n'est pas expliquer". Pour qu'une théorie mathématique soit vraiment efficace en science, il faut qu'elle rende manifeste une explication des phénomènes, c'est-à-dire une suite d'inférences reliant leur description à des principes reconnus comme fondamentaux. La théorie de jauge qui décrit l'interaction faible en physique des particules, par exemple, n'est pas efficace seulement parce qu'elle reproduit certains résultats obtenus à la sortie des détecteurs. Elle l'est aussi parce qu'elle fournit une explication de l'existence même de cette interaction en la reliant à celle d'une symétrie locale. Remarquons que cette capacité explicative va de pair avec une capacité unificatrice : expliquer c'est aussi ramener la diversité des phénomènes à un très petit nombre de principes.

L'efficacité des mathématiques se limite-t-elle aux trois caractéristiques que nous venons d'évoquer ? Pas nécessairement. En effet, comment comprendre qu'un certain nombre de formalismes soient, à un moment donné, reconnus efficaces sans être immédiatement prédictifs ? Ils le sont alors parce qu'ils suggèrent des concepts nouveaux ou des stratégies inédites pour résoudre des problèmes difficiles. En 1918, la théorie élaborée par Hermann Weyl tentait par exemple d'unifier la gravitation et l'électromagnétisme en étendant la relativité générale : elle ne fut pas directement efficace au niveau des prédictions expérimentales, mais elle ouvrit la voie à ce qui devait devenir les théories de jauge, pierres angulaires de la physique des particules actuelle. Aujourd'hui, les prédictions issues du formalisme mathématique de la théorie des cordes ou de la géométrie non commutative ne sont pas (encore ?) empiriquement vérifiées. Cependant, on ne peut contester qu'il s'agisse là de domaines engendrant des idées ou des concepts potentiellement riches. Une théorie mathématique efficace en science est donc aussi, à un degré ou à un autre, un formalisme doué d'une sorte de "générativité conceptuelle ?".

En résumé, une théorie mathématique entièrement efficace est un formalisme doué de capacités prédictives, explicatives et génératives, autrement dit un langage permettant de décrire, d'expliquer et de maîtriser les phénomènes. Après ce détour par les définitions, nous voici confrontés de nouveau à notre question fondamentale : comment un ensemble de symboles abstraits, articulés par un jeu de règles précises, issu très souvent d'une activité purement intellectuelle, peut-il posséder de telles capacités d'adaptation au monde empirique, au monde des résultats expérimentaux ? Une telle question ne date évidemment pas d'aujourd'hui.

Jean Dieudonné introduit la distinction entre les "mathématiques vides" et les "mathématiques significatives".

Depuis l'aube de l'histoire des mathématiques, tous les grands systèmes philosophiques ont tenté de répondre à cette question, à partir de conceptions différentes de la nature même des mathématiques (voir les divers encadrés traitant des principales philosophies mathématiques).

Que sont les mathématiques pour nous aujourd'hui ? Comment les caractériser ? A première vue, elles nous apparaissent donc comme des systèmes de symboles régis par des règles, ce que les logiciens appellent des langages formels.

La programmation informatique ou les jeux de société mettent également en œuvre de tels langages. Cependant, une telle description n'est pas entièrement satisfaisante. Il est impossible de comprendre vraiment ce que font les mathématiciens en ne considérant que les expressions formelles qu'ils couchent sur le papier. Celles-ci ne sont souvent que des traductions d'intuitions, d'idées guidant leurs réflexions. D'ailleurs, les mathématiciens utilisent souvent différents types de systèmes d'axiomes pour décrire ce qu'ils estiment être la même "réalité" mathématique : un ensemble, un nombre, un espace, etc.

Ainsi, nous distinguerons les mathématiques écrites, qui peuvent être vues comme des langages plus ou moins formalisés, de la pensée mathématique qui en constitue la source. A l'évidence, pensée et langage sont étroitement liés. Nous dirons donc que le mathématicien peut, d'une part (de la pensée vers le langage), exprimer une intuition par des systèmes axiomatiques ou, d'autre part (du langage vers la pensée), capter une idée à partir de ce qu'il observe et expérimente en manipulant ses systèmes de formules. Mais distinguer entre "mathématiques-langage" et "mathématiques-pensée" ne suffit pas. Il faut ici introduire une autre distinction, surgie de l'analyse des pratiques des mathématiciens, entre "mathématiques significatives" et "mathématiques vides", selon l'expression de Jean Dieudonné. Les premières permettent de résoudre des problèmes compliqués ou fournissent des méthodes ou des idées fécondes (la théorie des groupes ou la théorie des fonctions d'une variable complexe par exemple). Les secondes sont produites par simple extension ou généralisation artificielle de théories mathématiques déjà connues, mais qui n'apportent plus d'idée nouvelle, ni ne résolvent aucun problème ou conjecture importants.

Les mathématiques peuvent donc être vues comme une véritable pensée qui s'exprime, plus ou moins adéquatement, dans un langage formalisé, et qui s'organise autour de ce que nous appelons, à la suite de Dieudonné, les mathématiques significatives. Mais comment expliquer que certaines théories soient très significatives, très fécondes, très unificatrices au niveau strictement mathématique, et d'autres moins ou même pas du tout ? Cette question n'est plus tout à fait la nôtre : il s'agit en effet de l'efficacité "mathématique" des mathématiques ! L'aborder de front est délicat, car une théorie ne se révèle féconde qu'après coup.

Pour évaluer a priori la fécondité mathématique potentielle d'une théorie, on peut tout de même risquer une caractérisation des théories significatives que nous connaissons déjà : la plupart de ces théories et, parmi elles, celles qui sont reconnues comme les plus fécondes pour aborder des problèmes compliqués, mettent en évidence de riches classes d'invariants relativement à des opérations, des transformations, des relations. Illustrons ce propos à l'aide de quelques exemples.

Considérons tout d'abord la théorie des nœuds. Pour se faire une idée de ce qu'est un nœud mathématique, il suffit d'imaginer un morceau de ficelle sur lequel on a fait un nœud plus ou moins compliqué et dont on a joint les deux bouts. Cette théorie possède aujourd'hui de nombreuses connexions avec des domaines apparemment très éloignés. Or, ce qui rend cette théorie intéressante, c'est précisément la présence d'un grand nombre d'objets mathématiques qui restent invariants lorsqu'on déforme continûment le nœud. Ces objets peuvent être des nombres, des fonctions ou des structures. La théorie des nœuds est une illustration particulièrement éclairante de la topologie qui, justement, étudie les propriétés d'objets mathématiques restant invariants lorsqu'on leur fait subir une déformation "plastique" (déformation qui, dans le cas où ces objets sont des surfaces par exemple, n'introduit aucune déchirure ni trou, voir l'encadré "La théorie des nœuds").

La théorie des fonctions à une variable complexe se révèle être un autre cadre extrêment fécond. Or, de nouveau, nous constatons qu'elle est liée à des théories très riches en invariants, par exemple la théorie dite du groupe conforme à deux dimensions : celui-ci étudie les transformations planes qui laissent invariants les angles, mais non les longueurs. Ce groupe entretient des liens étonnants avec certains systèmes intégrables, des systèmes qui peuvent être intégrés justement en raison même de l'existence d'invariants caractéristiques : les "intégrales premières".

L'activité du mathématicien contemporain comporte notamment une importante dimension de classification systématique.

Prenons ensuite un exemple algébrique. Les nombres complexes $x + iy$ sont formés à partir de deux nombres réels x et y par une sorte de processus de "doublement" de l'algèbre des réels. En continuant le processus, on engendre par doublements successifs, toute une série d'algèbres de nombres (processus dit de Cayley-Dickson). On obtient les quaternions découverts par William Rowan Hamilton, les octonions découverts par Arthur Cayley et John T. Graves, puis toute une série d'autres algèbres. Au-delà des octonions, l'analogue de la théorie des fonctions à une variable complexe n'a plus du tout la même fécondité parce que, entre autres, tout lien avec des transformations riches en invariants (des groupes par exemple) est perdue (voir l'encadré "Les nombres complexes et leurs généralisations").

Enfin, un exemple récent nous est offert par la spectaculaire démonstration démonstration du théorème de Fermat par Andrew Wiles. On sait que l'intérêt mathématique de cette démonstration réside dans le fait qu'elle réunit un grand nombre de méthodes mathématiques très fécondes. Or, sans entrer dans les détails techniques, il est intéressant de constater qu'elle repose sur la considération d'invariants associés à diverses entités mathématiques.

Changeons maintenant de point de vue et, en regardant les mathématiques “de haut”, essayons de repérer certaines caractéristiques très générales de l'activité du mathématicien contemporain. Qu'observons-nous ? Qu'elle comporte notamment une importante dimension de classification systématique. La classification consiste à déterminer des classes d'objets que l'on peut considérer comme équivalents “à une certaine transformation près”. On classe par exemple des groupes à un isomorphisme près, on classe des surfaces à un homéomorphisme près (c'est-à-dire à une transformation “plastique” près : le beignet devient alors équivalent à une tasse à café à une anse), etc. Classer, c'est donc aussi mettre en évidence des invariants caractéristiques de transformations déterminées. Nous pouvons maintenant mieux caractériser les mathématiques : d'un côté, il y a les mathématiques “vides”, définies à partir d'un jeu de relations entre symboles, ne produisant aucun ou peu d'invariants caractéristiques ; de l'autre, les mathématiques “significatives” ou “profondes” parviennent au contraire à exhiber des classes de relations ou de transformations riches en invariants. Cette caractérisation évite de confondre l'activité spécifique du mathématicien avec un jeu, gratuit et artificiel, sur des symboles, comme on a parfois tenté de le faire dans une approche par trop formaliste. Voyons maintenant comment cette analyse des mathématiques peut nous être utile pour aborder, enfin, le problème de leur efficacité dans les sciences naturelles ou humaines.

L'efficacité des mathématiques, aux divers sens repris ci-dessus, signifie au fond leur capacité à représenter de façon adéquate un fragment de réalité en anticipant son comportement. Mais comment reconnaissons-nous que quelque chose est réel ? Qu'est-ce qui confère une charge de réalité à ce que nous percevons ?

C'est dans l'expérience usuelle, mais combien complexe, de la perception visuelle qu'il nous semble possible de trouver un élément de réponse. Celle-ci nous apprend que nous identifions un objet en tant que réalité, et non comme une pure illusion, à partir du moment où nous le reconnaissons comme un invariant d'une série d'opérations physiques ou mentales. Par exemple, lorsque nous voulons savoir si ce que nous voyons est réellement un cube ou bien un autre objet, il nous suffit, pour en décider, de bouger la tête ou le corps et d'évaluer la persistance de nos sensations visuelles tout au long de ces mouvements.

La persistance d'une série d'informations lors des transformations induites par le mouvement est un critère de reconnaissance de la réalité. Les techniques d'imagerie virtuelle utilisent ce lien entre transformations spatiales et invariance pour suggérer la présence d'objets réels.

De fait, la perception n'est en aucune façon une réception immédiate et passive d'informations. Elle est élaborée sur une activité cérébrale intense du sujet percevant. Bart M. Ter Haar Romeny et Luc Florack ont montré récemment que la vision pouvait être comprise comme une opération qui utilise des invariants géométriques caractéristiques d'une image. A un niveau plus élémentaire, la reconnaissance d'un cercle, masqué partiellement par un carré, demande que l'on prolonge mentalement les arcs de cercle, ce qui signifie que l'on maintient invariant le rayon de courbure de la courbe. On pourrait ainsi montrer que, pour identifier le réel, la perception ordinaire fait un usage intensif des invariants relatifs à des transformations physiques.

L'histoire montre qu'une théorie mathématique n'est jamais efficace de manière isolée et du premier coup.

Il en va de même pour les sciences en général. Par exemple, c'est la répétabilité, la stabilité d'un signal qui fait penser à la présence d'une réalité. Au niveau théorique, on parle, en termes techniques de la covariance des lois, c'est-à-dire de l'invariance de leur forme sous des changements de référentiels : transformations de Galilée en mécanique classique, transformation de Poincaré en relativité restreinte... C'est cette covariance qui rend des “lois” susceptibles de décrire une réalité physique et de manifester qu'il ne s'agit pas d'un effet lié à un choix particulier de point de vue.

Toute reconnaissance et toute description d'un élément de réalité nécessitent donc la mise en évidence d'invariants caractéristiques d'un ensemble de transformations. Or nous avons vu que les mathématiques significatives étaient précisément caractérisées par l'existence de riches classes d'invariants. Ces mathématiques prolongent en quelque sorte le processus qui est déjà en jeu dans la perception ordinaire, c'est-à-dire la reconnaissance des éléments de réalité. Elles offrent ainsi la clé permettant l'accès à l'intuition d'une réalité qui n'est plus nécessairement visible ou tangible immédiatement. Lorsque la réalité se dérobe à notre regard, les mathématiques significatives nous en offrent encore une intuition par la puissance d'un langage riche en invariants.

Si nous comprenons maintenant la raison profonde pour laquelle les mathématiques significatives peuvent être, en principe, douées d'efficacité, notre explication est-elle parfaitement satisfaisante ? Pas tout à fait, puisque toutes les théories mathématiques significatives n'ont pas nécessairement des applications dans le domaine expérimental.

Il suffit de penser ici aux multiples essais infructueux d'extension de la relativité générale faisant appel à des théories géométriques profondes, mais ne débouchant sur aucune confirmation expérimentale importante. Comment en rendre compte ? La perspective historique est ici d'un grand secours. En réalité, les mathématiques ne sont pas du tout “neutres empiriquement”. Au cours de leur histoire, elles se sont petit à petit coadaptées à la description de pans entiers du monde des phénomènes. Une théorie mathématique n'est jamais efficace de manière isolée et du premier coup. Elle ne l'est pas du premier coup, parce qu'il faut souvent tout un travail de traduction ou d'adaptation pour qu'un formalisme significatif puisse décrire un champ de phénomènes. Elle ne l'est pas de manière isolée, parce que son efficacité provient souvent d'un lien qu'elle entretient avec d'autres théories qui ont été efficaces à leur niveau.

Pourquoi, par exemple, la relativité générale s'est-elle révélée efficace pour décrire la gravitation ? D'une part, parce qu'elle se fonde sur un formalisme décrivant des invariants (le calcul tensoriel) ; mais aussi parce que son équation fondamentale a été établie en référence à celle de Poisson, qui avait déjà amplement fait ses preuves dans la théorie classique du potentiel. Autre exemple, le formalisme de la mécanique quantique : il est efficace parce qu'il se fonde d'une part sur certaines mathématiques significatives (la théorie des algèbres d'opérateurs, la théorie des espaces de Hilbert, etc.), mais aussi parce que la mécanique quantique s'enracine, à l'origine, dans la description effective, et réussie, des spectres d'atomes par J.J. Balmer et J.R. Rydberg. On sait par ailleurs, entre autres grâce aux profonds travaux d'Alain Connes du Collège de France, que la structure formelle de la mécanique quantique peut être obtenue en "déformant" celle qui caractérise la mécanique classique. Contrairement à l'opinion couramment répandue, l'efficacité de la mécanique quantique n'est pas étrangère à celle de la mécanique classique. Plus généralement, l'efficacité des mathématiques significatives ne devient donc effective que par le biais d'infiltrations empiriques qui adaptent progressivement certaines parties de ces mathématiques (mais non pas toutes probablement) à la description des régularités phénoménales. Nous avons établi plus haut un rapprochement entre les mathématiques significatives et la perception. Ce que nous venons de décrire le confirme. En effet, l'efficacité de la perception usuelle n'est pas non plus immédiate. La réussite de l'acte perceptif n'est acquise qu'au terme d'un apprentissage par le contact avec le monde extérieur. De la même manière, on pourrait dire que les formalismes mathématiques "apprennent" à saisir des morceaux de réalités empiriques au cours d'un processus historique. On apprend à reconnaître un champ gravifique sous une métrique, un champ électromagnétique sous des formes différentielles, une particule élémentaire sous une représentation d'un groupe, etc.

Mais cela ne s'est pas fait immédiatement par une sorte de dérivation a priori comme celle dont rêvait Arthur Eddington dans sa Fundamental Theory. Celuici espérait déduire la forme des lois, et même la valeur des constantes physiques fondamentales, à partir de pures considérations algébriques.

Pour comprendre l'efficacité des mathématiques, il est donc important de maîtriser le processus de production de représentations mentales (idées, concepts, images, etc.) susceptible de se traduire en formalismes riches en invariants. Un apport considérable à cette dimension du problème a été offert ces derniers temps par les travaux de Stanislas Dehaene et de Jean-Pierre Changeux, qui ont ouvert des voies pour la compréhension du substrat neuronal à partir duquel germent les capacités mathématiques élémentaires (représentation des nombres naturels, opérations arithmétiques...).

L'efficacité des mathématiques ne paraît pas plus mystérieuse que la réussite (ou l'échec) de la perception usuelle.

Mais il convient aussi de saisir les dédales du processus historique qui, progressivement, tisse des liens bilatéraux étroits entre les mathématiques et les sciences naturelles ou humaines. La perception usuelle est affaire d'inné et d'acquis, la découverte du monde empirique par le biais des mathématiques significatives l'est également : elle procède d'une part, d'une capacité mentale, innée et conditionnée par l'évolution, qui permet à l'être humain de s'accrocher à des éléments de réalité empiriques, et, d'autre part, d'une capacité acquise par un long apprentissage historique, par une lente genèse qui, par infiltrations d'informations empiriques, coadapte les mathématiques à une description des champs phénoménaux.

L'efficacité des mathématiques (ou leur inefficacité), que l'on oublie trop souvent de prendre en considération), selon les divers sens que nous lui avons donnés, ne semble ni déraisonnable ni mystérieuse, En tout cas elle ne paraît pas plus mystérieuse que la réussite (ou l'échec) de la perception usuelle ou du processus d'acquisition de connaissances en général. L'activité mathématique significative nous apparaît, au fond, comme une sorte d'extension de la capacité perceptive, trouvant son expression spécifique dans un langage formalisé. Comme dans la perception, où l'on croit accrocher les éléments de réalité alors qu'il ne s'agit que d'illusions d'optiques, il existe des domaines significatifs des mathématiques qui n'appréhendent aucun élément de réalité empirique. Pour percevoir, il faut d'abord tourner son regard vers l'objet, il faut en quelque sorte préparer la perception. De même, les mathématiques significatives ne deviennent efficaces que si elles sont préparées à rencontrer les données empiriques. Tout un travail d'adaptation et de traduction est souvent utile pour qu'une théorie mathématique abstraite puisse rejoindre les objectifs des sciences. Dans ce contexte, on comprend aisément que certains domaines soient l'objet de mathématisations moins efficaces que d'autres. En effet, pour qu'une mathématisation soit efficace, il faut que le domaine étudié exhibe des invariants naturels associés à des ensembles de relations, de transformations. On comprend dès lors que la physique soit mathématisable efficacement, car les observations qu'elle considère sont établies sur de nombreux invariants : énergie-moment angulaire. Par contre il n'est pas évident d'affirmer que l'économie ou la sociologie soient entièrement mathématisables, sauf dans les domaines de phénomènes où l'on peut précisément mettre en évidence des invariants caractéristiques (les points fixes définissant l'équilibre des marchés, par exemple). Aujourd'hui, une compréhension profonde de l'origine des mathématiques, de leur nature et de leur efficacité ne peut plus s'obtenir en partant d'une philosophie toute faite. Il nous faut rebâtir un cadre philosophique qui s'enracine dans une analyse détaillée des mathématiques elles-mêmes et des conditions concrètes de leur production.

En résumé, celles-ci se donnent à nous d'abord par une étude du processus historique qui a engendré les mathématiques que nous connaissons à l'heure actuelle : elles se révèlent aussi en tenant compte du fait que les mathématiques ne naissent pas n'importe où, mais bien dans des cerveaux possédant certaines caractéristiques qui, maintenant, sont à portée de la méthodologie scientifique elle-même. Cet essai est une invitation à reprendre ce problème classique en suivant conjointement l'axe historique et celui de la neurobiologie de la connaissance. L'origine des domaines les plus significatifs, les plus profonds, des mathématiques pourrait bien être l'extension progressive - coadaptée, de temps à autre, à des domaines empiriques - de capacités cognitives élémentaires permettant à l'humain de reconnaître et de se représenter des éléments de réalité. Cela expliquerait pourquoi il existe une étonnante connivence entre les arts plastiques et les mathématiques. L'origine des mathématiques n'est peut-être pas à chercher d'abord et avant tout en Grèce, mais dans tous ces lieux où l'homme, s'éveillant à la pensée, a tracé sur la pierre les symboles qui "font voir" le réel auquel il se retrouvait confronté... Le problème de l'efficacité des mathématiques relève donc de disciplines qui débordent fortement les limites des mathématiques ou de la physique théorique proprement dites. C'est peut-être pour cela que le scientifique qui se cantonne au strict domaine des formalismes aura toujours tendance à lui reconnaître un parfum de mystère ou de déraison !

Textes des encarts

Le physicien Eugene Wigner a écrit que l'efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles lui apparaissait "déraisonnable".

La capacité prédictive de la relativité générale d'Einstein a été très tôt démontrée avec l'observation de la courbure des rayons lumineux au voisinage d'une étoile.

"Prédire n'est pas expliquer" : avec cette formule, René Thom illustre sa prédilection pour les approches qualitatives dans les sciences.

Les considérations sur des invariants sont au cœur de l'une des plus spectaculaires réussites des mathématiques contemporaines : la démonstration du théorème de Fermat par Andrew Wiles.

PYTHAGORISME

Pour le pythagorisme, l'essence même du monde physique est mathématique, Les pythagoriciens admettaient que le nombre (naturel) est le fondement de toute la réalité matérielle, et cela, en partie, parce que les nombres peuvent se représenter par des "figures" (nombres triangles, carrés, pentagones..). Dans sa forme moderne, le pythagorisme consiste à affirmer que la structure du réel physique (particules, champs, espace-temps, etc.) est identiquement mathématique. Les mathématiques ne sont pas une description de la réalité au moyen de symboles, elles sont l'expression même de la structure de la réalité, le langage même du réel. Cette conception doit affronter les critiques suivantes : ne confond-on pas réalité et description de la réalité, le symbole et la réalité qu'il représente ? Comment peut-on donner un sens précis au concept de "structure du réel en soi" indépendamment de tout observateur ? Comment expliquer que toutes les mathématiques ne trouvent pas nécessairement d'applications ? Dans une telle conception, l'efficacité des mathématiques ne pose aucun problème, elle est automatique.

EMPIRISME

La modélisation des régularités empiriques constitue ici le moteur du développement mathématique. Les mathématiques sont donc des “formes” extraites de la nature.
Le problème majeur de cette conception est qu'elle n'explique pas comment un certain nombre de concepts des mathématiques contemporaines se sont développés sans aucune connexion apparente et directe avec les sciences de la nature (la notion de “catégorie”, par exemple). Dans ce contexte, l'efficacité des mathématiques s'explique par le fait qu'elles ont toujours un rapport plus ou moins direct avec des descriptions de phénomènes.
Illustres représentants : Aristote, J. Fourier.

PLATONISME

On peut en donner deux interprétations :
(1) les mathématiques constituent un monde d'idées indépendantes du monde des phénomènes,
(2) elles forment un langage hybride, ou intermédiaire, qui permet, à partir du sensible, de viser des idées, des concepts dont le sensible n'est qu'un pâle reflet.
Le platonisme rend bien compte du fait que les mathématiciens ont souvent l'impression de découvrir un monde conceptuel “déjà-là”, qu'ils n'inventent pas et qui s'impose à eux. Le problème d'une telle conception est le statut d'un monde de pures idées et son indépendance par rapport au monde matériel. L'efficacité des mathématiques ne peut se comprendre ici qu'en admettant une sorte d'harmonie préétablie entre le monde phénoménal et le monde mathématique, ainsi qu'un contact très spécial entre la pensée du mathématicien et ce monde des idées pures.
Illustres représentants : G. Cantor, K. Gödel, R. Penrose, A. Connes.

FORMALISME ET LOGIQUE

Pour les formalistes, les mathématiques constituent simplement un jeu avec des symboles. Ce point de vue ignore que les mathématiciens ne construisent pas leurs théories de manière arbitraire, qu'ils sont souvent guidés par des logiques conceptuelles internes ou par des résultats obtenus dans les sciences de la nature. L'activité mathématique ne peut se situer seulement au niveau de la syntaxe (manipulation de symboles vides de sens suivant des règles plus ou moins arbitraires), elle véhicule constamment du sens, des interprétations. Hourya Sinaceur a bien montré que la pratique mathématique est fondée sur des allers et retours entre les systèmes axiomatiques et les modèles qui les interprètent. Selon cette conception, il est difficile de comprendre pourquoi les mathématiques s'appliquent. En effet, comment expliquer que les résultats, obtenus à partir d'un jeu de société aux règles arbitrairement définies, puissent nous donner jusqu'à la $25^{\text{ème}}$ décimale la masse de l'électron ?
Illustres représentants : D. Hilbert (au moins dans certaines de ses déclarations, mais pas nécessairement dans sa pratique effective), Bourbaki.

Dans la ligne du formalisme, le logicisme prétend dériver toutes les mathématiques de concepts purement logiques. En fait, les mathématiques sont beaucoup plus riches que la logique qui n'en est qu'une branche particulière et non le fondement ultime.
Illustres représentants : G.Frege, B. Russell.

NATURALISME

Les mathématiques sont liées à des capacités psychologiques ou neurophysiologiques du sujet humain. Elles peuvent être acquises au cours du développement de l'homme : par exemple, l'enfant acquiert, au contact de son environnement, certaines notions mathématiques fondamentales (relation, opération...) ; le contact de l'homme avec le monde le pousse, au cours de son histoire, à forger des outils intellectuels pour résoudre des problèmes d'arpentage, de dénombrement. Mais les mathématiques pourraient aussi être liées à des capacités innées de son cerveau. Les capacités de dénombrement ou de représentation spatiale par exemple, qui ont une haute valeur adaptative, seraient inscrites profondément dans la structure du cerveau humain avant tout contact évolué de celui-ci avec le monde. C'est l'évolution qui serait alors responsable de la mise en place progressive des fondements de l'activité mathématique. Ces théories sont particulièrement intéressantes car elles relient les mathématiques à des capacités scientifiquement analysables du sujet humain. Mais il faut qu'elles expliquent aussi l'émergence des concepts évolués des mathématiques contemporaines, qui n'ont pas directement une haute valeur adaptative. L'efficacité des mathématiques serait alors liée à celle des fonctions cognitives des sujets, comprises comme fonctions biologiques.
Illustres représentants : J. Piaget, J.-P. Changeux, S. Dehaene.

LA THEORIE DES NOEUDS

Un nœud mathématique est une courbe nouée et fermée dans l'espace euclidien usuel. Il peut être caractérisé par une série d'invariants topologiques, c'est-à-dire des objets mathématiques (nombres, fonctions, structures, ...) qui ne changent pas lorsqu'on fait subir au nœud des transformations qui ne sectionnent pas le nœud. Par exemple, le nombre minimal de croisements des brins d'une projection "régulière" du nœud sur un plan est un invariant topologique, autour du nœud (le "complémentaire du nœud"). On voit rapidement que certaines peuvent être déformées continûment sans rencontrer aucun obstacle, tandis que d'autres sont gênées lors de telles déformations par les brins du nœud. Deux lacets peuvent être identifiés s'ils sont déformables l'un dans l'autre par une transformation continue. Et l'ensemble des classes de lacets ainsi identifiés peuvent être munies d'une loi de composition qui en fait un groupe (au sens algébrique). Intuitivement, on comprend que ce groupe contient des informations topologiques importantes concernant le nœud. Il s'agit en fait d'un invariant topologique, appelé groupe de Poincaré du complémentaire du nœud ou premier groupe d'homotopie du complémentaire du nœud.

LES NOMBRES COMPLEXES ET LEURS GENERALISATIONS

Les nombres complexes sont de la forme : $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels et i est tel que $i^2 = -1$. La multiplication des nombres complexes est commutative ($zw = wz$) et associative ($(uv)w = u(vw)$). La richesse des concepts définis à partir des nombres complexes est liée à la relation que le plan complexe entretient avec la sphère dite de Riemann via la projection stéréographique.

On obtient les quaternions de Hamilton en "doublant" l'algèbre des nombres complexes. Ils sont de la forme : $q = x + iy + jv + kw$ où i, j et k sont tels que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ $ki = -ik = j$. On peut aussi écrire : $q = z_1 + jz_2$ où $z_1 = x + iy$ et $z_2 = v - iw$ sont deux nombres complexes. Par rapport aux nombres complexes, la multiplication des quaternions perd la propriété de commutativité mais demeure associative (b).

Les octonions de Cayley-Graves sont définis comme l'algèbre de nombres $g = x_0 + e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 + e_4x_4 + e_5x_5 + e_6x_6 + e_7x_7$ où les x_i sont des réels, les e_i sont tels que $e_i^2 = -1$ et les règles de multiplication sont symbolisées par un dessin (par exemple, $e_5e_1 = e_6, e_7e_5 = -e_2, e_6e_5 = e_1, ...$).

La multiplication des octonions est non commutative et non associative, mais elle conserve une propriété assez proche de l'associativité appelée l'alternativité. Si l'on continue le processus de "doublement", on perd cette propriété.