

Une nouvelle preuve du théorème de Morley Alain Connes

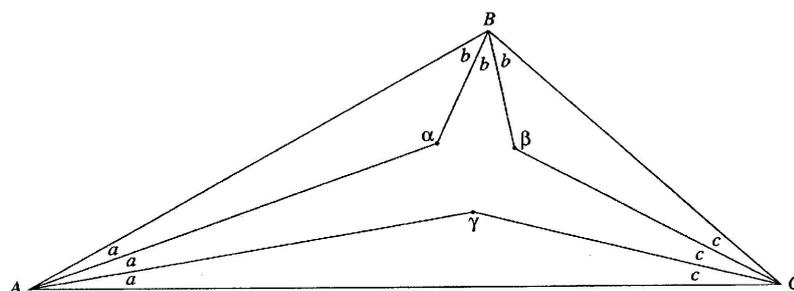
Cela fait maintenant 22 ans que l'IHÉS m'a offert l'hospitalité. J'ai appris ici la plupart des mathématiques que je connais, principalement grâce à des conversations impromptues au déjeuner avec des visiteurs ou des membres permanents.

Quand je suis arrivé, j'étais obnubilé par mon propre travail et j'ai éprouvé un sentiment d'humilité en réalisant à quel point je comprenais peu ce dont il était alors question dans les discussions habituelles. Dennis Sullivan prit soin de moi, et me donna un cours rapide en géométrie qui a influencé ma manière de penser pour le reste de ma vie.

C'est aussi à Bures, grâce aux physiciens, que j'ai compris la véracité d'une phrase de J. Hadamard sur la profondeur des concepts mathématiques venant de la physique :

“Non cette nouveauté à la vie courte qui trop souvent ne peut influencer que le mathématicien rivé à ses propres préoccupations, mais cette nouveauté infiniment féconde qui jaillit de la nature des choses.”

Pour donner un peu l'esprit de l'atmosphère de compétition conviviale caractéristique de l'IHÉS, j'ai choisi l'exemple spécifique d'une conversation que nous avons eue lors d'un déjeuner au printemps dernier et qui m'a amené à un nouveau résultat amusant.



Vers 1899, F. Morley prouva un théorème remarquable sur la géométrie élémentaire des triangles Euclidiens :

“Etant donné un triangle A, B, C, les intersections 2 à 2, α, β, γ des trissectrices sont les sommets d'un triangle équilatéral” (cf. Fig. 1).

L'un de nous mentionna ce résultat pendant le déjeuner et l'attribua (par erreur) à Napoléon. Bonaparte avait effectivement étudié les mathématiques dans son jeune âge et, en plus d'apprendre l'anglais, il enseignait les mathématiques au fils de Las Cases pendant son exil de Sainte Hélène à Longwood.

C'était la première fois que j'entendais parler du résultat de Morley et quand je suis rentré chez moi, suivant l'un des conseils de Littlewood, j'ai commencé à chercher une preuve, non pas dans les livres mais dans ma tête. Ma seule motivation en plus de la curiosité était le challenge évident “c'est l'un des rares exploits de Bonaparte auquel je devrais pouvoir m'attaquer”. Après quelques tentatives infructueuses, j'ai vite réalisé que les intersections de trissectrices consécutives sont les points fixes de produits

1. Ce texte provient de l'ouvrage fêtant les 40 ans de l'IHÉS intitulé Les relations entre les mathématiques et la physique théorique, IHÉS, 1998, p. 43-46. On peut également le lire ici : http://www.numdam.org/article/PMIHES_1998__588_43_0.pdf.

2. Collège de France, Paris, et IHES, 91440 Bures-sur-Yvette, France.

de 2 rotations g_i autour des sommets du triangle (rotations d'angles égaux à deux tiers des angles correspondant du triangle). Il était alors naturel de chercher la symétrie g du triangle équilatéral comme un élément du groupe Γ engendré par les trois rotations g_i . Maintenant, il était facile de construire un exemple (en géométrie sphérique) qui montre que le théorème de Morley ne peut s'appliquer en géométrie non-euclidienne, de telle façon que la preuve devait utiliser des propriétés euclidiennes particulières du groupe des isométries.

Du coup, je passais quelque temps à essayer de trouver une formule de g en fonction des g_i , en utilisant la construction simple (toute isométrie d'angle $2\pi/n$, $n \geq 2$ est automatiquement d'ordre n), de plein d'éléments d'ordre 3 dans le groupe Γ , comme $g_1g_2g_3$. Après beaucoup d'efforts, je réalisais que c'était en vain (*cf.* Rem. 2 ci-dessous) et que le groupe qui intervient est le groupe affine de la droite, plutôt que le groupe d'isométrie du plan.

Le but de cette courte note est de donner une preuve conceptuelle du théorème de Morley comme propriété théorique du groupe de l'action du groupe affine sur la droite. Il sera valide pour tout corps (commutatif) k (de caractéristique arbitraire, même si en caractéristique 3, l'hypothèse du théorème ne peut être remplie). Ainsi soit k un tel corps et G le groupe affine sur k , en d'autres termes, le groupe des matrices 2×2 $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ où $a \in k, a \neq 0, b \in k$. Pour $g \in G$, posons

$$(1) \quad \delta(g) = a \in k^*.$$

Par construction, δ est un morphisme de G dans le groupe multiplicatif k^* des éléments non nuls de k , et le sous-groupe $T = \text{Ker } \delta$ est le groupe des translations, i.e. le groupe additif de k . Chaque $g \in G$ dans G définit une transformation,

$$(2) \quad g(x) = ax + b \quad \forall x \in k,$$

et si $a \neq 1$, elle admet un et un seul point fixe,

$$(3) \quad \text{fix}(g) = \frac{b}{1-a}.$$

Prouvons le simple fait suivant :

Théorème. Soient $g_1, g_2, g_3 \in G$ tels que g_1g_2, g_2g_3, g_3g_1 et $g_1g_2g_3$ ne sont pas des translations et posons $j = \delta(g_1g_2g_3)$. Les conditions suivantes sont équivalentes,

$$a) \quad g_1^3g_2^3g_3^3 = 1.$$

$$b) \quad j^3 = 1 \text{ et } \alpha + j\beta + j^2\gamma = 0 \text{ où } \alpha = \text{fix}(g_1g_2), \beta = \text{fix}(g_2g_3), \gamma = \text{fix}(g_3g_1).$$

Preuve. Posons $g_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. L'égalité $g_1^3g_2^3g_3^3 = 1$ est équivalente à $\delta(g_1^3g_2^3g_3^3) = 1$, et $b = 0$, où b est la partie translationnelle de $g_1^3g_2^3g_3^3$. La première condition est exactement $j^3 = 1$. Notons que $j \neq 1$ par hypothèse. Alors on a

$$(4) \quad b = (a_1^2 + a_1 + 1) b_1 + a_1^3 (a_2^2 + a_2 + 1) b_2 + (a_1a_2)^3 (a_3^2 + a_3 + 1) b_3.$$

Un calcul évident, en utilisant le fait que $a_1a_2a_3 = j$ donne,

$$(5) \quad b = -ja_1^2a_2(a_1 - j)(a_2 - j)(a_3 - j)(\alpha + j\beta + j^2\gamma),$$

où, α, β, γ sont les points fixes

$$(6) \quad \alpha = \frac{a_1b_2 + b_1}{1 - a_1a_2}, \beta = \frac{a_2b_3 + b_2}{1 - a_2a_3}, \gamma = \frac{a_3b_1 + b_3}{1 - a_3a_1}.$$

Maintenant, $a_k - j \neq 0$ puisque par hypothèse, les produits deux à deux des g_j ne sont pas des translations. Ainsi, et quelque soit la caractéristique de k , nous obtenons que a) \Leftrightarrow b).

Corollaire. Théorème de Morley.

Démonstration. Prenons $k = \mathbb{C}$ et définissons g_1 comme la rotation de centre A et d'angle $2a$, où $3a$ est l'angle BAC et de manière similaire pour g_2 et g_3 . On a $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = 1$ puisque chaque g_i^3 peut être exprimé comme le produit des symétries le long des côtés consécutifs. De plus, pour une raison similaire $\alpha = \text{fix}(g_1 g_2), \beta = \text{fix}(g_2 g_3), \gamma = \text{fix}(g_3 g_1)$ sont les intersections des trissectrices. Ainsi, de a) \Rightarrow b), on obtient $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ qui est une caractérisation classique des triangles équilatéraux.

Remarque 1. Sans altérer les cubes g_1^3, g_2^3, g_3^3 , on peut multiplier chaque g_i par une racine cubique de 1, on obtient de cette manière les 18 triangles équilatéraux non-dégénérés des variantes du théorème de Morley.

Remarque 2. Nous montrerons maintenant qu'en général, la rotation g qui permute cycliquement les points α, β, γ n'appartient pas au sous-groupe Γ de G engendré par g_1, g_2, g_3 . Sous l'hypothèse du théorème, on peut supposer que le corps k contient une racine cubique de l'unité non triviale, $j \neq 1$, et que de ce fait, sa caractéristique n'est pas égale à 3. La rotation qui permute cycliquement les points α, β, γ est ainsi l'élément de G donné par,

$$(7) \quad g = \begin{bmatrix} j & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, 3b = (1-j)(\alpha + \beta + \gamma).$$

Maintenant, pour tout élément $g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ du groupe Γ engendré par g_1, g_2, g_3 , on a les polynômes de Laurent P_i en les variables a_j tels que,

$$(8) \quad b = b_1 P_1 + b_2 P_2 + b_3 P_3.$$

Ainsi, en exprimant, avec les notations ci-dessus b_i en termes de α, β, γ ,

$$(9) \quad \begin{aligned} b_1 &= (1+j)^{-1} (a_3^{-1} & (a_3-j)\alpha - & (a_1-j)\beta + a_1 & (a_2-j)\gamma) \\ b_2 &= (1+j)^{-1} (a_2 & (a_3-j)\alpha + a_1^{-1} & (a_1-j)\beta - & (a_2-j)\gamma) \\ b_3 &= (1+j)^{-1} (- & (a_3-j)\alpha + a_3 & (a_1-j)\beta + a_2^{-1} & (a_2-j)\gamma) \end{aligned}$$

nous obtenons les polynômes de Laurent Q_i tel que,

$$(10) \quad b = (a_3-j)\alpha Q_1 + (a_1-j)\beta Q_2 + (a_2-j)\gamma Q_3.$$

On peut alors supposer qu'on a trouvé des polynômes de Laurent Q_i tel que pour tout $a_1, a_2, a_3 \in k^*$, avec $a_1 a_2 a_3 = j$, et tout $\alpha, \beta, \gamma \in k$ avec $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, l'identité suivante est vérifiée,

$$(11) \quad (1-j)(\alpha + \beta + \gamma) = 3((a_3-j)\alpha Q_1 + (a_1-j)\beta Q_2 + (a_2-j)\gamma Q_3).$$

Nous choisissons alors $a_1 = j, a_2 = j, a_3 = j^2, \alpha = 0, \beta = -j, \gamma = 1$ et obtenons une contradiction. En passant au corps des fonctions sur k , cela suffit à démontrer que, en général, $g \notin \Gamma$.

Paragraphe 3.3 de la référence 10 ^[1] de l'article d'Alain Connes et Henri Moscovici ^[2]

2. Comptage de nombres premiers et fonction zeta

On commence par rappeler certains faits très connus à propos de la fonction zeta de Riemann. On ne démontre pas ces assertions classiques ici, mais le lecteur intéressé peut trouver beaucoup de ressources bibliographiques sur ce sujet, par exemple en consultant le livre très agréable d'Edwards [126], dans lequel l'article original de Riemann, qui sera principalement suivi ci-dessous, est reproduit.

L'article séminal de Riemann "Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée" (cf. [255], ainsi que [126]) établit une relation remarquable entre la distribution des nombres premiers et les zéros de la fonction zeta donnée par le produit eulérien

$$(2.1) \quad \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \Re(s) > 1$$

où p parcourt l'ensemble des nombres premiers.

La fonction définie par (2.1) a un prolongement analytique dans le plan complexe et est régulière partout, excepté en un pôle simple $s = 1$ où

$$\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \gamma,$$

avec γ la constante d'Euler.

Le prolongement analytique est obtenu dans [255] en utilisant la fonction Γ

$$\Gamma(s) n^{-s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx,$$

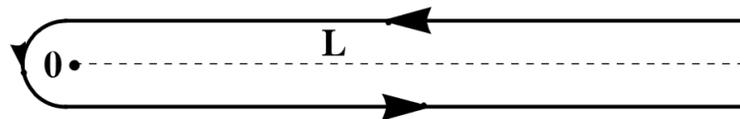


FIGURE 1 : Contour L

qui donne

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s) \sum_{n=1}^\infty n^{-s},$$

dont il découle, en utilisant $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \pi/\sin(\pi s)$, que

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_L \frac{(-x)^s dx}{e^x - 1 x},$$

¹A. Connes, M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, (American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, 2008), vol. 55.

²A. Connes, H. Moscovici, *The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta*, PNAS 2022, Vol. 119, n° 22. Transcription et traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2024

où

$$(-x)^s = e^{s \log(-x)}, \quad \Im \log(z) \in (-\pi, \pi), \quad \forall z \notin -\mathbb{R}_+$$

et l'intégration s'effectue le long du chemin orienté L de $+\infty$ à $i\epsilon$ dans $\mathbb{R} + i\epsilon$, puis dans le sens des aiguilles d'une montre en passant autour de l'origine dans \mathbb{C} et enfin en retournant de $-i\epsilon$ à $+\infty$ dans $\mathbb{R} - i\epsilon$.

En utilisant la formule du résidu de Cauchy, Riemann démontre l'équation fonctionnelle

$$(2.2) \quad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos(s\pi/2) \Gamma(s) \zeta(s),$$

qu'il écrit en une forme plus symétrique comme la symétrie

$$(2.3) \quad \zeta^*(s) = \zeta^*(1-s).$$

de la fonction zeta "complète"

$$(2.4) \quad \zeta^*(s) = \Gamma(s/2) \pi^{-s/2} \zeta(s).$$

Après avoir écrit ζ^* comme la transformée de Mellin de la fonction theta de Jacobi, $\vartheta(x) = \sum_1^\infty e^{-n^2\pi x}$,

$$(2.5) \quad \zeta^*(s) = \int_0^\infty \vartheta(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

ce qui donne une autre preuve de l'équation fonctionnelle (2.3). Riemann introduit alors la fonction ξ , qu'il définit par

$$(2.6) \quad \xi(t) = \frac{s(s-1)}{2} \Gamma(s/2) \pi^{-s/2} \zeta(s), \quad s = \frac{1}{2} + it$$

La fonction $\xi(t)$ est une fonction entière, paire et à valeur réelle pour t réel,

$$\xi(t) \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il a été énoncé dans l'article de Riemann (et prouvé rigoureusement par Hadamard) que la fonction ξ peut aussi s'écrire sous la forme

$$(2.7) \quad \xi(t) = \xi(0) \prod_\alpha \left(1 - \frac{t}{\alpha}\right),$$

le produit s'effectuant sur les zéros $\{\alpha \in \mathbb{C} : \xi(\alpha) = 0\}$. L'hypothèse de Riemann, toujours non démontrée au moment où le présent livre est écrit, énonce que tous ces zéros sont réels.

La fonction zeta $\zeta(s)$ s'annule pour tous les nombres entiers négatifs pairs $s = -2, -4, \dots, -2n, \dots$. On les nomme habituellement les *zéros triviaux*. Le problème difficile est celui de la localisation des *zéros non triviaux* restant. De (2.6), il découle qu'ils sont de la forme

$$\rho = \frac{1}{2} + i\alpha, \quad \xi(\alpha) = 0$$

et l'hypothèse de Riemann énonce qu'ils sont tous situés sur la droite $\Re(z) = 1/2$.

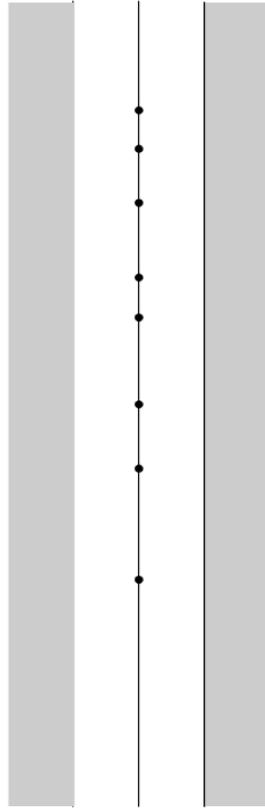


FIGURE 2. Zéros de zeta

La relation explicite entre les zéros de zeta et les nombres premiers s'exprime dans les *formules explicites*. Dans sa forme originale due à Riemann, la formule explicite exprime la *fonction de comptage des nombres premiers*

$$(2.8) \quad \pi(x) = \#\{p \text{ un nombre premier} : p \leq x\}.$$

en fonction du logarithme intégral

$$(2.9) \quad \text{Li}(x) = \int_0^x \frac{du}{\log(u)} \sim \sum_k (k-1)! \frac{x}{\log(x)^k}.$$

(ce que Gauss avait trouvé numériquement comme fournissant le comportement dominant de $\pi(x)$) et des zéros non triviaux ρ de zeta selon la formule

$$(2.10) \quad \pi'(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} + \log \xi(0),$$

avec

$$(2.11) \quad \pi'(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \dots + \frac{1}{n}\pi(x^{1/n}) + \dots$$

Le *théorème des nombres premiers* affirme que la fonction de comptage a le comportement asymptotique suivant

$$(2.12) \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}.$$

L'hypothèse de Riemann mentionnée ci-dessus est équivalente à l'assertion que le reste dans

$$(2.13) \quad \pi(x) = \text{Li}(x) + R(x)$$

est d'un ordre de grandeur de

$$(2.14) \quad |R(x)| = O(\sqrt{x} \log(x)).$$

Notons que la qualité principale de (2.10) n'est pas de donner une formule explicite pour la fonction de comptage des nombres premiers. Une telle formule explicite existe [201] et est donnée (pour $n > 5$) par

$$(2.15) \quad \pi(n) = 2 + \sum_{k=5}^n \frac{e^{2\pi i \Gamma(k)/k} - 1}{e^{-2\pi i/k} - 1}$$

Il est clair cependant qu'à cause de la présence du grand nombre $\Gamma(k) = (k-1)!$ dans l'exponentielle $e^{2\pi i \Gamma(k)/k}$, la formule (2.15) est de peu d'utilité pour trouver une estimation asymptotique telle que celle qui est souhaitée dans (2.14).

Il y a de nombreuses variantes de la formule explicite (2.10). Par exemple, en désignant par $\Lambda(n)$ la fonction de von Mangoldt

$$(2.16) \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, p \text{ un nombre premier, } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et $\psi(x)$ est la fonction de Chebyshev-von Mangoldt,

$$(2.17) \quad \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

i.e. la fonction en escalier qui démarre à zéro et qui effectue un saut de $\log p$ à chaque puissance p^k . La valeur de $\psi(x)$ en un point de discontinuité est *définie* comme la moyenne

$$(2.18) \quad \psi(x) = \frac{\psi(x+0) + \psi(x+0)}{2}$$

Alors, une instance de la formule explicite est ([240] Théorème 3.8)

$$(2.19) \quad \psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(1-x^{-2}), \quad \forall x > 1.$$

Ici la somme s'effectue pour tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ et se comprend comme la limite

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \sum_{|\Im(\rho)| < E} \frac{x^{\rho}}{\rho}.$$

Toutes ces formules sont des cas particuliers de la formule explicite de Weil qui s'énonce mieux dans le cadre des fonctions de test sur le groupe des classes d'idèles. On rappellera cette formule ultérieurement dans le § 8 et l'un des résultats principaux de ce chapitre, en plus de fournir une interprétation spectrale des zéros de la fonction zeta, est de donner un paradigme géométrique dans lequel la formule

explicite de Weil devient une formule de trace.

Dans son article, Riemann donne une estimation asymptotique pour le comptage des zéros non triviaux de zeta dans une certaine région du plan complexe, notamment la fonction

$$(2.20) \quad N(E) = \#\{\rho \mid \zeta(\rho) = 0, \text{ et } 0 < \Im(\rho) \leq E\}.$$

Comme résultat préliminaire à l'étude de la fonction $\pi(x)$, Riemann énonce que cette fonction de comptage a pour comportement asymptotique

$$(2.21) \quad N(E) \sim \frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi} - \frac{E}{2\pi}.$$

Cela a été démontré rigoureusement par von Mangoldt, et peut être vu en considérant l'intégrale

$$(2.22) \quad 2(N(E) - 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{d\zeta^*(s)}{\zeta^*(s)}$$

en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre le long du contour du rectangle

$$R = \{s : -\epsilon \leq \Re(s) \leq 1 + \epsilon, -E \leq \Im(s) \leq E\}$$

(cf. Figure 3). En utilisant l'expression (2.4), on obtient (cf. par ex. [126], § 6.6)

$$(2.23) \quad N(E) = \frac{\theta(E)}{\pi} + 1 + \frac{1}{\pi} \Im \int_C \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds,$$

où C est la partie de ∂R de $1 + \epsilon$ vers $1/2 + iE$ (cf. Figure 3) et $\theta(E)$ est la fonction angulaire de Riemann-Siegel, donnée par

$$(2.24) \quad \theta(E) = -\frac{E}{2} \log \pi + \Im \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i \frac{E}{2} \right).$$

avec $\log \Gamma(s)$ pour $\Re(s) > 0$ la branche du logarithme qui est réelle pour s réel. Cela représente la phase de zeta sur la droite critique dans la mesure où la fonction $Z(t)$,

$$\zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) = e^{-i\theta(t)} Z(t),$$

est de valeur réelle pour $t \in \mathbb{R}$. Pour cette fonction $\theta(t)$ on a (cf. par ex. [126] § 6.5)

$$\theta(t) = \frac{t}{2} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{48t} + \frac{7}{5760t^3} + \dots$$

dont l'estimation pour $N(E)$ découle, en supposant que la taille du terme d'erreur soit contrôlée

$$(2.25) \quad N_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi} \Im \int_C \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds = \frac{1}{\pi} \Im \log \zeta \left(\frac{1}{2} + iE \right),$$

où l'on suppose que E n'est pas la partie imaginaire d'un zéro, alors que la branche du logarithme est uniquement définie par (2.25) et est 0 en $iE + \infty$. La contribution principale au terme d'erreur

$N_{\text{osc}}(E)$ provient de l'intégrale dans la portion du contour C allant de $1 + iE$ à $\frac{1}{2} + iE$ et on peut montrer (cf. [240] Théorème 4.7) que

$$N_{\text{osc}}(E) = O(\log E).$$

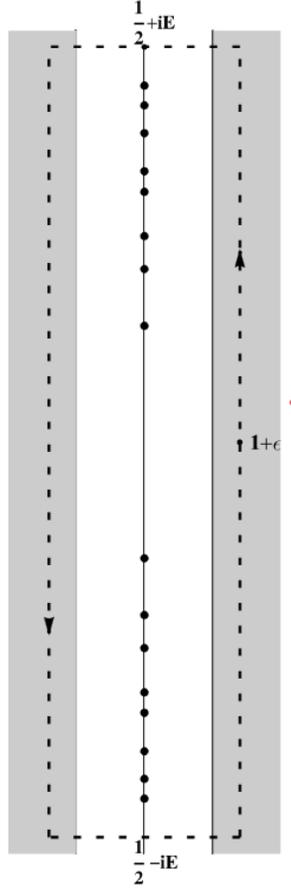


FIGURE 3. Le rectangle R et le chemin C

3. Mécanique classique et mécanique quantique de zeta

Le résultat ci-dessus de Riemann sur l'estimation de $N(E)$ lorsque $E \rightarrow \infty$ dont il est question dans le § 2 (cf. [255], [126]) peut être formulé comme l'assertion que la fonction $N(E)$ de (2.20) a une décomposition de la forme

$$(2.26) \quad N(E) = \langle N(E) \rangle + N_{\text{osc}}(E),$$

où la partie oscillante $N_{\text{osc}}(E)$ est de l'ordre de $O(\log E)$ et est donné par l'expression

$$(2.27) \quad N_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi} \Im \log \zeta \left(\frac{1}{2} + iE \right),$$

alors que la partie moyenne

$$(2.28) \quad \langle N(E) \rangle = 1 + \frac{\theta(E)}{\pi},$$

a un développement asymptotique de la forme

$$(2.29) \quad \langle N(E) \rangle = \frac{E}{2\pi} \left(\log \frac{E}{2\pi} - 1 \right) + \frac{7}{8} + o(1).$$

On a les expressions équivalentes suivantes pour $\langle N(E) \rangle$.

LEMME 2.1. *La fonction $\langle N(E) \rangle$ satisfait*

$$(2.30) \quad \langle N(E) \rangle = 1 - \frac{E}{2\pi} \log \pi + \frac{1}{\pi} \Im \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i \frac{E}{2} \right),$$

et

$$(2.31) \quad \langle N(E) \rangle = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^E \left(-\log \pi + \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{s}{2} \right) \right) ds$$

PREUVE. La première égalité découle de (2.28) et (2.24). La seconde découle de

$$\begin{aligned} d \Im \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i \frac{s}{2} \right) &= \frac{1}{2i} d \left(\log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i \frac{s}{2} \right) - \log \Gamma \left(\frac{1}{4} - i \frac{s}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re \frac{\Gamma'}{\Gamma} \left(\frac{1}{4} + i \frac{s}{2} \right) ds \end{aligned}$$

alors que $\Im \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i \frac{s}{2} \right) = 0$ pour $s = 0$ par le choix de la branche du logarithme. □

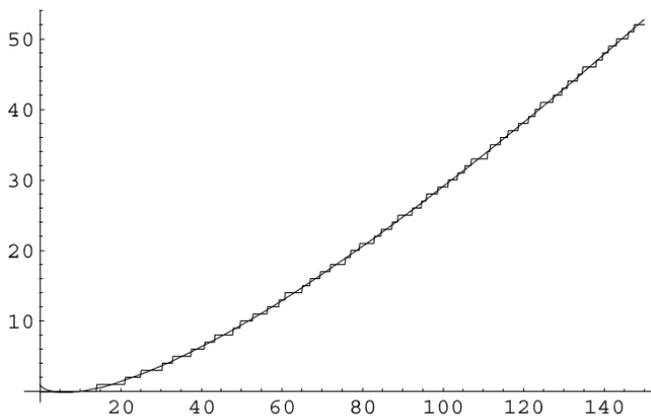


FIGURE 4. Le nombre de zéros de $N(E)$ et son approximation par $\langle N(E) \rangle$.

3.1. Raies spectrales et flot de Riemann.

Il a été observé par Berry dans [18] qu'il y a une similarité intéressante entre l'expression dans (2.26) et la formule semi-classique pour le nombre des valeurs propres

$$(2.32) \quad N(E) = \# \text{ valeurs propres de } H \text{ dans } [0, E]$$

d'un opérateur hamiltonien H obtenu en “quantifiant” un système dynamique classique donné par un espace de phases symplectique X et une fonction hamiltonienne h . Dans ce modèle, la partie moyenne $\langle N(E) \rangle$ est calculée comme un volume dans l'espace des phases, notamment

$$(2.33) \quad \langle N(E) \rangle := \text{volume symplectique } \{x \in X \mid h(x) \leq E\}$$

alors que la partie oscillante est donnée par

$$(2.34) \quad N_{\text{osc}}(E) = N(E) - \langle N(E) \rangle.$$

Dans le cas hamiltonien, $N_{\text{osc}}(E)$ est le même que dans la théorie des matrices aléatoires, avec des statistiques dictées par les symétries du système.

Cette analogie a amené à l'idée (cf. [18]) de l'existence d'un certain “flot de Riemann” hypothétique. Ce serait un système hamiltonien (X, h) qui ferait découler l'équation (2.29) de l'équation (2.33). Il concorderait également avec la formule heuristique, obtenue naïvement en appliquant la fonction $\frac{1}{\pi} \mathfrak{J} \log$ à la formule du produit eulérien en utilisant (2.27),

$$(2.35) \quad N_{\text{osc}}(E) \sim \frac{-1}{\pi} \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{m/2}} \sin(m E \log p)$$

avec la formule semi-classique pour la partie oscillante $N_{\text{osc}}(E)$ dans le cas hamiltonien. Cette dernière est de la forme

$$(2.36) \quad N_{\text{osc}}(E) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{\gamma_p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{m\lambda_p}{2}\right)} \sin(m E T_{\gamma}^{\#}),$$

où les γ_p sont les orbites primitives ergodiques du système, $T_{\gamma}^{\#}$ est la période de l'orbite primitive γ_p , la variable m correspondant au nombre de traversées de cette orbite, et les $\pm\lambda_p$ sont les exposants d'instabilité correspondant.

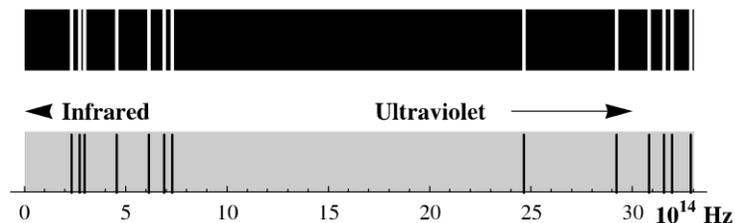


FIGURE 5. Spectre des fréquences d'émission et d'absorption de l'hydrogène.

On peut obtenir des informations intéressantes sur les propriétés d'un tel flot de Riemann conjectural en comparant les formules (2.35) et (2.36). Pourtant, alors que les différents termes dans (2.35) semblent avoir une signification claire dans cette analogie, il y a un sérieux problème qui surgit du signe global “moins” en tête de (2.35), qui ne peut pas être pris en compte dans (2.36), même si on essaye

de jouer avec les indices de Maslov.

Une solution à ce problème de signe a été donnée par Connes dans [71]. Une interprétation physique peut en être donnée. En physique quantique, les spectres observés sont de deux sortes (cf. Figure 5). Les spectres d'émission apparaissent comme des raies brillantes sur un fond sombre et sont engendrées par les photons émis des fréquences correspondantes. Les spectres d'absorption apparaissent comme des raies sombres sur un fond clair, et ressemblent à des “négatifs” des spectres d'émission. Il y a une différence fondamentale entre les deux sortes de spectres due à la présence du spectre continu de la lumière blanche qui est le fond de tous les spectres d'absorption. Les lignes sombres correspondent à des lacunes dans le spectre continu dues à l'absorption de ces photons qui ont la bonne fréquence pour induire des transitions atomiques pendant leur trajectoire de la source de la lumière blanche à la plaque photographique. Alors que les atomes excités ré-émettent des photons de la même fréquence, les directions de ces photons réémis sont aléatoires et ce manque de cohérence est responsable des lignes sombres d'“absorption” dans le spectre. Ces lignes sombres ne seraient pas visibles si elles étaient étroites, mais elles ont une épaisseur naturelle due à plusieurs causes, la plus simple étant la durée de vie de l'état excité et la présence des cutoffs infrarouge et ultraviolet. Pour dire cela mathématiquement, comme nous en discuterons par la suite, parler d'un spectre d'absorption est semblable au fait de considérer un conoyau et on verra que la présence des cutoffs joue également un rôle important dans cette formulation.

3.2. Forme symplectique et hamiltonien d'échelle.

On commence par calculer le volume symplectique (2.33) pour le système mécanique classique avec comme espace des phases $T^*\mathbb{R}$, l'espace cotangent de la droite réelle, et l'hamiltonien classique $h(q, p)$ qui engendre le groupe des transformations d'échelle. Plus précisément, on considère le produit $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$ du groupe additif \mathbb{R} par son groupe dual $\widehat{\mathbb{R}}$ et on utilise le bicaractère

$$(2.37) \quad e_{\mathbb{R}}(p, q) = \exp(-2\pi ipq)$$

pour identifier $\widehat{\mathbb{R}}$ et \mathbb{R} . Dans cette notation, $\frac{\partial}{\partial q}$ correspond à $-2\pi ip$ et le générateur $iq \frac{\partial}{\partial q}$ des transformations d'échelle correspond à $2\pi qp$. Par conséquent, l'hamiltonien $h(q, p)$ est de la forme

$$(2.38) \quad h(q, p) = 2\pi qp.$$

La forme canonique symplectique

$$(2.39) \quad \omega = dp \wedge dq$$

est le produit de la mesure de Haar sur \mathbb{R} par la mesure de Haar duale sur $\widehat{\mathbb{R}}$.

Désignons par X le quotient de $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$ par la symétrie discrète $(p, q) \mapsto (-p, -q)$. Le volume symplectique d'un sous-ensemble de X est la moitié du volume symplectique de sa pré-image dans $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$. L'hamiltonien $h(q, p)$ n'est pas positif, mais ceci est conforme à la symétrie $\frac{1}{2} + iE \mapsto \frac{1}{2} - iE$ existant entre les zéros de partie imaginaire positive et négative de ζ . Cette symétrie montre que nous devrions comparer

$$(2.40) \quad 2N(E) = \#\{\rho \mid \zeta^*(\rho) = 0, |\Im \rho| \leq E\}$$

avec le volume symplectique de $|h| \leq E$ dans (2.33), i.e. avec le volume symplectique de la région satisfaisant

$$|qp| \leq \frac{E}{2\pi}.$$

On introduit un cutoff Λ à la fois dans l'infrarouge et dans l'ultraviolet en imposant les conditions

$$(2.41) \quad |q| \leq \Lambda, \quad p \leq \Lambda.$$

On calcule alors le volume symplectique $v(E)$ du sous-ensemble B de X :

$$(2.42) \quad B = \{(q, p) : |h| \leq E, \quad |q| \leq \Lambda, \quad |p| \leq \Lambda\}.$$

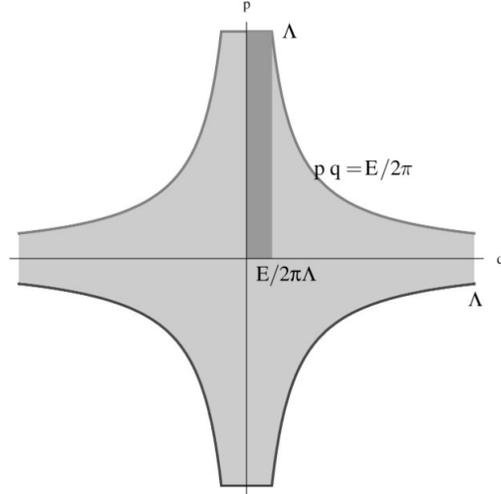


FIGURE 6. Le sous-ensemble B du plan (q, p) .

Par construction, B est l'image dans X de l'union de quatre régions congruentes à son intersection B_+ avec le premier quadrant, comme on le voit sur la Figure 6.

Par conséquent, le volume symplectique $v(E)$ de la région B dans X est donné par deux fois le volume symplectique de B_+ ,

$$v(E) = 2\text{Vol}(B_+).$$

Remarquons que B_+ est l'union du rectangle de côtés $\frac{E}{2\pi\Lambda}$ et Λ et de la région sous le graphe, dans le domaine allant de $q = \frac{E}{2\pi\Lambda}$ à $q = \Lambda$ de l'hyperbole $2\pi pq = E$. On suppose que $\Lambda > \left(\frac{E}{2\pi}\right)^{1/2}$. Par conséquent, on a

$$(2.43) \quad \int_{B_+} \omega = \frac{E}{2\pi} + \int_{E/2\pi\Lambda}^{\Lambda} \frac{E}{2\pi q} dq.$$

Cela donne

$$(2.44) \quad \text{Vol}(B_+) = \frac{E}{2\pi} \times 2 \log \Lambda - \frac{E}{2\pi} \left(\log \frac{E}{2\pi} - 1 \right).$$

Dans cette formule, on voit que le terme global $\langle N(E) \rangle$ de (2.28) apparaît avec un signe *moins*, sous la forme

$$(2.45) \quad - \frac{E}{2\pi} \left(\log \frac{E}{2\pi} - 1 \right).$$

Dans le § 5 ci-dessous, on raffine cette approximation semi-classique et on obtient dans la proposition 2.17 exactement $-\langle N(E) \rangle$ de (2.28) (et en particulier, le terme additionnel $\frac{7}{8}$) comme une correction quantique.

Les termes dans $\log \Lambda$ sont de la forme $\frac{E}{2\pi} \times 2 \log \Lambda$. Cela contribue à un facteur global de 2 à $v(E)$. Maintenant $2 \times \frac{E}{2\pi} \times 2 \log \Lambda$ est le volume symplectique dans la région cutoff

$$(2.46) \quad W(E, \Lambda) = \{(\lambda, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid \lambda \in [\Lambda^{-1}, \Lambda], \quad |\theta| \leq E\}$$

dans le produit du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* par son groupe dual $\widehat{\mathbb{R}_+^*} \simeq \mathbb{R}$. Ici on identifie $\widehat{\mathbb{R}_+^*}$ et \mathbb{R} en utilisant le bicaractère

$$(2.47) \quad \langle \lambda, \theta \rangle = \lambda^{i\theta}.$$

En fait, le produit de la mesure de Haar sur \mathbb{R}_+^* par la mesure de Haar duale sur \mathbb{R} est donné par

$$(2.48) \quad \frac{1}{2\pi} \frac{d\lambda}{\lambda} \times d\theta.$$

Par conséquent, on peut voir clairement, déjà à ce niveau grossier semi-classique, que le volume symplectique $v(E)$ pour le flot d'échelle sur X est donné par la différence

$$(2.49) \quad v(E) = \text{Vol}(W(E, \Lambda)) - 2\langle N(E) \rangle,$$

où $2\langle N(E) \rangle$ est la partie moyenne de la fonction de comptage $2N(E)$ de (2.40).

Cela suggère que le flot d'échelle sur X peut être regardé comme une première approximation d'un système classique dont la quantification amène une interprétation spectrale des zéros de zeta, non pas comme un spectre d'émission mais comme un spectre d'absorption, avec les zéros étiquetant les raies spectrales manquantes, alors que $\text{Vol}(W(E, \Lambda))$ rend compte du fond de lumière blanche.

Malgré la première difficulté, qui est de quantifier le système ci-dessus et de remplacer le calcul de l'aire simple par le comptage des modes de l'hamiltonien quantique, la principale difficulté vient du fait de devoir prendre en compte tous les termes additionnels qui entrent dans la partie oscillante de $N(E)$ comme elle est donnée dans (2.27). On va commencer par la première question, i.e. compter les modes de l'hamiltonien du système quantique.

3.3. Le système quantique et les fonctions prolate.

Passer du système classique au système en mécanique quantique remplace l'intégration de la forme

symplectique sur une région de l'espace des phases par un comptage des états quantiques dont l'énergie est en-dessous d'une certaine limite.

Le système classique (X, h) décrit dans le § 3.2 ci-dessus est facile à quantifier. L'espace de Hilbert de la mécanique quantique est simplement donné par

$$(2.50) \quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})^{\text{paire}},$$

c'est-à-dire, l'espace des fonctions *paires* de carré intégrable $f(q)$. Obliger les fonctions à être paires reflète simplement la symétrie discrète $(p, q) \mapsto (-p, -q)$ définissant X dans le paradigme classique.

L'hamiltonien H engendre le groupe des transformations d'échelle, qui est donné par la représentation naturelle ϑ_a de \mathbb{R}_+^* sur \mathcal{H} , de la forme

$$(2.51) \quad (\vartheta_a(\lambda)f)(q) = f(\lambda^{-1}q).$$

Celui-ci est unitaire après multiplication par $|\lambda|^{-1/2}$ de telle façon que la représentation

$$(2.52) \quad \lambda \mapsto |\lambda|^{-1/2}\vartheta_a(\lambda)$$

est unitaire. Pour $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on définit les opérateurs correspondant

$$(2.53) \quad \vartheta_a(h) = \int_{\mathbb{R}_+^*} h(\lambda)\vartheta_a(\lambda)d^*\lambda$$

avec $d^*\lambda = \frac{d\lambda}{\lambda}$ la mesure de Haar multiplicative sur \mathbb{R}_+^* .

Au cutoff infrarouge $|q| \leq \lambda$, correspond la projection orthogonale P_Λ sur le sous-espace

$$(2.54) \quad P_\Lambda = \{f \in L^2(\mathbb{R})^{\text{paire}} \mid f(q) = 0, \forall q \text{ avec } |q| > \Lambda\}.$$

Pour définir le cutoff ultraviolet $|p| \leq \Lambda$, on utilise la transformée de Fourier, qui est définie comme suit pour les groupes localement abéliens :

DÉFINITION 2.2. *Soient A, B une paire de groupes localement abéliens dont les mesures de Haar sont da, db . Soit $\alpha(a, b)$ un bicaractère qui donne un isomorphisme $B \sim \widehat{A}$ de B avec le dual de A . Alors la transformation de Fourier \mathbf{F}_α est définie par*

$$(2.55) \quad \mathbf{F}_\alpha(f)(b) := \int \alpha(a, b)f(a)da.$$

Le cutoff ultraviolet est donné par la projection orthogonale \widehat{P}_Λ donnée par le conjugué

$$(2.56) \quad \widehat{P}_\Lambda = \mathbf{F}_{e_{\mathbb{R}}} P_\Lambda \mathbf{F}_{e_{\mathbb{R}}}^{-1}.$$

Ici $\mathbf{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ est la transformation de Fourier associée au bicaractère $e_{\mathbb{R}}$ introduit ci-dessus en (2.37).

La première difficulté qu'on rencontre, qui est inhérente au système quantique, est le fait que les deux

cutoffs P_Λ et \widehat{P}_Λ ne commutent pas, par conséquent, on ne peut juste faire l'intersection de leurs domaines pour réaliser les deux cutoffs à la fois. En effet, aucune fonction non nulle sur \mathbb{R} ne peut avoir comme propriété qu'à la fois cette fonction et sa transformée de Fourier soient à support compact.

La position relative des deux projections (2.54) et (2.56) a été pour la première fois analysée dans le travail de Landau, Pollak et Slepian (cf. [246], [196], [197]) au début des années soixante, motivé par des problèmes d'ingénierie électrique.

Le résultat a été depuis considérablement précisé. Pour expliquer le point principal, rappelons d'abord au lecteur des faits bien connus sur la géométrie des paires de projections.

LEMME 2.3. *Donner une paire de projections orthogonales P_i , $i = 1, 2$ sur un espace de Hilbert \mathcal{H} est la même chose que donner une représentation unitaire du groupe diédral $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le produit libre de deux copies du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ces représentations irréductibles sont paramétrées par un angle $\alpha \in [0, \pi/2]$*

PREUVE. Aux générateurs U_i de Γ correspondent les opérateurs $2P_i - 1$. Le groupe Γ est le produit semi-direct du sous-groupe engendré par $U = U_1 U_2$ par le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, agissant par $U \mapsto U^{-1}$. Les représentations irréductibles unitaires de Γ sont paramétrées par un angle $\alpha \in [0, \pi/2]$ alors que les projections orthogonales correspondantes P_i sont associées aux sous-espaces de dimension 1, $y = 0$ et $y = x \tan(\alpha)$ dans le plan euclidien (x, y) . En particulier, ces représentations sont au plus 2-dimensionnelles. Les projections P_i sont données par

$$(2.57) \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Une représentation unitaire générale est caractérisée par un opérateur α dont la valeur est l'angle α dans le cas irréductible. Il est défini de manière unique par la condition $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ et par l'égalité

$$(2.58) \quad \sin(\alpha) = |P_1 - P_2|$$

et commute avec P_i . De façon équivalente, on a

$$(2.59) \quad P_1 P_2 P_1 = \cos^2(\alpha) P_1.$$

□

Ce que les auteurs ont fait dans les références [246], [196], [197] a consisté à analyser la position relative des projections P_Λ et \widehat{P}_Λ pour $\Lambda \rightarrow \infty$. Dans les problèmes concrets d'ingénierie électrique, cela rend possible la prise en compte de signaux qui, pour des raisons pratiques, sont de support fini à la fois selon la variable temporelle et selon la variable duale fréquentielle. Cela a eu un rôle important dans les débuts des développements de la technologie laser.

L'outil de base utilisé dans les références [246], [196], et [197] est l'existence d'un opérateur différentiel du second ordre \mathbf{W}_Λ sur \mathbb{R} , qui commute à la fois avec P_Λ et avec \widehat{P}_Λ . Cet opérateur est de la forme

$$(2.60) \quad (\mathbf{W}_\Lambda \psi)(q) = -\partial((\Lambda^2 - q^2)\partial)\psi(q) + (2\pi\Lambda q)^2 \psi(q).$$

Ici, le symbole ∂ dénote la différentiation ordinaire en une variable. Pour être plus précis, (2.60) définit un opérateur symétrique ayant comme domaine naturel l'espace de Schwartz.

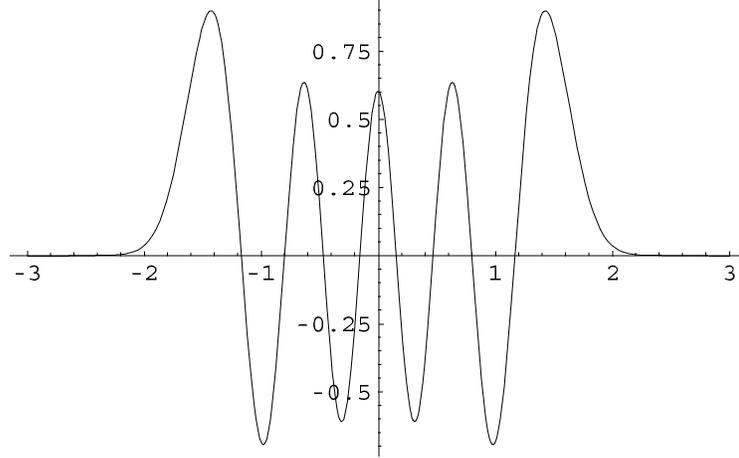


FIGURE 7. La fonction ψ_8 pour $\Lambda = 3$.

Rappelons (cf. [183]) que par définition, les indices de déficience $n_{\pm}(T)$ d'un opérateur symétrique T sont les dimensions de $\ker(T^* \pm i)$. On peut montrer que l'opérateur \mathbf{W}_{Λ} a deux indices de déficience égaux à 4 et qu'il admet une unique extension auto-adjointe qui commute avec le groupe diédral Γ associé aux projections P_{Λ} et \widehat{P}_{Λ} . On utilise la même notation \mathbf{W}_{Λ} pour désigner cet opérateur auto-adjoint. Il commute avec la transformation de Fourier $\mathbf{F}_{e_{\mathbb{R}}}$.

Si l'on restreint la variable au domaine $[-\Lambda, \Lambda]$, l'opérateur \mathbf{W}_{Λ} a un spectre discret simple. Ses propriétés ont été étudiées il y a longtemps. Il apparaît dans la factorisation de l'équation de Helmholtz

$$(2.61) \quad \Delta \psi + k^2 \psi = 0$$

dans l'un des peu nombreux systèmes de coordonnées séparables dans l'espace euclidien de dimension 3, appelé le système des *coordonnées sphéroïdales prolate*. Les valeurs propres $\chi_n(\Lambda)$, $n \geq 0$ de \mathbf{W}_{Λ} , listées en ordre croissant $\chi_{n+1} > \chi_n$, sont simples et positives. Les fonctions propres correspondantes sont appelées les fonctions d'onde sphéroïdales prolate. Puisque le produit $P_{\Lambda}\widehat{P}_{\Lambda}P_{\Lambda}$ commute avec \mathbf{W}_{Λ} , ce sont des fonctions propres de $P_{\Lambda}\widehat{P}_{\Lambda}P_{\Lambda}$. Par les résultats de [246], [196] et [197], les valeurs propres λ_n de l'opérateur $P_{\Lambda}\widehat{P}_{\Lambda}P_{\Lambda}$ sont simples. De plus, si on note $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_n > \dots$ leur liste en ordre décroissant, on a

$$(2.62) \quad P_{\Lambda}\widehat{P}_{\Lambda}P_{\Lambda}\psi_n = \lambda_n\psi_n.$$

Par conséquent, les fonctions sphéroïdales prolate ψ_n sont les vecteurs propres de $P_{\Lambda}\widehat{P}_{\Lambda}P_{\Lambda}$ de valeurs propres associées non nulles.

On sait beaucoup de choses au sujet des fonctions sphéroïdales prolate ψ_n . En particulier, on peut faire en sorte qu'elles soient de valeurs réelles. Elles sont paires pour n pair et impaires pour n impair, et elles ont exactement n zéros dans l'intervalle $[-\Lambda, \Lambda]$. On les normalise pour que leur norme L^2 soit égale à 1.

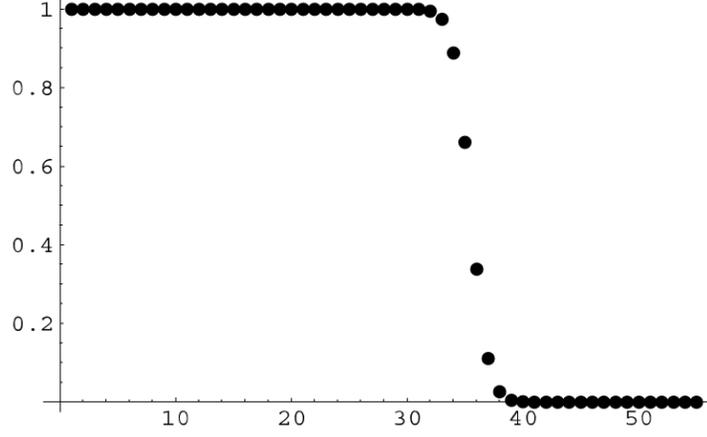


FIGURE 8. Les valeurs propres λ_n pour $\Lambda = 3$

Nous sommes seulement intéressés par les ψ_n pour les valeurs paires de n , puisque dans notre espace de Hilbert de mécanique quantique, nous nous restreignons aux fonctions paires. Lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$, la fonction ψ_n converge vers la fonction de Hermite-Weber Ω_n d'ordre n (cf. [272]).

Les valeurs propres λ_n se comportent qualitativement de la façon suivante, comme une fonction du cutoff. Elles restent proches de la valeur 1, $\lambda_n \sim 1$, jusqu'à ce que n tombe dans un intervalle I de taille $\sim \log \Lambda$ autour de la valeur $4\Lambda^2$. Leur comportement dans cet intervalle est gouverné par la relation (cf. [273], [198])

$$(2.63) \quad \lambda_n = (1 + e^{\pi\delta})^{-1},$$

où δ est la solution de plus petite valeur absolue de l'équation

$$(2.64) \quad (n + 1/2)\pi = 4\pi\Lambda^2 + \delta \log(8\pi\Lambda^2) - \delta(\log(|\delta/2|) - 1).$$

Au-delà de l'intervalle I , les valeurs propres λ_n tendent très rapidement vers zéro. Un graphique est présenté sur la Figure 8.

Pour la paire de projections P_Λ et \widehat{P}_Λ , on obtient de cette façon les valeurs propres α_n de l'opérateur d'angle α du Lemme 2.3 par (2.59), i.e.

$$(2.65) \quad \cos^2(\alpha_n) = \lambda_n.$$

Cela montre que l'angle α_n est principalement 0 jusqu'à un intervalle I de taille $\sim \log \Lambda$ autour de la valeur $n \sim 4\Lambda^2$. Il se décale alors de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et reste principalement égal à $\frac{\pi}{2}$ pour toutes les valeurs plus grandes de n . Cela montre clairement comment imposer à la fois un cutoff ultraviolet et un cutoff infrarouge en se restreignant au sous-espace B_Λ de \mathcal{H} étendu par les ψ_{2n} pour $2n \leq 4\Lambda^2$. Aucun soin particulier n'est requis pour définir précisément une borne supérieure, puisqu'on peut montrer que, pour tout n dans l'intervalle I considéré ci-dessus et pour tout $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, on a

$$(2.66) \quad \|\vartheta_a(h)\psi_n\| = O(\Lambda^{-\rho})$$

pour un certain $\rho > 0$, et avec $\vartheta_a(h)$ comme dans (2.53). On dénote par Q_Λ la projection orthogonale sur $B_\Lambda \subset \mathcal{H}$.

Venons-en maintenant au problème du comptage du nombre des états du système mécanique quantique, dont l'hamiltonien H voit son énergie limitée par $|H| \leq E$ (i.e. le générateur des transformations d'échelle). L'hamiltonien H est le générateur de l'action d'échelle de \mathbb{R}_+^* sur \mathcal{H} et on identifie, comme précédemment, le groupe dual de \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R} en utilisant le bicaractère (2.47).

LEMME 2.4. *Soit N_E la projection spectrale de l'action d'échelle de \mathbb{R}_+^* sur \mathcal{H} , associée à l'intervalle $[-E, E]$ dans le groupe dual \mathbb{R} de \mathbb{R}_+^* . Elle est donnée par*

$$(2.67) \quad N_E = \vartheta_a(h_E), \quad \text{avec } h_E(u) = |u|^{-1/2} \frac{1}{2\pi} \int_{-E}^E |u|^{is} ds,$$

avec $\vartheta_a(h_E)$ défini par (2.53).

PREUVE. Comme on l'a vu précédemment, (2.52) donne une action unitaire de \mathbb{R}_+^* sur \mathcal{H} , de telle façon que (2.67) découle de l'identité

$$\int \lambda^{it} k(\lambda) d^* \lambda = \mathbf{1}_{[-E, E]}(t)$$

pour la fonction $k(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-E}^E \lambda^{is} ds$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

On peut maintenant formuler le problème du comptage des états quantiques du flot d'échelle de la façon suivante.

REMARQUE 2.5. Compter le nombre d'états quantiques de l'hamiltonien H sujet à la contrainte $|H| \leq E$ revient à calculer la dimension de l'intersection proche³ des projections Q_Λ et N_E . Cela est donné par $\text{Tr}(Q_\Lambda N_E)$.

Pour calculer $\text{Tr}(Q_\Lambda N_E)$ pour de grandes valeurs de Λ , on peut utiliser l'analyse de l'opérateur d'angle entre P_Λ et \widehat{P}_Λ décrit précédemment avec (2.66) et remplacer Q_Λ par

$$(2.68) \quad R_\Lambda = \widehat{P}_\Lambda P_\Lambda,$$

ce qui introduit un terme d'erreur de l'ordre de $O(\Lambda^{-\rho} \log \Lambda)$. Par conséquent, pour compter le nombre d'états quantiques dans l'intersection proche des deux projections Q_Λ et N_E , on a juste besoin de calculer

$$(2.69) \quad \text{Tr}(Q_\Lambda N_E) \sim \text{Tr}(R_\Lambda \vartheta_a(h_E)).$$

Il reste par conséquent à calculer $\text{Tr}(R_\Lambda \vartheta_a(h))$. On applique alors le résultat suivant ([71], Théorème 3), qui est valide pour tout corps local et est un cas particulier du théorème 2.36 qui sera prouvé dans

³?

la suite, au § 7.2.

THÉORÈME 2.6. *Soit $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^*)$ une fonction paire ($h(-u) = h(u)$) à support compact, et $\vartheta_a(h)$ défini comme dans (2.53). Alors $R_\Lambda \vartheta_a(h)$ est un opérateur de classe trace. De plus, pour $\Lambda \rightarrow \infty$, on a*

$$(2.70) \quad \text{Tr}(R_\Lambda \vartheta_a(h)) = 2h(1) \log \Lambda + \int' \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u + o(1).$$

On souhaite appliquer cette formule à la fonction $h = h_E$ de (2.67). Notons que cette fonction n'est pas à support compact, donc en principe, le résultat ne s'applique pas directement. On doit prendre garde à ce point technique dans le § 5.1 ci-après. Dans (2.70), l'intégrale est singulière en $u = 1$ et le théorème 2.6 sélectionne une valeur principale spécifique, dénotée par \int' , dont nous allons discuter en détail dans le § 4 ci-dessous.

Références

- [18] M. Berry, Riemann's zeta function: a model of quantum chaos, Lecture Notes in Physics, Vol.263, Springer-Verlag, 1986.
- [71] A. Connes, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function. *Selecta Math.* (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.
- [126] H.M. Edwards, Riemann's zeta function, Dover, 2001.
- [183] T. Kato, Perturbation theory of linear operators *Grundlehren der Mathematischen*, Vol.132, Springer, 1966.
- [196] H.J. Landau, H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty II, *Bell Syst. Tech. J.* Vol.40 (1961).
- [197] H.J. Landau, H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty III, *Bell Syst. Tech. J.* Vol.41 (1962).
- [198] H.J. Landau, H. Widom, Eigenvalue distribution of time and frequency limiting, *J. Math. Analysis and Appl.* Vol.77 (1980), 469–481.
- [201] H. Laurent, Sur la théorie des nombres premiers. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 126 (1898) 809–810.
- [240] S. Patterson, An introduction to the theory of the Riemann Zeta-function, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [246] H.O. Pollak, D. Slepian, Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty, *Bell Syst. Tech. Journal*, Vol.40 (1961), 43–64.

- [255] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatder Königl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre 1859 (1860) 671–680. (English translation in M.H.Edwards “Riemann’s zeta function”, Dover 2001.)
- [272] R. Sips, Représentation asymptotique des fonctions de Mathieu et des fonctions d’onde sphéroïdales, Trans. Am. Math. Soc. Vol.66 (1949), 93–134.
- [273] D. Slepian, Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions, J. Math. Phys. Vol.44 (1965), 99–140.

Traduction d'une interview de
Alain Connes
par
Catherine Goldstein et Georges Skandalis
© Société mathématique européenne 2008

L'entretien a été réalisé par Catherine Goldstein et George Skandalis, à Paris.

La première partie est parue dans le numéro 63, p. 25 à 30 de la Newsletter.

<https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2007-03-63.pdf>

La deuxième partie est parue dans le numéro 67, p. 29 à 33 de la Newsletter.

<https://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2008-03-67.pdf>

Y a-t-il des mathématiciens du passé dont vous vous sentez proche ?

Proche, je ne dirais pas mais il y en a un que j'admire en particulier : Galois. Il y a une caractéristique très frappante dans ses écrits ; leur formulation est très simple. Par exemple, "Prenez une équation avec n racines différentes. Puis, première affirmation, il existe une fonction rationnelle de ces racines qui prend $n!$ différentes valeurs lorsque vous permutez les racines ; et, deuxième déclaration, les racines sont des fonctions rationnelles de cette fonction". Malgré la simplicité trompeuse de leur formulation, en utilisant ces déclarations Galois réussit à aller extrêmement loin. Il écrit l'équation dont les racines sont les $n!$ différentes valeurs de la fonction rationnelle, il la divise en facteurs irréductibles, il écrit comment les racines de l'équation originale dépendent des racines de ces facteurs et il voit un groupe. Et il montre que ce groupe est indépendant de tous les choix faits en cours de route ... Pour y parvenir, il caractérise le groupe abstraitement par une propriété unique : "Une fonction des racines est rationnellement déterminée si et seulement si elle est invariante par ce groupe". C'est si simple. Je trouve fabuleux ce genre de saut utilisant le pouvoir de l'abstraction, ce saut immense dans la conceptualisation des choses. Le pouvoir de l'intuition de Galois n'est pas basé sur l'idée de

symétrie mais sur un concept d'ambigüité. Naïvement, on pourrait dire qu'il a étudié le groupe d'invariance de certaines fonctions. Mais la première étape que Galois met en œuvre est tout le contraire : il casse autant que possible la symétrie en choisissant une fonction qui n'a aucune invariance du tout. Les mathématiciens avant lui - Cardano, Lagrange - ont travaillé avec les fonctions symétriques des racines. Galois, sur les traces d'Abel, fait le contraire : il choisit une fonction avec le moins de symétrie possible. Et c'est la fonction avec laquelle il commence. Ce qui me frappe, c'est la fécondité de ces idées ; les différents formalismes que nous avons développé pour les attraper n'épuisent pas encore leur puissance. Les idées de Galois ont une clarté, une légèreté, un potentiel de réflexion qui reste non encore bien apprivoisé à ce jour et elles trouvent un écho dans l'esprit des mathématiciens jusqu'à maintenant. Elles ont engendré de grands concepts comme les catégories Tannakiennes ou la correspondance Riemann-Hilbert ... Ces idées sont très jolies mais elles sont souvent présentées avec une telle pédanterie qu'elles ressemblent à des jougs lourds et on n'a pas l'impression qu'elles ont été libérées comme l'ont été les idées de Galois. Les autres avatars des idées de Galois sont la théorie différentielle de Galois et la théorie des motifs, qui peut être considérée comme un analogue en dimension supérieure de la Théorie de Galois. Mais avons-nous vraiment compris ce que Galois avait en tête quand il écrit : "Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambigüité. Il savait voir a priori dans une relation entre des quantités ou des fonctions transcendantes quels échanges pourraient se faire, quelles quantités pourraient se substituer aux quantités de données sans que la relation puisse cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore assez développées sur ce terrain qui est immense.". Il existe d'autres exemples de mathématiciens qui m'ont vraiment aidé à un stade précoce en tant que source d'inspiration. Ce n'est pas que je me sente proche d'eux dans ce que je fais, mais j'admire ce qu'ils font. Au début, j'étais fasciné par Jacobi parce que j'ai trouvé sa façon de calculer merveilleuse. Et par von Neumann - la profondeur de ce qu'il avait découvert et la façon dont il en parlait ... Et par Tomita bien sûr. J'étais fasciné par la personnalité mystérieuse de Tomita ; c'est quelqu'un qui a réussi à éviter tous les pièges que la société tend à poser à quelqu'un d'extrêmement original. Il est devenu sourd à l'âge de deux ans. Quand il a commencé ses recherches, son directeur de thèse lui a donné un énorme livre en lui disant : "et revenez me voir une fois que vous aurez lu

ce livre.” Tomita a rencontré accidentellement son tuteur de thèse deux ans plus tard et ce dernier lui a demandé : “Comment va le livre?”, à quoi Tomita a répondu, “Oh, je l’ai perdu après une semaine”... Mais je pense que la source la plus fraîche, la plus limpide, c’est Galois. C’est très bizarre mais je n’ai jamais séparé Galois de ce puissant mélange de simplicité et de fécondité.

Voulez-vous dire quelque chose sur Choquet ?

Je me souviens des premières années où je faisais de la recherche ; je travaillais seul à la maison, mais tous les jeudis, j’assistais au séminaire de Choquet. Et il brillait par sa sagesse, son esprit. Il y avait des questions qui éclataient, c’était extrêmement ouvert. Cela m’a façonné en profondeur. Et Choquet avait quelque chose d’unique : il avait été très proche de l’école polonaise de mathématiques avant la guerre. Et donc il savait beaucoup de choses qui ne font pas partie du programme habituel des mathématiciens, mais qui sont en fait assez intéressants.

Ce n’est qu’avec Choquet par exemple que j’ai appris la théorie des ordinaux. Vous pourriez penser que cette théorie est inutile, mais c’est absolument faux. Par exemple, je me souviens d’une fois, l’IHES avait une journée portes ouvertes. Il y avait une classe de première année, des petits enfants, et parmi eux une fille avec une intelligence brillante. Et donc, après que le sujet de l’indécidabilité a été soulevé, je leur ai donné un exemple tiré de la théorie des ordinaux, de l’histoire du lièvre et de la tortue. Vous prenez un nombre N , pas trop grand (ils en avaient pris 5 ou quelque chose comme ça). Ils avaient appris à écrire des nombres dans différentes bases : 2, 3, etc. Je leur ai expliqué que l’on écrit le nombre en base 2, puis le lièvre vient et remplace tous les 2 par 3. Ainsi $5 = 2^2 + 1$ est remplacé par $3^3 + 1 = 28$..., et la tortue soustrait juste 1. Ensuite, on écrit le résultat en base 3 et le lièvre vient et remplace tous les 3 par des 4 et la tortue soustrait à nouveau 1, etc. Eh bien, le phénomène extraordinaire qui vient de la théorie des ordinaux est que la tortue gagne. Après un nombre fini d’étapes et même si vous avez l’impression que le lièvre fait des sauts absolument gigantesques chacun, au bout d’un certain temps, vous obtenez 0 !

Et ce qui est difficile à croire, c’est que cela ne peut pas être prouvé dans le cadre de l’arithmétique de Peano. La preuve utilise la théorie des ordinaux ! Vous pouvez en fait montrer que le nombre d’étapes nécessaires avant que

la tortue est plus rapide que n'importe quelle fonction de N , vous pouvez l'écrire explicitement.

Vous pouvez voir sur l'ordinateur combien d'étapes il faut pour atteindre 0. Mais la preuve que la tortue nécessite d'utiliser la théorie des ordinaux. Que faire ? Vous prenez le premier numéro et au lieu de remplacer le 2 par 3, puis par 4, etc., vous les remplacez par l'ordinal ω . Par exemple 5 est $2^2 + 1$, vous écrivez donc $\omega^\omega + 1$. Ceci est un ordinal et un ordinal est un ensemble bien ordonné et chaque séquence d'ordinaux décroissante s'arrête nécessairement. Maintenant, quand vous faites le mouvement du lièvre, cela ne change rien, mais la tortue soustrait 1, et vous obtenez de cette façon une décroissance, une séquence d'ordinaux strictement décroissante. Cela doit cesser et vous en avez la preuve. Et la preuve utilise ω ... il n'est donc pas si surprenant qu'elle dépasse l'arithmétique de Peano. C'est typique du genre de choses dont nous discutons au séminaire de Choquet.

Et c'est une culture mathématique en partie oubliée, mais qui est en fait extrêmement riche. Nous vivons dans un monde mathématique qui est de plus en plus plus monoculturel. Nous proclamons des principes pour dire quelles mathématiques sont importantes et lesquelles ne le sont pas. J'essaie de défendre la diversité. Je crois qu'il est crucial de laisser les écoles fleurir. Ceci est très important pour la santé des mathématiques.

Algèbres d'opérateur et coïncidences : comment tout a commencé ?

En 1970, je suis allé à l'école d'été des Houches [en physique], envoyé par Choquet. A cette époque, je travaillais sur l'analyse non standard mais après un certain temps, j'avais trouvé une faille dans la théorie... Le fait est que dès que vous avez un nombre non standard, vous obtenez un ensemble non mesurable. Et dans le séminaire de Choquet, ayant bien étudié l'école polonaise, nous savions que chaque ensemble que vous pouvez nommer est mesurable. Il semblait donc tout à fait voué à l'échec d'essayer d'utiliser l'analyse non standard pour faire de la physique. Mais ça me convenait comme passeport aux Houches en 1970. Et de là, j'ai été embauché comme camarade au Battelle Institute et j'ai reçu une invitation pour me rendre à Seattle. Je l'ai accepté surtout pour visiter les États-Unis, je n'ai même pas regardé le programme. Et la coïncidence qui s'est produite, c'est que je me suis arrêté à Princeton pour rendre visite à mon frère et j'ai acheté un livre, au hasard, à la librairie

de Princeton. J'ai hésité entre plusieurs livres jusqu'à ce que je tombe sur celui qui m'a fasciné, par Takesaki sur la théorie de Tomita. Et comme je savais que j'allais faire un long voyage en train, j'ai acheté le livre. Et j'ai contemplé le livre - je ne peux pas dire que je l'ai lu, c'était vraiment trop dur - pendant le voyage à travers les plaines du Middle-West. Et la coïncidence encore plus extraordinaire fut que, lorsque je suis arrivé à Seattle, le premier jour où je suis allé voir le programme de la conférence, il y avait des conférences de Takesaki sur la théorie de Tomita. A partir de ce jour, je me suis dit : "Ca y est, je ne vais à aucune autre conférence, juste à celle de Takesaki".

Ce n'est pas une attitude très scientifique...

Non, et d'ailleurs à cette époque j'étais fasciné par tout ce qui était japonais; c'était plus au niveau d'une sensibilité à quelque chose de totalement différent, que je ne connaissais pas du tout ... S'il y a une leçon à tirer, c'est que cela m'a conduit complètement hors du cercle d'idées dans lequel j'étais absorbé à l'époque. Et à ce moment-là, il y a eu une autre coïncidence, de sorte que quand je suis revenu, j'ai encore eu un coup de chance incroyable. J'avais compris un peu de la théorie de Tomita, un peu; je n'ai pas pu faire de recherche. Mais quand je suis revenu, je me suis dit que j'irais au séminaire à Paris qui traite des algèbres d'opérateurs. Je suis donc allé au séminaire Dixmier et la première fois que j'y suis allé, c'était la réunion d'organisation; le thème principal de l'année devait être les Araki-Woods travaillant sur des produits tenseurs infinis. Dixmier distribuait les papiers parmi les participants, un peu au hasard. Il n'en restait plus qu'un; j'ai levé la main. En rentrant chez moi dans le RER [train de banlieue], je m'ennuyais. J'ai regardé un peu le papier qui m'avait été remis, puis j'ai été vraiment ramené en arrière. J'ai réalisé que dans cet article, il y avait des formules qu'il aurait fallu être un idiot complet pour ne pas voir comme étant identiques, comme correspondant exactement à celles de la théorie de Tomita. Et ces formules disaient qu'un certain vecteur était un vecteur propre pour l'opérateur défini par Tomita. Une heure après mon arrivée à la maison, j'ai écrit une lettre à Dixmier disant : "Voici les Araki-Woods et voici la théorie de Tomita". Vous pouvez voir que l'on peut obtenir les premiers invariants de l'intersection des spectres des opérateurs de Tomita et je lui ai donné les formules. Et comme j'avais été élevé par Choquet, j'ai écrit tout cela en une demi-page. Dixmier a immédiatement répondu : "Ce que vous écrivez est totalement incompréhensible, j'ai besoin de détails". Et donc j'ai réécrit trois pages de détails, ce

qui n'était pas difficile, expliquant qu'on pouvait définir un invariant que j'ai appelé S^* . Dixmier m'a fixé un rendez-vous pour que j'assiste à son prochain séminaire. Je suis allé le voir et tout ce qu'il a dit alors, c'était "Foncez!", qui en français est une forme forte de "Allez-y!". C'était le point de départ. J'ai vraiment eu une chance incroyable; ce n'était pas vraiment difficile. Mais pas exactement écrit noir sur blanc, c'était là dans les formules. C'est sûr que si j'étais resté à Paris, si je ne m'étais pas éloigné de mon cercle, j'aurais continué à travailler dans une direction étroite et je n'aurais pas été ouvert à des horizons totalement différents. J'ai vraiment eu cette impression à ce moment-là de prendre une bouffée d'air frais qui m'a permis d'accéder à une partie plus centrale des mathématiques. J'ai souvent eu l'impression qu'il y avait des cercles concentriques dans le monde mathématique, que l'on commence à travailler dans une partie totalement excentrique et qu'on essaie de se rapprocher progressivement du cœur.

Quel est ce cœur ? Est-ce subjectif ?

Ce que je veux dire par cœur des mathématiques, c'est cette partie qui est inter-connectée à pratiquement toutes les autres. Un peu comme tous les chemins mènent à Rome. Ce que je veux dire, c'est que lorsque l'image mentale que vous obtenez d'un sujet mathématique devient de plus en plus précise, vous vous rendez compte en fait que quel que soit le sujet par lequel vous commencez, si vous le regardez suffisamment précisément, après un certain temps, il converge vers ce cœur : formes modulaires, fonctions L, arithmétique, nombres premiers, toutes sortes de choses liées à cela. Ce n'est pas que ces choses soient plus difficiles et je détesterais suivre le mauvais exemple dont je parlais avant de poser des sujets excentriques. Ce que je veux dire, c'est que si vous marchez assez longtemps, vous êtes obligé d'aller vers ces domaines, vous ne pouvez pas rester à l'extérieur. Si vous le faites, c'est un peu par peur. Vous pouvez réussir à faire beaucoup de choses en affinant les techniques dans un sujet donné, mais à moins que vous ne continuiez résolument à aller vers le cœur, vous vous sentez laissé dehors. C'est très étrange et sûrement subjectif.

Dans vos recherches, vous avez obtenu des résultats brillants : vous avez cité plus tôt la découverte de l'invariant S . Il y a aussi le cas des

*. l'intersection des spectres de tous les opérateurs modulaires

2×2 cocycles et autres qui vous ont coûté des efforts considérables

Bien sûr. Cette astuce matricielle 2×2 qui est d'une simplicité absolue[†] est venue en effet pour moi tout d'un coup, mais seulement après avoir passé trois mois à faire d'horribles calculs ; je faisais des calculs concrets de morphismes modulaires d'automates à états quasi-périodiques, etc. En fait, avant de découvrir cette propriété de cocycle, je l'avais rencontré par expérience. L'astuce de la matrice 2 par 2 est venu à moi par hasard dans un flash, mais parce que le sol avait été préparé par des tonnes et des tonnes d'exemples, des tonnes et des tonnes de calculs. Mon impression, c'est que je n'ai jamais rien obtenu à bas prix. Tous mes résultats ont été précédés de préparatifs - mise en place des travaux, une très longue expérimentation - en espérant qu'à la fin de cette expérimentation, une idée incroyablement simple se produise qui vienne et résolve le problème. Et puis vous devez passer par la période de vérification, presque intolérable à cause de la peur que vous avez de vous être trompé. Je ne laisserai jamais personne croire que tu peux attendre comme ça jusqu'à ce que les résultats viennent tout seuls. J'ai passé tout l'été [de 2006] à vérifier un formule qui donne le modèle standard couplé à la gravitation dans notre travail commun avec Chamseddine et Marcolli. Le calcul est monumental : dans le modèle standard, il y a quatre pages de termes avec des coefficients $1/8$, $1/4$, de sinus ou cosinus de l'angle de Weinberg... et si vous n'avez pas vérifié toutes les choses avec tous les coefficients, vous ne pouvez pas prétendre que le calcul donne le bon résultat. J'ai trouvé des coefficients différents de ceux du livre de Veltman, ce qui m'a obligé à refaire encore et encore ces calculs jusqu'à ce que Matilde Marcolli [avec qui j'écris un livre] se rende compte que les coefficients que nous avions étaient les bons et avaient été corrigés par Veltman dans sa deuxième édition ! Il y a toujours cette peur permanente de l'erreur qui ne s'améliore pas au fil des ans. Et il y a cette partie du cerveau qui est sans cesse en train de vérifier et qui émet en douceur des signaux d'avertissement. J'ai eu des peurs obsédantes à propos de ça. Par exemple, il y a quelques années, j'ai rendu visite à Joachim Cuntz en Allemagne et dans le train du retour, j'ai regardé un exemple un peu bizarre de mon travail avec Henri Moscovici sur le théorème de l'indice local. J'avais pris une valeur particulière du paramètre et je me suis convaincu dans le train que le théorème ne fonctionnait pas. Je suis devenu une épave - j'ai vu cela aux

[†]. Groupe modulaire d'une algèbre de von Neumann, CR Acad. Sci. Paris, Sér. AB, 274, 1972.

yeux des gens que j'ai croisés dans le train de banlieue pour rentrer à la maison. J'avais l'impression qu'ils lisaient un tel désespoir en moi, ils voulaient aider... De retour chez moi, j'ai essayé de manger mais je ne pouvais pas. Enfin, prenant mon courage à deux mains, je me suis rendu à mon bureau et j'ai refait les vérifications. Et il y a eu un miracle qui a fait que le théorème marchait dans ce cas... J'ai eu plusieurs épisodes très pénibles comme celui-ci.

Concernant l'heuristique : vous avez écrit plusieurs fois que la géométrie est du côté de l'intuition. En revanche, les formules semblent jouer un rôle de premier plan dans votre façon de travailler.

Ah, oui, absolument. Je peux penser beaucoup mieux à une formule qu'à un objet géométrique parce que je ne crois jamais qu'une image géométrique, un dessin soit suffisamment générique. Je n'ai pas vraiment un esprit géométrique. Quand j'ai un problème de géométrie et que je réussis à le traduire en algèbre, alors c'est beau. Il y a plusieurs étapes : d'abord la traduction, puis la façon de s'appuyer sur la pensée algébrique. J'essaie toujours de distinguer le côté intuitif (le géométrique) et le linguistique (l'algébrique) dans lequel on manipule les formules, et je pense beaucoup mieux de ce côté. Pour moi, l'algèbre se déroule dans le temps : je peux voir une formule vivre et tourner et exister dans le temps, tandis que la géométrie a quelque chose d'instantané et j'ai beaucoup plus de difficulté avec elle. En ce qui me concerne, les formules créent des images mentales.

Vous donnez souvent l'impression que vous aimez les calculs.

Absolument. Ma pensée mathématique dépend fortement des calculs. Mais, bien sûr, calculer ne suffit pas. Ensuite, il faut interpréter les choses au niveau conceptuel. Galois était l'un des premiers à comprendre que l'on peut faire face à un calcul même si ce dernier n'est pas réalisable dans la pratique. Par exemple, prenez une équation de degré sept ; le polynôme que Galois associe a le degré $7!$ Et il faut le factoriser. Ce que Galois dit : "Sauter à pieds joints sur ces calculs ; grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leurs formes ; telle est selon moi, la mission des géomètres futurs ", c'est qu'il faut sauter au-dessus des calculs, les organiser en fonction de leur difficulté. On devrait les faire, mais seulement comme une expérience de pensée dans son esprit, pas d'une manière concrète. Dans l'exemple de Galois, vous pouvez donner une fonction explicite f des racines

d'une équation $E = 0$ qui prend $n!$ valeurs différentes lorsque vous permutuez les racines, vous prenez simplement une forme linéaire avec un coefficient rationnel générique. Vous pouvez ensuite aller de l'avant et exprimer les racines de $E = 0$ comme des fonctions rationnelles de f ; cela peut être fait par l'algorithme d'Euclide et par élimination. On peut utiliser l'ordinateur, et l'expression qu'on obtient est terriblement compliquée, même lorsque l'équation de départ $E = 0$ a le degré 4 ou 5. Si vous essayiez de mettre en œuvre les calculs concrètement, vous vous perdriez rapidement dans le complexité des résultats. Au contraire, ce que vous devez pouvoir faire, c'est les exécuter de manière abstraite et construire des objets mentaux qui représentent les étapes intermédiaires et les résultats à un niveau idéalisé. Je procède toujours de la manière suivante. Quelle que soit la complexité du problème, au lieu de l'essayer d'abord sur un morceau de papier avec un crayon, je sors me promener et essaie d'avoir tous les ingrédients présents dans mon esprit, afin de commencer à les manipuler mentalement. Ce n'est qu'après cet exercice que je peux voir clairement, penser aux différentes étapes et commencer à obtenir une image mentale. C'est un processus douloureux qui consiste à rassembler dans votre esprit, dans votre mémoire, tous les éléments du problème, afin de commencer à les manipuler. C'est un exercice que je recommande, eh bien, bien sûr, différentes personnes fonctionnent différemment, si l'on veut pouvoir ne pas dépendre du papier et du crayon. Parce qu'avec du papier et un crayon, vous êtes tenté de commencer à écrire immédiatement et si vous ne l'avez pas pensé assez longtemps avant, vous n'irez nulle part. Vous serez découragé avant d'avoir eu le temps de créer dans la partie linguistique du cerveau les images mentales spécifiques que vous pouvez ensuite manipuler, comme d'habitude, en les zippant, en les transformant en quelque chose de plus petit, puis en vous déplaçant autour d'elles. Si vous faites des calculs, il est essentiel d'éviter les erreurs. Il existe des moyens de vérifier, par exemple en utilisant différents chemins vers le même résultat. On peut aussi voir si le résultat d'un calcul semble correct ou non. Je me rappelle quand je travaillais avec Michel Dubois-Violette, on avait une somme de 1440 intégrales, dont chacune était l'intégrale sur une période d'une fonction rationnelle de fonctions thêta et de leurs dérivées. Nous nous attendions à ce que la somme ait une factorisation. En effet, nous avons trouvé un résultat simple qui était un produit de formes, fonctions elliptiques, etc. Lorsque vous trouvez qu'une énorme somme comme celle-ci donne un produit, vous vous sentez plutôt confiant qu'aucune erreur n'a été commise en cours de route.

La géométrie non-commutative

Qu'est-ce que la géométrie non-commutative ? À votre avis, "géométrie non-commutative", est-ce tout simplement un meilleur nom pour Algèbres d'opérateurs ou en est-ce un domaine proche mais distinct ?

Oui, il est important d'être plus précis. Premièrement, la géométrie non-commutative est pour moi cette dualité entre géométrie et algèbre, avec une coïncidence frappante entre les règles algébriques et les règles linguistiques. Le langage ordinaire n'utilise jamais de parenthèses à l'intérieur des mots. Cela signifie que l'associativité est prise en compte, mais pas la commutativité, ce qui permettrait de permuter les lettres librement. Avec les règles commutatives, mon nom apparaît 4 fois dans le message cryptique qu'un ami m'a envoyé récemment : "Je suis alenconnais, et non alsacien. Si t'as besoin d'un conseil nana, je t'attends au coin annales. Qui suis-je ? " La commutativité brouille donc les choses. Dans le monde non-commutatif, qui se manifeste en physique au niveau des systèmes microscopiques, les simplifications provenant de la commutativité ne sont plus autorisées. C'est la différence entre la géométrie non-commutative et la géométrie ordinaire, dans laquelle les coordonnées commutent. Il y a quelque chose d'intrigant dans le fait que les règles d'écriture des mots coïncident avec les règles naturelles de manipulation de l'algèbre, à savoir l'associativité mais pas la commutativité. Deuxièmement, pour moi, le passage au non-commutatif est exactement le passage d'un espace complètement statique dans lequel les points ne se parlent pas, à un espace non-commutatif, dans lequel les points commencent à être liés les uns aux autres, comme objets d'une catégorie. Lorsque certains points sont liés les uns aux autres, ils peuvent être représentés par des matrices du côté algébrique, exactement de la même manière qu'Heisenberg a découvert la mécanique matricielle des systèmes microscopiques. On ne va pas très loin si on reste à ce niveau strictement algébrique, avec des manipulations de lettres... et le véritable point de départ de la géométrie non-commutative est l'algèbre de von Neumann. Ce qui m'a vraiment convaincu que cette algèbre d'opérateurs est un champ très fertile, c'est quand je me suis rendu compte - à cause d'une astuce matricielle sur les matrices 2×2 - qu'une algèbre d'opérateur non-commutative évolue avec le temps!

Elle admet un flux canonique d'automorphismes extérieurs et en particulier elle a des "périodes"! Une fois que vous comprenez cela, vous vous ren-

dez compte que le monde non-commutatif au lieu d'être seulement une pâle réflexion, une généralisation dénuée de sens du cas commutatif, admet des caractéristiques totalement nouvelles et inattendues, comme cette génération du flot de temps à partir de la non-commutativité. Cependant, je n'identifie pas la géométrie non-commutative avec les algèbres d'opérateurs ; ce champ a sa propre vie. De nouveaux phénomènes sont découverts et il est très important d'étudier les algèbres d'opérateurs en soi - j'ai passé une grande partie de ma vie faire ça. Mais d'un autre côté, les algèbres d'opérateurs ne capturent que certains aspects d'un espace non-commutatif, et la "seule" algèbre de von Neumann commutatif est $L^\infty[0; 1]$! Pour être plus précis, les algèbres de von Neumann capturent uniquement la théorie de la mesure, et les C-algèbres de Gelfand la topologie. Et il y a beaucoup plus d'aspects dans un espace géométrique : la structure différentielle et surtout la métrique. La géométrie non-commutative peut être organisée en fonction de la caractéristique qualitative que vous examinez lorsque vous analysez un espace. Mais, bien sûr, en tant que corps vivant, vous ne pouvez isoler aucun de ces aspects des autres sans détruire son intégrité. Un aspect sur lequel j'ai travaillé le plus dur ces derniers temps est un changement de paradigme qui s'impose à vous du fait de la non-commutativité : cet aspect porte sur l'aspect métrique, la mesure des distances. C'est là que l'opérateur de Dirac joue un rôle. Au lieu de mesurer efficacement les distances en empruntant le chemin le plus court d'un point à un autre, vous êtes amené à un double point de vue, auquel vous êtes contraint lorsque vous faites de la géométrie non-commutative : la seule façon de mesurer les distances dans le monde non-commutatif est spectrale. Elle consiste simplement à envoyer une onde d'un point a à un point b puis de mesurer le décalage de phase de la vague. De manière amusante, ce changement de paradigme a déjà eu lieu dans le système métrique, alors que dans les années 60, la définition de l'unité de longueur, qui était autrefois une vraie barre métallique, a été remplacée par la longueur d'onde d'une raie spectrale. Donc, le changement qui vous est imposé par la géométrie non-commutative s'est déjà produite en physique. Ceci est un exemple typique où la généralisation non-commutative correspond à un changement brusque même dans le cas commutatif. J'ai réalisé récemment que la seule information dont nous disposons sur l'univers très éloigné est spectrale. Je n'avais pas compris que le "red shift" n'est pas un décalage de fréquence mais une mise à l'échelle des fréquences. Si vous regardez assez loin dans l'univers, les fréquences sont divisées par un facteur allant jusqu'à 1000. C'est incroyable. Et vous le voyez uniquement d'une manière spectrale.

Ce point-de-vue spectral est celui qui ressort des expériences lorsque vous étudiez l'univers ; ce n'est pas un fantasma. Et c'est un point de vue obligatoire lorsque vous essayez de regarder un espace géométrique du point de vue de la géométrie non-commutative. De ce point de vue, on est conduit très naturellement au principe d'action spectrale qui permet d'encoder géométriquement en un mot la très grande complexité du modèle standard couplé à la gravité. Ce qui se produit c'est simplement que l'espace-temps admet une structure fine, un peu comme les spectres atomiques, et n'est ni un continuum ni un espace discret mais un mélange subtil des deux. Dans le livre que j'écris avec Matilde Marcolli, les trois cents premières pages concernent la physique : nous développons le modèle standard et la renormalisation, liés aux motivations et aux groupes de Galois, et les trois cents dernières pages concernent la fonction zêta : sa réalisation spectrale et la brisure spontanée de symétrie des systèmes arithmétiques. Nous arrivons à la fin de la rédaction du livre et nous découvrons que, de façon assez surprenante, il existe une relation profonde entre les deux parties a priori déconnectées du livre. En fait, il y a une analogie, une table de conversion, entre le formalisme de la brisure spontanée de symétrie qui est utilisée pour les systèmes arithmétiques, les fonctions zêta, les systèmes doubles, etc., et un formalisme qui semble extrêmement tentant pour les gens qui consiste à essayer de quantifier la gravité. En établissant ce dictionnaire, nous avons découvert dans la littérature que la notion d'état KMS, qui joue un rôle fondamental dans nos travaux sur la rupture de symétrie pour les systèmes arithmétiques, joue également un rôle dans la rupture de symétries des interactions électrofaibles qui donnent leur masse aux particules dans le modèle standard. Cela nous permet d'aller plus loin dans l'analogie et suggère que les gens qui essaient de développer la gravité quantique dans un espace fixé sont sur la mauvaise voie. Nous savons que l'univers s'est refroidi ; eh bien, cela suggère que lorsque l'univers était plus chaud, disons, à la température de Planck, il n'y avait aucune géométrie du tout, et c'est seulement après la transition de phase qu'une rupture de symétrie spontanée a sélectionné une géométrie particulière et donc l'univers particulier dans lequel nous sommes. C'est quelque chose auquel nous n'aurions jamais pensé - nous n'aurions jamais eu cette idée - si notre livre n'avait pas été écrit avec les deux textes parallèles. Bien sûr, il n'y a aucun point où une partie utilise ou s'appuie vraiment sur l'autre - mais vous pouvez voir une analogie émerger entre les deux parties. Comme André Weil l'a souligné, ce type de similitude mystérieuse est l'une des choses les plus fertiles en mathématiques. L'esprit humain est toujours en avance sur l'ordinateur,

car pour le moment et pour longtemps j'espère, il détecte des analogies entre des théories qui ont un contenu assez différent mais dans lesquelles le même genre de phénomènes apparaît. La traduction ne sera jamais littérale et il y aura toujours deux textes écrits dans deux langues différentes et il n'y aura jamais de correspondance un à un entre les mots d'une langue et les mots de l'autre. Mais il y aura ces étranges indices qui pourrait bien s'évaporer si vous essayez de vous précipiter et de les écrire trop précisément. Il y a des boîtes qui sont très bien comprises d'un côté - et non comprises du tout de l'autre. Même si elle ne fournit pas de clé pour ouvrir quelque chose, elle relie ; cela nous oblige à penser de l'autre côté. C'est vrai que le nom de "géométrie non-commutative" est un peu malheureux car il contient ce "non", cette négation. L'important est de le considérer comme "non nécessairement commutative", de manière à inclure la partie commutative. Nous aurions pu lui donner 36 autres noms. Un nom qui aurait été mieux pour la partie riemannienne est "géométrie spectrale". Ce que cette géométrie montre si bien, c'est que toutes les choses que nous percevons sont spectrales, que les voir du point de vue de la théorie des ensembles n'est pas le bon point de vue. Nous aurions pu utiliser différents noms, mais certainement pas "quantique".

Pourquoi ?

Parce que dans le mot "quantique" il y a une perversion, c'est-à-dire que les gens comprennent que le mot "quantique", depuis le début, n'est pas tellement "non-commutatif" mais plutôt "entier". Dans le mot "quantique", il y a vraiment cette découverte par Planck de la formule pour le rayonnement du corps noir, dont il a compris que l'énergie devait être quantifiée en quanta de $h\nu$. De là découle une terrible confusion, créée par des gens qui font de la théorie de la déformation, qui croient que quantifier une algèbre signifie simplement la déformer en un espace non-commutatif. Ils prennent un espace commutatif et comme ils déforment le produit dans une algèbre non-commutative, ils croient qu'ils quantifient. Mais c'est complètement faux. Vous ne réussissez à quantifier un espace que si vous déformez dans une algèbre très spécifique : l'algèbre des opérateurs compacts. Et puis, il y a une intégrale, l'intégrale de l'indice de Fredholm. L'utilisation d'un vocabulaire incorrect crée de la confusion et n'aide pas à comprendre. C'est pourquoi j'hésite tellement à utiliser le mot "quantum" - cela semble plus flashy, peut-être, mais la vérité, c'est que vous faites quelque chose de quantique seulement dans des cas très particuliers, sinon vous faites quelque chose de non-commutatif,

c'est tout. Ensuite, cela peut être moins à la mode du point de vue linguistique, mais peu importe - on est beaucoup plus proche de la réalité.

Qu'est-ce qui est le plus important pour vous dans votre travail mathématique : l'unité ou l'évolution ?

C'est difficile de décider. Chaque mathématicien a une sorte de fil d'Ariane qu'il ou elle suit de son point de départ et qu'il ou elle doit absolument essayer de ne pas casser. Il y a donc une unité, une sorte de trajectoire, ce qui vous fait partir d'un endroit, et parce que vous avez commencé là, dans un endroit un peu bizarre et spécial, vous avez une certaine originalité, une certaine perspective, différente de celle des autres. Et c'est essentiel, sinon vous mettez tout le monde dans le même moule - tout le monde aurait les mêmes réactions aux mêmes questions. Ce n'est pas ce que nous voulons ; nous voulons différentes personnes qui ont leurs propres approches, leurs propres méthodes. Donc là on voit une unité dans la trajectoire, qui n'est pas du tout l'unité des mathématiques. L'unité des mathématiques, vous la découvrez petit à petit, quand vous réalisez que des trajectoires extrêmement différentes, de personnes extrêmement différentes, se rapprochent d'un même cœur vibrant de mathématiques. Mais ce que j'ai ressenti avant tout, c'est l'unité, la fidélité à une trajectoire.

Parmi les résultats que vous avez obtenus, y en a-t-il un dont vous êtes le plus fier ?

Être un scientifique est (en ce qui me concerne) une activité assez humiliante et je ne tiens pas à montrer de la fierté pour un résultat. J'ai tendance à être méfiant des personnes arrogantes. En fait, ce qui m'importe vraiment, c'est le plaisir de la découverte par opposition à l'appréciation du résultat par la communauté. La quantité de joie que l'on obtient, le "coup de pied" est bien sûr assez variable et pourtant, juste pour essayer de répondre à votre question, le lien entre la renormalisation et la décomposition de Birkhoff, que nous avons trouvé en 99 dans notre travail conjoint avec Dirk Kreimer m'a donné un super coup de pied qui a duré plus d'une semaine. J'avais l'habitude de me comporter d'une manière fière, comme un enfant, jusqu'à ce que j'aie atteint l'âge de dix ans, quand j'ai été envoyé chez les scouts par mes parents. J'ai atterri dans un groupe difficile et ils m'ont appris, un jour, par une "moquerie du groupe" de moi-même qu'ils ne pouvaient pas

acheter mon attitude fière. Depuis, je suis, comme les taureaux de la corrida après la séance avec les picadors, toujours debout avec un dos légèrement plié.

Suite à votre quête mathématique depuis les années 70, on a l'impression que vous avez toujours été fasciné par la physique - et la fonction zêta.

Absolument. Ma fascination pour la fonction zêta de Riemann vient de ma lecture du travail de Weil sur sa reformulation en termes d'idèles des formules explicites de Riemann qui relie les zéros de la fonction zêta à la répartition des nombres premiers. Il existe une analogie frappante entre les "nombres premiers" d'un côté dans cette formule et les contributions ponctuelles fixes dans une formule de Lefschetz et le premier problème est de trouver un espace X sur lequel agissent les idèles tel que la formule explicite de Riemann-Weil devient une formule de trace. À certains points, après avoir lu un article de Victor Guillemin sur les feuillages et la formule de trace de Selberg, j'ai réalisé que l'espace X devrait être un espace de feuilles d'un feuilletage et donc un espace non-commutatif. Je suis resté fasciné par cette idée pendant dix ans jusqu'au jour où, après être allé à une conférence à Seattle sur la fonction zêta de Riemann, j'ai réalisé que l'espace X était déjà présent dans mon travail sur la mécanique statistique quantique avec Bost, et est tout simplement l'espace des classes d'adèles, le quotient de l'espace d'adèles par l'action du groupe multiplicatif groupe du champ. Cela donne une interprétation explicite des formules de Riemann-Weil de la théorie des nombres comme formule de trace ainsi que la réalisation spectrale des zéros comme spectre d'absorption.

Merci à Jim Ritter pour son aide linguistique.

On est encore loin de donner les informations pertinentes sur la localisation des zéros mais cela donne un cadre géométrique dans lequel on peut commencer à transposer la preuve de Weil pour le cas des champs globaux de caractéristique positive. Dans notre travail conjoint avec Katia Consani et Matilde Marcolli, nous avons maintenant montré comment comprendre la réalisation spectrale d'un point de vue cohomologique, compatible avec la théorie de Galois. Ce qui ressort en particulier, c'est que, comme je l'ai expliqué dans la première partie de l'interview, les espaces non-commutatifs engendrent leur propre temps, cette nouvelle fonctionnalité dynamique permet de les refroi-

dir et d'obtenir de cette façon, lorsque la température descend à zéro, un ensemble de points classiques. De plus, on peut affiner ce processus thermodynamique et obtenir l'analogie des points sur les extensions algébriques du corps des résidus, et ceux-ci sont organisés de la même manière que les points d'une courbe sous l'action de Frobenius dans le cas des caractéristiques positives. C'est un grand défi pour la géométrie non-commutative de développer maintenant les outils conceptuels généraux permettant de transposer la preuve de Weil de la géométrie algébrique à notre cadre analytique.

Ma fascination pour la physique vient de la mécanique quantique qui, avec la découverte de Heisenberg, est à l'origine de la géométrie non-commutative. J'ai toujours admiré les calculs sophistiqués des physiciens, plus précis ément surtout ceux qui sont motivés par l'expérience. J'ai une grande motivation à découvrir que, caché derrière ces recettes dans lesquelles les physiciens trouvent leur motivation physique, il y a de merveilleuses mathématiques. Ces dernières années, après des travaux antérieurs avec Kreimer sur la renormalisation et la décomposition de Birkhoff, mon travail s'est poursuivi dans ma collaboration avec Marcolli. Nous avons découvert un groupe universel, obtenu à partir d'une correspondance de Riemann-Hilbert, qui joue le rôle du "groupe cosmique de Galois" que Pierre Cartier avait conjecturé il y a quelques années. En effet c'est un groupe de symétrie universel de toutes les théories du champ quantique renormalisables. Il contient le groupe de renormalisation des physiciens en tant que sous-groupe à un paramètre mais a une structure beaucoup plus riche. Nous n'avons pas pu comprendre complètement sa relation avec les groupes de Galois motiviques et, en ce sens, il ne met pas encore pleinement en œuvre le rêve de Cartier mais le travail profond de Bloch, Esnault et Kreimer va sûrement jeter plus de lumière sur cet aspect.

Concernant le modèle standard, ce travail a commencé il y a quelques années avec Ali Chamseddine et il a été poussé plus loin dans ma récente collaboration avec Chamseddine et Marcolli. Il se trouve que le Lagrangien incroyablement compliqué de la gravité couplée avec le modèle standard est juste obtenu comme gravité pure (de la façon la plus simple, en comptant les valeurs propres de l'élément de longueur) pour un espace-temps de structure fine. À savoir, il est décrit non pas comme un continuum à quatre dimensions ordinaires, mais comme le produit d'un continuum par un espace non-commutatif fini du type le plus simple dont l'effet est de corriger la dimension modulo 8 issue de la K-théorie. C'est clair que ce sont des idées intéressantes

mais, jusqu'à présent, elles n'ont pas pu être testées expérimentalement et appartiennent donc toujours au domaine des mathématiques pures.

Vous avez parlé de la relation entre les mathématiques et la physique. Pourriez-vous dire quelque chose sur la relation entre les mathématiciens et physiciens, ce qui n'est pas la même chose ?

Oui. Il est normal que le vrai physicien ne s'inquiète pas trop de la rigueur mathématique. Pourquoi ? Parce qu'on aura un test à la fin qui est la confrontation à l'expérience. Cela ne signifie pas que la négligence est admissible : un expérimentateur m'a dit une fois qu'ils vérifient leurs calculs dix fois plus que les théoriciens ! Mais ce n'est pas mal de ne pas être trop formaliste. Cela va avec une certaine attitude des physiciens envers les mathématiques : en gros, ils traitent les mathématiques comme une sorte de prostituée. Ils l'utilisent d'une manière absolument gratuite et sans vergogne, en prenant n'importe quel sujet ou partie d'un sujet, sans avoir l'attitude du mathématicien qui n'utilisera quelque chose qu'après une réelle compréhension. Après la période héroïque qui a abouti à l'élaboration du modèle standard, et la renormalisation des théories de jauge, toute une génération de physiciens s'est éloignée du contact avec la physique expérimentale à la recherche d'une théorie qui "expliquerait" non seulement le modèle standard, mais aussi l'unifierait avec la gravité. En poursuivant l'idée appelée théorie des cordes, ces physiciens sont devenus mathématiciens et cela a eu un grand impact sur les mathématiques. Les objets qu'ils manipulent sont les surfaces de Riemann, les variétés de Calabi-Yau : et ils font des mathématiques, de vraies mathématiques sophistiquées. Mais jusqu'à présent, il n'y a pas de tests de cette physique qui montrerait une relation entre ces idées et le monde réel. En outre, en raison du fait qu'ils sont au départ issus du domaine de la physique, leur façon de procéder est totalement différente de celle des mathématiciens.

Cela est vrai notamment au niveau sociologique : ils travaillent en grands groupes et le temps qu'ils passent sur un sujet donné est assez court. À un moment donné t , la plupart d'entre eux vont travailler sur le même problème, et les prépublications qui apparaîtront sur le Web auront plus ou moins la même introduction. Il y a un thème donné, et un grand nombre d'articles sont des variations sur ce thème, mais cela ne dure pas longtemps. C'est arrivé notamment dans la relation entre la théorie des cordes et la géométrie non-commutative. Un grand groupe de personnes a essayé de faire de la théo-

rie des champs sur un espace non-commutatif au début des années 2000, et après un temps relativement court, ils ont conclu que la théorie des champs sur un espace non-commutatif n'était pas réalisable, à cause du phénomène de mélange entre fréquences infrarouges et ultraviolettes. Cette conclusion est restée en vigueur pendant deux ou trois ans, mais après que le gros des troupes soit passé à un autre sujet, un tout autre, très petit, groupe de personnes a montré qu'en fait, la théorie était renormalisable, à condition qu'on ajoute un terme manquant dans le lagrangien. Cela a nécessité une énorme intuition de la part des principaux acteurs Wulkenhaar et Grosse, puis avec Rivasseau, Vignes-Tourneret, Gurau etc... ils ont développé la théorie générale qui est maintenant dans un état remarquable, clôturant la première construction efficace en 4 dimensions. Le peloton n'est jamais revenu et a continué d'un sujet à l'autre. La sociologie des sciences a été profondément traumatisée par la disparition de l'Union soviétique et du contreponds scientifique que cela a créé à l'égard de la puissance écrasante des États-Unis. Ce que j'ai observé au cours des deux dernières décennies depuis la chute de l'URSS et l'émigration de leur élite scientifique vers les États-Unis est qu'il n'y a plus ce contreponds. À ce stade, si vous prenez de jeunes physiciens aux États-Unis, ils savent qu'à un moment donné, ils auront besoin d'une recommandation écrite par un des pontes dans le pays, et cela signifie que si l'un d'eux veut travailler en dehors de la théorie des cordes, il ou elle ne trouvera pas de travail. De cette façon, il y a une seule théorie dominante et elle attire tous les meilleurs étudiants. J'ai entendu les théoriciens des cordes dire : "si une autre théorie fonctionne, nous l'appellerons théorie des cordes", ce qui montre qu'ils ont gagné la guerre sociologique. Le récent épisode ridicule de la "théorie exceptionnellement simple du Tout" a montré qu'il n'y a aucune crédibilité chez les opposants à la théorie des cordes aux États-Unis. Plus tôt avec l'Union soviétique, il y avait de la résistance. Si l'Europe était plus forte, elle pourrait résister. Malheureusement, il existe un instinct de troupeau latent chez les Européens, en particulier en physique théorique. De nombreuses universités européennes, du moins en France ou en Angleterre, au lieu de développer des domaines originaux par opposition à ceux dominants aux États-Unis, ne font que suivre les grands courants aux États-Unis pour décider qui embaucher. Ce n'est pas par manque d'esprits originaux comme mon ami et collaborateur Dirk Kreimer. Mais c'est un manque de confiance en soi de l'Europe, ce qui signifie que nous ne sommes pas capables de faire ce qui doit être fait, de soutenir et sauvegarder cette diversité à tout prix. Je ne pense pas que nous voyons des choses similaires en mathématiques, il

y a donc une différence sociologique fondamentale entre mathématiques et physique. Les mathématiciens semblent très résistants à perdre leur identité et à suivre la mode.

Dans vos conversations avec Changeux, vous avez discuté des mathématiques et de la réalité. Avez-vous avancé dans votre réflexion à ce sujet ?

Je ne doute pas que la réalité mathématique est quelque chose qui existe, qu'elle existe indépendamment de mon propre cerveau qui essaie de la voir, et a exactement les mêmes propriétés de résistance que la réalité extérieure. Quand vous voulez prouver quelque chose, ou lorsque vous examinez si une preuve est correcte ou non, vous ressentez la même angoisse, la même résistance extérieure que vous le faites avec la réalité extérieure. Certains vous diront que cette réalité n'existe pas car elle n'est pas "localisée" quelque part dans l'espace et le temps. Je trouve juste cela absurde et j'adopte un point de vue diamétralement opposé : pour moi, même un être humain est mieux décrit par un schéma abstrait que par une collection matérielle de cellules - qui en tout cas sont entièrement renouvelées et remplacées sur une période de temps relativement courte et possèdent donc moins de sens ou de permanence que le schéma lui-même, qui pourrait éventuellement être reproduit en plusieurs exemplaires identiques... Si on veut tout réduire à la "matière localisée quelque part" on rencontre bientôt un mur qui vient de la mécanique quantique et on trouve que cette réduction de la réalité extérieure à la matière est une illusion qui a du sens à des échelles intermédiaires, mais en aucun cas à un niveau fondamental. Je n'ai donc aucun doute sur la subtilité et l'existence d'une réalité qui ne peut être ni réduite à "la matière" ni "localisée". Maintenant, la question de savoir si la réalité mathématique est quelque chose de créé ou quelque chose de préexistant est beaucoup plus facile à discuter si on utilise la distinction qui apparaît dans le théorème de Gödel entre "vérité" et "prouvabilité" d'un énoncé mathématique. J'en ai discuté en détail dans mon livre "Triangle de pensées" avec Lichnerowicz et Schützenberger et je me réfère à ce livre pour l'argument détaillé qui est plutôt compliqué. J'étais un peu frustré après le livre "Matière à Pensée" avec Changeux, par l'absence d'une communication efficace et j'ai tenu à écrire un autre livre où je pourrais mieux expliquer la contribution provenant du théorème de Gödel. Il existe une réalité mathématique fondamentale, et le mathématicien crée des outils pour la comprendre.

La relation entre les déductions du mathématicien (qui, grande découverte récente, ont lieu dans son cerveau) et que la réalité est similaire à la relation entre les déductions effectuées dans un tribunal par opposition à ce que qui se passe réellement dans le monde réel. Elle repose sur une distinction grammaticale précise entre les énoncés mathématiques au niveau des quantificateurs, certains sont prouvables s'ils sont vrais etc... Cette analogie avec la salle d'audience par opposition au monde extérieur est parfaitement expliqué dans le livre de Jean-Yves Girard sur le théorème de Gödel. Cela permet, après un vrai travail, d'obtenir une image mentale claire de la distinction entre le rôle du mathématicien (créer des outils pour découvrir un morceau de cette réalité) et la réalité elle-même.

Vous avez mentionné l'originalité et la mode chez les mathématiciens et dans les mathématiques. Avez-vous un exemple ?

Je venais d'arriver en tant que nouveau venu à l'IHES [Institut des hautes Études scientifiques, à Bures-sur-Yvette, près de Paris] en 1976. Les premières personnes que j'ai rencontrées parlaient de choses que je ne connaissais pas. J'étais à la cafétéria et ils discutaient de la "cohomologie étale", toutes sortes de choses comme ça, qu'avec ma culture issue de l'analyse fonctionnelle et des algèbres d'opérateurs, je ne connaissais pas du tout. Heureusement, je suis vite tombé sur Dennis Sullivan qui, tant qu'il était à Bures, utilisait pour faire connaissance avec les nouveaux arrivants, quel que soit leur domaine et leur personnalité, une méthode qui consistait à leur poser des questions. Il posait des questions que vous pouviez, superficiellement surtout, trouver idiotes. Mais quand vous commenciez à y penser, vous réalisiez bientôt que vos réponses montraient que vous ne compreniez pas vraiment de quoi vous parliez. Il a une sorte de pouvoir socratique qui pousse les gens à une réflexion profonde, pour essayer de comprendre ce qu'ils faisaient, et ainsi à démasquer les incompréhensions dont tout le monde fait l'expérience parce que tout le monde parle sur différentes choses sans avoir nécessairement nettoyé tous les recoins cachés. Il a une autre qualité remarquable ; il peut expliquer des choses que vous ne connaissez pas d'une manière incroyablement claire et lumineuse. C'est en discutant avec Dennis que j'ai appris de nombreux concepts de géométrie différentielle. Il nous les expliquait par gestes, sans une seule formule. J'ai eu énormément de chance de le rencontrer, cela m'a obligé à réaliser que le domaine dans lequel je travaillais était limité, au moins

quand vous le voyez comme bien fermé. Ces discussions avec Dennis m'ont sorti de mon champ de compétence, à travers un dialogue visuel et oral. Et pas du tout par la lecture de textes.

Vous avez parlé de l'importance de la diversité, que les gens devrait avoir des antécédents différents. Mais avez-vous des idées sur le genre de terrain d'entente mathématique tout le monde devrait partager ?

C'est un peu subtil. J'ai mentionné le cœur vibrant des mathématiques. Vous pourriez dire : pourquoi ne pas enseigner cela à tout le monde ?. Mais cela entraînerait un désastre ! Parce que les gens finiraient par connaître les surfaces de Riemann, les formes modulaires, etc., mais ils seraient ignorants de grandes parties des mathématiques, comme les algèbres de Hopf ou d'autres sujets qui pourraient sembler plus ésotériques. Donc je ne sais pas. J'ai l'impression qu'il devrait y avoir un minimum de fond commun, fondamental : notions de géométrie différentielle et algébrique, structures algébriques, réelles et analyse complexe. La topologie, la théorie des nombres de base... sont toutes nécessaires. Tu ne peux pas les éviter. Les gens doivent savoir cela.

Après cela, quand vous voulez entrer dans des sujets plus élaborés, la diversité devrait être la règle. Nous devons cultiver des gens originaux, comme je l'ai expliqué dans la première partie de l'entretien, qui sont en mesure de fournir aux étudiants une approche totalement originale par rapport à cette connaissance commune. Cela donnera aux jeunes mathématiciens des clés totalement personnelles, qui leur permettront d'ouvrir leurs propres mondes. S'ils ont de la chance, ils seront intéressés par beaucoup de choses différentes, car il est important pour eux de pouvoir passer d'une chose à l'autre pendant un certain temps au tout début, jusqu'à ce qu'ils trouvent un sous-projet qui va vraiment les inspirer. Je pense qu'il est important de ne pas dépasser une certaine limite pour ce fond commun. Ensuite, vous devez trouver et suivre votre propre ligne, avec un conseiller qui vous permettra de renforcer votre propre originalité. Mais bien sûr, il n'y a pas de recette générale.

Mais recommanderiez-vous vraiment qu'un jeune mathématicien apprenne beaucoup de mathématiques sans être spécialiste d'un domaine ?

Pour un jeune mathématicien, il est absolument crucial de prouver d'abord qu'il ou elle est un mathématicien ou une mathématicienne. Et cela signifie devenir spécialiste d'un sujet et prouver que vous êtes capable de faire quelque chose de très difficile. Et ce n'est pas compatible avec le rêve d'apprendre un peu tout en même temps. Ainsi, après avoir trouvé le sujet que vous trouvez attrayant, il est obligatoire de se concentrer, peut-être pendant un certain nombre d'années, jusqu'à ce que vous fassiez une vraie percée. Ensuite, bien sûr, une fois que vous avez réussi, une fois que vous avez votre passeport pour faire des mathématiques, c'est merveilleux si vous réussissez à élargir votre spectre pour éviter de rester un spécialiste d'une discipline étroite pour le reste de votre vie. Mais c'est très difficile d'être généraliste. Parce qu'il y a le danger de ne pas faire de vraies choses en mathématiques.

Avez-vous des idées sur la façon dont les mathématiques devraient être enseignées ?

Nous devons absolument former de très jeunes gens à des exercices mathématiques précises, en particulier des exercices de géométrie, c'est une très bonne formation. Et c'est horrible quand je vois qu'à l'école, les enfants apprennent des recettes, juste des recettes, et ne sont pas encouragés à penser. Quand j'étais à l'école, je me souviens que nous étions confrontés à des problèmes de géométrie solide (spatiale). Nous avons beaucoup de mal à les résoudre. Ce n'était pas de la géométrie de bébé. C'étaient des choses difficiles, avec des preuves subtiles. Et deux ans plus tôt, nous faisons des problèmes de géométrie plane. Nous avons l'habitude de passer des nuits à résoudre ces problèmes. Et maintenant, si nous donnions les mêmes problèmes lors d'un examen (l'expérience a été réalisée récemment), on nous traiterait de meurtriers ! Ce n'est pas un progrès. Les problèmes de géométrie sont faciles à poser, et alors vous devez vous donner beaucoup de mal pour trouver une preuve.

C'est dommage qu'on ne le fasse plus. J'ai vu des problèmes récents au lycée, où sont définis des groupes de rotations, les rotations étant des classes d'équivalence... rester à un niveau préhistorique de sophistication juste à cause du lourd poids du "formalisme"... C'est affreux... Parce que la géométrie implique de dessiner des figures, elle doit être directement accessible. Malheureusement, ce n'est pas impossible que cette utilisation exagérée du formalisme mathématique ait été héritée de Bourbaki - qui ne définit pas les

nombres réels avant le chapitre 9 de Topologie, longtemps après avoir défini les structures uniformes...

Vous mentionnez Bourbaki. Comment jugez-vous maintenant le rôle de Bourbaki ?

Bourbaki a joué un rôle phénoménal. Vous ne pouvez pas nier qu'il a transformé beaucoup de sujets dans lesquels régnait l'obscurité la plus profonde en des champs d'une incroyable clarté. Il y a de merveilleux livres de Bourbaki : l'Algèbre Chapitre III et tous les volumes sur les groupes de Lie, vous ne pouvez qu'être stupéfait d'admiration. Maintenant, une fois que tout cela a été fait, c'est fait. Il y a encore des domaines où quelque chose de ce genre aurait pu être fait et n'a pas été fait. Mais je ne pense pas que faire davantage ferait une grande différence. Globalement, Bourbaki a eu une si grande influence en nous donnant un souci de clarté et de rigueur que l'effet bénéfique s'est déjà produit. Si Bourbaki n'avait pas été là, les mathématiques auraient dérivé vers de nombreux résultats sur lesquels vous ne pourriez pas compter.

Pensez-vous qu'il serait possible aujourd'hui de lancer un tel projet si ambitieux et altruiste ?

Être désintéressé à ce point maintenant n'est pas une chose évidente, car tout le monde est tellement occupé avec toutes sortes de "choses à faire". Il y avait un esprit merveilleux au début du groupe Bourbaki, une idée de service désintéressé à la communauté. J'ai participé pendant une courte période à la fin des années 70. J'ai écrit quelques ébauches mais ce qui m'a empêché de continuer, c'est quand j'ai réalisé que, dans une salle de l'Ecole Normale, il y avait des centaines de manuscrits, 100 à 150 pages chacun, qui ne verraient jamais la lumière du jour. J'ai trouvé ça déprimant. Bien sûr, il y avait des doublons partiels... mais il y avait une telle exigence de perfection avant que le contenu ne soit publié, que finalement c'était comme si ces textes n'existaient pas. Le temps a passé, et avec le temps, ils sont devenus obsolètes. Il y a cet incroyable dévouement des membres de Bourbaki qui procédaient par l'écriture de brouillons. Lorsqu'un manuscrit est terminé, il est vrai que vous avez beaucoup appris, vous comprenez mieux les choses, mais si le texte n'apparaît jamais, vous obtenez un vrai sentiment de frustration. Pendant très longtemps, Dieudonné jouait un rôle clé pour veiller à ce que les choses convergent à un moment donné, mais après qu'il ait quitté, une grande partie

de l'efficacité est partie avec lui en quelque sorte.

Sur quoi travaillez-vous maintenant ?

En ce moment, je travaille sur une analyse difficile qui a à voir avec les axiomes spectraux de la géométrie non-commutative. C'est le contenu de mon année au Collège de France et c'est beaucoup de travail technique mais aussi cela offre une diversion bienvenue. Juste avant cette diversion, après avoir remis le manuscrit de notre livre avec Matilde Marcolli, j'étais dans un état mental obsessionnel en raison du risque inévitable d'une erreur dans un si grand ensemble de travaux. Bien sûr, on peut vérifier les choses et essayer de les visualiser sous toutes sortes d'angles, mais par exemple dès qu'on touche à la physique, les difficultés s'accumulent puisque la précision des calculs ne suffit pas pour garantir qu'ils auront une "signification" pour le monde réel et passeront le test de réalité. Par rapport à cela, j'essaie de partager l'attitude du grand physicien Pierre-Gilles de Gennes quand il a dit :

"Le vrai point d'honneur n'est pas toujours dans le vrai. Il est d'oser, de proposer des idées neuves, et ensuite de les vérifier. Il est aussi, bien sûr, de savoir reconnaître publiquement ses erreurs. L'honneur du scientifique est absolument à l'opposé de l'honneur de Don Diègue. Quand on a commis une erreur, il faut accepter de perdre la face."

Ce qui importe certainement, dans ce que nous faisons, c'est d'essayer de mettre constamment nos idées à l'épreuve et de voir ce qui se passe. Rien de mieux que de se réveiller au milieu de la nuit à cet égard. Et il ne faut pas avoir peur. Ici, voici ce qu'Alexandre Grothendieck écrit dans son livre inédit *Récoltes et Semailles* à ce sujet :

"Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc. Car dans notre peur, nous nous accrochons à ce que nous avons décrété "vrai" un jour, ou à ce qui depuis toujours nous a été présenté comme tel. Quand nous sommes mus, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée."

Comment lisez-vous les mathématiques ?

La seule façon dont je parviens à lire les mathématiques est extrêmement lente car je lis une phrase puis j'essaie d'y penser. Je ne comprends pas une preuve si je n'ai pas essayé de la prouver moi-même avant. Une fois que je suis perplexe longtemps sur un résultat, je peux le comprendre en quelques secondes en scannant la preuve ; je vois le seul endroit où quelque chose se passe et que je ne pouvais pas deviner avant. Le problème est que cette méthode de lecture est très lente, j'ai besoin d'un temps énorme pour me familiariser avec le résultat. Je suis presque incapable de lire un livre mathématique de façon linéaire. Une discussion ou un discours, au contraire, me permettent d'aller plus vite. Mais je sais que d'autres mathématiciens fonctionnent de manière très différente.

Est-ce la même chose avec la physique ?

Non, c'est totalement différent. En physique, j'adore lire ; j'ai passé environ quinze ans à étudier le livre de Schwinger, *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*. Il a rassemblé tous les articles cruciaux de Dirac, Feynman, Schwinger lui-même, Bethe, Lamb, Fermi, tous les articles fondamentaux sur la théorie des champs quantiques, ceux de Heisenberg aussi, bien sûr. Cela a été mon livre de chevet pour des années et des années. Parce que j'ai toujours été fasciné par le sujet et je voulais le comprendre. Et cela m'a pris très longtemps de le comprendre. Pas tant pour comprendre le détail des articles, mais pour comprendre ce qu'ils voulaient dire, quelles mathématiques étaient derrière eux. En physique, par contre, j'ai une réaction totalement différente. Je n'ai pas du tout cette incapacité à lire. C'est étrange. Je pense qu'il y a une raison possible : en mathématiques, je dois me protéger davantage, à certains égards. En physique, je ne ressens pas ce besoin.

Et en dehors de la science ? Voulez-vous parler de quelque chose d'autre, la musique, l'art ?

Ces deux dernières années, je n'ai plus eu le temps parce que je devais travailler plus dur, mais avant je prenais des cours de dessin et de piano. Ce qui m'a frappé en musique, c'était de voir comment certains compositeurs avaient atteint un niveau incalculable de perfection dans leur art. En étudiant cer-

taines partitions, j'ai été frappé de réaliser que vous apprenez autant qu'en lisant quelques articles mathématiques. Tout simplement à cause du niveau de sophistication. Il ne s'agit pas d'une analogie entre mathématiques et musique. Quelques compositeurs nous touchent par une œuvre hallucinante de précision, par un niveau de perfection proche de celui de certains travaux de Riemann. Et face à ce niveau de perfection, je réagis de la même manière, par un sentiment d'admiration - mais une admiration qui crée du mouvement, quelque chose qui n'est pas du tout statique : la beauté plus la perfection met la pensée en mouvement, elle vous force à penser. Cette perfection sous la forme d'une œuvre d'art est bien sûr très rare. Pour prendre un exemple, cette fois dans la littérature, il y a une différence frappante de "forme" entre *Madame Bovary* [Flaubert] et *Le lys dans la vallée* [Balzac]. *Madame Bovary* est la perfection absolue, une merveille de précision qui est le résultat d'une quantité phénoménale de travail, tandis que l'autre est un peu bâclé. *Le lys dans la vallée* contient aussi des trucs merveilleux mais il y a une différence évidente en apparence.

J'ai souvent cette impression quand je regarde des papiers mathématiques ou des œuvres d'art, et je ressens intensément cette distinction. Certaines pièces se démarquent bien au-dessus des autres, on a le sentiment que l'auteur, au lieu de s'arrêter à l'instant t et en disant : "Très bien, ça va le faire, je vais remettre mes affaires" (Balzac a été forcé de faire ça, il avait un couteau sous la gorge, il n'avait pas le choix) juste continuent à travailler jusqu'à atteindre quelque chose qui est proche de la perfection absolue. C'est principalement ce que je ressens de l'art. Ces œuvres, celles avec cette perfection absolue, vous donnent de l'élan. Elles vous donnent quelque chose qui n'est pas seulement un sentiment ; elles vous donnent un pouvoir extraordinaire, une force qui vous porte plus loin. Cela vous transmet quelque chose. J'ai cette impression avec certains articles en mathématiques ou en physique. L'article de Riemann sur la fonction zêta, celui d'Einstein sur la relativité par exemple ... Il y en a peu, très peu. Ils mettent les normes d'écriture à un niveau si élevé. C'est merveilleux. Vous voyez cela et vous comprenez vraiment. Ce sont des instruments extraordinaires pour comprendre et, au-delà de la clarté, vous ressentez quelque chose qui vous met en mouvement. Cela vous dit : "continue".

Alain Connes est professeur au Collège de France, à l'IHES et à Vanderbilt Université. Parmi ses récompenses figurent une médaille Fields en 1982, le Prix Crafoord en 2001 et la Médaille d'or du CNRS en 2004.

Catherine Goldstein [cgolds@math.jussieu.fr] est Directrice de recherches à l'Institut de mathématiques de Jussieu. Ses projets de recherche sont dans le domaine de l'Histoire des mathématiques, en particulier de la théorie des nombres. Elle a récemment coédité "La mise en forme de l'arithmétique" (d'après le Disquisitiones Arithmeticae) et travaille actuellement sur l'impact de la Première Guerre mondiale sur les mathématiques et les sciences.

Georges Skandalis [skandal@math.jussieu.fr] est professeur à l'Université Paris Diderot à Paris 7 et à l'Institut de mathématiques de Jussieu. Son sujet de recherche principal est la géométrie non-commutative. Il étudie actuellement les feuilletages singuliers et la théorie de l'indice associée. Il est un ancien étudiant d'Alain Connes.

CRITIQUES DE LIVRES

BULLETIN (Nouvelles séries)
de la Société américaine de Mathématiques
Volume 33, Numéro 4, Octobre 1996

Noncommutative geometry, par Alain Connes, Academic Press, Paris, 1994, xiii+661 pp., ISBN 0-12-185860-X ; publié d'abord en français par les éditions InterEditions, Paris (Géométrie Non Commutative, 1990).

L'analyse abstraite est une des branches les plus jeunes des mathématiques, mais elle est maintenant assez envahissante. Pourtant, il n'y a pas si longtemps elle était considérée comme plutôt étrange. L'attitude générale des mathématiciens avant la seconde guerre mondiale peut être brièvement évoquée en racontant l'histoire suivante racontée par feu Norman Levinson. Pendant l'année post-doctorale de Levinson à Cambridge, alors qu'il étudiait avec Hardy, von Neumann est venu là donner une conférence. Hardy (représentant alors la quintessence de l'analyste classique) fit cette remarque après la conférence : "Bien sûr, ce jeune est très intelligent. Mais étaient-ce des *mathématiques*?"

L'analyse abstraite est née dans les années 20 du défi que constituait la mécanique quantique et de la réponse apportée à ce défi par von Neumann et M. H. Stone. Le théorème de Stone-von Neumann (e.g., [1]), qui a spécifié la structure de la représentation unitaire générique des relations de Weyl, a établi l'équivalence des formalismes de la mécanique quantique de Heisenberg et de Schrödinger (il est intéressant que ces deux derniers ne l'aient jamais compris. La morale pourrait être que les physiciens rigoureux mathématiquement n'attendaient pas l'approbation des physiciens pratiques, aussi fondamental que soit leur travail). C'était le premier théorème non trivial de structure pour une représentation unitaire en dimension infinie d'un groupe non-commutatif et du coup, un prototype important de la théorie de la représentation des groupes de Lie en dimension infinie. Les écrits de Von Neumann montrent clairement qu'il avait compris l'importance de sa théorie pour la mécanique quantique, et il encouragea grandement son ami Wigner à développer la théorie dans le cas aisé du groupe de Poincaré. L'article de Wigner qui présente cela [2] vint après les travaux les plus référencés du vingtième siècle [\[1\]](#).

Von Neumann lui-même releva le défi plus grand encore de formaliser les mathématiques de la phénoménologie quantique. Avec Stone, il établit le théorème spectral dans un espace complexe de Hilbert et la théorie de l'extension des opérateurs hermitiens, qui fut largement un point culminant de la théorie des opérateurs hermitiens, et le fait qu'il ait eu la pré-science avec une vingtaine d'années d'avance, d'utiliser le terme "spectre", reste remarquable.

Peu de temps après, von Neumann prouva le théorème du double commutant [3], qui était à ce moment-là un problème frappant dans le contexte non-commutatif, et plus spécifiquement dans le champ de la mécanique quantique. L'article était hautement suggestif d'une théorie de dimension infinie comparable au théorème de structure de Wedderburn. Rétrospectivement, il marque le début de l'analyse abstraite et il a amené à la série classique des articles sur les *Anneaux d'opérateurs*, peut-être le travail majeur le plus original des mathématiques du vingtième siècle.

1. Une collection des travaux les plus référencés a été publiée par Springer des années après. Il est intéressant, et représentatif des relations entre les mathématiques et la physique, que l'article de Wigner ait été originellement soumis au journal de physique Springer. Il a été rejeté, et Wigner cherchait un journal de physique qui l'accepterait lorsque von Neumann lui dit de ne pas s'inquiéter, il réussit à le faire passer dans les Annales de mathématiques. Wigner fut content de cette offre (information verbale de Wigner).

Il y avait trois motivations principales pour la série des articles sur les “anneaux”, comme von Neumann les a appelés. La première était, c’est sûr, le défi posé par la mécanique quantique. En particulier, le caractère divergent de la théorie quantique des champs, bizarrement en contraste avec sa base intuitive simple, et von Neumann espérait réconcilier ces deux caractéristiques contrastées en trouvant le formalisme adéquat. Une seconde application potentielle d’importance était de structurer les représentations infini-dimensionnelles des groupes non abéliens, problème qu’il avait déjà résolu dans le cas du groupe de Heisenberg. Une troisième motivation était la généralisation des théorèmes de structure de Wedderburn.

Aujourd’hui, les divergences en théorie quantique des champs apparaissent comme des conséquences probables d’une géométrie très simple de l’espace-temps. Dans l’univers d’Einstein $R^1 \times S^3$, qui n’est pas un modèle moins raisonnable que l’espace de Minkowski et qui l’approxime bien localement, les divergences sont absentes dans le cas crucial de l’électrodynamique quantique [4] et dans toutes les probabilités de la théorie électro-faible aussi. Les extensions et les applications du lemme de Poincaré au cas en dimension infinie servent à établir des intégrales relativement invariantes des champs quantiques d’opérateurs auto-adjoints dans l’espace de Hilbert [5, 6, 7].

La théorie de l’intégration non-commutative, dans laquelle on intègre des opérateurs plutôt que des fonctions, relativement à des mesures additives calculables sur des projections plutôt que sur des ensembles [8], avec la théorie de l’intégrale directe de von Neumann (i.e., décomposition d’algèbres), comble adéquatement le besoin d’une base abstraite de théorie des groupes, e.g., l’établissement du théorème de Plancherel pour les groupes localement compacts [9]. La théorie de la structure de Wedderburn a été étendue aux anneaux arbitraires de “type Γ ”, i.e. les types que l’on trouve le plus communément en pratique. Les autres types sont à peine moins rebutants qu’ils n’en ont l’air après complétion de leur théorie globale il y a quelques dizaines d’années. La théorie locale dépendant de la classification des anneaux simples centraux, ou des “facteurs”, a été étudiée attentivement avec énergie et ingéniosité, mais elle reste insaisissable et apparaît beaucoup plus réalisable qu’une classification complète des groupes discrets infinis, il n’y a d’ailleurs pas de besoin apparent d’une telle classification dans les autres parties de la science mathématique.

Ainsi, le programme de base de von Neumann a en grande partie été effectivement réalisé. Mais les algèbres d’opérateurs non-commutatifs constituent un paradigme naturel pour un certain nombre d’applications secondaires, de la théorie quantique à la topologie, l’algèbre, et la géométrie différentielle. Il y a un petit doute de l’auteur de ce livre merveilleux, et très bien imprimé, que ces applications puissent être surmontées par les analystes abstraits de sa génération. Le sujet de la “géométrie non-commutative” a son origine dans le programme de von Neumann pour les anneaux d’opérateurs ainsi que dans la théorie de la représentation pour les algèbres de Banach de Stone, Gelfand, et autres. Ce dernier travail a fourni une interprétation géométrique pour les algèbres commutatives sous la forme d’un idéal maximal ou d’un espace similaire. Ce travail d’avant-guerre a été rapidement suivi par l’extension non-commutative due à Gelfand et Neumark qui a amené la théorie des algèbres de Banach en relation proche à l’espace de Hilbert. Du point de vue de la mécanique quantique, l’idée avancée par ces travaux était que l’“espace-temps” était plus logiquement non pas un concept primaire mais plutôt un concept dérivé de l’algèbre des “observables” (ou opérateurs). Dans sa forme la plus simple, l’idée était que l’espace-temps pourrait être, à un niveau plus profond, le spectre d’une sous-algèbre commutative appropriée qui est invariante sous l’action du groupe de symétrie fondamental (e.g., [11]).

$H = L_2(M)$, consistant en une multiplication par f , agissant sur le domaine des fonctions g dans H tel que fg est aussi dans H . Inversement, tout opérateur normal dans l’espace de Hilbert (ou ensemble d’opérateurs normaux commutant) est unitairement équivalent à un

tel opérateur de multiplication (ou un ensemble de tels opérateurs). De plus, l'application $f \rightarrow M_f$ est de façon évidente un "isomorphisme" algébrique, qui est essentiellement applicable à des opérateurs aussi bien non-bornés ("mesurables") que bornés. Ainsi, à nouveau, il y a une base naturelle pour remplacer les espaces de fonctions par les opérateurs.

Pour donner un exemple simple, si f est une fonction dans l'espace euclidien, sa différentielle $df = \sum_j (\partial_j f) dx_j$ (où $\partial_j = \partial/\partial x_j$) est équivalente à la "différentielle" de l'opérateur de multiplication correspondant, " dM_f " = $\sum_j [\partial_j, M_f] dx_j$. Cela amène à la formulation de la différentielle dA d'un opérateur A sur un espace donné comme l'application linéaire $X \rightarrow [X, A]$ des espaces vectoriels dans les opérateurs. Une 1-forme "quantifiée" est de manière correspondante principalement une application linéaire convenable des espaces vectoriels vers les opérateurs. Avec les restrictions qui conviennent, ainsi qu'avec les notions de fermeture et d'exactitude, des formes de degré arbitraire. Ainsi, les formes quantifiées apparaissent comme naturelles dans un modèle purement mathématique, mais elles impliquent plus que le "non-sens abstrait généralisé" qu'elles semblent représenter. Elles émergent de considérations théoriques de la théorie quantique et forment un ingrédient essentiel, dans le cas infini-dimensionnel, d'un traitement systématique des "produits" des champs quantiques, qui sont au mieux des opérateurs de distributions valuées (e.g., [5, 6, 7]).

Comme indiqué ci-dessus, la différence entre C^* - et W^* -algèbres est non seulement technique mais aussi fonctionnelle. A cause de la caractérisation algébrique intrinsèque des C^* -algèbres, la notion naturelle d'équivalence est celle d' $*$ -isomorphisme. L'équivalence unitaire implique bien sûr l'isomorphisme algébrique, mais les invariants correspondant sont trop compliqués pour être très utiles. Même selon la relation d'équivalence d' $*$ -isomorphisme, les invariants ne sont pas simples. Il y a juste autant de classes d'équivalences de C^* -algèbres commutatives qu'il y a d'espaces compacts locaux, et les classes d'équivalence des C^* -algèbres non-commutatives sont beaucoup plus étendues.

Dans le cas des W^* -algèbres, l'équivalence unitaire (ou "spatiale") est une notion naturelle, et la classification est facilitée par le fait qu'un isomorphisme algébrique conjointement avec un manque adéquat de multiplicité non-triviale suffit à impliquer une équivalence unitaire. Le cas le plus simple est celui des algèbres maximales abéliennes auto-adjointes des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert, dont un isomorphisme $*$ -algébrique implique l'équivalence unitaire. Mais en général, la théorie des W^* -algèbres est en relation avec les sous-espaces invariants et la réduction correspondante de l'algèbre.

Dans le cas des W^* -algèbres de "type I" dans le schéma Murray von Neumann, il y a un théorème de structure presque explicite [10] qui classe ces algèbres, selon l'équivalence unitaire. Les algèbres de type I incluent la plupart des algèbres auxquelles on a en général affaire "concrètement" en pratique, mais une exception notable est celle des algèbres de Clifford sur un espace de Hilbert. Ceci est le cas le plus simple des W^* -algèbres de type II, et leur découverte dans le début des années 30 par von Neumann (voir [13] dans une forme différente) a rendu très frappant le fait qu'il y avait des phénomènes qualitativement nouveaux dans les W^* -algèbres de dimension infinie. En particulier, les algèbres de Clifford sont des algèbres centrales simples qui sont radicalement différentes des algèbres de tous les opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert. En même temps, cette sorte d'algèbre joue un rôle fondamental dans l'analyse des champs quantiques sans fermions. Selon une notation souvent utilisée, c'est une algèbre engendrée par les Q fermions canoniques, et ainsi l'analogue d'une algèbre commutative engendrée par les observables canoniques Q bosoniques. L'algèbre de Clifford est le plus simple des facteurs qui sont des limites directes d'algèbres de matrices, et pour l'instant seules les familles de facteurs relativement accessibles ont été totalement classifiées.

Les C^* - et W^* -algèbres ont en commun qu'elles admettent toutes des notions d'intégration. Un état E d'une C^* -algèbre est une fonctionnelle linéaire positive, qui dans le cas commutatif est équivalente à une mesure sur le spectre (ou espace idéal maximal) de l'algèbre. Dans le cas non-commutatif, il n'est en général pas central, i.e., $E(AB)$ et $E(BA)$ sont génériquement non égaux. Cela limite la portée de la théorie de l'intégration C^* -algébrique, mais leur multitude d'états rend leur théorie limitée assez utile néanmoins. Par exemple, les fonctions définies positives sur les groupes déterminent les états et peuvent effectivement être traitées en fonction d'eux. Ce sont des généralisations des théorèmes de Radon-Nikodym et d'autres théorèmes de base en théorie de la mesure appliquée au contexte des C^* -algèbres, à commencer par [12, 14].

Un "poids" sur une W^* -algèbre A est une fonction non-négative additive calculable sur les projections qui est unitairement invariante et qui ainsi généralise la notion de mesure applicable dans le cas abélien. Tous les théorèmes de base et les idées de la théorie de l'intégration de Lebesgue s'étendent au cas non-commutatif, et les opérateurs "mesurables" peuvent être ajoutés et multipliés à l'envi, presque comme les fonctions mesurables et différemment des opérateurs non-bornés en général. Une application typique est la théorie de Plancherel pour les groupes généraux uni-modulaires localement compacts. Quand A a un centre trivial, i.e. est un "facteur", il y a un poids essentiellement unique, qui est la fonction dimension de Murray-von Neumann.

Voici les fondations sur lesquelles est basée la Géométrie non-commutative. La partie "géométrie" du titre est un peu programmatique; un titre plus descriptif pourrait être Sujets d'algèbres d'opérateurs et leurs applications. L'approche est suggestive et informelle, bien que techniquement hautement sophistiquée. L'auteur se promène de ses principaux domaines et travaux afférents à une attention minimale (ou des références) aux travaux précédents, incluant quelques travaux idéalement basiques. Le résultat apparaît comme un tour de force brillant et soutenu qui fascinera les personnes travaillant dans ce domaine et ayant un bagage suffisant concernant les principaux axes d'investigation de l'auteur mais pourrait rebuter des non-spécialistes. Ce serait dommage, car le livre établit des relations entre divers aspects de son sujet qui ne sont pas très bien représentés dans la littérature, spécialement ceux concernant les directions topologique et homologique.

Chacun des six chapitres a son propre thème, représentant un intérêt majeur de l'auteur : I, "Espaces non-commutatifs et théorie de la mesure"; II, "Topologie et K -théorie"; III, "Cohomologie cyclique et géométrie différentielle"; IV, "Calcul quantifié"; V, "Algèbres d'opérateurs"; VI, "Aspect métrique de la géométrie non-commutative". Tous les chapitres contiennent les $*$ -algèbres de façon plus ou moins étendue mais sont sinon reliés de manière assez libre. Une introduction fournit une vue globale de chaque chapitre. Parmi les thèmes favoris qui sont récurrents, on trouve (i) les feuilletages, (ii) la cohomologie, (iii) la K -théorie, (iv) la classification des facteurs, et (v) les interprétations des aspects de la physique mathématique.

Le dernier chapitre est peut-être le plus nouveau. Il contient une tentative courageuse et intéressante d'amener la considérable expertise de l'auteur et sa flexibilité sur une grande variété de sujets en physique, sujets qu'il voit reliés aux algèbres d'opérateurs. Ceux-ci incluent les états KMS (Kubo-Martin-Schwinger), dont il considère apparemment la théorie comme fondamentale en mécanique statistique. Malheureusement, il n'y pas de base empirique apparente pour ça, et jusqu'à maintenant, la théorie apparaît comme une abstraction d'une initiative physique qui n'a pas été très fructueuse.

Un sujet physique plus vivant se manifeste par le caractère discret (ou rationnel) de certaines quantités observables. Une grande variété d'hypothèses mathématiques a été avancée dans

la littérature de la physique mathématique pour expliquer ces observations. Le livre présente une théorie mathématique frappante et intriquée due à Bellissard qui traite les cas entiers. Ceci est basé sur le “tore non-commutatif”, une application de la cohomologie cyclique.

L’initiative la plus remarquable dans la direction de la physique est une interprétation de l’unification de l’électromagnétisme et des interactions faibles. Le “modèle standard” dû à Glashow, Weinberg, et Salam a eu un certain succès empirique, modulo certaines prescriptions adéquates de renormalisation et de corrections des énergies des hauts rayons. Comme l’explique l’auteur, ce modèle est à la base un modèle phénoménologique et il est difficilement acceptable comme théorie ultime. Le livre présente une reformulation mathématique sophistiquée du modèle standard, qui pourrait avoir le potentiel espéré d’aller au-delà de lui. C’est exemplaire que l’auteur applique son immense expertise mathématique à la physique théorique; les mathématiques pures de haut niveau sont devenues trop repliées sur elles-mêmes et elles ont besoin du défi des connexions avec d’autres domaines. Cependant, l’interprétation donnée est essentiellement plus *descriptive* qu’*explicative*. Il n’est pas proposé de résoudre de la question ancienne de savoir pourquoi l’interaction électromagnétique est invariante par inversion alors qu’il est proposé que les interactions faibles soient essentiellement non-invariantes. De plus, les efforts vers la physique mathématique semblent ignorer quelques principes physique de base - la causalité, la stabilité (effectivement, la positivité de l’énergie), etc. - pour obtenir une solution technique rapide. Cela semble représenter une sorte de naïveté qui contraste bizarrement avec le très haut niveau de connaissances mathématiques.

Mathématiquement, le chapitre du livre le plus original est celui qui traite de cohomologie cyclique, qui subsume les formes quantifiées décrites plus tôt mais qui est plus général. C’est, pourtant, loin d’être un exposé systématique du sujet, et cela n’est pas destiné à l’être. C’est plutôt un essai sur plusieurs ramifications, applications aux feuilletages, topologie et autres. Cela apparaît techniquement très ingénieux mais peut-être un peu court sur chaque problème externe intéressant à son propre titre.

Le chapitre qui fait le plus autorité est celui sur les W^* -algèbres, qui traite principalement de la classification des facteurs. L’idée initiale de Murray von Neumann était que la structure de la W^* -algèbre de l’effet de Hall quantique (en deux dimensions) peut en général être réduite à celle de ses facteurs via la décomposition d’une algèbre par rapport à son centre. La théorie de la réduction de von Neumann fournit une décomposition de toute W^* -algèbre donnée (sur un espace séparable) relativement à toute algèbre booléenne donnée de ses sous-espaces invariants. Cela implique en particulier que toute W^* -algèbre est une “intégrale directe” de facteurs. De manière formelle, cette “théorie locale” réduit le problème au cas des facteurs, mais la théorie “globale” est plus puissante et illustrante en pratique et présente moins de difficultés en terme de mesurabilité. Ainsi, en analyse harmonique sur les groupes de Lie simples non-compacts, le seul facteur impliqué est celui de tous les opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert séparable, comme cela découle du travail fondateur d’Harish-Chandra, mais on est encore loin de savoir établir la théorie de Plancherel pour de tels groupes.

Le livre fournit effectivement l’esprit et le goût de la théorie de Connes et devrait être assez stimulant et utile pour ceux qui font de la recherche dans ce domaine. D’un autre côté, l’insistance technique et le peu d’éléments fournis quant à son aspect idéal et ses origines historiques pourrait repousser les non-spécialistes. Il serait probablement difficile d’utiliser ce livre comme référence ou source d’information précise, en partie du fait du manque des numéros de pages de l’index. C’est plutôt un livre ressemblant à un long discours ou à une lettre à des amis. Par exemple, son style informel est à peu près à l’opposé du style crispant définition-théorème-preuve que l’on pourrait attendre de Connes, et cela peut être un peu frustrant pour ceux qui ne sont pas déjà au top quant à la maîtrise du matériau. Est fournie,

cependant, une bibliographie longue ainsi qu'un bref résumé des notations.

Comme compte-rendu effervescent et déjà soutenu d'une grande étendue d'aspects avancés et subtils de l'analyse abstraite, ce livre apparaît d'une qualité précieuse et est certainement unique en son genre.

Bibliographie

1. J. von Neumann, *Die Bindeutigkeit der Schrodingerschen Operatoren*, Math. Ann. **104** (1931), 570-578.
2. E. Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. Math. **40** (1939), 149-204.
3. J. von Neumann, *Zur Algebra der Funktionoperatoren*, Math. Ann. **102** (1920), 370-427.
4. I. Segal and Z. Zhou, *Convergence of quantum electrodynamics in a curved deformation of Minkowski space*, Ann. Phys. **232** (1994), 61-87. MR **95c** :81174
5. J. Pedersen, I. Segal, and Z. Zhou, *Nonlinear quantum fields in ≥ 4 dimensions and cohomology of the infinite Heisenberg group*, Trans. Amer. Math. Soc. **345** (1994), 73-95. MR **95a** :81158
6. I. Segal, *Rigorous covariant form of the correspondence principle*, Proceedings, 1094 J. von Neumann Symposium (W. Arveson, T. Branson, I. Segal, eds.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 175-202.
7. _____, *Complex noncommutative infinite-dimensional analysis*, Proceedings, 1994 Norbert Wiener Symposium (D. Jerison, I. Singer, and D. Stroock, eds.) (in preparation).
8. _____, *A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. Math. (2) **57** (1953), 401-457. MR **14** :991f
9. _____, *An extension of Plancherel's theorem to separable unimodular groups*, Ann. Math. (2) **52** (1950), 272-292. MR **12** :157F
10. _____, *Decompositions of operator algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 9 (1951). MR **13** :472b
11. _____, *A class of operator algebras which are determined by groups*, Duke Math. J. **18** (1951), 221-265. MR **13** :534b
12. _____, *Irreducible representations of operator algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 73-88, MR **8** :520b
13. J. von Neumann, *Continuous geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **22** (1936), 92-100.

14. H. A. Dye, *The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 243-280. MR **13** :662b

IRVING SEGAL
MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Bourbaki : 1945-75
Dialogue organisé
par la Fondation Hugot
du Collège de France,
entre Jean-Pierre Serre, Pierre Cartier,
Jacques Dixmier et Alain Connes
Juin 2019

ALAIN CONNES : Donc nous sommes réunis pour parler de Bourbaki, mais de Bourbaki dans la période qu'on appelle l'âge d'or de Bourbaki et, en discutant avec Jacques, on a situé cet âge d'or disons sur 30 ans, entre 1945 et 1975. Je ne tiens pas à des limites précises bien entendu. Donc mon rôle sera simplement le rôle de modérateur dans la discussion et j'insisterai surtout bien sûr sur des témoignages personnels et non pas sur les généralités qu'on trouve dans la littérature, etc. Ce qui m'intéresse vraiment, c'est d'avoir des témoignages personnels et je commencerai à dire simplement que ce qui force l'admiration, quand on regarde cette période-là, c'est surtout, enfin d'abord, c'est l'effacement des ego dans cette tâche...

JEAN-PIERRE SERRE : L'effacement des...?*

ALAIN CONNES : Des ego, des individualités.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah!

ALAIN CONNES : L'effacement des ego, c'est-à-dire le fait que dès le départ, il était convenu qu'aucun des membres de Bourbaki n'attacherait son nom à ce qui était produit et en fait, je pense que ce n'est pas du tout étranger, ce fait qu'il y ait cet effacement des ego, avec ce que ça a engendré, bien sûr, on en parlera, au niveau mathématique, les réussites extraordinaires que ça a engendré, mais aussi, ça a engendré un esprit de fraternité, je dirai, dans la communauté mathématique, et cet esprit de fraternité est visible, pas seulement bien sûr à l'intérieur de Bourbaki, mais en fait, je pense qu'il a débordé de Bourbaki en soi et bien sûr, c'était dû... on ne peut pas dire que

*. Transcription : Denise Vella-Chemla, 21.6.2019.

Bourbaki a pris le pouvoir, mais on peut dire qu'il y avait une telle panoplie de talents dans Bourbaki qu'en fait, je veux dire, ils ont été le modèle de toute une génération de mathématiciens, pas seulement français, mais aussi à l'étranger puisqu'il y a eu des étrangers qui ont participé à Bourbaki. Donc en fait, ça, c'est mon point de départ et la manière que j'ai envie d'utiliser pour vous faire participer, c'est de faire des tours de table sur des sujets assez spécifiques, mais, comme je le disais, j'ai envie de sujets qui n'ont pas leur réponse déjà dans la littérature, ou dans ce qu'on trouve sur internet, etc., mais qui auront des réponses tout à fait personnalisées. Donc, simplement pour voir si le tour de table marche et puis pour se chauffer, le premier sujet, c'est un sujet qui est assez simple, c'est la question suivante, "est-ce que vous connaissiez Bourbaki avant d'avoir été recruté ? Comment avez-vous été recruté ? Et quels sont vos souvenirs du premier congrès Bourbaki ?" Voilà. Donc je pense... Je ne sais pas dans quel ordre on peut procéder (*tendant la main vers Jean-Pierre Serre*).

JEAN-PIERRE SERRE : Je pense qu'on pourrait répondre dans l'ordre dans lequel on a été pris, tu vois ? Or là, j'ai été pris en premier.

ALAIN CONNES : Tu as été pris en premier ? D'accord.

JEAN-PIERRE SERRE : En 49. Alors là, je peux répondre à toutes ces questions-là... parce que... la façon dont j'ai connu Bourbaki : alors, bien sûr, j'avais regardé les livres de Bourbaki ; il n'y en avait pas beaucoup. Il y avait la Topologie générale, chapitres 1 et 2, je crois, et il y avait Algèbre 1, je crois. Algèbre 2 n'était même pas sorti.

ALAIN CONNES : Il y avait les fondements aussi ? (*rire de JD*)

JEAN-PIERRE SERRE : Non, non, non, il n'y avait rien de tout ça.

JACQUES DIXMIER : Il y avait le fascicule de Résultats des ensembles.

JEAN-PIERRE SERRE : Il y avait le fascicule de Résultats. Ça, c'était très utile d'ailleurs. Et alors, personnellement, ce qui s'est passé, c'est que j'ai passé l'agrégation et il y avait une épreuve d'analyse, bon, que j'avais plus ou moins comprise, pas beaucoup, du coup, et puis je rentre à l'Ecole Normale et là, Bourbaki avait un congrès qui était dans une salle et je suis rentré

par hasard dans cette salle...

ALAIN CONNES : Ah, d'accord, tu es rentré par hasard dans cette salle, d'accord.

JEAN-PIERRE SERRE : Et puis j'ai vu qu'ils discutaient de questions qui étaient très voisines, tu vois, de celles qui étaient dans mon problème d'agrégation. Et du coup, ça m'a intrigué. Et j'ai appris comme ça par accident que le prochain congrès Bourbaki trois mois après, ça c'était tu vois, c'était en juin ou juillet 48, qu'en octobre ou novembre, il y aurait comme ça une réunion Bourbaki, à Nancy.

ALAIN CONNES : A Nancy.

JEAN-PIERRE SERRE : Rue de la Craffe. Alors à l'époque en question, j'étais avec ma femme à Auxerre, parce qu'elle avait été professeur à Auxerre, et j'ai rien demandé à personne, j'ai pris un billet de train et je suis parti pour Nancy...

ALAIN CONNES : Bien sûr (*rires*).

JEAN-PIERRE SERRE : Oh, eh bien pour moi, il était normal que les maths ce soit ouvert, tu vois, je n'avais pas la moindre idée de politesse, qu'il fallait demander, non, non, je suis allé à Nancy, et là, il y avait un amphithéâtre et je me suis assis dans l'amphithéâtre; ils discutaient de théorie des corps, je me souviens très bien, il y avait une proposition de Chevalley un peu extraordinaire qui était de supprimer la théorie de Galois (*rires*), qu'il a transformée en un choix "ou bien vous la mettez, mais dans ce cas-là, vous mettez aussi les algèbres de Lie..."

ALAIN CONNES : Première apparition des algèbres de Lie par Chevalley.

JEAN-PIERRE SERRE : Du coup, ils ont eu le bon sens de lui dire oui. Et je crois que je suis intervenu, parce que je pouvais intervenir tu vois, et je crois que je suis intervenu pour dire une bêtise dont je me souviendrai jusqu'à la fin de ma vie qui était que la théorie de Galois ne servait à rien, tu vois (*rires de tous*). Et ça, ça m'a frappé, parce que tout le reste de ma vie, je m'en suis servi. Là, le bon Dieu ne m'a pas raté. Alors, ils ont été contents des

commentaires que je faisais sur les espaces vectoriels topologiques, des trucs faciles, comme ça, ils m'ont invité alors cette fois-ci pour le congrès d'après. Donc ça devait être en janvier, ou en février-mars.

PIERRE CARTIER : Ca devait être en 49.

JEAN-PIERRE SERRE : En 50, euh, en 49. Au congrès d'après, ils m'ont dit "on te prend". Voilà, c'est comme ça que je suis rentré.

ALAIN CONNES : Et qui il y avait à l'époque ? Donc il y avait Cartan, Dieu-donné, Chevalley... ?

JEAN-PIERRE SERRE : Non, mais j'ai forcé la porte de Bourbaki en quelque sorte.

ALAIN CONNES : Oh, très bien, tu l'as ouverte, et elle est restée ouverte !

JEAN-PIERRE SERRE, S'ADRESSANT À JACQUES DIXMIER : Alors voyons, alors, ensuite, je crois que c'est toi qu'on a pris ? On t'a pris en quelle année toi ?

JACQUES DIXMIER : Attends, avant toi, il y a eu Godement et Schwartz, qui ont été recrutés juste avant.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais oui, mais (*désignant AC*) il disait parmi nous trois.

JACQUES DIXMIER : Ah, parmi nous trois. Alors oui, après, c'est moi, oui.

JEAN-PIERRE SERRE : C'est quelle année, toi ?

JACQUES DIXMIER : En 49. Tu as même été... vous étiez chargés, Samuel et toi, de me recruter.

JEAN-PIERRE SERRE : Pour savoir si tu acceptais.

JACQUES DIXMIER : Et vous n'avez eu aucun effort à faire parce que, j'étais (*rires*)... Je dois... Avouons, j'étais flatté, et puis intéressé.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, mais ça te changeait les idées, quand-même aussi un petit peu.

JACQUES DIXMIER : Comment, ça me changeait les idées?...

JEAN-PIERRE SERRE : Par rapport aux espaces de Hilbert.

JACQUES DIXMIER : Et puis, ah oui, ça m'a énormément changé les idées, oui, alors là! Et même tout de suite, je me suis rendu compte que ça m'intéressait plus que mes propres travaux, là, alors, immédiatement.

ALAIN CONNES : Et le premier congrès alors? Vas-y, raconte...

JACQUES DIXMIER : Le premier congrès, alors, en 49, mais alors à quel endroit c'était, je ne me rappelle pas. Attends, je reviens sur autre chose, on est un peu libres? Sur ton introduction, parce qu'il y a un point sur lequel je ne suis pas d'accord, enfin, je veux me désolidariser, c'est que tu appelles ça l'âge d'or de Bourbaki. Alors ça l'est peut-être, je n'en sais rien, comme justement j'ai perdu complètement contact avec Bourbaki, ça m'embête de dire "c'est l'âge d'or de Bourbaki", alors que je ne sais rien de ce qui se passe ou presque rien de ce qui se passe depuis. Tu comprends que c'est prendre une position de supériorité qui est un peu déplaisante quand-même. Pour moi en tout cas.

PIERRE CARTIER : Je crois que c'est l'opinion générale hein.

JEAN-PIERRE SERRE : (*désignant Alain Connes*) Disons que c'est son opinion à lui, parce que par exemple,

JACQUES DIXMIER : (*s'adressant à Alain Connes*) Bon, d'accord, c'est ton opinion à toi, d'accord.

ALAIN CONNES : Pas seulement, c'est ce qui est écrit dans les livres qui parlent de Bourbaki, c'est tout. On va pas s'éterniser là-dessus.

JEAN-PIERRE SERRE : Ca sera pas écrit, de toute façon (*s'adressant à Alain Connes*), tu l'as dit de toute façon, on ne peut pas le supprimer.

ALAIN CONNES : Je l'ai dit, j'en prends la responsabilité.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais effectivement, j'étais un peu agacé quand Cartier a fait des laïus, et par écrit, lui, sur la mort de Bourbaki, que c'était fini parce qu'il n'était plus à Bourbaki, du coup, Bourbaki était mort.

ALAIN CONNES : Eh bien, la mort de Bourbaki a été annoncée, comme vous le savez, en 1968.

TOUS ENSEMBLE : C'était un canular.

JEAN-PIERRE SERRE : C'était un canular stupide.

JACQUES DIXMIER : Oh, stupide, il était pas plus idiot que beaucoup de canulars.

JEAN-PIERRE SERRE : Non mais c'est beaucoup dire, ça, déjà (*rires*).

JEAN-PIERRE SERRE : Bon donc ça, c'est ton entrée dans Bourbaki. (*Se tournant vers Pierre Cartier*) Et toi Cartier, c'est un peu plus compliqué, parce que tu es rentré deux fois en quelque sorte ?

PIERRE CARTIER : Oui, oui, bon alors, comment est-ce que je connaissais Bourbaki ? Eh bien, évidemment, les livres de Bourbaki, je les connaissais. Je les ai découverts quand j'étais potache vers 16 ans parce que mon parrain qui était prof à Henri IV a voulu me faire un cadeau pour je sais plus pour quelle occasion, il m'a emmené chez Hermann, il m'a laissé là, tout l'après-midi dans la boutique, et quand il est revenu, il a sorti le chèque qu'il avait rédigé d'avance et le libraire avait calculé exactement, il lui avait dit d'avance... Bon et je me souviens, je crois que j'avais choisi la topologie générale de Bourbaki parmi d'autres livres, il y avait aussi les livres de Lichné[†]. Et mon parrain me dit "Tu sais qui est Bourbaki ?", "Ah non, pas du tout", "Tu sais qui est Simone Weil ?", j'ai dit "Tu m'en as beaucoup parlé !". Parce qu'ils avaient été normaliens ensemble. "Elle a un frère, André Weil, qui a fondé un groupe qui s'appelle Bourbaki et peut-être qu'un jour, tu les connais." Alors je

†. Lichnerowicz

me suis précipité, j'ai passé tout mon été à essayer de le lire. La difficulté, c'est que je n'avais pas le fascicule de résumés de théorie des ensembles. Et donc toutes ces notations, je ne les connaissais pas. Et donc j'ai eu du mal à les reconstituer.

ALAIN CONNES : Et qu'est-ce qu'il y avait comme chapitres de topologie générale, 1 et 2 ?

PIERRE CARTIER : 1 et 2, 1 et 2.

ALAIN CONNES : 1 et 2 seulement, il n'y avait pas les nombres réels.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais y avait pas mal de choses quand-même.

JEAN-PIERRE SERRE : Il y avait les compacts, par exemple.

ALAIN CONNES : Il y avait les structures uniformes.

PIERRE CARTIER : Il y avait des choses, mais la terminologie des ensembles n'était pas réexpliquée. C'est ça qui m'a posé difficulté. Alors bon, donc, voilà comment j'en avais entendu parler. Et puis, comment est-ce que ça s'est passé. Eh bien, ma première année à l'école, il y avait un séminaire Cartan où Eilenberg était, Samuel Eilenberg était là.

JEAN-PIERRE SERRE : C'est quelle année ça ?

PIERRE CARTIER : C'est 50. Moi, je suis rentré en 50. Il y a un séminaire 50-51, un des grands séminaires de Cartan, Eilenberg avait parlé de la cohomologie, ensuite il y avait les faisceaux, enfin il y avait beaucoup de choses. Et Eilenberg avait fait un cours en parallèle là-dessus auquel j'ai assisté bon et j'avoue que j'étais très bon, on s'est très bien entendus Eilenberg et moi et je pense que c'est lui qui a dit à Cartan "Tu devrais l'inviter, on devrait l'inviter", alors j'étais comme cobaye en juin 51. Et je suis arrivé, alors Cartan avait une petite réserve parce que je devais passer je ne sais plus quel examen de licence et je l'ai séché en promettant à Cartan que je le passerais en septembre et que je l'aurais (*rires*). Et je l'ai eu, enfin bon. Alors je suis arrivé et c'était à Pelvoux-le-Pouët, lieu historique, je suis arrivé là, et j'ai vu tout le monde. Il y avait Cartan bien sûr, il y avait Schwartz, je me

souviens fort bien de Schwartz, je me souviens de Dieudonné, je me souviens de Godement, enfin, de tout ça, tout ça était très très agité. Cet endroit, Pelvoux-le-Pouët, on y est allés un certain nombre de fois, il y avait une petite auberge sympathique et la légende veut, je ne peux plus la garantir, la légende veut qu'un jour Weil et Dieudonné se soient tellement engueulés que la patronne du restaurant, de l'auberge, a eu peur et qu'elle a dit à son fils "Va donc chercher les gendarmes." et quelqu'un l'a rassurée "Mais non, mais non, il ne se passera rien, rassurez-vous, on va pas s'étriper.". Donc ça, c'était mon premier congrès, et je me souviens qu'on a discuté des groupes de Lie, bon, il y avait un rapport de Schwartz sur les groupes de Lie.

ALAIN CONNES : De Schwartz pas de Chevalley alors ?

JEAN-PIERRE SERRE : Il y a eu aussi Weil après mais enfin, Weil, c'était pas les groupes de Lie, c'était les variétés, c'était pas les groupes de Lie, si, c'est Schwartz.

PIERRE CARTIER : Schwartz avait fait les groupes de Lie et je me souviens qu'il y avait l'abréviation Pass.Ad. Je ne sais plus pourquoi. (*S'adressant à JPS*) Pass. et Ad., Ad. adjoint, je ne sais plus ce que ça voulait dire, ça avait fait rire tout le monde, évidemment, passade. C'est là que j'ai appris par exemple, là, il y avait une chose qui m'a beaucoup inspiré, c'était un théorème de Schwartz que *l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'un groupe, c'était l'algèbre des distributions ayant pour support l'origine pour la convolution*. Et ça, ça m'a énormément inspiré ensuite, ça. J'ai démarré, ma thèse a démarré là-dessus, sur ces idées-là. Bon qu'est-ce qui s'est passé. On a fait une expédition au glacier blanc.

JACQUES DIXMIER : Pas moi.

PIERRE CARTIER : Mais il y a encore des photos qui traînent un peu partout sur cette expédition, on est tous photographiés, et alors Weil nous avait persuadés, ou le guide nous avait persuadés qu'il fallait porter un béret de chasseur alpin. On ne pouvait pas faire une expédition de montagne sans mettre un béret de chasseur alpin. Et Weil était très fier de son béret de chasseur alpin et (*s'adressant à JPS*) il me semble que tu avais fait un dévissage d'ailleurs là?!...

JEAN-PIERRE SERRE : Et que je n'avais pas de béret non plus ! Mais par contre, j'ai dévalé une pente, ils ont été un petit peu inquiets, en particulier Cartan, de me voir dégringoler. Et puis je me suis arrêté au bas de la pente et puis voilà.

PIERRE CARTIER : Tu as quand-même dévissé de 50 ou 100 mètres hein ?

JEAN-PIERRE SERRE : Oui mais c'était une pente qui n'était pas verticale, elle était inclinée suffisamment pour que ça continue, tu vois (*mines impressionnées de AC et JD*) oui mais ça se terminait par le glacier tu vois, c'était pas...

PIERRE CARTIER : Et alors, je me souviens aussi que c'est là que j'ai fait la connaissance de Chevalley par exemple. Et Chevalley, il était là avec sa fille, parce qu'il venait de se remarier et il était là avec sa fille Catherine qui avait 2 ans. Tout ça, ce sont mes souvenirs de ce premier congrès.

JEAN-PIERRE SERRE : Ca c'est le second ou c'est le premier congrès, ça ? Parce que tu n'as pas été pris à ce moment-là ?

PIERRE CARTIER : J'ai été pris plusieurs années après, en 54.

ALAIN CONNES : Ah, tu as été pris plusieurs années après, d'accord.

JACQUES DIXMIER : (*s'adressant à PC*) Sauf erreur, mais je ne me fie pas trop à ma mémoire, j'étais chargé de te recruter, ainsi que Bruhat. Mais est-ce que ça concorde avec tes propres souvenirs ?

PIERRE CARTIER : Oui, oui, on a été recrutés, Bruhat et moi, à peu près au même moment, je sais.

JACQUES DIXMIER : Ah non, non, non, on n'a pas été recrutés au même moment. Moi c'était en 49 et toi, tu dis en 54.

ALAIN CONNES : Non, non, il parle de Bruhat et lui.

JACQUES DIXMIER : Oui, Bruhat et toi, enfin, dans mon souvenir, Bourbaki m'a dit "recrute-les", enfin, "dis-leur qu'on les recrute", c'était pas moi qui

recrutais, c'était Bourbaki bien sûr.

PIERRE CARTIER : Est-ce que tu te souviens du recrutement de Koszul ?

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, j'allais en parler aussi parce que ça avait été assez rigolo.

JACQUES DIXMIER : Non mais alors, on sort de nous trois, là.

ALAIN CONNES : Non, non mais bien sûr, allez-y, allez-y.

JEAN-PIERRE SERRE : Alors Koszul, on avait décidé de le prendre, et on avait chargé Cartan de le "contacter". Et alors à un congrès suivant, on a demandé à Cartan "Alors, tu as contacté Koszul ?" "Oui, enfin non, il a rien dit, enfin...". Au bout de 6 mois, (*s'adressant à Jacques Dixmier*) enfin, tu t'en souviens sans doute.

JACQUES DIXMIER : Les dates, les durées, non, je ne me souviens pas des durées, non, la morale, je me souviens.

JEAN-PIERRE SERRE : Au bout d'un an, enfin, au bout d'un certain temps quand-même on s'est dit "Quelqu'un d'autre..." (*à JD*) toi, peut-être ?

JACQUES DIXMIER : Non, c'est pas moi.

JEAN-PIERRE SERRE : C'est pas moi. Je sais plus qui d'entre nous a dit "Va demander à Koszul". On a demandé à Koszul qui a dit instantanément oui et on lui a demandé "Mais Cartan ne t'a pas demandé ?" "Non, j'avais pas compris...". Cartan avait été si discret, tu vois, que Koszul n'avait pas compris qu'il était invité (*rires*).

PIERRE CARTIER : C'était ça le truc.

JACQUES DIXMIER : Faut dire que Cartan était le patron de thèse de Koszul, peut-être que ça rendait les relations un tout petit peu plus formelles.

PIERRE CARTIER : Cartan était le patron de thèse de pratiquement tout le monde, au moins officiellement.

JEAN-PIERRE SERRE : Il n'était pas formel mais il était...

JACQUES DIXMIER : Il n'était pas bon directeur de thèse.

JEAN-PIERRE SERRE : Il était très poli, quand-même, il pouvait...

ALAIN CONNES : C'est sûr, il était très poli, donc peut-être qu'effectivement...

JEAN-PIERRE SERRE : Où est-ce que c'est, je crois que c'est dans Proust, qu'il y a comme ça, tout à fait au début, il y a une histoire en effet d'une tante, qui demande...

ALAIN CONNES : Mais bien sûr! Non, mais qui veut remercier Swan pour avoir donné des bouteilles de vin.

JEAN-PIERRE SERRE : Remercier Swan, c'est ça, elles le font d'une façon si discrète...

ALAIN CONNES : Elles le font de manière tellement discrète que finalement...

JEAN-PIERRE SERRE : ... que personne ne s'en rend compte.

ALAIN CONNES : Bien sûr, bien sûr, j'avais envie d'en parler de ce passage de Proust, parce que ça m'évoquait exactement ça, exactement.

JEAN-PIERRE SERRE : Cartan s'est comporté comme ça.

ALAIN CONNES : Bon, alors donc je vois que le tour de table marche bien. Donc on va maintenant aborder une question un peu plus délicate.

JACQUES DIXMIER : Attends, si tu parles des recrutements alors, on parle des recrutements ou pas? On a parlé de nos recrutements à nous trois.

ALAIN CONNES : Tu peux parler de recrutements.

JACQUES DIXMIER : On vient de parler de celui de Koszul. Il y a d'autres recrutements, par exemple Grothendieck, le recrutement de Grothendieck.

ALAIN CONNES : Ca a été fait en quelle année, le recrutement de Grothendieck ?

JACQUES DIXMIER : C'était à Nancy, Grothendieck est allé comme jeune élève.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah non non, il n'était pas du tout dans Bourbaki quand il était à Nancy, il a été pris nettement après tu vois.

JACQUES DIXMIER : Enfin c'est lié quand-même, écoute, il est allé à Nancy tout de suite après ses études en faculté, il a...

JEAN-PIERRE SERRE : Non il a été élève de membres de Bourbaki mais c'est pas pareil.

ALAIN CONNES : De Schwartz et Dieudonné.

JACQUES DIXMIER : Il était élève de Schwartz et Dieudonné, c'est ça, mais Schwartz et Dieudonné ont dit tout de suite "il est formidable" alors...

JEAN-PIERRE SERRE, ALAIN CONNES, ENSEMBLE : Ah mais c'est pas pareil!!

JEAN-PIERRE SERRE : (*poursuivant*) C'est tout-à-fait différent : on n'a pas pensé du tout à le prendre comme membre du groupe Bourbaki tout de suite, ça, je suis presque sûr.

JACQUES DIXMIER : Alors là, mes souvenirs ne sont pas assez précis, je peux rien dire, ça m'étonne un peu mais enfin, bon... Moi je dirais qu'il a été recruté en 55, par là.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, moi aussi.

JACQUES DIXMIER : (*désignant Pierre Cartier*) C'est-à-dire juste après toi, tout au moins, ton recrutement officiel.

PIERRE CARTIER : A peu près au même moment, à peu près au même moment.

JEAN-PIERRE SERRE : Non mais on ne va pas passer en revue les membres de Bourbaki.

JACQUES DIXMIER : Ben je n'sais pas...

PIERRE CARTIER : Non, il y a les archives qui permettent de savoir.

JEAN-PIERRE SERRE : On va revenir, revenons à nous, plutôt.

JACQUES DIXMIER : Les recrutements des membres postérieurs à nous font partie de nos souvenirs personnels.

JEAN-PIERRE SERRE : Il y en a eu des tas d'un peu bizarres, tu vois, par exemple, Atiyah a été invité une fois, et il n'est pas revenu.

ALAIN CONNES : Mac Lane est venu une fois aussi.

JEAN-PIERRE SERRE : Alors lui, il était même pas, c'est pas pareil, il était venu comme visiteur tu vois, c'est pas pareil.

JACQUES DIXMIER : Non mais le recrutement de Borel, par exemple, là, tu dois avoir des souvenirs. Et c'est intéressant parce que ça doit être un des premiers non-normaliens qu'on a recrutés.

ALAIN CONNES : Etranger tu veux dire.

PIERRE CARTIER : Et un des premiers étrangers en plus.

ALAIN CONNES : Et Eilenberg non ? Eilenberg avait été recruté avant.

PIERRE CARTIER : Eilenberg, c'est en 50.

JEAN-PIERRE SERRE : Je ne sais pas quand c'était, Eilenberg, c'était en 50 ?

PIERRE CARTIER : Si j'en suis certain, c'était en 50.

ALAIN CONNES : Donc, c'est Eilenberg le premier étranger à avoir été recruté.

PIERRE CARTIER : C'est quand il est venu à Paris, l'année qu'il a passée à Paris.

ALAIN CONNES : Et Tate alors, quand est-ce qu'il a été recruté ?

JEAN-PIERRE SERRE : C'est nettement plus tard, mais effectivement, il est venu plusieurs fois. Ça a pas été du tout illusoire, comme Atiyah, tu vois, non.

ALAIN CONNES : Atiyah est venu une fois, alors ?

JEAN-PIERRE SERRE : Une fois, et puis ça ne lui a pas plu, quoi, ça ne correspondait pas...

PIERRE CARTIER : A sa manière de faire, c'est certain.

ALAIN CONNES : Alors je vais aborder une autre question, la question suivante. C'est une question qui a à voir avec les maths de Bourbaki, mais pour être beaucoup plus spécifique que ça, la question que je voudrais vous poser, c'est "comment est-ce que vous concilieez votre propre travail de recherche avec le travail que vous aviez à faire pour Bourbaki, les rédactions, etc., et est-ce qu'il y avait des relations dans un sens et dans l'autre, c'est-à-dire, est-ce que le travail pour Bourbaki vous influençait pour votre propre travail et inversement. Ca, pour moi, c'est une question capitale.

JEAN-PIERRE SERRE : Il faudrait que tu choisisses un ordre, parce que...

ALAIN CONNES : Eh bien, on peut respecter le même ordre que tout à l'heure puisque ça permet de...

JEAN-PIERRE SERRE : Je commence alors.

ALAIN CONNES : Oui tu commences.

JEAN-PIERRE SERRE : C'est difficile à dire. J'ai toujours eu un grand plaisir à travailler pour Bourbaki.

ALAIN CONNES : Ah bon ?

JEAN-PIERRE SERRE : Moi, c'était un grand plaisir.

PIERRE CARTIER : Un grand... plaisir ?

JEAN-PIERRE SERRE : Plaisir parce que à la fois, j'essayais de le rédiger aussi bien que possible mais en même temps, je savais que quelqu'un d'autre le reprendrait après, et le corrigerait.

ALAIN CONNES : Donc tu étais tranquille, oui, d'accord, je comprends.

JEAN-PIERRE SERRE : Alors je pouvais me laisser aller, tu vois.

ALAIN CONNES : Tu avais une sécurité, tu veux dire.

JEAN-PIERRE SERRE : Et alors le style de Bourbaki évidemment me convenait parfaitement. Pour rédiger mes propres articles, si possible, je suivais le style de Bourbaki, je faisais comme si je rédigeais pour Bourbaki, en expliquant un petit peu.

ALAIN CONNES : Mais dans quel sens c'est allé, je veux dire, quand tu écrivais des articles après avoir, puisque tu as commencé très tôt avec Bourbaki, donc en fait, tu as suivi ce style-là dès que tu as commencé à écrire.

JEAN-PIERRE SERRE : C'était mon style spontané en fait, curieusement. Dès que j'ai commencé, je rédigeais naturellement dans ce style-là.

ALAIN CONNES : D'accord, et tu tapais à la machine, comment tu faisais ?

JEAN-PIERRE SERRE : Je tapais, oui, j'avais une machine à écrire, et puis à l'époque, on tapait très facilement parce que quand ça n'allait pas, on tapait des X sur ce qu'on voulait effacer, on faisait des lettres à la main s'il le fallait, c'était épatant ça. Alors, point de vue influence...

ALAIN CONNES : Oui point de vue influence, dans les deux sens, voilà, c'est ça qui m'intéresse.

JEAN-PIERRE SERRE : Oh, hummf, j'ai peut-être influencé Bourbaki un peu, c'est difficile, une personne déterminée, à part Weil, n'influçait pas vraiment Bourbaki, quand-même.

PIERRE CARTIER : Sauf l'algèbre commutative, quand-même.

JACQUES DIXMIER : C'est lui qui parle, mais on pourra corriger après.

ALAIN CONNES : Tu corrigeras après, bien sûr. Non parce que...

JEAN-PIERRE SERRE : Non, je ne crois pas que j'aie poussé, bon, en algèbre commutative, j'ai poussé un petit peu, j'ai aidé. J'avais le sentiment d'aider, et puis surtout, j'avais ce sentiment sur Bourbaki, que c'est une œuvre, quelque-chose de salut public, d'espace public.

ALAIN CONNES : C'est ce que j'essayais de dire au début.

JEAN-PIERRE SERRE : Que c'est fait pour rendre service. Ca, les gens ne l'ont absolument pas compris ça, les gens qui commentent Bourbaki... Et également, ça je l'avais bien compris, parce que dans la discussion, c'était clair, que ce qui est fait dans Bourbaki, c'étaient pas les maths spécialement intéressantes, c'étaient les maths utiles pour faire des choses intéressantes.

ALAIN CONNES : Pour faire des maths intéressantes, bien sûr.

JEAN-PIERRE SERRE : Et ça, c'est différent. Je veux dire on devait prendre, un peu comme si dans une cuisine, où tu as du sel bien pur, où tu as ceci-celà et ça, c'est pas de la cuisine. La cuisine, c'est de les mélanger et de faire des choses...

ALAIN CONNES : C'est les outils qui sont au point, et puis après, on s'en sert.

JEAN-PIERRE SERRE : De nettoyer, de préparer bien les outils, pour qu'après, on puisse s'en servir. Et ça, malheureusement, les gens qui ont commenté Bourbaki n'y ont rien compris. Ils ont vu ça comme une entreprise de pou-

voir, par exemple, à la Bourdieu, quoi, bon (*geste évasif*).

ALAIN CONNES : Et dans l'autre sens? Est-ce que ce que tu faisais pour Bourbaki t'a influencé pour tes propres recherches?

JEAN-PIERRE SERRE : Le style m'a influencé forcément, tu vois. Mais j'ai pas eu l'idée de travailler sur des sujets de Bourbaki, ça n'a pas de sens, ça, mais de m'en servir.

ALAIN CONNES : Ah, si, quand-même, si, quand-même, laisse-moi te poser une question plus précise, par exemple, lorsque les groupes de Lie ont été traités, dans Bourbaki, etc., est-ce que ça, ça a pu t'influencer à faire des choses sur les algèbres de Lie ou sur les groupes de Lie...?

JEAN-PIERRE SERRE : Non, c'est le contraire, j'en avais besoin pour ce que je faisais, des groupes l -adiques, des trucs comme ça, et au contraire, c'est plutôt que ça m'a donné plus d'enthousiasme pour, dans Bourbaki, insister pour que les réseaux de Lie ne soient pas sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

ALAIN CONNES : Bon, alors j'ai une autre question un peu plus précise, c'est, quand on voit par exemple, la preuve de Dwork sur... on voit bien qu'il faut utiliser des espaces de Banach p -adiques, etc., est-ce que ça, c'est toi qui as insisté pour que les E.V.T. [‡] aussi soient faits dans le cadre p -adique.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, ça c'était déjà fait je crois. D'ailleurs, ils n'ont pas été tellement bien faits du point de vue p -adique, c'est pas utilisable...

ALAIN CONNES : Non, c'est trop, c'est trop superficiel.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, non, c'était déjà... Dieudonné, de lui-même, avait dit "un corps muni d'une norme" et puis voilà quoi.

ALAIN CONNES : Et puis on fait tout là-dessus, d'accord.

JEAN-PIERRE SERRE : On fait tout mais on fait rien d'intéressant. Les choses intéressantes, c'est Hahn-Banach, et tout.

‡. E.V.T. = Espaces Vectoriels Topologiques.

ALAIN CONNES : Ca c'est sur \mathbb{R} aussi.

JEAN-PIERRE SERRE : Sauf le théorème de Banach, il est aussi vrai sur les p -adiques, sur les graphes fermés.

ALAIN CONNES : Quand-même, oui, il y avait quand-même quelque-chose.

JACQUES DIXMIER : Sur les espaces de dimension finie, localement compacts.

ALAIN CONNES : Alors Jacques, vas-y.

JACQUES DIXMIER : D'une part, Bourbaki m'a énormément influencé dans mes travaux personnels.

ALAIN CONNES : Alors ça, c'est très important.

JACQUES DIXMIER : Et même les 3/4 de ce que j'ai fait ont été influencés par Bourbaki. Si j'avais pas été dans Bourbaki, j'aurais travaillé sur les espaces de Hilbert toute ma vie.

JEAN-PIERRE SERRE : Peut-être mais peut-être pas quand-même.

JACQUES DIXMIER : J'ai tout de même fait d'autres choses. Et c'est grâce à Bourbaki.

ALAIN CONNES : C'est grâce à Bourbaki, ah oui?! Ca c'est fort quand-même.

PIERRE CARTIER : (*taquin, désignant AC*) Il y en a d'autres qui s'occupent des espaces de Hilbert.

ALAIN CONNES : Non, mais pas que ça, non, non.

JEAN-PIERRE SERRE : Tu sais qu'on disait ça de Dieudonné aussi, que s'il n'y avait pas eu Bourbaki, il aurait continué sur les polynômes à une variable

parce que c'était ça son seul sujet.

JACQUES DIXMIER : Je ne suis pas le seul sûrement, je suis un peu Dieu-donné au petit pied, si tu veux : j'ai rédigé beaucoup. Alors là, mon rôle dans Bourbaki n'a pas été un rôle... (*s'interrompant*) Alors, d'abord, quand-même, je reprends ce qu'il dit lui (*désignant JPS*), quand il dit qu'il n'a pas eu d'influence sur Bourbaki, c'est un contresens énorme.

JEAN-PIERRE SERRE : Tu me fais plaisir mais...

JACQUES DIXMIER : Non mais attends, il faut distinguer deux parties : à partir du moment si tu veux où les membres fondateurs sont partis, ils ont commencé à partir avec la loi des 50 ans en 54, Cartan avait 50 ans, il est parti. A ce moment-là, eh bien, c'est toi et Borel qui avez influencé Bourbaki et ses directions générales.

JEAN-PIERRE SERRE : C'est pas si précis que ça, quand-même, c'était vraiment collectif, quand-même, mais ça a aidé.

JACQUES DIXMIER : Si tu compares l'influence que tu as eue sur Bourbaki et l'influence que j'ai eue sur Bourbaki, j'vais pas mettre ça sur le même plan. Par contre, j'ai rendu grand service sur Bourbaki parce que, comme Dieu-donné, je rédigeais énormément. Alors 10 fois moins que Dieudonné, parce que Dieudonné, il est hors concours (*rires*) mais enfin, je... Bon alors, encore une fois, ce point étant réglé, de mon point de vue, Bourbaki m'a influencé en m'apprenant énormément de choses.

ALAIN CONNES : Des choses nouvelles que tu ne connaissais pas, d'accord.

JACQUES DIXMIER : Et bon, du même coup, j'ai parlé de mon influence sur Bourbaki, en tant que rédacteur.

ALAIN CONNES : Pas seulement, quand-même, tu n'as pas seulement...

JACQUES DIXMIER : Non, je n'ai pas influencé Bourbaki autrement qu'en facilitant le travail, en rédigeant beaucoup.

ALAIN CONNES : Mais attends, pour une question un tout petit peu plus

précise, c'est que, si tu veux, il y a eu quand-même, dans Bourbaki, des contributions *nouvelles*, je veux dire, Serre a raison de dire qu'on ne peut pas situer cela du tout sur le même plan puisqu'on mettait au point des outils, mais par exemple, avant 45, il y avait les filtres et les ultra-filtres, qui avaient été quand-même mis au point par Bourbaki, et qui n'existaient pas avant. Donc la question que je pose, c'est...

JEAN-PIERRE SERRE : Mais c'est vraiment pas une des choses les plus importantes, alors ça, personne ne s'en sert en réalité, je pense.

PIERRE CARTIER : C'est pas vrai.

ALAIN CONNES : Si, les ultra-filtres...

PIERRE CARTIER ET ALAIN CONNES : Si en logique, ils les utilisent.

JEAN-PIERRE SERRE : (*accompagnant sa parole d'un geste*) Oh oui bon...

ALAIN CONNES : Mais peu importe, mais ce que je veux dire, c'est en quel sens, la question était un petit peu plus précise, en quel sens il y a eu une créativité de concepts, etc.

JACQUES DIXMIER : Oui, tu m'as déjà posé la question en dehors de cette réunion, il faut distinguer.

ALAIN CONNES : C'était pas le but, bien sûr.

JACQUES DIXMIER : Oui, pendant les congrès-mêmes, je ne crois pas qu'il y ait beaucoup de... Par exemple, un exemple qui m'est venu à l'esprit, les idéaux associés, pour faire la décomposition primaire, c'est une création de Chevalley, il l'a fait en dehors d'un congrès : il est arrivé, il a fait une rédaction, c'est apparu dans une rédaction Bourbaki.

ALAIN CONNES : Ah quand-même, oui donc ça veut dire...

JACQUES DIXMIER : Pour le monde extérieur, c'est une invention de Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah tu penses que ça n'existait pas avant ?

JACQUES DIXMIER : Ca n'existait pas avant. En tout cas, Samuel[§] me l'a affirmé et Samuel connaît parfaitement la question, et il était d'ailleurs un peu indigné, Samuel, parce que quand il y a eu la revue de ce bouquin aux Maths reviews, aucune allusion au fait que c'était un point-de-vue nouveau mais ça, ça n'a pas d'importance.

JEAN-PIERRE SERRE : Ca n'a pas d'importance.

JACQUES DIXMIER : Les revues sont souvent déconnantes.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, c'est pas ça, quand il y a des choses nouvelles dans un texte, c'est justement ce que le reviewer ne comprend pas, tu vois, donc il n'en parle pas, c'est sûr.

JACQUES DIXMIER : Ah oui, mais là, c'était l'essentiel du chapitre, enfin bon, passons.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, c'est pas l'essentiel.

JACQUES DIXMIER : Un autre exemple, alors. Alors là, ça s'est quand-même passé pendant un congrès, donc je vais t'en parler, on discutait du chapitre 5 d'intégration et on lisait, si mes souvenirs sont exacts, une rédaction de Dieu-donné, il y a beaucoup de choses dans le chapitre 5, il y avait les mesures produits, les mesures images, les mesures induites, les mesures à densité, et brusquement, Schwartz a eu une idée qui unifiait tout ça : au lieu que ça soit 4 ou 5 (*gestes des deux mains comme s'il tournait une manivelle*), où on recommençait à chaque fois, pour démontrer les théorèmes, il a eu une idée qui unifiait tout.

JEAN-PIERRE SERRE : Et qu'est-ce que c'était, j'ai oublié ?

PIERRE CARTIER : Familles de mesures.

JEAN-PIERRE SERRE : Familles, c'est ça ?

§. Pierre Samuel.

JACQUES DIXMIER : Ce que Choquet a appelé les diffusions après...

JEAN-PIERRE SERRE : Non, non, ça s'appelait pas diffusions dans Bourbaki.

PIERRE CARTIER : Ca correspond aux diffusions des probabilités.

JACQUES DIXMIER : Enfin bref, tu prends une mesure qui n'est pas d'un paramètre, et ce paramètre est lui-même dans un espace mesuré, et il faut intégrer.

JEAN-PIERRE SERRE : Et ça donne les différents cas, ça ?

JACQUES DIXMIER : Ca contient tous les différents cas. Alors, je m'en souviens d'autant mieux que ça a enthousiasmé tout le monde, je crois on peut le dire, moi en particulier et j'ai été chargé de la rédaction.

ALAIN CONNES : La rédaction d'après tu veux dire ?

JACQUES DIXMIER : La rédaction suivante, j'ai rédigé ça, ça m'a pris plusieurs mois. J'étais emballé là, (*puis riant franchement*) quand ça a été lu en congrès, ça a été sérieusement écriémé.

JEAN-PIERRE SERRE : On était habitué à ça.

JACQUES DIXMIER : C'est passé dans les exercices...

ALAIN CONNES : Ca fait rien, c'est un point très important, je pense, parce que si tu veux...

JACQUES DIXMIER : Mais c'est pas des nouvelles maths.

ALAIN CONNES : Ah non mais quand-même, ce qui est intéressant je pense, ce qu'on voudrait savoir en fait, c'est lorsqu'il y avait des lectures en commun, comme ça se passait tout le temps...

JACQUES DIXMIER : Eh bien, oui, puisque c'était le principe.

JEAN-PIERRE SERRE : Est-ce que tu veux en parler de ça, peut-être, des lectures à haute voix, parce que c'est très important dans Bourbaki.

ALAIN CONNES : Absolument !! Bon, je remets ça à un peu plus tard, alors, d'accord, ce sera le sujet suivant. Mais effectivement, c'est un point très important. Finalement, c'est le seul moment où il y avait une réflexion commune qui se produisait. Alors Pierre maintenant. Donc Pierre, l'influence de tes maths sur Bourbaki et de Bourbaki sur tes maths.

PIERRE CARTIER : Je peux dire que pendant presque 30 ans, j'ai consacré $1/3$ de mon activité scientifique à Bourbaki.

ALAIN CONNES : $1/3$, donc oui, d'accord.

PIERRE CARTIER : $1/3$ à peu près, quand-même, en volume : les rédactions à faire, les tribus éventuellement que je faisais quand ce n'était plus toi (*à l'adresse de JD*) qui les faisais, les corrections d'épreuve, enfin, bon là, j'ai vraiment beaucoup, beaucoup... je dirais à peu près $1/3$ de mon activité. C'était chronophage.

ALAIN CONNES : $1/3$ de ton activité, c'est énorme.

JACQUES DIXMIER : Et le procès ?

ALAIN CONNES : Non, non, ça n'en parlons pas encore.

JEAN-PIERRE SERRE : Oh, mon Dieu, non.

JACQUES DIXMIER : Oui, mais chronophage.

PIERRE CARTIER : Non le procès, je n'en parle pas. D'un autre côté, mes intérêts propres, scientifiques, n'ont pas toujours coïncidé avec ceux de Bourbaki ; par exemple, je me suis beaucoup intéressé aux probabilités, à une époque où Bourbaki s'y intéressait pas beaucoup.

JEAN-PIERRE SERRE : Schwartz quand-même, Schwartz s'y intéressait.

ALAIN CONNES : *(en riant)* Mais pas Dieudonné, hein.

JACQUES DIXMIER : Je coupe, Cartier s'intéresse à tout, alors forcément il a débordé Bourbaki.

ALAIN CONNES : Non, non, non, mais là il a en tête quelque-chose de très particulier, oui oui, bien sûr.

PIERRE CARTIER : Bon, mais il est vrai que la gymnastique de rédiger dans un style imposé, parce que c'était un style très imposé, ça vous forme, ça, c'est clair que ça vous forme. Et alors d'un autre côté, si tu veux pour mes intérêts scientifiques, j'ai dit que j'avais beaucoup travaillé sur les probabilités, ce qui n'était pas dans les lignes de mire de Bourbaki, mais j'ai aussi beaucoup travaillé sur les groupes de Lie, sur des choses comme ça, et alors là, bon ben je veux dire que c'est certain, la rédaction des livres sur les groupes de Lie, ça a été pour moi un moment crucial. Et d'ailleurs je racontais tout à l'heure que je viens enfin de terminer une démonstration commencée il y a 60 ans sur ce sujet-là.

JEAN-PIERRE SERRE : *(hochement de tête très intéressé)* Ah ?!

PIERRE CARTIER : Construire le schéma sur les entiers associé à un groupe de Lie semi-simple... Bon, j'ai une nouvelle démonstration qui m'a pris 60 ans à mettre au point.

ALAIN CONNES : On parlait de l'article de Chevalley de 55.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais il faut qu'elle soit complète, cette démonstration-là. Parce qu'il y a des tas de gens (Kostant, etc.) en ont fait mais qui ne sont pas, toi aussi, tu en avais fait, et où il n'y avait pas les détails qu'il faut, donc ça ne servait à rien.

PIERRE CARTIER : Il y aura tous les détails, là, je te le garantis.

JEAN-PIERRE SERRE : Il faut vraiment qu'il y ait tous les détails, hein.

PIERRE CARTIER : Non mais ça je suis d'accord, je connais le sujet. Bon enfin, bon. Disons que je me suis emballé pour beaucoup des projets que

Bourbaki a faits. Par exemple, on parlait de probabilités, le seul endroit où on s'approche des probabilités, c'est le dernier livre sur l'intégration.

JACQUES DIXMIER : Dernier "chapitre", Monsieur.

PIERRE CARTIER : Ah oui, dernier chapitre. Chapitre 9... qui a été fait sous l'impulsion de Schwartz, et essentiellement rédigé par Paul-André Meyer, qui n'était pas de Bourbaki, mais qui a servi disons de conseiller.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais il n'était pas dans Bourbaki, Paul-André Meyer ?

PIERRE CARTIER : Non, non, non, non, non.

JACQUES DIXMIER : Il est venu comme cobaye, je crois, une ou deux fois. Mais il n'était pas membre de Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah il n'était pas membre.

PIERRE CARTIER : Non, il n'était pas membre. Mais il a participé, justement, à cette écriture du livre sur les probabilités.

JACQUES DIXMIER : C'est un cas très spécial, un non-membre qui a écrit, enfin, 50 % parce que toi, tu en as bien écrit 50 % aussi.

PIERRE CARTIER : Il y avait Schwartz, il avait Meyer et moi. Et on a réussi à le faire. Enfin, ça a été... disons que pour moi ça a été... S'il n'y avait pas eu cette impulsion de Bourbaki, je ne me serais sans doute pas intéressé à ce qui avait été fait par l'école russe à l'époque, Prokhorov, Kolmogorov et tout ça, et ça, ça m'a énormément servi ensuite. Donc, je veux dire que mes intérêts mathématiques...

JEAN-PIERRE SERRE : Ils débordaient beaucoup, ils ont beaucoup débordé de Bourbaki.

PIERRE CARTIER : Ils ont débordé beaucoup de Bourbaki : je me suis intéressé à la physique mathématique et ça, c'était pas un sujet qui intéressait beaucoup Bourbaki.

ALAIN CONNES : Non, c'est certain.

JACQUES DIXMIER : Ca intéressait beaucoup Bourbaki mais on avait autre chose à faire, quoi!

JEAN-PIERRE SERRE : Mais ça, c'est pas des maths, quand-même.

PIERRE CARTIER : Non.

JEAN-PIERRE SERRE : On pouvait pas le rédiger avec corollaires et démonstration.

JACQUES DIXMIER : Enfin, il y a un spectre continu, de l'un à l'autre.

JEAN-PIERRE SERRE : Aaahh, (*faisant le geste d'une faille dans la montagne*) il y a une rupture discrète (*PC rit en montrant AC, qui fait comme s'il disait "Tant pis"*), il y a une rupture, non, non, non.

PIERRE CARTIER : Disons que ça n'a pas été une motivation pour faire des maths, ça c'est différent.

JEAN-PIERRE SERRE : Voilà, ça c'est différent. Ca peut même inspirer des énoncés.

ALAIN CONNES : Mais d'ailleurs, ça touche une question qui est quand-même très importante, c'est "comment est-ce qu'a été conçue et comment est-ce qu'a évolué l'architecture des livres de Bourbaki?"

JEAN-PIERRE SERRE : Quand je suis arrivé, c'était déjà lancé si tu veux, ils ont commencé ça très tôt tu vois, le plan général...

PIERRE CARTIER : ...date de 1935.

JEAN-PIERRE SERRE : Dieudonné l'avait en poche depuis longtemps, ils ont dû faire ça dans les années 30 tu vois, à peu près.

ALAIN CONNES : Tu veux dire, il avait mis E.V.T. avant théorie de la mesure (*rires*), avant intégration.

PIERRE CARTIER : Non, ça c'est un détail.

ALAIN CONNES : Non, je rigole, on en reparlera.

JEAN-PIERRE SERRE : Le livre de Lie n'était pas prévu initialement. Ca s'arrêtait aux Espaces Vectoriels Topologiques. Intégration, ça c'était dedans, je crois que ça s'arrêtait là (*se tournant vers PC*).

PIERRE CARTIER : Il y avait deux parties : première partie, les 6 premiers livres, et la seconde partie... Y avait un gros débat.

JEAN-PIERRE SERRE : Seconde partie, c'était un peu un mythe. C'était "la seconde partie, on s'en occupera après", c'était plutôt ça tu vois.

PIERRE CARTIER : Non mais je veux dire que ce qui était prévu quand-même, c'est un peu plus que ça, c'était que les 6 premiers livres étaient le fondement indispensable pour tout ce qui suivait, et que ça, ils le suivaient dans un ordre très précis.

JEAN-PIERRE SERRE : Ils le suivaient dans un ordre déterminé, tandis qu'après effectivement, on pouvait mélanger les...

PIERRE CARTIER : Après ça divergeait (*indiqué d'un geste d'écartement de branches, vers le haut*)

ALAIN CONNES : Mais attends, ce que je ne comprends pas, je suis un peu interloqué par quelque chose qui me vient à l'idée, la théorie des faisceaux, elle est où dans ces 6...

JEAN-PIERRE SERRE : Elle n'y est pas, elle n'est pas dans Bourbaki.

ALAIN CONNES : Parce que moi je l'ai trouvée dans...

JEAN-PIERRE SERRE : (*l'interrompant*), Eh bien, non, ça n'est pas la peine, puisqu'il y avait un membre de Bourbaki qui l'avait écrite, on n'allait pas recopier, il y avait ça tu vois aussi.

ALAIN CONNES : Mais alors la question qu'on peut poser, c'est en quel sens justement, Godement a été influencé ou a influencé Bourbaki, justement, pour quelque-chose comme ça, parce qu'on en parlait avec Pierre, justement.

PIERRE CARTIER : Godement, Godement, bon, c'est lui qui a écrit "le" bouquin sur les faisceaux à une époque.

JEAN-PIERRE SERRE : Et c'est lui qui a écrit l'intégration, sur les mesures de Radon, mais ça, c'était sur l'ordre de Bourbaki, c'était pas uniquement son goût à lui.

ALAIN CONNES : C'était une demande de Bourbaki, d'accord.

JEAN-PIERRE SERRE : Là, j'ai assisté à cette séance.

PIERRE CARTIER : Les faisceaux, les faisceaux, ça faisait partie des discussions courantes, évidemment bien sûr, on ne pouvait pas ignorer les faisceaux, on était tous...

JEAN-PIERRE SERRE : On ne voulait pas en parler dans Bourbaki.

PIERRE CARTIER : Non, non mais attention, nous avons tous été formés par Cartan, et les faisceaux, c'étaient, c'étaient...

ALAIN CONNES : Mais quelle était la raison pour laquelle vous ne vouliez pas en parler, justement alors ?

JEAN-PIERRE SERRE : Il aurait fallu faire un livre de topologie algébrique, or, c'était pas la peine, on était en train de la construire, tu ne peux pas faire un Bourbaki sur quelque chose qui est en train de se faire tu vois, c'est pas raisonnable, ça.

PIERRE CARTIER : C'était la manière de voir.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, tu fais un Bourbaki sur des choses qui sont déjà assez bien établies, que tu réarranges.

ALAIN CONNES : D'accord, mais la théorie générale des faisceaux, quand-même, elle était parfaitement bien établie, je veux dire...

JEAN-PIERRE SERRE : Bon, écoute, regarde, l'expérience a montré qu'il aurait fallu prendre des revêtements autres que les revêtements bêtes, il fallait prendre des...

ALAIN CONNES : Oui tu veux dire pour avoir la théorie de Scholze avec les revêtements pro-étales et tout ça, oui, bien sûr.

PIERRE CARTIER : Plutôt Grothendieck, la topologie étale.

JEAN-PIERRE SERRE : Et puis, on va pas refaire ce qui est bien fait dans la littérature.

JACQUES DIXMIER : Pour l'architecture, là, j'ai une opinion bien nette, c'est que, d'ailleurs tu l'as dit, c'était réglé quand nous sommes entrés, ça a été fait entre 35 et 40, par les membres fondateurs, ça n'était pas du tout fait en 35 ni en 36, puisqu'ils voulaient écrire un traité d'analyse, mais dans les 2 ou 3 premières années, ils ont compris, enfin, ils ont imaginé autre chose, et d'ailleurs, ça a eu comme résultat que 4 ou 5 participants des premiers congrès ont foutu le camp, parce que c'était pas ça qu'ils voulaient faire, enfin, je sais pas (*s'adressant JPS pour qu'il confirme*).

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, oui, oui, Dieudonné avait ce plan. Alors il y avait une suite, une deuxième partie, comme disait Cartier, mais c'était complètement vague.

JACQUES DIXMIER : Ca s'est précisé un peu... D'abord, je précise, Dieudonné, quand il parlait de ça, c'était sous-entendu "avec l'approbation de Cartan, Weil et Chevalley", il ne se serait pas permis, Dieudonné, de ... Bon. Deuxièmement, ils ont tout-de-même un peu structuré cette deuxième partie puisque c'était devenu "Structures algébriques, structures fonctionnelles, structures géométriques".

JEAN-PIERRE SERRE : Non, ils n'ont pas fait ça, non.

JACQUES DIXMIER : Eh bien, j'ai entendu ça une fois. La deuxième partie

était divisée en 3.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, non.

JACQUES DIXMIER : Ah ben si, je t'affirme que si.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, je t'assure que ça n'a pas continué, non.

JACQUES DIXMIER : Ca n'a pas été fait, non, ça n'a pas été fait du tout, c'était dans leur esprit.

JEAN-PIERRE SERRE : Dans la deuxième partie, qu'est-ce qu'il y a eu finalement : il y a eu Théorie spectrale...

PIERRE CARTIER : Algèbre commutative... Théorie spectrale, Algèbre commutative et Groupes de Lie.

JEAN-PIERRE SERRE : Et théorie des variétés dont il n'est resté que le fascicule... Grâce à Dixmier, d'ailleurs.

ALAIN CONNES : Ce qui est terrible, quand on regarde de loin, c'est qu'il y a ce livre qui est très très bien sur la théorie des fonctions d'une variable réelle.

JEAN-PIERRE SERRE : Oh oui, il est magnifique, personne ne le connaît. Les grands O sont splendidement définis.

ALAIN CONNES : Mais par contre il n'y a pas un livre des fonctions d'une variable complexe alors quand-même, ça, c'est...

PIERRE CARTIER : Oui mais ça, c'est historique, si tu veux.

ALAIN CONNES : C'est triste, ça...

JEAN-PIERRE SERRE : Mais ça, ils pourraient le faire maintenant tu vois.

PIERRE CARTIER : A l'époque, à la Sorbonne, on ne parlait que de ça. Les cours de calcul infinitésimal dans ma génération, ou un peu avant, les cours,

il n'y avait que les fonctions d'une variable complexe.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, mais il n'y avait pas les choses utiles pour la théorie des nombres. Il n'y avait pas les grands O, les estimations, les choses comme ça.

PIERRE CARTIER : Oui mais alors je veux dire qu'il y avait une lassitude devant ces fonctions d'une variable complexe.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, c'est ça, ils en avaient assez vu, quand-même effectivement.

JACQUES DIXMIER : Mais je me demande si le livre sur les variétés ne faisait pas partie, dans l'esprit des fondateurs, mais alors là, j'ose pas m'avancer... Mais à mon avis, ça faisait partie des structures fondamentales, vu l'importance qu'ils apportaient aux travaux d'Elie Cartan...

JEAN-PIERRE SERRE : Non, je ne crois pas.

JACQUES DIXMIER : Ah j'aimerais bien qu'ils soient là pour qu'on leur pose la question.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais en tout cas, on peut te remercier parce que c'est grâce à toi que le fascicule de résultats existe.

ALAIN CONNES : Pour les variétés tu veux dire.

JACQUES DIXMIER : Ah non, alors là.

JEAN-PIERRE SERRE : Et je vais te dire pourquoi...

JACQUES DIXMIER : Vas-y (*rires d'AC*).

JEAN-PIERRE SERRE : On avait le livre sur les groupes de Lie, qu'on voulait démarrer. Et alors en particulier chapitre 2, chapitre 3. Le chapitre 3, toutes les bases. Et Dixmier a mis son veto, il pouvait mettre un veto, tant qu'il n'y aurait pas un texte sur les variétés. Parce que tu vois, dans le chapitre 3, on utilise tout le temps des théorèmes sur les trucs intégrables, des machins

comme ça, les sous-variétés, et tu as mis un veto.

JACQUES DIXMIER : J'ai oublié.

JEAN-PIERRE SERRE : Et c'est moi qui ai écrit en bonne partie le fascicule de résultats, à toute allure (*se tenant la tête dans les mains*) : je crois qu'il y a eu des jours où j'ai rédigé 10 pages, de ce fascicule de résultats, et c'était horriblement difficile à écrire parce que sans démonstration, pour ne pas dire de bêtise... Ouh! (*soupirant*)

ALAIN CONNES : C'est pas évident, c'est sûr.

PIERRE CARTIER : En plus avec les a priori qu'on avait faits qu'il fallait traiter toutes les sortes de variétés en même temps, les dimensions finies, dimensions infinies.

JEAN-PIERRE SERRE : les Banach p -adiques, mais (*détachant les mots*) ON L'A FAIT! Et tu nous as forcé la main, tu vois, et c'est excellent d'avoir la main forcée, il n'y a rien de plus utile, pour écrire des livres.

JACQUES DIXMIER : Ca me rappelle, alors, le commentaire de Godement sur le chapitre 3, une fois que Godement, après qu'il ait abandonné Bourbaki.

ALAIN CONNES : Sur les groupes de Lie?

JACQUES DIXMIER : Il estime que c'est un monstre (*rires*).

JEAN-PIERRE SERRE : Il est très très bien, ce livre, il est gros effectivement.

JACQUES DIXMIER : Il est gros et lourd, mais je vois pas comment on peut faire mieux.

JEAN-PIERRE SERRE : Tu te souviens quand-même que tu as mis un veto, tu t'en souviens?

JACQUES DIXMIER : Non, je ne m'en souviens pas.

JEAN-PIERRE SERRE : Sans blague, tu ne t'en souviens pas (*sidéré*).

JACQUES DIXMIER : Mais ça ne m'étonne pas de moi (*rires*). J'oublie des choses...

JEAN-PIERRE SERRE : Ce qui m'étonne de toi, c'est que tu as mis un veto, c'est la seule fois de ta vie, je crois, d'ailleurs, il y a eu très peu de veto dans Bourbaki.

JACQUES DIXMIER : Je te fais confiance, en fait.

JEAN-PIERRE SERRE : Je ne me souviens pas d'un autre, (*s'adressant à PC*) tu t'en souviens ?

PIERRE CARTIER : Chevalley, sur l'algèbre 2. Il ne voulait que des espaces vectoriels de dimension finie.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais c'était pas un veto, c'était une proposition et puis Weil a sauté en l'air. Il voulait supprimer tous les modules, tu vois, Chevalley. Qu'il n'y avait que les espaces vectoriels qui étaient utiles.

ALAIN CONNES : (*expression du visage estomaquée et soupir*) Ouh !

PIERRE CARTIER : Et de dimension finie.

JACQUES DIXMIER : C'est d'autant plus extraordinaire, ce que tu dis, qu'un peu plus tard, quand on a étudié les algèbres séparables, Chevalley nous a vendu un énorme fourbi avec des algèbres séparables de dimension infinie. Et puis, on s'embrouillait là-dedans, à un congrès, "écoute, on pourrait laisser ça de côté...". Chevalley dit "Ah non maintenant c'est trop tard, on l'a lu suffisamment souvent, il faut le garder" (*rires*). Heureusement, il a pas...

ALAIN CONNES : Il a pas trop insisté.

JEAN-PIERRE SERRE : On ne suivait jamais ce que voulait Chevalley, il avait très mauvais goût pour les rédactions élémentaires, tu vois ; il rédigeait très bien les théorèmes difficiles, mais alors quand il a essayé lui-même de faire des livres élémentaires, son livre sur les produits tensoriels, puissances

symétriques, etc.

JACQUES DIXMIER : C'était imbuvable, mais par contre Theory of Lie groups, c'est un chef-d'œuvre...!

PIERRE CARTIER : Tous ses livres qui contiennent quelque-chose sont merveilleux.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah ben voilà, absolument, tous ceux qui contiennent quelque-chose. Mais l'exposition, c'était affreux.

PIERRE CARTIER : Mais celui qu'il avait publié aux Etats-Unis, sur les algèbres, relativement élémentaire.

JACQUES DIXMIER : Et son livre sur les spineurs, il est très agréable aussi!

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, sauf son côté systématique, mais il ne voulait pas mélanger différents points de vue et alors.

JACQUES DIXMIER : Et puis je pense à autre chose, on revient aux fondements, enfin, on ne revient pas, quand on a fini par rédiger les chapitres 1 et 2, de la théorie des ensembles...

ALAIN CONNES : Ca a été fait quand ça ?

PIERRE CARTIER ET JEAN-PIERRE SERRE : En 50 à peu près.

ALAIN CONNES : Ca a été fini quand ?

JACQUES DIXMIER : Quand je suis rentré moi en 49, j'ai eu entre les mains une rédaction de Dieudonné qui était vraiment pas engageante. Et après ça, il y a eu une rédaction Chevalley...

JEAN-PIERRE SERRE : Et qui était bien ?

JACQUES DIXMIER : Ah moi, je l'ai trouvée formidable.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah bon, d'accord.

JACQUES DIXMIER : Alors j'ai été chargé de mon boulot habituel, de bien lisser, j'ai fait la rédaction après Chevalley.

JEAN-PIERRE SERRE : Non mais parce qu'il est bien, le livre de théorie des ensembles, pour des tas d'usages.

JACQUES DIXMIER : Oh eh bien, il a des tas de défauts, encore, mais enfin, en tous cas, Chevalley a fait un très bon travail de rédaction là-dessus, c'était ça que je voulais dire.

ALAIN CONNES : Donc il était capable quand-même...

PIERRE CARTIER : Chevalley, on disait de lui qu'il entrait dans un tunnel, tout noir, et que la sortie était à 4 km de là, avec une petite lueur.

JACQUES DIXMIER : Oui ben écoute, hein, le livre d'André Weil sur la théorie des nombres, hein, quand j'ai essayé de le lire, c'est un peu ça...

JEAN-PIERRE SERRE : Ah le Basic Number Theory ?

ALAIN CONNES : Oh le Basic Number Theory, oh, il est superbe, il est lourd, parce qu'il est localement compact, donc... (*rires*)

JEAN-PIERRE SERRE : Non mais il y a des démonstrations complètes.

JACQUES DIXMIER : Non mais je dis pas, il a sûrement d'énormes qualités, etc, mais... pour un non-expert.

JEAN-PIERRE SERRE : Est-ce qu'il démontre le corps de classes dedans, je crois, oui ?

ALAIN CONNES : Non, mais si tu veux, il pousse à bout un point de vue, bon, qui est le point de vue localement compact des adèles, etc, et il le pousse très bien à bout.

PIERRE CARTIER : Mais c'est un point-de-vue important quand-même.

ALAIN CONNES : C'est un point-de-vue très important mais bon, il ne le fait pas avec légèreté, ça c'est ce qu'on peut dire.

JEAN-PIERRE SERRE : Bon alors qu'est-ce que tu avais comme questions ?

ALAIN CONNES : Non, on devrait parler maintenant des réunions autour de la table, et du type de discussions qu'il y avait, parce que ça, c'est très important, je pense. Non, ce que je veux dire qui n'est pas évident à comprendre, c'est que bon, finalement donc, il y avait un rédacteur, qui faisait une rédaction, qui y passait du temps, qui essayait de rédiger le mieux possible, et ensuite, cette rédaction était lue.

JACQUES DIXMIER : Pas toujours.

ALAIN CONNES : Pas toujours ? Il y avait des cas où elle n'était pas lue ?...

JEAN-PIERRE SERRE : 100 pages, 100 pages, on lisait, c'est arrivé...

ALAIN CONNES : 100 pages qui sont lues, bien sûr.

JEAN-PIERRE SERRE : ...je me rappelle de la rédaction de Dieudonné sur l'intégration, et ils ont lu les 3 premières pages, et ils ont dit, moi, j'ai assisté à ça, et ils ont dit "ah non, ça, c'est pas possible, c'est imbuvable, il faut le faire autrement, Godement, tu feras avec des mesures de Radon. Voilà". Et hop, à la trappe.

ALAIN CONNES : Hop, à la trappe ? (*sifflement*)

JEAN-PIERRE SERRE : Ah oui oui oui.

JACQUES DIXMIER : Et sauf erreur, ma rédaction du chapitre 1 des variétés, parce que j'y tenais moi aux rédactions détaillées... (*signe de la main que la rédaction est passée aux oubliettes*). J'étais pas là, j'étais aux Etats-Unis.

ALAIN CONNES : Ah mais c'est normal, t'as pas assisté. Si tu n'étais pas là, qu'est-ce que tu veux...

JACQUES DIXMIER : Non j'en ai pas souffert, pour moi, la chose importante, c'était que j'avais appris ce que c'était qu'une variété.

JEAN-PIERRE SERRE : Moi aussi, j'ai fait des rédactions Bourbaki même sans espoir qu'elles soient prises, je ne me souviens plus de ce que j'avais rédigé, peu importe, je savais qu'elles ne seraient pas prises, mais comme ça, j'avais clarifié pour moi, c'était écrit et puis voilà.

JACQUES DIXMIER : On ne l'a pas dit ça, tout à l'heure.

ALAIN CONNES : Non, on ne l'a pas dit, on ne l'a pas assez mentionné.

JEAN-PIERRE SERRE : Dire quoi ?

ALAIN CONNES : Dire si tu veux qu'en fait, il y avait un des rôles positifs de Bourbaki qui était de forcer quelqu'un à aller au bout d'un sujet et à l'apprendre vraiment en profondeur, c'est quand-même important ça.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, je voulais dire que pour moi, j'ai appris énormément de choses parce que, pour les rédiger pour Bourbaki, ça m'obligeait à donner des démonstrations complètes.

ALAIN CONNES : Et tant qu'on n'a pas fait ça, je veux dire, on ne peut pas dire qu'on a compris.

JEAN-PIERRE SERRE : Ca c'était parfait : j'ai appris les algèbres de Lie semi-simples, les racines, etc., en le rédigeant.

ALAIN CONNES : J'ai amené ce livre parce que moi, je trouve que c'est un des livres les...

JEAN-PIERRE SERRE : Ah eh bien, oui, c'est le plus célèbre de Bourbaki, au fond, le plus lu.

ALAIN CONNES : On ne peut pas parler de Bourbaki...

JACQUES DIXMIER : Chapitre 4, 5 et 6, ah oui, c'est celui qui a le plus de

succès, personne n'a osé en dire du mal, enfin à ma connaissance jusqu'ici.

JEAN-PIERRE SERRE : En index de citations, je suis sûr que ça doit battre tous les autres.

ALAIN CONNES : Je veux dire, il y a des gens qui ont critiqué Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Et celui-là, je crois qu'on le doit à Cartier en grande partie.

JACQUES DIXMIER : Je voudrais savoir ce qu'en aurait dit Arnold.

JEAN-PIERRE SERRE : C'est toi qui as insisté, tu as insisté mais on a tous été enthousiaste.

PIERRE CARTIER : C'est moi qui ai insisté mais tout le monde y a participé.

JEAN-PIERRE SERRE : On a été enthousiaste quand on a vu que ça se... *(faisant le geste de quelque-chose qui se développe bien)*. Et puis, en quelque sorte, les sous-produits sont très intéressants, les invariants de ces groupes, les choses comme ça.

JEAN-PIERRE SERRE : Moi j'ai appris comme ça les groupes de Coxeter hyperboliques, par exemple, en écrivant des exercices pour Bourbaki. Et ils sont très amusants, les Coxeter hyperboliques.

ALAIN CONNES : Là, il y a un va-et-vient manifeste entre l'intérêt personnel et le rôle dans Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Bourbaki est vraiment extrêmement utile pour ses rédacteurs, encore peut-être plus que pour ses lecteurs, tu vois.

ALAIN CONNES : Mais oui, mais c'est un peu ce que j'avais en tête quand je parlais du va-et-vient entre l'activité de recherche...

JEAN-PIERRE SERRE : Moi aussi, je crois que j'en ai bénéficié en bonne partie comme ça, en rédigeant.

ALAIN CONNES : En rédigeant et en allant au fond des choses exactement.

PIERRE CARTIER : Vidons un compte ancien. Toi (*désignant Jacques Dixmier*), tu avais rédigé l'algèbre commutative jusqu'au chapitre 5 ou 6.

JACQUES DIXMIER : Enfin, c'était déjà presque fini.

PIERRE CARTIER : Dans un plan déterminé. Puis Serre est arrivé et a tout reboulé, en introduisant la platitude.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, toi tu as rédigé après la platitude.

JACQUES DIXMIER : Enfin, tu as fait changer complètement le début en mettant les modules plats.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui mais toi, tu as dû...

JACQUES DIXMIER : J'étais pas capable de faire ça, moi.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui mais toi, tu as dû rédiger des spécialisations, des trucs comme ça, qui ont disparu.

PIERRE CARTIER : C'est ça, les spécialisations, c'est ça.

JACQUES DIXMIER : Quoi ?

JEAN-PIERRE SERRE : Les spécialisations.

JACQUES DIXMIER : Non.

JEAN-PIERRE SERRE : Non ? Parce que Weil...

JACQUES DIXMIER : Non, j'ai rédigé les valuations, qui ont été fort menacées à un moment donné par Grothendieck, mais elles sont restées.

PIERRE CARTIER : Mais enfin, le point de vue qu'on t'avait suggéré d'ailleurs pour rédiger, il a été, quand Serre est intervenu, il a été complètement bouleversé, ce point-de-vue-là sur l'algèbre générale.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, effectivement, j'ai eu une influence à ce moment-là...

PIERRE CARTIER : Tu parles, tu parles !

JEAN-PIERRE SERRE : Sur l'algèbre commutative tu vois, eh bien parce que je voyais bien ce qui servait.

PIERRE CARTIER : C'est toi qui as introduit la platitude quand-même, enfin qui as insisté pour la platitude.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui et puis d'autres choses du même genre.

ALAIN CONNES : Alors là, il y a une question, et on vient à des questions un peu plus délicates, si tu veux, pourquoi est-ce que dans le chapitre d'algèbre, pas d'algèbre commutative, sur l'algèbre homologique, pourquoi est-ce que ça a été fait non pas dans le cadre des catégories abéliennes mais dans le cadre des modules ?

JEAN-PIERRE SERRE : Parce qu'il n'y avait pas le langage des catégories, tout simplement.

ALAIN CONNES : Mais on ne pouvait pas le rajouter un petit peu là ?

JEAN-PIERRE SERRE : Les catégories, tu peux pas rajouter "*un petit peu*", non, non, non ! (*riant*)

ALAIN CONNES : Il ne pouvait pas y avoir un fascicule de résultats sur les catégories, quand-même, oh écoute...

JACQUES DIXMIER : Ca aurait peut-être été une solution, oui. Mais je ne crois pas qu'on y ait songé.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais non, mais alors, est-ce que c'est un ensemble ou un fourbi ?...

ALAIN CONNES : Ouaih, bon...

JACQUES DIXMIER : C'est ça la question.

JEAN-PIERRE SERRE : Quand tu discutes, tu peux dire "oh, ouaih, etc.", mais tu ne peux pas dire "ouaih" par écrit!!

ALAIN CONNES : Mais je suis d'accord.

JACQUES DIXMIER : Il y a deux questions : d'une part, parler des catégories, c'est une chose, et deuxièmement, la question du fondement de cette théorie, ce sont deux problèmes disjoints, tous les deux très emmerdants, mais...

JEAN-PIERRE SERRE : Mais pas disjoints quand-même, tu ne peux pas en parler si tu ne sais pas ce que c'est quand-même.

JACQUES DIXMIER : Si, si, très bien, très facilement !

JEAN-PIERRE SERRE : Tu peux en parler, mais l'écrire, non, quand-même, non, pas dans Bourbaki.

PIERRE CARTIER : Pas dans le style Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Tu ne peux pas dire "soit \mathcal{C} une catégorie" sans dire ce que c'est qu'une catégorie, ça, c'est pas...

JACQUES DIXMIER : En tous cas, dans le livre de Topologie algébrique dont nous sommes en train de médire abondamment (*rire d'AC*), il y a quelques numéros sur les catégories...

PIERRE CARTIER : Les *petites* catégories, les *petites* catégories.

ALAIN CONNES : Oui, des petites catégories, c'est sûr que ce sont des petites catégories ?

PIERRE CARTIER : C'est ça le problème. Les petites catégories, ça ne pose aucun problème. Les grosses catégories...

ALAIN CONNES : C'est vrai que le livre de Demazure et Gabriel sur les groupes algébriques est canulé dès le début par cette discussion, hein, les univers, etc..., et ils sont obligés de discuter tout ça...

PIERRE CARTIER : Non mais Dixmier, tout le monde sait que parler de l'ensemble de tous les ensembles, c'est un non-sens complet, tout le monde sait ça, bon.

JACQUES DIXMIER : Oui, mais on sait aussi qu'à condition de ne pas s'orienter dans une certaine direction (*faisant le geste de prendre un chemin de traverse*), on ne tombera pas sur des pépins.

JEAN-PIERRE SERRE : Non mais ça, c'est du laïus, ça, tu ne peux pas le mettre par écrit ce laïus-là. Non par contre, ce qu'on peut faire, et Bourbaki le fait, et moi aussi, je l'ai fait souvent, ça, c'est de dire "le foncteur machin" pour dire juste "la construction que je viens de fabriquer"... a telles propriétés, ça, ça a un sens, on se permet ça.

PIERRE CARTIER : Bourbaki se permet ça.

JEAN-PIERRE SERRE : On se permet ça, foncteur étant fonction simplement, ou construction plutôt.

ALAIN CONNES : Mais je veux dire tu ne peux pas parler, tu ne parles pas d'une catégorie, tu ne nommes jamais une catégorie. La catégorie, je sais pas moi, des ensembles finis pointés par exemple.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais je ne sais pas où ils sont, dans quoi...

ALAIN CONNES : Eh bien, tu en prends un squelette, qui est l'ensemble $\{0, \dots, n\}$ avec le point T_0 .

JEAN-PIERRE SERRE : (*riant avec AC*) Bon, écoute, c'est pas l'endroit... de faire ça, on va pas faire un congrès Bourbaki et s'engueuler sur les catégories parce qu'on s'engueulera forcément, tu vois.

ALAIN CONNES : Oui, sauf que je pense, si tu veux, que ça serait bien, parce que ça montrerait le genre de discussions, qui se produisaient autour de la

table...

JEAN-PIERRE SERRE : Oh ben déjà, ça a commencé, nous sommes déjà en train de le faire, tu vois (*s'esclaffant tous, heureux*), ce mauvais exemple que nous donnons, là, mais qui n'est pas un si mauvais exemple, d'ailleurs.

ALAIN CONNES : Ben non, ça n'est pas un si mauvais exemple.

JEAN-PIERRE SERRE : Non on ne pouvait pas s'en sortir. Il aurait fallu tout refaire, tu vois, tous les fondements.

PIERRE CARTIER : Il y avait deux raisons : premièrement, il fallait tout reconstruire, et deuxièmement, les fondements étaient pas solides.

JEAN-PIERRE SERRE : Alors en plus, oui. Tu sais qu'il y a des topologies de Grothendieck dont même Deligne n'ose pas se servir...

ALAIN CONNES : Parce que justement, ce ne sont pas des ensembles.

JEAN-PIERRE SERRE : Les topologies plates, par exemple, parce que tu ne peux pas majorer, tu vois, un truc plat (*se tournant vers PC*), tandis qu'un truc étale, quand tu as un fourbi, tu le majores, tu as des modèles.

PIERRE CARTIER : (*acquiesçant*) Oui, c'est facile.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais plates, tu ne sais jamais si par hasard, en changeant d'univers, tu vois, ça pourrait changer la cohomologie, c'est idiot quoi, il faut pas...

ALAIN CONNES : Non ça c'est vrai qu'on est un peu dans l'inconnu, mais.

PIERRE CARTIER : Il y a Gabriel et Demazure qui s'étaient astreints à ce genre de vérification, pfffou! (*deux expirations pour montrer la difficulté*)

ALAIN CONNES : Mais c'est ce que j'ai dit tout à l'heure. Et leur bouquin sur les groupes algébriques justement, il commence par ça, donc on se dit "bon ben on arrête de lire".

JEAN-PIERRE SERRE : Ils ont...

ALAIN CONNES : Ils ont exagéré, bon.

JEAN-PIERRE SERRE : Ils ont exagéré pour la typographie aussi, ils ont rendu leur livre impossible à cause de ça (*nouvelle critique de PC en riant, JPS le coupant*) On va pas critiquer, on a suffisamment à faire pour nous critiquer nous.

ALAIN CONNES : Tout à fait.

PIERRE CARTIER : Non mais tu parles de la typographie.

JEAN-PIERRE SERRE : La typographie de Gabriel et machin, tu vois, ils ont inventé un système compliqué de lettres gothiques, italiques, etc.

ALAIN CONNES : Que tu ne peux même pas lire.

JEAN-PIERRE SERRE : Tu n'as pas remarqué ça ?

PIERRE CARTIER : Si, si, si.

ALAIN CONNES : Tu ne peux même pas lire les lettres qui sont écrites.

JACQUES DIXMIER : Dans les premiers Bourbaki, il y avait des lettres gothiques majuscules que les gens ne savaient pas lire, c'est Bourbaki qui a...

JEAN-PIERRE SERRE : Non, non, mais tu n'as pas regardé le Gabriel. C'est pas pareil, non.

ALAIN CONNES : Bon alors maintenant, un sujet un peu plus léger, mais quand-même je pense que je voudrais absolument l'entendre, c'est qu'il y a eu... Chacun d'entre vous a, je pense, des anecdotes, qui se sont produites à Bourbaki. Moi, je n'en connais qu'une mais... En fait, Jacques m'en a raconté une autre mais je n'ose pas la raconter. Mais du genre qu'un jour, sachant très bien que Dieudonné devenait furieux quand, bon,...

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, oh bon, celle-là est connue... La démission de

Dieudonné par Godement, c'est ça.

ALAIN CONNES : Non mais attends (*désignant PC du doigt*), et la rédaction déchirée de Dieudonné. Ca, c'est Cartier qui me l'a racontée.

JEAN-PIERRE SERRE : Déchirée ?

PIERRE CARTIER : Je ne sais plus, il y avait une discussion...

JEAN-PIERRE SERRE : Mais il avait un double quand-même (*on entend les rires d'AC*).

PIERRE CARTIER : Ca devait être sur les ensembles, alors bon, on n'était pas d'accord.

JEAN-PIERRE SERRE : Il n'y avait pas beaucoup de doubles à l'époque.

PIERRE CARTIER : On n'était pas d'accord et il y a eu une discussion un peu compliquée un soir. Alors Dieudonné, furieux, attrape le manuscrit, qui était tout fini, annoté, pour l'envoyer à l'impression, le déchire (*PC fait le geste de déchirer un livre en 2*), et puis alors il avait un poing qui permettait de le déchirer en deux, et laisse tout tomber. Alors Cartan et Eilenberg se précipitent avec du scotch pour essayer de recoller les morceaux. Et le lendemain matin, Dieudonné qui s'était calmé, descend tranquillement au petit-déjeuner en apportant une autre copie (*rires*), qu'il avait reconstituée pendant la nuit, ou qu'il avait faite d'avance, je sais plus.

JACQUES DIXMIER : C'était un petit bout de la théorie des ensembles. C'était peut-être sur les *lemmes de Serre*... (*tendant la perche aux autres, qui rient*).

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, alors ça, toi, tu connais pas. Alors, il y a eu une époque où, il y avait dans Bourbaki, des *théorèmes de Weil* : les théorèmes de Weil, alors, qui étaient choisis pour être particulièrement évidents, tu vois, c'était ça qui était rigolo. (*Tous se marrent*). Que si $f \circ g = 1$ et $g \circ f = 1$ alors f et g sont des bijections tu vois. Et alors ça, on rigolait, c'est commode tu vois, en ce moment, quand on veut montrer que le machin est bijectif, on fabrique son inverse. C'est beaucoup plus propre d'abord, comme truc. Et le

lemme de Serre, c'était quelque-chose comme ceci, alors attention, qu'est-ce que c'est que le lemme de Serre : on a $a \rightarrow b$ ¶ et $b \rightarrow c$ alors si $a \rightarrow c$ est injectif alors...

ALAIN CONNES : $a \rightarrow b$ est aussi injectif.

JACQUES DIXMIER : C'est une partie des lemmes de Serre.

JEAN-PIERRE SERRE : ... alors $a \rightarrow b$ est aussi injectif. C'est une partie, oui. Alors moi, tu vois, j'en avais besoin dans la C-théorie, quand tu négliges une classe de groupes, j'avais besoin de savoir si c'était vrai aussi dans cette théorie, c'est légèrement moins évident, tu vois. Mais alors pour se moquer de moi, ils appelaient ça les lemmes de Serre.

ALAIN CONNES : Ah, d'accord, très bien (*rires*).

JACQUES DIXMIER : Ca servait à démontrer le théorème de Weil (*tous s'esclaffent*).

JEAN-PIERRE SERRE : Exactement, les théorèmes de Weil sont des corollaires des lemmes de Serre, je sais plus comment, mais sûrement.

JACQUES DIXMIER : Mais Weil le prenait très bien.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais moi aussi, enfin ce sont des lemmes, ils sont vrais, quoi. Comme anecdote, c'est pas vraiment une anecdote mais c'est une expression de Bourbaki que j'aimais beaucoup et qui vaut la peine d'être gardée pour la postérité, c'est, on disait toujours sur les rédactions "oui, et puis il faudra faire attention à remplacer les théorèmes faux par d'autres."

ALAIN CONNES : ssss! Ouaih!

JEAN-PIERRE SERRE : Avec l'ambiguïté qui se...

ALAIN CONNES : Alors attends, j'ai une question, qui revient un peu à la question des discussions autour des tables, etc. C'est-à-dire que si tu veux

¶. prononcer \rightarrow "flèche".

d'habitude quand on réfléchit seul effectivement, on a de temps en temps (*geste d'un index qui tourne près de la tempe*) le rappel du cerveau qui dit "ça, ça peut être faux" un truc comme ça, et on a le temps. C'est-à-dire que ça peut venir, peut-être, une heure après, ou un truc comme ça. Alors comment ça se passait, lorsqu'il y avait les discussions autour de la table, c'est-à-dire est-ce que les discussions allaient suffisamment lentement, est-ce que les gens sortaient, partaient pour aller réfléchir.

JACQUES DIXMIER : Très souvent.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais en même temps, elles n'allaient pas lentement les discussions, elles étaient rapides. Elles étaient comme nous parlons là.

ALAIN CONNES : Oui mais ça, ça laisse pas vraiment le temps de réfléchir, donc euh...

JEAN-PIERRE SERRE : Ca excite un petit peu et après tu peux, après tu as le temps.

JACQUES DIXMIER : Ah eh bien, je vais te donner un exemple de discussion ultra-rapide : Schwartz, tout seul, disant "Oui oui oui, non non non, y a pas de doute!" (*rires*).

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, ça, c'est dans Bourbaki, on lui avait posé une question et il a répondu ça "Oui oui oui, non non non, y a pas de doute!" (*riant*).

JACQUES DIXMIER : C'est un cas extrême.

JEAN-PIERRE SERRE : Joli cas de réflexion rapide, tu vois. Mais peut-être que tu pourrais dire un mot sur cette tradition de lire des textes à haute voix, parce que dans Bourbaki, il y avait cette règle que quand on nous apportait une rédaction, on n'était pas censé l'avoir lue avant.

ALAIN CONNES : Bien sûr. Donc quelqu'un la lisait.

JEAN-PIERRE SERRE : Quelqu'un l'avait écrite, on la lisait pas : et en congrès, l'un de nous la lisait à haute voix.

ALAIN CONNES : L'un de nous, c'était pas une personne différente...

JEAN-PIERRE SERRE ET PIERRE CARTIER : Ca pouvait tourner. Ca ne tournait pas beaucoup, je lisais assez souvent. Il y a des gens qui n'aiment pas lire à haute voix, moi, ça ne me gênait pas.

JACQUES DIXMIER : Il y avait des bons lecteurs et des mauvais lecteurs, par exemple, je me souviens, à mon premier congrès, on m'a chargé de lire, et immédiatement, quelqu'un a dit "c'est un mauvais lecteur", j'ai pas dû en lire beaucoup.

PIERRE CARTIER : Tu écrivais suffisamment.

JEAN-PIERRE SERRE : C'était vraiment important, tu vois, parce que sinon, la méthode traditionnelle, les gens envoient des textes, tu es censé les lire chez toi, et puis tu reviens, et en discussion, tu dis "oh oui, j'ai trouvé telle erreur". Non, ça, c'est de la blague, pour des maths, ça ne va pas du tout.

PIERRE CARTIER : Il faut passer partout.

JEAN-PIERRE SERRE : Tandis que là, à haute voix. Et j'ai fait quelques fois avec des gens qui écrivaient un cours pour moi, je leur ai dit "on va vérifier, on va faire votre cours, vous venez chez moi, et on va le lire à haute voix", ils en étaient baba bien sûr, ça prend le temps que ça prend, ça prend des heures.

ALAIN CONNES : Bien sûr, il faut du temps.

JEAN-PIERRE SERRE : Chaque phrase y passe et là.

PIERRE CARTIER : Il y a le filtre, il y a le filtre.

JEAN-PIERRE SERRE : On voit instantanément que ça ne va pas.

ALAIN CONNES : D'accord mais la question c'est est-ce qu'on ne lit pas trop vite pour que les gens puissent réfléchir.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, on lisait raisonnablement.

JACQUES DIXMIER : Et puis j'ai un ajout à faire à ce qu'il a dit que quand-même, c'était pas du tout interdit d'avoir lu la rédaction à l'avance, c'était rare qu'on le fasse parce qu'on n'avait pas le temps, on avait trop de boulot, mais non seulement, c'était pas interdit, mais je crois même que c'était encouragé, on savait que c'était très peu fait mais enfin, ah ben écoute

JEAN-PIERRE SERRE : C'était très peu fait, c'était pas ça l'essentiel. L'essentiel, c'était la lecture à haute voix.

JACQUES DIXMIER : Je me souviens d'une lecture à haute voix, d'une rédaction. Je vais peut-être mélanger les noms, mettons une rédaction de Chevalley sur des algèbres de Lie, non, une rédaction de Godement, et Chevalley l'a lue avant qu'on la discute en congrès, il a envoyé un commentaire comme quoi cette rédaction était pisseuse et éculée.

ALAIN CONNES : (*sifflant*) Ouh la la!

JEAN-PIERRE SERRE : C'est ça : ce ramassis des méthodes les plus pisseuses et éculées. C'était ça le style.

ALAIN CONNES : C'est dur!

JACQUES DIXMIER : Ben dur, non! C'est un peu le style des discussions Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Et on ne se fâchait pas!

JACQUES DIXMIER : C'était peut-être un peu limite mais pas tellement...

ALAIN CONNES : Tu m'avais raconté, Jacques, je ne sais pas si mes souvenirs sont exacts.

JACQUES DIXMIER : Ce qu'il y a, c'est que Godement avait pas très bon caractère.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais il l'avait quand-même pas trop mal pris.

PIERRE CARTIER : Il était provocateur disons.

JEAN-PIERRE SERRE : Non mais c'était Chevalley qui avait dit ça, c'était pas Godement. Non mais sa rédaction n'était pas spécialement mauvaise, je ne me souviens pas d'un... Mais il avait pris des méthodes standard et ça, Chevalley en effet avait de meilleures choses et nous, on les a améliorées.

JACQUES DIXMIER : C'était sur les premières rédactions des algèbres de Lie, peut-être même "la" première.

ALAIN CONNES : Ah, sur les algèbres enveloppantes, et tout ça.

JACQUES DIXMIER : Non, pas sur les algèbres enveloppantes...

PIERRE CARTIER : Les répliques, Chevalley était fanatique des répliques.

JEAN-PIERRE SERRE : Oh, c'est pas mal, les répliques, mais enfin ça avait un sens, d'enveloppe algébrique.

JACQUES DIXMIER : Non, mais c'est pour dire que parfois, les rédactions étaient lues avant qu'on n'arrive au congrès.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui quand-même bien sûr, mais quand-même, le vrai travail, c'était au moment de la lecture.

JACQUES DIXMIER : Oui, c'était beaucoup plus fréquent, effectivement, on les découvrait, les rédactions, aux congrès.

JEAN-PIERRE SERRE : La vraie critique. Le vrai travail, c'était sans doute après, le rédacteur suivant qui lui, alors, avait le droit aussi de ne pas respecter.

JACQUES DIXMIER : Alors là, je dirais à 50 % parce qu'il y avait eu les critiques pendant le congrès et puis, comme tu dis, après ça, le type qui rédigeait, il avait son boulot.

JEAN-PIERRE SERRE : Il décidait, il décidait, parce que s'il trouvait que c'était idiot.

JACQUES DIXMIER : S'il trouvait que les critiques étaient idiotes, qu'il ne fallait pas en tenir compte, ça, ça arrivait souvent effectivement.

ALAIN CONNES : Alors il y a une autre question qui est un peu reliée à ça, c'est que pendant une longue période qui est au moins jusqu'au départ à la retraite de Dieudonné, Dieudonné était là, donc il faisait le travail final de...

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, il faisait tout le travail final pour l'éditeur.

ALAIN CONNES : Que s'est-il passé lorsqu'il est parti à la retraite, justement ?

JACQUES DIXMIER : Je ne m'en souviens pas là, qui a fait les dernières rédactions et les a envoyées à l'imprimeur.

JEAN-PIERRE SERRE : (*s'adressant à JD*) Toi, tu as dû en faire toi.

JACQUES DIXMIER : Mais je ne m'en souviens pas.

PIERRE CARTIER : Non, c'était partagé, il n'y a pas eu de remplaçant.

JEAN-PIERRE SERRE : Moi je n'en ai pas fait, je n'ai jamais donné une rédaction à l'imprimeur, il y a toujours eu quelqu'un intermédiaire, pour moi.

PIERRE CARTIER : Moi je ne pense pas que j'en aie donné non plus.

JEAN-PIERRE SERRE : Par exemple, avec Bruhat, on a complètement terminé dans ce livre-là (*désignant le livre amené par AC dont il a été question précédemment et s'adressant à PC*), il y avait des petits bouts tu vois, on les a écrits...

JACQUES DIXMIER : Je me demande écoute, est-ce que par hasard, on n'écrivait pas à Dieudonné en lui disant "voilà, le boulot est fini...", non mais je rigole pas, il était très dévoué Dieudonné, il aurait été prêt à faire...

JEAN-PIERRE SERRE : Peut-être que c'était simplement la secrétaire de Bourbaki qui le donnait à l'imprimeur, tu vois, peut-être qu'on lui préparait le travail...

JACQUES DIXMIER : J'arrive pas à me rappeler, c'est dommage parce que... c'est pas très important, mais quand-même.

ALAIN CONNES : Ah quand-même, oui, on aimerait savoir, effectivement oui.

JACQUES DIXMIER : Je ne peux pas te répondre.

JEAN-PIERRE SERRE : Je pense que c'est elle qui avait un rapport avec l'éditeur parce que je vois pas l'un de nous aller chez Hermann.

JACQUES DIXMIER : Ah moi, je suis allé assez souvent chez Hermann.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah tu y es allé ?

JACQUES DIXMIER : Oui, c'était par exemple pour le... J'sais plus pourquoi j'y allais, j'avais fait la connaissance des, c'étaient deux vendeurs, qui étaient des braves types, là, c'était même pas Berès que je voyais... Bon, ben non, on ne sait pas répondre.

ALAIN CONNES : Effectivement, il y a une autre question qui s'est posée, c'est, tu veux, lorsque les gens devaient partir à la retraite, en fait, j'ai un exemple particulier puisqu'on en avait parlé avec Jacques. Je veux dire, cette règle qui avait été posée à l'avance, il y a eu forcément des cas, où les gens n'étaient pas très très heureux, je pense à André Weil, de partir à la date donnée, ils étaient obligés.

PIERRE CARTIER : C'est quand-même lui qui a rappelé la règle. En 54. En 54 ou 55, je me souviens qu'on a lu une lettre, le jour de l'anniversaire de Dieudonné, qui était le 4 juillet, le jour de la fête nationale américaine, on fêtait ça, bon, on avait arrosé ça, et à la fin, Cartan a sorti une lettre de Weil. A la fin du pot.

JEAN-PIERRE SERRE : Comme cadeau d'anniversaire, c'était bien choisi.

ALAIN CONNES : Oui, c'est sympa, oui.

JEAN-PIERRE SERRE : Ca c'est Bourbaki!

ALAIN CONNES : Weil était là?

PIERRE CARTIER : Non, il n'était pas là. J'ai reçu une lettre de Weil et à cette occasion, bla bla bla, je vais vous la lire. Et c'est là, Weil mettait les pieds dans le plat "on s'était promis de partir à 50 ans...".

JACQUES DIXMIER : On s'était promis, donc la règle existait déjà avant.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui je pense qu'elle existait avant. Ils avaient dû dire ça avant, les membres fondateurs.

PIERRE CARTIER : On s'était promis, bon... Et il y avait plutôt de la réserve, effectivement.

JEAN-PIERRE SERRE : Bon alors voyons, vous deux, vous êtes partis à 50 ans, tous les deux?

PIERRE CARTIER : Non.

JEAN-PIERRE SERRE : Toi, à quel âge?

PIERRE CARTIER : Un peu plus tard.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah bon, à combien?

PIERRE CARTIER : 53 ou quelque-chose comme ça.

JEAN-PIERRE SERRE : Ouh la la, et pourquoi tu as fait ça, c'est pas bien, ça?! Bon alors heureusement, j'ai compensé, parce que moi, je suis parti 2 ou 3 ans avant.

PIERRE CARTIER : Borel et toi, vous êtes partis avant.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, Borel est parti à 50 ans, il serait volontiers resté, tandis que moi, j'en avais un petit peu assez, j'étais rentré à 21 ans ou 22, tu vois, à 50 ça faisait beaucoup, et donc je suis parti. De même que j'ai quitté le Collège 2 ou 3 ans avant. J'aime bien partir avant.

JACQUES DIXMIER : Il faut dire et c'est quand-même lié à ta question que Bourbaki a pris immédiatement l'habitude d'inviter les gens retraités à un congrès de temps en temps. Et moi, j'ai été invité deux fois à des congrès ultérieurs.

JEAN-PIERRE SERRE : Moi, je crois que je n'ai pas été invité, j'ai été puni parce que j'étais parti avant.

PIERRE CARTIER : Oui moi aussi, j'ai été invité.

JACQUES DIXMIER : Tu as jamais été invité, ça m'étonne.

ALAIN CONNES : Mais Jacques m'a raconté l'histoire, comme quoi, quand Weil avait été invité, quelques années plus tard, à un moment-donné, il y avait eu la réunion dans laquelle on assignait les rédactions pour la fois suivante, et apparemment, tu étais intervenu avec Borel, pour lui dire qu'il ne pouvait pas assister à cette réunion. C'est correct ?

JEAN-PIERRE SERRE : Engagements du congrès, ça s'appelait, les engagements du congrès, et en effet, on était un peu sans pitié, tu vois. La notion de pitié était pas dans Bourbaki.

JACQUES DIXMIER : Euh alors là, je me souviens assez bien de cette scène, personne n'a fait... J'en ai parlé après coup avec Koszul et on avait exactement le même point-de-vue, c'est-à-dire que nous, on aurait bien accepté Weil, on ne pensait pas que ça aurait biaisé la discussion mais que s'il y avait des membres de Bourbaki, par exemple Borel et Serre qui ne voulaient pas, alors ça imposait le refus... Mais que c'était pas très humain si tu veux.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, tu vois, sur l'algèbre commutative, il avait un point de vue très différent. Et oui, c'est ça...

ALAIN CONNES : Ah oui, sur l'algèbre commutative, il avait un point de

vue très différent.

JACQUES DIXMIER : Oui, mais il s'agissait d'une discussion où on faisait les projets d'avenir, on distribuait les rédactions, si Weil se mettait à intervenir, on pouvait lui couper la parole, là, d'accord... Mais lui interdire d'assister à la réunion, là, c'est plus dur, quand-même.

JEAN-PIERRE SERRE : Moi, je pense que c'est plutôt le contraire, tu vois...

ALAIN CONNES : Je suis d'accord avec Serre.

JEAN-PIERRE SERRE : Lui couper la parole, c'est vraiment pas possible.

ALAIN CONNES : C'est vraiment impoli.

JEAN-PIERRE SERRE : A partir du moment où tu viens à une discussion, tu es sur un pied d'égalité avec les autres.

ALAIN CONNES : Je me souviens vaguement d'une histoire que tu m'avais racontée un jour, qui était que Weil était parti un jour en disant "ça sent le Chevalley, je m'en vais".

JEAN-PIERRE SERRE : En disant quoi ?

ALAIN CONNES : Il a dit ça ?

JACQUES DIXMIER : Ça sent le Chevalley. Si, si, il l'a dit, je revois la scène.

JEAN-PIERRE SERRE : En quel sens il le disait ?

JACQUES DIXMIER : Oh ben, il était furieux du tour des discussions. Chevalley l'énervait particulièrement et il est parti en étant un petit peu injurieux pour Chevalley, quoi, voilà.

ALAIN CONNES : Ca, c'est quand-même un trait de Bourbaki qui est que...

PIERRE CARTIER : C'était la première génération, quand-même, plus que les suivantes.

JEAN-PIERRE SERRE : Tu veux dire qu'on était plus polis les uns avec les autres. Non, avec Borel, écoute : "Borel, tu déconnes, quand-même...".

PIERRE CARTIER : Oui, mais bon, ça c'était pas grave !

JACQUES DIXMIER : C'est vrai que c'est pas la même chose que ça sent le Chevalley.

JEAN-PIERRE SERRE : Dans d'autres réunions, tu vois, même ça.

PIERRE CARTIER : Weil pouvait être vraiment mordant, très mordant, plus que chacun de nous.

ALAIN CONNES : Mais si tu veux, sinon, je pense que la liberté justement d'engueuler les gens, dans les discussions mathématiques, je pense, ça, c'est quelque chose qui allait de pair avec la fraternité qui était installée.

PIERRE CARTIER : En principe, il n'y avait pas de...

ALAIN CONNES : D'animosité ?

PIERRE CARTIER : Non, il n'y avait pas de hiérarchie...

JEAN-PIERRE SERRE : L'Ecole Normale y est sans doute pour beaucoup. Parce qu'on s'est amusé une fois à deviner ce que serait un congrès Bourbaki fait par des japonais tu vois. A ce moment-là, ils auraient tous fait ça, simplement (*faisant un salut en s'inclinant à la japonaise*) et le lendemain, on aurait trouvé l'un d'eux qui se serait fait harakiri et là, on aurait compris que la rédaction n'était pas bonne (*éclats de rires*). Et c'est pour ça qu'il n'y a pas eu de Bourbaki japonais.

PIERRE CARTIER : Il y avait l'esprit normalien, c'est certain.

ALAIN CONNES : Et c'est vrai qu'il y avait une atmosphère directe, bon.

JACQUES DIXMIER : Bon alors, il y a la phrase "il n'y avait pas de hiérarchie"; alors c'est vrai et c'est faux. C'est vrai qu'on pouvait..., que j'avais

aucun scrupule à lancer des vanes à Dieudonné qui était à l'Académie, etc.

JEAN-PIERRE SERRE : Plutôt l'Académie, tout le monde s'en foutait alors. L'Académie, c'était plutôt négatif, si tu veux, comme qualité.

JACQUES DIXMIER : Mais la hiérarchie, elle existait, il est vrai que là, j'ai pas demandé aux autres. C'est un peu si tu veux comme dans une meute, il y en a qui baissent les oreilles, devant le chef de meute.

JEAN-PIERRE SERRE : Weil était le fondateur, quand-même. C'était clair, c'était lui...

ALAIN CONNES : C'était le fondateur, mais quand il y avait une discussion de maths...

JACQUES DIXMIER : Je ne peux pas dire que j'aie discuté de maths fondamentales avec Weil, quoi, voilà... Eh ben, j'avais peut-être tort. En tout cas, je pense que j'avais raison. Et c'est ça la situation en ce qui me concerne. Mais là j'exagère peut-être en disant qu'il y avait une hiérarchie.

JEAN-PIERRE SERRE : C'est pas une hiérarchie, mais il y avait des gens plus influents que d'autres.

PIERRE CARTIER : Primus inter pares comme on dit en latin.

JEAN-PIERRE SERRE : C'est normal ça.

PIERRE CARTIER : Une relation d'ordre.

JACQUES DIXMIER : C'est mieux une relation d'ordre, parce que ça n'est pas forcément un ordre total.

ALAIN CONNES : Oui vas-y Serre, dis.

JEAN-PIERRE SERRE : Si tu veux Delsarte, par exemple, quand il assistait aux discussions, au début, il a été vite à la retraite, mais, il disait rien, tu vois.

ALAIN CONNES : Il n'intervenait pas.

JEAN-PIERRE SERRE : Sa spécialité, c'était la théorie analytique des nombres, et on n'en faisait absolument pas, on n'en faisait même rien qui soit utile, on aurait pu mais...

JACQUES DIXMIER : J'ai entendu dire qu'il avait écrit la fin du livre 4.

ALAIN CONNES : De topologie ?

JACQUES DIXMIER : F.V.R.

ALAIN CONNES : Ah, fonctions d'une variable réelle.

PIERRE CARTIER : Ca c'était dans son style.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui mais ça c'était avant que je n'entre dans Bourbaki, tu vois, je l'ai connu, il ne disait jamais un mot. Et puis, nous avons eu Pisot et Roger qui étaient perdus, également. Ils étaient tout simplement pas à leur place.

JACQUES DIXMIER : Oui Bourbaki les a mis à la porte.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah oui, et puis ça a été délicat.

ALAIN CONNES : Ah bon, en plus?!

JEAN-PIERRE SERRE : Ah eh bien oui, tu sais mettre à la porte, c'est pas... Là, on a quand-même essayé que ce soit fait proprement mais je ne sais pas comment les membres fondateurs ont fait.

PIERRE CARTIER : En tout cas, dans les archives, il n'y a aucune trace.

JACQUES DIXMIER : Sauf que leur nom n'apparaît plus.

PIERRE CARTIER : Oui, ils apparaissent jusqu'à une certaine date, et après ils n'apparaissent plus mais il n'y a aucune trace de leur exclusion.

JEAN-PIERRE SERRE : Non mais remarque, il n'y a pas de trace non plus du fait que Leray était aux discussions au début, et qu'il n'y a pas été ensuite.

JACQUES DIXMIER : Eh bien, on a bien fait de ne pas mettre ça dans La Tribu.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais je sais qu'on a eu des discussions entre nous pour savoir comment on arriverait à s'en débarrasser.

JACQUES DIXMIER : Je n'y étais pas moi à ce moment-là, j'ai dû venir un peu après.

ALAIN CONNES : Mais comment vous l'avez fait ?

JEAN-PIERRE SERRE : Je ne m'en rappelle plus, je crois qu'on a inventé un système où ils n'étaient pas obligés de venir et ils ont compris.

JACQUES DIXMIER : Chaboty a été viré lui aussi.

JEAN-PIERRE SERRE : C'est vrai qu'il a été membre de Bourbaki lui-aussi.

JACQUES DIXMIER : Et Ehresmann, c'est lui qui est parti.

JACQUES DIXMIER : Ce qui fait qu'à une certaine époque, je pense que Bourbaki s'est retrouvé devant un boulot énorme et à mon avis, c'est pour ça qu'ils se sont mis à recruter à tout va. N'importe qui pouvait venir à Bourbaki (*rires*) Enfin mais dans ton cas, comme tu dis...

JEAN-PIERRE SERRE : Non, moi j'ai forcé la porte, non moi, c'est pas pareil.

JACQUES DIXMIER : Mais tu es un cas unique.

JEAN-PIERRE SERRE : Je crois, oui oui oui. Comment ça s'appelle chez les américains, quand il y a une party, tu sais, les gens qui entendent dans un immeuble qu'il y a une party et qui vont à la porte et se glissent dedans, comment ça s'appelle "to crash", en tous cas, moi, j'ai crashé Bourbaki.

PIERRE CARTIER : Je ne connais pas l'expression argotique.

JEAN-PIERRE SERRE : Alors est-ce que tu as encore des choses dans ta tirelire, là ?

ALAIN CONNES : Pas vraiment non, pas vraiment. Je pense que sinon, après, ce sont des généralités sur Bourbaki, et bon...

JEAN-PIERRE SERRE : On pourrait peut-être dire, un peu, ce que l'on pense de ce que l'on lit sur Bourbaki, parce que...

PIERRE CARTIER : Tu avais dit qu'on pourrait parler du séminaire.

ALAIN CONNES : Oh, ben, c'est un sujet différent, non.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah, je voudrais en dire du bien, de ce séminaire, que c'est un truc extraordinaire, ça justifie à soi tout seul le maintien de Bourbaki, après notre départ, qui bien évidemment (*en charriant un peu PC*) était une catastrophe pour Bourbaki, mais...

PIERRE CARTIER : Bien sûr, bien sûr.

ALAIN CONNES : C'est important effectivement de s'exprimer sur ce qu'on lit.

PIERRE CARTIER : Je regardais effectivement les volumes 40-50 et sur 6 exposés, il y en a 4 par des membres de Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Et également ils représentent un complément parfait au texte, parce que c'est des maths intéressantes, au contraire. Elles sont pas bourbachiques du tout.

JACQUES DIXMIER : Avec une différence énorme qui est qu'il n'y a souvent pas les démonstrations.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui mais maintenant, attention maintenant, il y a beaucoup de textes qui ont 40 à 50 pages et qui contiennent pratiquement les démonstrations.

ALAIN CONNES : Mais Serre, tu as mentionné un sujet qui effectivement est très important, qui est qu'on a lu des critiques de Bourbaki, moi, j'ai contacté avant notre réunion, là, justement, quelqu'un que je connais bien, qui était professeur de taupe et qui avait interrogé un certain nombre de ses collègues sur Bourbaki et il s'est aperçu que les gens qui le critiquaient n'avaient lu aucun livre de Bourbaki.

PIERRE CARTIER : On vit sur la réputation, autrement dit.

ALAIN CONNES : Simplement, comme ça, par ouï dire, etc., qui critiquent sans fondement. Mais je pense que c'est important de s'exprimer par rapport à certaines critiques, tu parlais d'Arnold, par exemple...

PIERRE CARTIER : Laurent Lafforgue aussi.

ALAIN CONNES : Comment ?

PIERRE CARTIER : Il prétend qu'il n'a jamais lu un livre de Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Bon eh bien, ça, ça n'est pas pareil.

ALAIN CONNES : Non, mais ça n'est pas pareil, parce qu'Arnold...

JEAN-PIERRE SERRE : Arnold, c'est pire que ça. Prenons par exemple dans la littérature, tu as des gens qui dans la même phrase, vont dire "Bourbaki est beaucoup trop abstrait !" et "Pourquoi est-ce que Bourbaki n'a pas fait la théorie des catégories ?". Du point de vue de l'abstraction, c'est bien plus difficile la théorie des catégories, mais ils ne se rendent pas compte de ce qu'ils disent. Ils sont contents de critiquer et voilà.

ALAIN CONNES : Ca c'est parfaitement vrai.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais il y a quand-même quelque-chose de Bourbaki qu'il faudrait mentionner, c'est que beaucoup de gens accusent Bourbaki d'avoir essayé d'acquérir un certain pouvoir universitaire. Et ça, c'est sérieux, quand-même.

ALAIN CONNES : Ca c'est sérieux, oui, tu peux en parler, mais je pense que la raison, elle est simple, c'est qu'en fait, les membres de Bourbaki étaient les meilleurs mathématiciens du moment, et donc... je veux dire, c'est pas infiniment étonnant qu'ils se soient retrouvés à la Sorbonne dans un endroit pareil.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais enfin, ça fait partie des choses que l'on voit sur Bourbaki et qui me sont désagréables parce que c'était pas le cas quand j'étais débutant, parce qu'ils étaient à Nancy, ils étaient pas...

ALAIN CONNES : Oui bien sûr.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais après ils sont tous venus à Paris.

ALAIN CONNES : Effectivement si tu veux, la question qu'on peut se poser, c'est "est-ce qu'il y a eu un moment où Bourbaki a joué le rôle d'une coterie, d'une secte, enfin?". Je veux dire, finalement, les gens se rencontrant quand-même un mois par an, avaient le temps de discuter ensemble, de prendre des décisions...

JEAN-PIERRE SERRE : Extrêmement rarement. Je ne me souviens pas de discussions à table, par exemple, sur les postes, les choses comme ça.

ALAIN CONNES : Sur les postes, non...

PIERRE CARTIER : Non, ça, c'était interdit.

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, c'était moralement interdit, oui.

ALAIN CONNES : C'est d'autant plus outrageant, ce genre d'accusation, si tu veux, que moi, si j'ai un souvenir de coterie qui n'est pas du tout Bourbaki, c'est que j'ai été le rapporteur pour Grothendieck en 1984, pour le CNRS.

PIERRE CARTIER : Ah, c'était toi.

JACQUES DIXMIER : Quand, à quelle date ?

ALAIN CONNES : En 1984. Grothendieck était candidat au CNRS, d'accord, et j'étais son rapporteur. J'ai demandé à Jacques d'écrire une lettre, il fallait

quand-même écrire des lettres de recommandation, il voulait faire des maths.

JEAN-PIERRE SERRE : Et à l'époque, il voulait réellement faire des maths ? Parce qu'il a demandé des postes à une époque où il quittait les maths.

ALAIN CONNES : Il avait son *Esquisse d'un programme*, il avait un programme qui était tout à fait extraordinaire.

PIERRE CARTIER : Un travail magnifique d'ailleurs.

ALAIN CONNES : Magnifique, et alors si tu veux, ce qui s'est produit, c'est que je suis arrivé à la commission du CNRS donc, je faisais partie de la commission du CNRS et je me suis aperçu, avant qu'on commence, que l'ordre du jour avait été établi de telle sorte qu'on discuterait le cas de Grothendieck au moment où il n'y aurait plus de poste de disponible. Donc j'ai fait un scandale, j'ai mis... et ça, ça avait été fait par les syndicats, c'est-à-dire que ce qui était derrière, en amont, c'était pas Bourbaki, c'étaient les syndicats.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah non, mais ça, le pouvoir des syndicats, dans les commissions.

JACQUES DIXMIER : Ca n'a rien à voir, là.

ALAIN CONNES : Non mais ce que je veux dire, c'est qu'on accuse Bourbaki, alors qu'il y avait à la manœuvre des coteries qui étaient bien pire.

PIERRE CARTIER : Oh, ben, il y avait Malliavin aussi.

ALAIN CONNES : Il y avait peut-être Malliavin, et alors, Grothendieck a eu un poste, il a eu un poste temporaire, ça a marché, mais je veux dire, c'était une situation absolument intenable à cause justement du...

JEAN-PIERRE SERRE : Oui, j'ai peut-être eu tort de mentionner ce problème-là, mais moi, ça m'est désagréable qu'on mette ça sur le dos de Bourbaki, qui n'était pas du tout comme ça.

JACQUES DIXMIER : Comme autre chose qu'on met sur le dos de Bourbaki, il y a les maths modernes, l'accusation bateau pendant des années, mainte-

nant il n'y a plus de maths modernes, alors on n'en parle plus mais.

ALAIN CONNES : Non mais ça, il faut s'en défendre, et...

JACQUES DIXMIER : Pendant 10 ou 20 ans, ça a été la tarte à la crème.

ALAIN CONNES : Il faut s'en défendre, effectivement et Pierre tu disais...

PIERRE CARTIER : Ben que les plus actifs là-dedans, c'était par exemple Lichnerowicz.

JEAN-PIERRE SERRE : C'était Lichné essentiellement et Choquet.

PIERRE CARTIER : Et qui n'étaient pas de Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Mais qui étaient des sympathisants de Bourbaki, remarque, tous les deux.

ALAIN CONNES : Ah bon ? Lichnerowicz était sympathisant de Bourbaki.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah oui, il laissait même entendre plus ou moins, enfin, des gens disaient qu'il était membre de Bourbaki, et il ne démentait pas.

ALAIN CONNES : Il laissait faire.

JACQUES DIXMIER : Je me demande s'il n'y avait pas un contentieux entre Weil et Lichné, mais bon, j'ai jamais cherché à approfondir...

JEAN-PIERRE SERRE : Weil avait simplement une mauvaise opinion de Lichné, c'est tout. Ah ben, j'ai un souvenir précis, le souvenir précis, c'est que Lichné était censé avoir démontré je ne sais plus quoi sur des espaces Riemanniens symétriques et puis Weil est arrivé au congrès et on lui a dit ça, et il a dit "Ah non ça, sûrement pas, il a sûrement pas démontré ça". Et effectivement quelques jours après, on a su que la démonstration était fausse, tu vois ?

PIERRE CARTIER : Ah bon !

JEAN-PIERRE SERRE : Non il savait d'avance que, il estimait que... (*grimace*)

JACQUES DIXMIER : Enfin les bagarres personnelles, ça existe partout, dans tous les milieux, et dans le milieu mathématique, et dans Bourbaki, et en dehors de Bourbaki, oh !

JEAN-PIERRE SERRE : Une chose qui était sympathique dans les dîners, s'il y avait des choses qui étaient moralement interdites qui étaient de parler de postes, mais il y avait aussi de parler de nos propres travaux. Je me souviens de Dieudonné disant quelque-chose, et Weil disant "écoute, tes savants travaux, etc, tes savants travaux..."

ALAIN CONNES : On s'en fout ! Ah ben ça, c'est très bien, ça.

JACQUES DIXMIER : Enfin, y en avait pas beaucoup qui avaient envie de parler de leurs propres travaux, enfin, la moindre pudeur.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah non, mais en discussion à table, tu vois... avec un voisin, quand-même on pouvait comme ça, non je crois que Dieudonné avait utilisé ça comme argument pour quelque-chose, il avait dit "moi je m'en suis servi dans ça, de..." Et alors Weil lui a dit "tes savants travaux" (*geste de faire signe à l'autre de se taire*).

ALAIN CONNES : Ah ben ça, c'est parfait, c'est parfait. Justement c'est un élément essentiel dans ce que j'essayais de dire au début, c'est justement le fait qu'il y avait une pudeur et les gens mettaient de côté leur ego, et ils contribuaient justement à ça, et ça, c'est fondamental, parce que ça a créé cette fraternité, et ça a créé cet esprit de dévouement d'une certaine manière.

JEAN-PIERRE SERRE : Si tu veux, c'est un peu comme ça que je suis entré dans Bourbaki sans le demander parce que ça ne me venait pas à l'idée qu'il fallait que je demande l'autorisation, c'était des maths, et j'estimais que des maths, j'avais toujours le droit d'y être, c'était spontané pour moi.

JACQUES DIXMIER : Ça me rappelle que moi, je ne me suis jamais posé la question financière à Bourbaki, ça tournait bien, je ne me suis jamais posé la question de comment ça marchait.

JEAN-PIERRE SERRE : Des finances de Bourbaki, d'où ils recevaient l'argent ?

PIERRE CARTIER : La vente des bouquins, la vente des bouquins.

JACQUES DIXMIER : Oui, mais enfin, fallait organiser, fallait payer des impôts, ou ne pas les payer, enfin...

PIERRE CARTIER : Eh bien, il y avait une association pour ça.

JACQUES DIXMIER : Elle a été créée assez tardivement, l'association.

ALAIN CONNES : A partir de 52.

PIERRE CARTIER : En 52, oui avant c'était Delsarte, avant.

JEAN-PIERRE SERRE : Figure-toi qu'ils m'ont pris comme Trésorier, alors que je n'avais pas la moindre idée..., mais c'était Delsarte qui faisait tout, c'était sur le papier, j'étais Trésorier et puis il y avait peut-être un Président qui était peut-être Delsarte, mais je n'ai jamais vu le moindre compte de ma vie.

PIERRE CARTIER : Dans les 15 premières années, c'est Delsarte qui faisait tout ça.

JACQUES DIXMIER : Est-ce que comme anecdote, la présence d'acteurs de cinéma à des congrès t'intéresse ?

ALAIN CONNES : Oh oui, bien sûr, toutes les anecdotes m'intéressent, j'avais prévu...

PIERRE CARTIER : Piccoli est venu nous voir.

ALAIN CONNES : Ah bon ?

JACQUES DIXMIER : Oui, Piccoli, on était à Saint-Rémy-de-Provence, c'était un copain, c'était le cousin assez éloigné de Douady, c'est ça. Il est venu as-

sister à une ou plusieurs de nos discussions.

JEAN-PIERRE SERRE : Non, pas plusieurs, non.

PIERRE CARTIER : Il a été parfait, il a été d'une modestie parfaite.

JACQUES DIXMIER : Il a pas dit un mot, il s'est assis dans un coin.

ALAIN CONNES : Ah bon ? Quand-même, ah ça, c'est pas mal alors comme anecdote.

JEAN-PIERRE SERRE : Assis dans un coin... Il me revient une anecdote, tu vois. C'était à l'abbaye de Royaumont et on discutait des Espaces Vectoriels Topologiques donc c'est il y a vraiment très longtemps. Et on était sur une terrasse avec du soleil, et il y avait des chaises longues, et on s'était installés dans les chaises longues, et Weil était là, et les Espaces Vectoriels Topologiques, ça l'embêtait, tu vois, alors Weil s'était endormi. Alors quand on s'est aperçu qu'il s'était endormi, on est tous partis sans faire le moindre bruit, et on est allés regarder par les fenêtres et on a vu à un moment Weil qui se retournait et il ne pouvait engueuler personne, il n'y avait personne! (*rires de tous*).

PIERRE CARTIER : Ca, je connaissais pas, ça.

JEAN-PIERRE SERRE : Ca, c'est 49, je pense. Je pense, parce que c'est ma première année, c'était sûrement ça. Oh, c'étaient les E.V.T. de dimension finie, tu vois.

ALAIN CONNES : Les E.V.T. de dimension finie, non...

JEAN-PIERRE SERRE : Ecoute, quand le corps n'est pas complet, c'est pas tout à fait trivial et par exemple, il y a des choses qui sont pas forcément fermées l'une dans l'autre, et bon, par contre, si le corps est complet, il ne se passe rien. Oui, tu vois, c'est pas terrible. Mais je revois encore la tête de Weil, il était un peu penaud, tu vois.

ALAIN CONNES : Sûrement (*rires*).

JACQUES DIXMIER : Et pour te dire que les discussions étaient parfois informelles, je me souviens d'une séance où, c'était l'été, on était dans une cour, un jardin, et Douady est parti avec une pelle et il est revenu quelques minutes plus tard en nous montrant ce qu'il avait fait, il avait tué une vipère et il nous montrait fièrement la vipère.

JEAN-PIERRE SERRE : Il y a eu une fois, il m'a lancé un serpent, c'était paraît-il une couleuvre, mais c'est assez désagréable quand on vous lance un serpent dans les bras, vivant, lui, alors !

PIERRE CARTIER : Douady, la chasse aux vipères, c'était une de ses obsessions.

JEAN-PIERRE SERRE : Il les tuait.

JACQUES DIXMIER : Douady et les contre-exemples.

JEAN-PIERRE SERRE : A l'époque, on tuait les vipères, maintenant elles sont protégées.

ALAIN CONNES : Jacques a Douady et les contre-exemples, c'est justement envoyer des vipères à quelqu'un.

JACQUES DIXMIER : On discutait ce que Godement appelle le monstre, le chapitre 3 des groupes de Lie.

JEAN-PIERRE SERRE : Oh, c'est pas un monstre, je te le dis encore une fois, c'est un très beau chapitre.

JACQUES DIXMIER : Et Douady était là et j'étais là et donc un soir, d'habitude, on allait se coucher assez tôt, vers 10 heures, mais là, je sais pas pourquoi, j'étais resté travailler jusque vers minuit et Douady, lui non-plus, n'était pas allé se coucher, il est rentré à l'hôtel, il m'a vu, il était excité, il m'a dit "j'ai trouvé le contre-exemple sur les groupes de Lie, devine ce que c'est!". Alors, j'essaye de lui suggérer "t'as trouvé ceci?", "non c'est pas ça!"... "non, c'est pas ça!". Et puis alors tout de même, à un moment donné, je me suis dit "est-ce ça ne serait pas", ça me paraissait presque impossible, est-ce que par hasard, il aurait trouvé une algèbre de Lie qui ne correspon-

drait à aucun groupe de Lie ?...

JEAN-PIERRE SERRE : C'est ça, Banachique ou un truc comme ça, mais pas de dimension finie quand-même...

JACQUES DIXMIER : Alors je lui dis "est-ce que c'est ça ?"... "Oui, c'est ça!". Et puis alors, il s'est mis à hurler, il était minuit, il a dû réveiller la moitié de l'hôtel (*éclats de rire*). J'ai eu un mal fou à le calmer.

PIERRE CARTIER : C'était un vrai problème, ça.

JEAN-PIERRE SERRE : J'espère que c'est en exercice dans Bourbaki, ça.

JACQUES DIXMIER : Ça a passé en exer. bien sûr. Tu parles de l'importance du contre-exemple, quand-même.

JEAN-PIERRE SERRE : Ah oui, et puis il y avait aussi, Dixmier, tu avais fait, il me semble, des contre-exemples rigolos, est-ce que tu avais pas fait un exemple où une famille a un paramètre de groupes de Lie et les revêtements universels ne peuvent pas se prolonger (*faisant des gestes avec les bras pour illustrer son propos*).

ALAIN CONNES : Il n'y a pas de relèvement de l'homotopie, tu veux dire.

JEAN-PIERRE SERRE : Je pense.

JACQUES DIXMIER : Pas moi, non, je n'ai pas de souvenir de ça.

JEAN-PIERRE SERRE : Ce n'est pas toi ?... Mais celui que tu dis, je crois que c'était un sous-espace non fermé dans un Banach, il y avait un truc comme ça.

JACQUES DIXMIER : Ah c'était en dimension infinie, naturellement.

ALAIN CONNES : Donc l'aspect créatif est souvent dans les exercices, effectivement.

JACQUES DIXMIER : Oh non t'exagères.

JEAN-PIERRE SERRE : Il y a beaucoup de choses dans les exercices.

JACQUES DIXMIER : Des choses que Dieudonné est allé chercher.

JEAN-PIERRE SERRE ET ALAIN CONNES : Non non non pas du tout.

JEAN-PIERRE SERRE : J'ai fabriqué quantités de choses que j'ai mises dans des exercices, tu vois, qui n'étaient pas dans la littérature, non, qui n'étaient pas connues, quelquefois.

JACQUES DIXMIER : Je suis persuadé que tu as mis des tas de choses, mais enfin, c'était pas la majorité des exer. quoi.

JEAN-PIERRE SERRE : (*se levant, et allant vers la table des livres*) A partir de ces livres-là, ça tu vois, Dieudonné n'a contribué à aucun exercice là-dedans : ça, ce sont des exercices entièrement à nous... Tu vois, les Coxeter hyperboliques par exemple, qui sont là, d'ailleurs avec des fautes d'impression. Ben ça a été mal imprimé, bon. Non, des quantités de choses, j'avais mis des invariants de groupes, engendrés par des réflexions en caractéristique p .

JACQUES DIXMIER : La caractéristique p , Dieudonné connaissait ça, quand-même.

JEAN-PIERRE SERRE : Non il connaissait absolument pas. Les invariants peut-être.

JACQUES DIXMIER : Non, pas les invariants. Enfin, je ne sais pas, son bouquin sur les groupes classiques, je ne l'ai quasiment pas lu.

JEAN-PIERRE SERRE : Ecoute, il y a des exercices, là, ils sont jolis comme tout. C'est pas du tout pareil que les premiers livres de Bourbaki où effectivement, Dieudonné prenait dans des articles, des choses, et il les mettait tandis que là, moi, quand j'en faisais, c'était différent, je me posais des questions, ou bien, alors, quelque-chose que je savais être vrai, j'arrivais à trouver une façon de le rédiger en exercice. Non, il y a énormément de choses.

ALAIN CONNES : Je crois que c'est un moment idéal pour terminer.

JACQUES DIXMIER ET JEAN-PIERRE SERRE : Terminons.

ALAIN CONNES : On pourrait discuter pendant des heures.

JEAN-PIERRE SERRE : On pourrait "*s'engueuler*" pendant des heures, pour donner une idée de ce que c'était! (*rires*)

ALAIN CONNES : Je pense que ça donne quand-même une bonne idée de ce que c'était.

1 Calcul du spectre de l'opérateur compact \mathbf{K}_I

Cette section est la plus élaborée de l'article : elle décrit le calcul du spectre de l'opérateur compact \mathbf{K}_I de

$$\langle \eta | \mathbf{K}_I(\xi) \rangle = \frac{1}{2e'(1_+)} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) (Q\epsilon)(\exp(|v|)) dx dv, \quad (1)$$

pour un intervalle $I \subset [-\log 2, \log 2]$ de longueur $\log 2$. En fait, nous considérerons l'intervalle

$$I = \left[-\frac{\log 2}{2}, \frac{\log 2}{2} \right].$$

La première difficulté que nous rencontrons concerne le calcul de la fonction $Q\epsilon(\rho)$, dans la formule

$$Q\epsilon(\rho) = \sum \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}} T_n(\rho), \quad (2)$$

où

$$T_n(\rho) = \rho^{1/2} \int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x) (D_u \zeta_n)(\rho x) dx + \rho^{-1/2} (D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1) - \rho^{1/2} \xi_n(1) (D_u \zeta_n)(\rho) \quad (3)$$

car dans l'équation (2) interviennent de façon compliquée des fonctions sphéroïdales prolates et leurs dérivées. Heureusement, on peut la calculer par ordinateur du fait de la décroissance rapide

$$|\lambda(n)| \leq \frac{2^{2n} \pi^{2n+\frac{1}{2}} ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n+\frac{3}{2})} \sim (4n+1)^{-2n-\frac{1}{2}} (e\pi)^{2n+\frac{1}{2}}.$$

De plus, nous montrons dans l'appendice F (Lemme F.1) que la somme des 11 premiers termes dans la série donne une approximation uniforme de la fonction $Q\epsilon(\rho)$ jusqu'à 10^{-11} . La seconde difficulté analysée dans cette section est de gérer la dimension infinie de l'espace de Hilbert sur lequel l'opérateur \mathbf{K}_I agit. Cela semble, a priori, exclure l'utilisation de la puissance de l'ordinateur pour comprendre ce spectre. Ici, la stratégie que nous suivons consiste à utiliser notre idée originale de "q → 1" qui a sous-tendu, depuis le début, notre travail algébrique [2,3,4]. Donc, nous remplaçons le groupe multiplicatif R_+^* par le sous-groupe discret $q^{\mathbb{Z}}$, et nous approximons l'espace de dimension infinie par celui de dimension finie où l'intervalle I (en notation additive) est remplacé par l'ensemble fini I_q de taille $N \sim \log 2 / \log q$, des multiples entiers de $\omega = \log q$ qui appartiennent à I . Il s'avère que la discrétisation naturelle de l'opérateur \mathbf{K}_I (§1.1) est une matrice de Toeplitz et on peut rechercher numériquement son spectre (§1.2) pour voir comment il varie, quand $q \rightarrow 1$. Ce qu'on découvre c'est que, alors que pour des intervalles de longueur un peu plus petite que $\log 2$ la plus grande valeur propre λ_{\max} de \mathbf{K}_I est inférieure à 1, de telle façon que \mathbf{N}_I (voir la définition de \mathbf{N}_I dans la première proposition **Prop** du §1.1) est négatif, cela n'est plus vrai quand la longueur de l'intervalle devient plus proche de $\log 2$ (voir la Figure 1. En regardant plus précisément le spectre de \mathbf{K}_I , on voit que l'écart à la plus grande valeur propre reste toujours plus petit que 1 ! L'étape suivante consiste alors à utiliser la théorie puissante des matrices auto-adjointes de Toeplitz [5,1] qui montre que le vecteur propre ξ associé à la plus grande valeur propre remplit une sorte de "version bébé" de RH. Si l'on regarde ξ comme une fonction à valeurs complexes $\xi : I_q \rightarrow \mathbb{C}$ en formant l'expression

$$\tilde{\xi}(z) = \sum \xi(\log q^j) z^j \in C[z, z^{-1}],$$

alors tous les zéros de cette fonction sont des nombres complexes de module 1. Ils sont au nombre de $N \sim \log 2 / \log q$. En calculant ces N racines, nous remarquons qu'elles sont distribuées comme les $(N+1)$ -ièmes racines de l'unité sauf pour la racine triviale 1. De plus, on a la symétrie $z \mapsto z^{-1}$ due à l'égalité $\tilde{\xi}(z^{-1}) = \tilde{\xi}(z)$. Quand on remet à l'échelle les arguments pris dans $[-\pi, \pi]$, en les multipliant par $(N+1)/2$, leur forme générale converge quand $q \rightarrow 1$ (voir (10) pour les premières valeurs). La théorie générale des matrices de Toeplitz T montre également [5] que les racines ci-dessus peuvent être utilisées comme une transformée de Fourier discrète pour fournir la formule canonique de la matrice de Toeplitz de plus petit rang positif $\lambda_{\max} \text{Id} - T$, comme une combinaison linéaire à coefficients positifs $d(j)$ de la forme

$$\lambda_{\max} \text{Id} - T = \lambda_{\max} \sum d(j) e(j)$$

trad. Denise Vella-Chemla, novembre 2020.

L'article original en anglais est à lire ici : <https://arxiv.org/pdf/2006.13771.pdf>.

où les $e(j)$ sont les projections à une dimension (également des matrices de Toeplitz) associées aux racines ci-dessus. Il s'avère que la forme générale des coefficients scalaires $d(j)$ converge également quand $q \rightarrow 1$ (voir (13)). L'étape suivante est présentée au §1.3 et consiste à deviner, de l'approximation discrète et des formes générales des racines et des $d(j)$, une fonction du paramètre continu $\rho \in [\frac{1}{2}, 2]$ qui approxime $Q\epsilon(\rho)$. Ce choix est alors vérifié numériquement et donne, par une simple estimation, une bonne approximation de \mathbf{K}_I et un bon contrôle de son spectre en utilisant un opérateur de rang fini (voir §1.4). Finalement, les paragraphes 1.5 et 1.6 fournissent le calcul du spectre de cet opérateur de rang fini ainsi que le vecteur propre de valeur propre maximale, et la preuve que l'opérateur \mathbf{K}_I devient < 1 dans le complémentaire orthogonal de ce vecteur. (La preuve du théorème principal (Théorème 9) peut être trouvée dans l'article original¹).

1.1 Approximation discrète des intervalles variables

Nous discrétisons l'espace en remplaçant R_+^* par $q^{\mathbb{Z}}$, où $q > 1$ et faisons alors tendre $q \rightarrow 1$. En posant $\omega = \log q$, nous remplaçons l'intervalle $I = [0, a]$ par ses intersections finies avec le réseau $\omega\mathbb{Z}$, dont les éléments $j\omega$ sont étiquetés par $j \in \{0, \dots, N\}$, où N est la partie entière de a/ω . Alors nous remplaçons les intégrales par des sommes et nous considérons, dans l'espace de Hilbert de dimension finie $\ell^2(\{0, \dots, N\})$, la forme quadratique suivante qui est la version discrétisée de (6)

$$\mathcal{Q}_q(\xi) := \omega \sum_{j=0}^N \sum_{k=-j}^{N-j} \overline{\xi(j)} \xi(j+k) (Q\epsilon)(q^{|k|}). \quad (4)$$

En suivant la proposition \mathfrak{Ftop} :

Soit $I \subset [-\log 2, \log 2]$ un intervalle de longueur $\leq \log 2$.

(i) L'égalité suivante définit un opérateur borné \mathbf{N}_I dans l'espace de Hilbert $L^2(I, dx)$

$$\langle \eta | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle = E_+(Q_+ f), \quad f = \eta^* * \xi, \quad f(v) = \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) dx. \quad (5)$$

(ii) On a $\mathbf{N}_I = -2\epsilon'(1_+) (Id - \mathbf{K}_I)$, où \mathbf{K}_I est l'opérateur compact défini par

$$\langle \eta | \mathbf{K}_I(\xi) \rangle = \frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) (Q\epsilon)(\exp(|v|)) dx dv, \quad (6)$$

on doit comparer \mathcal{Q}_q avec le produit intérieur $2\epsilon'(1_+) \sum_{j=0}^N \overline{\xi(j)} \xi(j)$.

On remplace (4) par

$$\mathcal{Q}_q(\xi) = \omega \langle \xi | \mathcal{T}_q \xi \rangle,$$

où la matrice de Toeplitz \mathcal{T}_q est de la forme

$$\mathcal{T}_q = \begin{pmatrix} Q\epsilon(1) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(q^2) & Q\epsilon(q^3) & \dots & Q\epsilon(q^N) \\ Q\epsilon(q) & Q\epsilon(1) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(q^2) & \dots & Q\epsilon(q^{N-1}) \\ Q\epsilon(q^2) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(1) & Q\epsilon(q) & \dots & Q\epsilon(q^{N-2}) \\ Q\epsilon(q^3) & Q\epsilon(q^2) & Q\epsilon(q) & Q\epsilon(1) & \dots & Q\epsilon(q^{N-3}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q\epsilon(q^N) & Q\epsilon(q^{N-1}) & Q\epsilon(q^{N-2}) & Q\epsilon(q^{N-3}) & \dots & Q\epsilon(1) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Puis on compare la plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \omega \mathcal{T}_q$ avec 1 puisque cela teste la positivité de $Id - \mathbf{K}_I$.

1. <https://arxiv.org/pdf/2006.13771.pdf>, section 6.7.

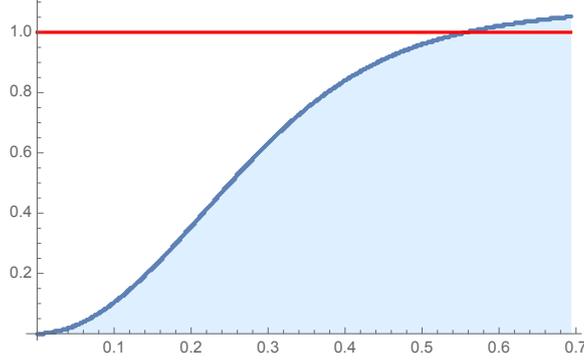


FIGURE 1 : Plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$, pour $a \in [0, \log 2]$ et $q = \exp(10^{-3})$.

La figure 1 montre que, pour $\omega = 10^{-3}$ et $q = \exp(10^{-3})$, la plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$, *i.e.* $\lambda \sim 1.05177$, excède légèrement 1 quand on considère l'intervalle complet $[0, \log 2]$.

1.2 Approximation discrète et matrices de Toeplitz

Fixons maintenant l'intervalle $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$: symétrique et de longueur $\log 2$. En calculant les premières valeurs propres de la matrice de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$, on trouve que la valeur propre juste avant la valeur propre la plus grande $\lambda = \lambda_1$ est $\lambda_2 \sim 0.687925$: plutôt bien en-dessous de 1. Ainsi, le manque de positivité de $\text{Id} - \mathbf{K}_I$ est dû à un seul vecteur propre ζ . Dans la section suivante, nous utilisons la théorie générale des matrices de Toeplitz [1,5]. Un premier résultat-clef classique dans la théorie affirme que le vecteur propre de valeur propre maximale d'une matrice auto-adjointe de Toeplitz est d'une forme très spéciale puisque l'équation polynomiale associée a ses racines de module 1. Dans nos notations, cela signifie que si nous dénotons les composantes du vecteur propre ζ par $\zeta(\log q^j) = \zeta(j\omega)$ qui sont définies pour $|j|\omega \leq \frac{1}{2} \log 2$, et que nous posons $\tilde{\zeta}(z) = \sum \zeta(j\omega)z^j \in C[z, z^{-1}]$, alors on a l'implication

$$z \in C \ \& \ \tilde{\zeta}(z) = 0 \implies |z| = 1. \quad (8)$$

Quand nous avons calculé ces zéros la première fois avec la valeur de q utilisée au §1.1 (*i.e.* $\omega = 10^{-3}$, $q = \exp(10^{-3})$), nous avons trouvé qu'en effet, ces zéros sont tous de module 1 et vérifient la symétrie $z \mapsto \bar{z}$, cela étant dû au fait que les coefficients $\zeta(j\omega)$ sont réels (ils respectent aussi la contrainte $\zeta(-j\omega) = \zeta(j\omega)$). Avec le choix symétrique de $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$, le nombre fini N d'éléments dans $I \cap \omega Z$ est impair $N = 2m + 1$ et le calcul montre que les N racines de $\tilde{\zeta}(z) = 0$ ressemblent aux racines $N + 1$ -ièmes non triviales de l'unité, *i.e.* toutes sauf $z = 1$. Puisqu'elles sont symétriques, ces racines peuvent être mieux écrites sous la forme

$$z_j^\pm = \exp\left(\pm \frac{2\pi i \alpha_j}{N+1}\right), \quad j = 1, \dots, m, \quad (9)$$

et il s'avère que $z = -1$ est aussi une racine et qu'ainsi, elle devrait être ajoutée à cette liste de $2m$ éléments.

De cette façon, on découvre que lorsque les racines sont étiquetées comme dans (9), les nombres obtenus α_j , qui dépendent du choix de $q = \exp(\omega)$, se stabilisent quand $q \rightarrow 1$ et la différence $\alpha_j - j$ tend vers zéro quand l'index $j \rightarrow \infty$. La table suivante montre les premières valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, indexées par leur partie

entière *i.e.* $j = \text{PartieEntière}(\alpha_j)$:

$$\begin{array}{cccccc}
 \alpha_1 = 1.33371 & \alpha_2 = 2.10964 & \alpha_3 = 3.07018 & \alpha_4 = 4.0524 & \alpha_5 = 5.04184 & \\
 \alpha_6 = 6.03484 & \alpha_7 = 7.02984 & \alpha_8 = 8.0261 & \alpha_9 = 9.0232 & \alpha_{10} = 10.0209 & \\
 \alpha_{11} = 11.019 & \alpha_{12} = 12.0174 & \alpha_{13} = 13.016 & \alpha_{14} = 14.0149 & \alpha_{15} = 15.0139 & \\
 \alpha_{16} = 16.013 & \alpha_{17} = 17.0123 & \alpha_{18} = 18.0116 & \alpha_{19} = 19.011 & \alpha_{20} = 20.0104 & \\
 \alpha_{21} = 21.0099 & \alpha_{22} = 22.0095 & \alpha_{23} = 23.0091 & \alpha_{24} = 24.0087 & \alpha_{25} = 25.0083 & \\
 \alpha_{26} = 26.008 & \alpha_{27} = 27.0077 & \alpha_{28} = 28.0074 & \alpha_{29} = 29.0072 & \alpha_{30} = 30.007 & \\
 \alpha_{31} = 31.0067 & \alpha_{32} = 32.0065 & \alpha_{33} = 33.0063 & \alpha_{34} = 34.0061 & \alpha_{35} = 35.006 & \\
 \alpha_{36} = 36.0058 & \alpha_{37} = 37.0056 & \alpha_{38} = 38.0055 & \alpha_{39} = 39.0053 & \alpha_{40} = 40.0052 & \\
 \alpha_{41} = 41.0051 & \alpha_{42} = 42.005 & \alpha_{43} = 43.0048 & \alpha_{44} = 44.0047 & \alpha_{45} = 45.0046 & \\
 \alpha_{46} = 46.0045 & \alpha_{47} = 47.0044 & \alpha_{48} = 48.0043 & \alpha_{49} = 49.0043 & \alpha_{50} = 50.0042 & \\
 \alpha_{51} = 51.0041 & \alpha_{52} = 52.004 & \alpha_{53} = 53.0039 & \alpha_{54} = 54.0039 & \alpha_{55} = 55.0038 & \\
 \alpha_{56} = 56.0037 & \alpha_{57} = 57.0037 & \alpha_{58} = 58.0036 & \alpha_{59} = 59.0035 & \alpha_{60} = 60.0035 &
 \end{array} \tag{10}$$

La liste ci-dessus donne une idée des valeurs numériques des α_j . Les valeurs numériques précises (pour $\omega = 1/5000$) ne sont pas des entiers et nécessitent davantage de chiffres.

On peut les télécharger ici [lien pour télécharger les angles](#).

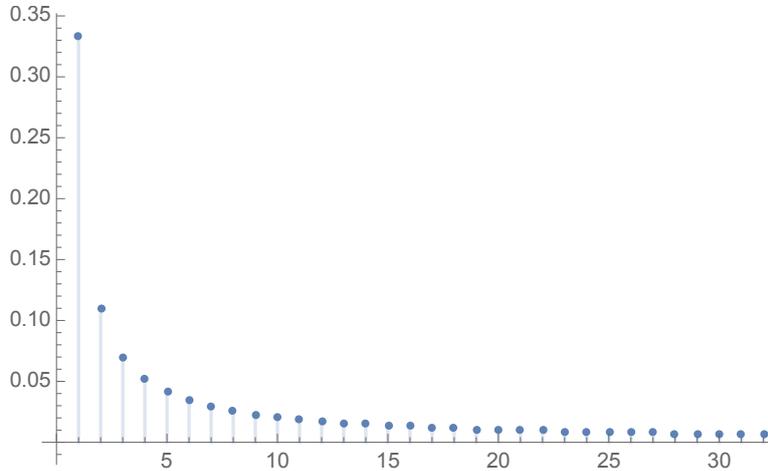


FIGURE 2 : Graphe de $\alpha_j - j$.

Le second résultat-clef classique [1,5] de la théorie des matrices de Toeplitz est que pour une matrice de Toeplitz positive T de co-rang 1 (*i.e.* le rang égal à la dimension de la matrice moins 1), l'allure de T dans le cône positif est un cône basé sur un simplexe. Cela découle du fait qu'il y a une unique décomposition de T comme somme d'éléments de rayons extrêmes du cône positif. De plus, les rayons extrêmes du cône sont les matrices de Toeplitz (positives) de rang 1, et elles sont paramétrées (à un scalaire multiplicatif positif près) par le cercle des unités $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1\}$, formé par les projections $e(z)$ de rang 1. De plus, les seuls nombres complexes de module 1 intervenant dans la décomposition $T = \sum d(j)e(z_j)$ sont précisément les racines (les zéros) du polynôme associé au vecteur dans le noyau de T . Nous utilisons ce résultat et l'appliquons à la matrice de Toeplitz

$$S = \lambda \text{Id} - \frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \omega \mathcal{T}_q \tag{11}$$

(λ est la plus grande valeur propre de $\frac{1}{2\epsilon'(1_+)} \omega \mathcal{T}_q$). Par construction et en utilisant la simplicité de la plus grande valeur propre λ , la matrice de Toeplitz obtenue S est de co-rang 1 de telle manière qu'elle admet une décomposition canonique de la forme

$$S = \lambda \sum d(j)e(z_j), \quad \{z_j\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \tilde{\zeta}(z) = 0\}. \tag{12}$$

Nous avons calculé la liste des scalaires positifs $d(j)$ correspondant à cette unique décomposition et avons trouvé que quand $q \rightarrow 1$, ils se comportent similairement à des angles, *i.e.* quand ils sont étiquetés par les

z_j correspondant, ils convergent vers une valeur fixe.

Nous donnons un exemple des premières valeurs dans la table suivante (13), où nous utilisons le même étiquetage que dans (10) de façon à ce que les termes se correspondent bijectivement

$$\begin{array}{cccccc}
d(1) = 1.17111 & d(2) = 1.12443 & d(3) = 1.05904 & d(4) = 1.03248 & d(5) = 1.02052 & \\
d(6) = 1.01414 & d(7) = 1.01033 & d(8) = 1.00787 & d(9) = 1.00619 & d(10) = 1.005 & \\
d(11) = 1.00411 & d(12) = 1.00344 & d(13) = 1.00292 & d(14) = 1.00251 & d(15) = 1.00217 & \\
d(16) = 1.0019 & d(17) = 1.00167 & d(18) = 1.00148 & d(19) = 1.00132 & d(20) = 1.00119 & \\
d(21) = 1.00107 & d(22) = 1.00097 & d(23) = 1.00088 & d(24) = 1.0008 & d(25) = 1.00073 & \\
d(26) = 1.00067 & d(27) = 1.00062 & d(28) = 1.00057 & d(29) = 1.00052 & d(30) = 1.00048 & \\
d(31) = 1.00045 & d(32) = 1.00042 & d(33) = 1.00039 & d(34) = 1.00036 & d(35) = 1.00034 & \\
d(36) = 1.00031 & d(37) = 1.00029 & d(38) = 1.00027 & d(39) = 1.00026 & d(40) = 1.00024 & \\
d(41) = 1.00022 & d(42) = 1.00021 & d(43) = 1.0002 & d(44) = 1.00018 & d(45) = 1.00017 & \\
d(46) = 1.00016 & d(47) = 1.00015 & d(48) = 1.00014 & d(49) = 1.00013 & d(50) = 1.00013 & \\
d(51) = 1.00012 & d(52) = 1.00011 & d(53) = 1.0001 & d(54) = 1.0001 & d(55) = 1.00009 & \\
d(56) = 1.00008 & d(57) = 1.00008 & d(58) = 1.00007 & d(59) = 1.00007 & d(60) = 1.00006 &
\end{array} \tag{13}$$

À nouveau, ceci est juste destiné à donner une idée de ces valeurs, et (pour $\omega = 1/5000$), les valeurs numériques précises contiennent davantage de chiffres.

On peut les télécharger ici [lien pour télécharger les coefficients](#).

Pour obtenir un bon contrôle de l'opérateur compact \mathbf{K}_I , nous avons alors besoin d'approximer la fonction $(Q\epsilon)(\exp(x))$ pour tout $x \in [0, \log 2]$, et non juste seulement pour un ensemble fini de multiples de ω . Dans la prochaine section, nous allons montrer comment la décomposition de Toeplitz ci-dessus (11) permet de deviner une approximation efficace de la fonction $(Q\epsilon)(\exp(x))$ par une somme trigonométrique finie. Il s'avère alors que cette approximation permet, par un calcul par ordinateur, d'obtenir le contrôle souhaité.

1.3 L'approximation de base de $(Q\epsilon)(\exp(x))$

En combinant (11) et (12), la matrice de Toeplitz $T_q = \frac{1}{2\epsilon'(1_+)}\omega\mathcal{T}_q$ peut être réécrite ainsi

$$T_q = \lambda \left(\text{Id} - \sum d(j)e(z_j) \right) \tag{14}$$

où les $e(z_j)$ sont les matrices de projections sur une dimension obtenues en conjuguant la projection à une dimension sur la fonction constante par les opérateurs unitaires

$$(U(\alpha)\xi)(x) := \exp\left(\frac{i2\pi\alpha x}{\log 2}\right) \xi(x).$$

Cela suggère que l'on peut approximer la fonction $\chi(x) := (Q\epsilon)(\exp(x))/(2\epsilon'(1_+))$ dans $[0, \log 2]$ par une expression trigonométrique de la forme

$$\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x) := \frac{2\lambda}{\log 2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \left(\cos \frac{2\pi n x}{\log 2} - d(n) \cos \frac{2\pi \alpha_n x}{\log 2} \right) \right). \tag{15}$$

Le fait suivant est vérifié :

La distance dans $L^1([0, \log 2], dx)$ de la fonction $\chi(x) := (Q\epsilon)(\exp(|x|))/(2\epsilon'(1_+))$ à la fonction $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ de (15) (pour $m = 1732$, et avec les valeurs des angles α_j et des coefficients $d(j)$ fixés ci-dessus) vérifie

$$2 \int_0^{\log 2} |\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x) - \chi(x)| dx \sim 0.00122. \tag{16}$$

Démonstration : La preuve est un calcul par ordinateur de la norme dans $L^1([0, \log 2], dx)$ de la différence des deux fonctions. La fonction $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ oscille (ces oscillations sont visibles au voisinage de $\log 2$) mais sinon, elle approxime très bien la fonction $\chi(x)$ comme cela est montré par des calculs par ordinateur de la L^1 -norme de la différence

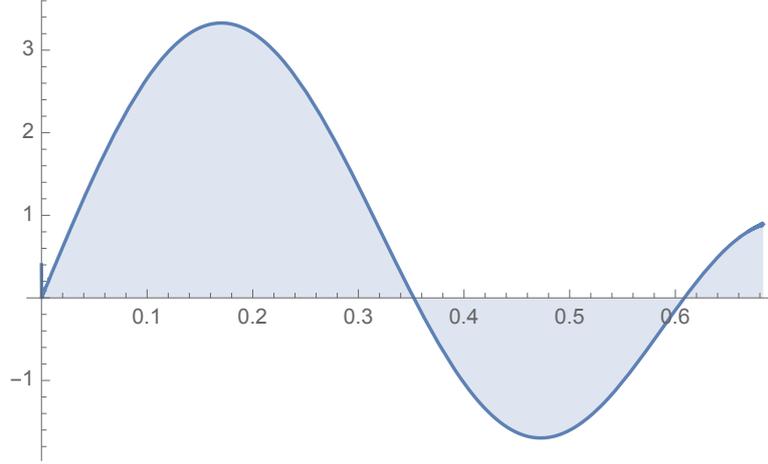


FIGURE 3 : Graphe de $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ dans $[0, \log 2]$ pour $m = 1732$.

Pour justifier (16), on utilise d'abord (57) de l'Appendice pour remplacer, sans aucune perte, la fonction $\chi(x) := (Q\epsilon)(\exp(x))/(2\epsilon'(1^+))$ en utilisant la contribution des 11 premiers termes de la série (56) définissant $Q\epsilon$. \square

1.4 L'approximation de \mathbf{K}_I par un opérateur de rang fini T

Ici, le but est d'estimer la forme quadratique obtenue quand on remplace la fonction $\chi(x)$ par son approximation $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$.

Lemme 1. *Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ une fonction lisse paire de support contenu dans l'intervalle fermé $[-\log 2, \log 2]$. Alors, après avoir réarrangé l'ordre de sommation, on obtient*

$$\frac{2}{\log 2} \int_{-\log 2}^{\log 2} \left(\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \cos \frac{2\pi n x}{\log 2} \right) f(x) dx = f(0) \quad (17)$$

Démonstration : L'égalité découle de l'application de la formule de Poisson. Appelons $L = Z \log 2$ le réseau des multiples entiers de $\log 2$ et $L^\perp = Z/\log 2$ le réseau dual.

La sommation par la formule de Poisson donne

$$\sum_L f(x) = \frac{1}{\log 2} \sum_{L^\perp} \hat{f}(y), \quad \hat{f}(y) = \int f(u) \exp(-2\pi i u y) du.$$

Puisque f est paire et que son support est contenu dans l'intervalle fermé $[-\log 2, \log 2]$, on a,

$$\sum_L f(x) = f(0), \quad \hat{f}(y) = \int_{-\log 2}^{\log 2} \exp(2\pi i y x) f(x) dx = \int_{-\log 2}^{\log 2} \cos(2\pi y x) f(x) dx$$

et la formule de Poisson donne ainsi

$$f(0) = \frac{1}{\log 2} \sum_{L^\perp} \hat{f}(y) = \frac{1}{\log 2} \sum_Z \int_{-\log 2}^{\log 2} \cos \left(\frac{2\pi n x}{\log 2} \right) f(x) dx$$

ce qui donne (17). \square

Considérons alors l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2([-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2], dx)$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous appelons

$$\xi_\alpha(x) := (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i \alpha x}{\log 2}\right), \quad \forall x \in [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2] \quad (18)$$

et $\mathbf{e}_\alpha = |\xi_\alpha\rangle\langle\xi_\alpha|$ la projection orthogonale associée,

$$\mathbf{e}_\alpha(\xi) = \xi_\alpha \langle \xi_\alpha | \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

On a alors pour tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, en utilisant la forme spéciale (18) du vecteur ξ_α

$$\langle \eta | \mathbf{e}_\alpha(\xi) \rangle = \langle \eta | \xi_\alpha \rangle \langle \xi_\alpha | \xi \rangle = \frac{1}{\log 2} \int_{I \times I} \overline{\eta(x)} \exp\left(\frac{2\pi i \alpha x}{\log 2}\right) \xi(y) \exp\left(\frac{-2\pi i \alpha y}{\log 2}\right) dx dy$$

de telle façon que l'on obtient

$$\langle \eta | \mathbf{e}_\alpha(\xi) \rangle = \frac{1}{\log 2} \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) \exp\left(\frac{-2\pi i \alpha v}{\log 2}\right) dx dv. \quad (19)$$

Le lemme suivant joue un rôle crucial dans le processus d'approximation.

Lemme 2. Appelons $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ une approximation de la fonction $\chi(x)$ de telle façon que la norme L^1 de la différence $\tau(\lambda, \alpha, d, m) - \chi$ soit $\leq \epsilon$. Alors l'opérateur compact \mathbf{K}_I de (6), pour $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$, est à une distance normée moindre que ϵ de l'opérateur de rang fini

$$T = \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathbf{e}_n - d(|n|) \mathbf{e}_{\alpha_n}). \quad (20)$$

Ici, on définit $\alpha_{-n} = -\alpha_n \forall n$ et $d(0) = 0$; alors que pour $n > m$, on définit $\alpha_n = n$ et $d(n) = 1$ de telle façon que tous les termes dans la somme ci-dessus pour $|n| > m$ s'évanouissent.

Démonstration : Par (15), on a

$$\tau(\lambda, \alpha, d, m)(v) = \frac{\lambda}{\log 2} \sum_{-m}^m \left(\exp\left(\frac{-2\pi i n v}{\log 2}\right) - d(|n|) \exp\left(\frac{-2\pi i \alpha_n v}{\log 2}\right) \right)$$

de telle façon que, par (19), l'opérateur T de (20) sur $\mathcal{H} := L^2([-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2], dx)$ vérifie l'égalité

$$\langle \eta | T(\xi) \rangle = \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) \tau(\lambda, \alpha, d, m)(v) dx dv. \quad (21)$$

L'opérateur compact \mathbf{K}_I de (6) vérifie la même égalité, avec $\chi(x)$ à la place de $\tau(\lambda, \alpha, d, m)(x)$ dans l'intégrale. Ainsi, la norme de $\mathbf{K}_I - T$ est bornée par l'inégalité

$$\left| \int_{-\log 2}^{\log 2} \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) a(v) dx dv \right| \leq \|\xi\| \|\eta\| \int_{-\log 2}^{\log 2} |a(v)| dv \quad (22)$$

qui découle de l'inégalité de Schwarz $\left| \int \overline{\eta(x)} \xi(x+v) dx \right| \leq \|\xi\| \|\eta\|$. □

1.5 Le vecteur propre de valeur propre maximale

Dans le but de comprendre l'opérateur de rang fini T de (20), nous construisons d'abord un vecteur $\zeta \in \mathcal{H}$ orthogonal à tous les vecteurs ξ_{α_n} pour $n \neq 0$, en utilisant les conventions du Lemme 2 : *i.e.* pour $n > m$, nous posons $\alpha_n = n$. Nous considérons d'abord le produit infini

$$h(z) := \prod_{n>0} \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_n^2}\right)$$

qui est convergent comme le produit définissant $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ et est, par construction, le produit de $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ par une fraction rationnelle dont le rôle est de remplacer les zéros $\pm n$ pour $n \in \{1, \dots, m\}$, par les $\pm \alpha_n$. Nous considérons alors la transformée de Fourier de $h(z \log 2)$. Nous utilisons les notations du Lemme 2.

Lemme 3. La transformée de Fourier $\psi(x) = \frac{1}{\log 2} \widehat{h}\left(\frac{x}{\log 2}\right)$ de $h(z \log 2)$ a son support dans l'intervalle $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$. On a $T\psi = \lambda\psi$ et (en utilisant les conventions du Lemme 2)

$$\langle \xi_0 | \psi \rangle = (\log 2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \langle \xi_{\alpha_n} | \psi \rangle = 0, \quad \forall n \neq 0. \quad (23)$$

Démonstration : Par construction, on a

$$\prod_{0 < n \leq m} \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_n^2}\right) \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{0 < n \leq m} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) h(z). \quad (24)$$

La transformée de Fourier de $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, alors que la transformée de Fourier du côté gauche de (24) est une distribution avec support dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Ainsi, par (24), la transformée de Fourier \widehat{h} de la fonction $h(z)$ vérifie l'équation différentielle de degré $2m$

$$\prod_{0 < n \leq m} \left(1 + \frac{\partial^2}{(2\pi n)^2}\right) \widehat{h}(x) = 0, \quad \forall x \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (25)$$

Puisque l'espace des solutions de cette équation différentielle est constitué des fonctions qui sont des combinaisons linéaires des $2m$ fonctions trigonométriques $\exp(\pm 2\pi i n x)$ pour $|n| \leq m, n \neq 0$, on voit que toutes ces fonctions sont périodiques de période 1; ainsi, puisque \widehat{h} est de carré intégrable, elle doit s'évanouir en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En remettant à l'échelle par $\log 2$, *i.e.* en utilisant $\psi(x) = \frac{1}{\log 2} \widehat{h}\left(\frac{x}{\log 2}\right)$, on obtient que ψ a son support dans l'intervalle $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$. Par inversion de Fourier, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$

$$\begin{aligned} \langle \xi_{\alpha_n} | \psi \rangle &= (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \int_I \psi(x) \exp\left(-\frac{2\pi i \alpha_n x}{\log 2}\right) dx \\ &= (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \int \widehat{h}(y) \exp(-2\pi i \alpha_n y) dy = (\log 2)^{-\frac{1}{2}} h(\alpha_n) = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne (23) (puisque $h(1) = 1 \Rightarrow \langle \xi_0 | \psi \rangle = (\log 2)^{-\frac{1}{2}}$). Le fait que ψ soit orthogonal à tous les vecteurs ξ_{α_n} montre en utilisant (20) que $T\psi = \lambda \sum_{\mathbb{Z}} \mathbf{e}_n \psi = \lambda\psi$, puisque les vecteurs ξ_n forment une base orthonormée de \mathcal{H} . \square

Notons que la fonction ψ n'est pas normalisée. Le calcul des normes L^2 donne

$$\|\psi\|_2 = (\log 2)^{-\frac{1}{2}} \|h\|_2, \quad \|h\|_2 \sim 1.05143, \quad \text{pour } m = 1732 \quad (26)$$

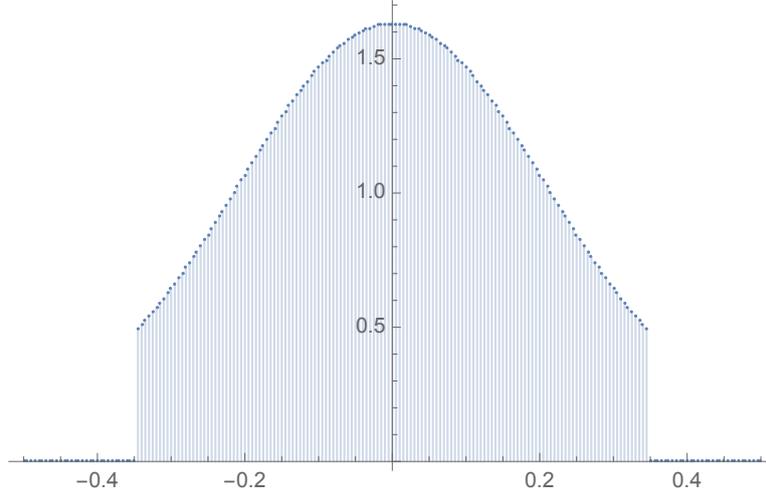


FIGURE 4 : Graphe de $\zeta(x) = \psi(x)/\|\psi\|_2$ dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

L'important fait numérique est que :

Pour $m = 1732$, on a : $\langle \xi_0 | \zeta \rangle \sim 0.94865$, où $\zeta(x) = \psi(x)/\|\psi\|_2$.

1.6 Calcul du spectre de T

La première méthode pour calculer le spectre de l'opérateur T de (20) est d'approximer cet opérateur de rang fini en utilisant la projection orthogonale $P(n)$ sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs ξ_j , pour $|j| < n$. Nous utilisons l'expression suivante du carré de la norme $\|\xi_\alpha - P(n)\xi_\alpha\|^2$.

Lemme 4. Soit $(\log \Gamma)^{(2)}$ la dérivée logarithmique de la fonction Γ , alors on a²

$$\|\xi_\alpha - P(n)\xi_\alpha\|^2 = \pi^{-2} \sin^2(\pi\alpha) \left((\log \Gamma)^{(2)}(n - \alpha) + (\log \Gamma)^{(2)}(\alpha + n) \right), \quad \forall \alpha \in [-n, n] \quad (27)$$

Démonstration : Les composantes du vecteur ξ_α dans la base ξ_m sont données comme suit

$$(\xi_\alpha)_k = \frac{1}{\log 2} \int_{-\frac{\log(2)}{2}}^{\frac{\log(2)}{2}} \exp\left(\frac{2\pi i(\alpha - k)x}{\log 2}\right) dx = \frac{\sin(\pi(\alpha - k))}{\pi(\alpha - k)}.$$

On utilise alors l'identité, pour $a < n$ ($\sin^2(\pi(a - n)) = \sin^2(\pi a)$)

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi(a - k))}{\pi(a - k)} \right)^2 = \frac{\sin^2(\pi(a - n))}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (n - a + k)^{-2} = \pi^{-2} \sin^2(\pi a) (\log \Gamma)^{(2)}(n - a)$$

De façon similaire, pour $-n < a$, on a

$$\sum_{k=-\infty}^{-n} \left(\frac{\sin(\pi(a - k))}{\pi(a - k)} \right)^2 = \pi^{-2} \sin^2(\pi a) \sum_{k=-\infty}^{-n} (a - k)^{-2} = \pi^{-2} \sin^2(\pi a) (\log \Gamma)^{(2)}(n + a)$$

ce qui donne (27). □

L'égalité

$$P(n)\mathbf{e}_\alpha(P(n)\xi) = \langle \xi_\alpha | P(n)\xi \rangle P(n)\xi_\alpha = \langle P(n)\xi_\alpha | \xi \rangle P(n)\xi_\alpha$$

donne l'estimation simple de la norme de l'opérateur

$$\|P(n)\mathbf{e}_\alpha P(n) - \mathbf{e}_\alpha\| \leq 2\|\xi_\alpha - P(n)\xi_\alpha\|.$$

2. Note de la traductrice : Appelée fonction digamma et souvent noté Ψ , si l'on considère la fonction gamma (Γ) comme une généralisation de la factorielle aux complexes, la fonction digamma (Ψ) serait une généralisation des nombres harmoniques aux complexes. Sur la toile, on trouve comme asymptote de digamma $\log z - 1/2 z - 1/12 z^2 \dots$

Cela permet de contrôler la norme de la différence $T - P(m)TP(m)$ comme suit

$$\|T - P(m)TP(m)\| \leq 2\lambda \sum_{|n| < m} d(|n|) \|\xi_{\alpha_n} - P(m)\xi_{\alpha_n}\|. \quad (28)$$

En utilisant (27) et le comportement asymptotique

$$(\log \Gamma)^{(2)}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x}\right)^3,$$

on obtient un premier contrôle de $\|T - P(m)TP(m)\|$. Alors, on peut calculer les valeurs propres de la matrice de dimension finie $P(m)TP(m)$. Nous l'avons fait pour $m = 1733$ ³, après avoir divisé par λ , pour vérifier que la plus grande valeur propre était bien 1. On peut alors obtenir la liste de ses valeurs propres ; les premières d'entre elles, ordonnées selon un ordre décroissant sont les suivantes

$$\{1., 0.652824, 0.027475, 0.000290146, 0.0000877245, 0.0000756436\}.$$

Seules les trois premières valeurs propres se démarquent comme valeurs propres positives stables pour T/λ . Après multiplication par λ , elles deviennent⁴

$$\lambda = 1.05158, \quad \lambda_2 = 0.686494, \quad \lambda_3 = 0.0288921. \quad (29)$$

On peut aussi obtenir les composantes c_n , sur la base des ξ_n , du vecteur propre associé à la valeur propre λ . Ces composantes sont plus petites que 10^{-4} pour $n > 30$ et leur graphe pour n proche de 0 (et pour n allant un peu plus loin) est reproduit ci-dessous.

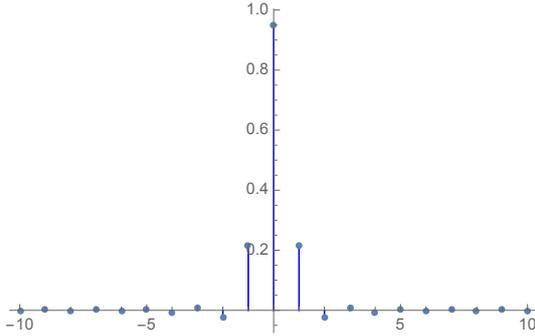


FIGURE 5 : Graphe des composantes c_n pour $|n| < 10$.

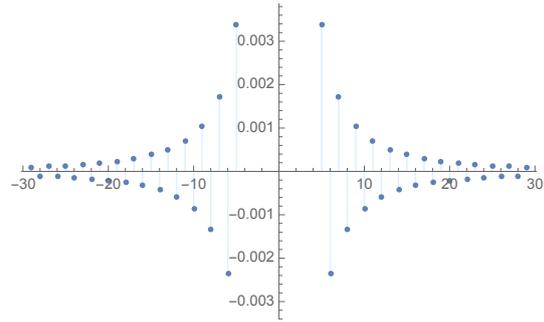


FIGURE 6 : Graphe des composantes c_n pour $7 < |n| < 30$.

On vérifie aussi que le graphe (Figure 7) de la fonction reconstruite $\sum c_n \xi_n$ coïncide avec le graphe (Figure 4) du vecteur propre théorique du §1.5.

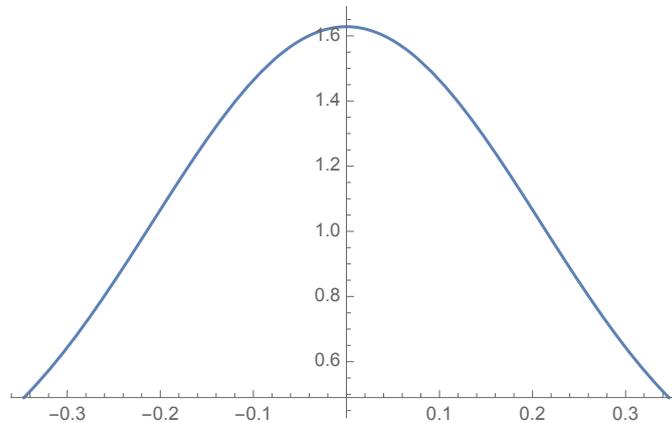


FIGURE 7 : Graphe de la fonction reconstruite $\sum c_n \xi_n$.

3. *Note de la traductrice* : différent du $m = 1732$ des autres cas. $1732 = 2^2 \times 433$ tandis que 1733 est un nombre premier.
4. *Note de la traductrice* : Pour λ_2 , $0.652824 \times 1.05158 = 0.686496662$.

Le fait important est que la première composante $c_0 \sim 0.951067$ est très proche de 1.

Remarque 5. Les composantes c_n respectent la relation de symétrie : $c_{-n} = c_n$ pour tout n . En fait, la matrice symétrique réelle de dimension finie $M = P(m)TP(m)$ présente même une symétrie plus poussée selon laquelle $M_{-i,-j} = M_{i,j}$ i.e. elle commute avec l'involution de parité. Il s'ensuit de cela que les vecteurs propres associés aux valeurs propres simples sont pairs ou impairs (par rapport à l'involution de parité). On trouve, par exemple, que le vecteur propre associé à la seconde valeur propre λ_2 est impair, i.e. ses composantes c'_n vérifient $c'_{-n} = -c'_n$ pour tout n .

Pour nos objectifs, l'estimation (28) ne garantit pas suffisamment de précision dans le calcul du spectre de T et de plus, le besoin d'entrer la somme (20) rend les calculs très lents.

Décrivons maintenant une seconde méthode pour calculer le spectre de T qui améliore la précision.

Nous considérons une nouvelle base (ζ_n) de $\mathcal{H} = L^2([-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2], dx)$ qui n'est plus orthonormée. Plus précisément, posons⁵, avec la notation (18),

$$\zeta_0 = \zeta, \quad \zeta_k = \begin{cases} \xi_k, & \text{pour } |k| > m, \\ \xi_{-\alpha_{|k|}} & \text{pour } -m \leq k \leq -1, \\ \xi_{\alpha_k} & \text{pour } 1 \leq k \leq m. \end{cases}$$

Il est nécessaire de vérifier que les ζ_k , pour $|k| \leq m$, sont linéairement indépendants et cela suffit à montrer que les (ζ_n) forment une base. En fait, par le Lemme 3, $\zeta_0 = \zeta$ est orthogonal à tous les ζ_j pour $j \neq 0$. Dans cette base, le produit intérieur dans \mathcal{H} est donné par la matrice $J : J_{i,j} := \langle \zeta_i | \zeta_j \rangle$.

L'opérateur

$$G := \sum_{n \in \mathbb{Z}} d(|n|) \mathbf{e}_{\alpha_n} \quad (30)$$

est tel que

$$\langle \zeta_i | G \zeta_j \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d(|n|) \langle \zeta_i | \mathbf{e}_{\alpha_n} \zeta_j \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d(|n|) \langle \zeta_i | \xi_{\alpha_n} \rangle \langle \xi_{\alpha_n} | \zeta_j \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d(|n|) \langle \zeta_i | \zeta_n \rangle \langle \zeta_n | \zeta_j \rangle.$$

Lemme 6. (i) Le spectre de l'opérateur T de (20) est $\{\lambda_{\max}(1 - \beta_j)\}$, où les variables β_j sont les valeurs propres de la matrice $A : A_{n,k} := d(|k|) \langle \zeta_n | \zeta_k \rangle$.

(ii) Prenons $N > m$. Les valeurs propres de la matrice A sont approximées par les valeurs propres de la matrice $A^{(N)}$ définie par : $A_{i,j}^{(N)} = A_{i,j}$ si $|i| \leq N$, $|j| \leq N$ et $A_{i,j}^{(N)} = \delta_{i,j}$ sinon, à une erreur près de $11 \epsilon(N)$ où

$$\epsilon(N) = \max(e(N), e'(N)), \quad e(N)^2 = \sum_{|j| \leq N} \epsilon(j, N), \quad e'(N)^2 = \sum_{|j| \leq N} d(|j|)^2 \epsilon(j, N)$$

avec $\epsilon(j, N) := \pi^{-2} \sin^2(\pi \alpha_j) ((\log \Gamma)^{(2)}(N - \alpha_j) + (\log \Gamma)^{(2)}(\alpha_j + N))$.

(iii) Le spectre de T est contenu dans $\{\lambda_{\max}\} \cup [-2, \lambda_2]$, où $\lambda_2 \leq 0.772216$.

Démonstration :

(i) Par (20) : $T = \lambda_{\max}(\text{Id} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} d(|n|) \mathbf{e}_{\alpha_n}) = \lambda_{\max}(\text{Id} - G)$, où G est donné par (30).

Soit $V : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{H}$ l'application linéaire : $V(\delta_n) = \zeta_n \forall n \in \mathbb{Z}$, où δ_n est la base canonique. On a par définition de la matrice J ($J_{i,j} := \langle \zeta_i | \zeta_j \rangle$), que

$$\langle V\eta | V\eta' \rangle = \langle \eta | J\eta' \rangle = \langle J^{\frac{1}{2}}\eta | J^{\frac{1}{2}}\eta' \rangle.$$

5. Note de la rédactrice : la fonction ci-dessous n'est pas définie sur $]-1, 1[$?

Cela montre que $U := VJ^{-\frac{1}{2}} : \ell^2(Z) \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur unitaire.

Le spectre de G (30) comme opérateur dans \mathcal{H} est le même que le spectre de la matrice $U^*GU = J^{-\frac{1}{2}}LJ^{-\frac{1}{2}}$, où $L = V^*GV$ donc

$$L_{i,j} = \langle \delta_i | V^*GV\delta_j \rangle = \langle \zeta_i | G\zeta_j \rangle = \sum_{n \in Z} d(|n|) \langle \zeta_i | \zeta_n \rangle \langle \zeta_n | \zeta_j \rangle.$$

Le spectre de G est donc le même que celui de la matrice conjuguée LJ^{-1} . On a

$$(LJ^{-1})_{i,k} = \sum_{n,j \in Z} d(|n|) \langle \zeta_i | \zeta_n \rangle \langle \zeta_n | \zeta_j \rangle (J^{-1})_{j,k} = \sum_{n \in Z} d(|n|) \langle \zeta_i | \zeta_n \rangle \delta_{n,k},$$

puisque pour tout $n \in Z$, on a : $\sum \langle \zeta_n | \zeta_j \rangle (J^{-1})_{j,k} = (JJ^{-1})_{n,k} = \delta_{n,k}$. Ainsi $(LJ^{-1})_{i,k} = d(|k|) \langle \zeta_i | \zeta_k \rangle$ et cela prouve (i).

(ii) Pour $|n| > m$ et $|k| > m$, on a : $d(|k|) = 1$, $\zeta_n = \xi_n$, $\zeta_k = \xi_k$, de telle façon que

$$A_{n,k} = d(|k|) \langle \zeta_n | \zeta_k \rangle = \delta_{n,k}.$$

Les éléments $A_{i,j} - A_{i,j}^{(N)}$ de la matrice $A - A^{(N)}$ sont non nuls seulement dans le domaine ⁶

$$(i, j) \in [-N, N] \times [-N, N]^c \cup [-N, N]^c \times [-N, N].$$

Ainsi, l'opérateur norme de $A - A^{(N)}$ est plus petit que le maximum des normes des deux blocs correspondant à $[-N, N] \times [-N, N]^c$ et $[-N, N]^c \times [-N, N]$. À son tour, l'opérateur norme pour ces blocs est majoré par leur norme d'Hilbert-Schmidt, dont le carré est égal à

$$\sum_{|i| \leq N, |j| > N} |A_{i,j}|^2 = \sum_{|i| \leq N} \|\zeta_i - P(N)\zeta_i\|^2, \quad \sum_{|i| > N, |j| \leq N} |A_{i,j}|^2 = \sum_{|j| \leq N} d(|j|)^2 \|\zeta_j - P(N)\zeta_j\|^2.$$

Puisque nous supposons $N > m$, on a $\zeta_0 = P(N)\zeta_0$, et par (27), pour $j \neq 0$, $|j| \leq N$,

$$\|\zeta_j - P(N)\zeta_j\|^2 = \epsilon(j, N) := \pi^{-2} \sin^2(\pi\alpha_j) \left((\log \Gamma)^{(2)}(N - \alpha_j) + (\log \Gamma)^{(2)}(\alpha_j + N) \right).$$

Nous obtenons ainsi le contrôle suivant sur l'opérateur norme

$$\|A - A^{(N)}\| \leq \max(e(N), e'(N)), \quad e(N)^2 = \sum_{|j| \leq N} \epsilon(j, N), \quad e'(N)^2 = \sum_{|j| \leq N} d(|j|)^2 \epsilon(j, N). \quad (31)$$

Appelons $J^{(N)}$ la matrice définie par : $J_{i,j}^{(N)} = J_{i,j}$ si $|i| \leq N$, $|j| \leq N$ et $J_{i,j}^{(N)} = \delta_{i,j}$ sinon. Par les mêmes arguments que ci-dessus, on obtient

$$\|J - J^{(N)}\| \leq e(N). \quad (32)$$

Les matrices J et $J^{(N)}$ sont strictement positives. Soit $0 < r < 1 < s$ tel que

$$\text{Spec } J \subset [r, s], \quad \text{Spec } J^{(N)} \subset [r, s], \quad \|A\| \leq s, \quad \|A^{(N)}\| \leq s. \quad (33)$$

Nous fournirons les valeurs numériques de r, s plus tard.

Maintenant, nous estimons la différence de normes des matrices $\Pi = J^{-\frac{1}{2}}AJ^{\frac{1}{2}}$ et $\Pi_N = (J^{(N)})^{-\frac{1}{2}}A^{(N)}(J^{(N)})^{\frac{1}{2}}$ qui, comme montré ci-dessus, sont toutes les deux positives. Nous utilisons l'égalité pour les opérateurs strictement positifs X, X'

$$X^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\lambda + X)^{-1} \lambda^{-\frac{1}{2}} d\lambda, \quad X^{-\frac{1}{2}} - X'^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\lambda + X)^{-1} (X' - X) (\lambda + X')^{-1} \lambda^{-\frac{1}{2}} d\lambda$$

6. $[-N, N]^c$ dénote le complémentaire de $[-N, N]$

Cela donne pour $X, X' \geq r > 0$ l'estimation : $\|X^{-\frac{1}{2}} - X'^{-\frac{1}{2}}\| \leq \frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} \|X - X'\|$.

De manière similaire

$$X^{\frac{1}{2}} - X'^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (\lambda + X')^{-1} (X - X') (\lambda + X)^{-1} \lambda^{\frac{1}{2}} d\lambda$$

qui donne l'estimation : $\|X^{\frac{1}{2}} - X'^{\frac{1}{2}}\| \leq \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \|X - X'\|$.

Alors, nous obtenons, en utilisant (33), (31), (32)

$$\|\Pi - \Pi_N\| \leq \|(J^{-\frac{1}{2}} - (J^{(N)})^{-\frac{1}{2}})AJ^{\frac{1}{2}}\| + \|(J^{(N)})^{-\frac{1}{2}}(A - A^{(N)})J^{\frac{1}{2}}\| + \|(J^{(N)})^{-\frac{1}{2}}A^{(N)}(J^{\frac{1}{2}} - (J^{(N)})^{\frac{1}{2}})\|$$

de telle façon que

$$\|\Pi - \Pi_N\| \leq \frac{1}{2} (s/r)^{\frac{3}{2}} e(N) + (s/r)^{\frac{1}{2}} \max(e(N), e'(N)) + \frac{1}{2} (s/r) e(N) := \epsilon_1(N). \quad (34)$$

L'opérateur $\text{Id} - \Pi$ est compact et auto-adjoint, puisqu'il correspond à la matrice $U^*GU = J^{-\frac{1}{2}}LJ^{-\frac{1}{2}}$.

Les opérateurs $A^{(N)}, J^{(N)}$ se décomposent en sommes directes dans la décomposition

$$\ell^2(Z) = \ell^2([-N, N]) \oplus \ell^2([-N, N]^c)$$

et agissent tous deux comme l'identité dans $\ell^2([-N, N]^c)$. Leurs actions dans $\ell^2([-N, N])$ sont données respectivement par les matrices $d(|j|)\langle \zeta_i | \zeta_j \rangle$ et $\langle \zeta_i | \zeta_j \rangle$. Ainsi, on déduit que l'opérateur $J^{(N)}$ est positif et que, comme ci-dessus

$$\sum_{n,j \in [-N, N]} d(|n|)\langle \zeta_i | \zeta_n \rangle \langle \zeta_n | \zeta_j \rangle ((J^{(N)})^{-1})_{j,k} = \sum_{n \in [-N, N]} d(|n|)\langle \zeta_i | \zeta_n \rangle \delta_{n,k},$$

ce qui montre qu'à la fois $A^{(N)}J^{(N)}$ et $\Pi_N = (J^{(N)})^{-\frac{1}{2}}A^{(N)}(J^{(N)})^{\frac{1}{2}}$ sont des opérateurs positifs. Ainsi, l'opérateur $\text{Id} - \Pi^{(N)}$ est compact et auto-adjoint.

De plus, la norme de la différence $\Pi - \Pi_N$ est majorée par $\epsilon_1(N)$. Il découle de cela (voir [6] Théorème 1.7) que les valeurs propres $\lambda_j, \lambda_j^{(N)}$ de $\text{Id} - \Pi$ et $\text{Id} - \Pi^{(N)}$, ordonnées dans l'ordre décroissant, vérifient l'inégalité : $|\lambda_j - \lambda_j^{(N)}| \leq \epsilon_1(N), \forall j$. Mais ces valeurs propres sont les mêmes que celles des opérateurs conjugués $\text{Id} - A$ et $\text{Id} - A^{(N)}$. Il reste à déterminer $0 < r < 1 < s$ tel que (33) est vérifiée. Noter d'abord que si $0 < r < 1 < s$ sont choisis de telle façon que

$$\text{Spec } J \subset [r, s], \quad \|A\| \leq s, \quad (35)$$

alors (33) est vérifiée puisque $J^{(N)} = P(N)JP(N) + (1 - P(N))$; donc $r \leq J \leq s$ implique $r \leq J^{(N)} \leq s$.

On a également (33) puisque $J^{(N)} = P(N)JP(N) + (1 - P(N))$; donc $\|A^{(N)}\| \leq \|A\|$. On prend alors $N = 2000$ et on utilise (31) et (32). Noter que la matrice $A^{(N)}$ n'est pas auto-adjointe et pour borner sa norme, on utilise sa décomposition comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, conjointement avec le calcul des valeurs propres des deux matrices, ce qui donne les majorants 1.533 et 0.0285 pour leurs normes. La valeur de $\max(e(N), e'(N))$ pour $N = 2000$ est ~ 0.017 ce qui fournit la borne $s = 1.578$. On trouve que les valeurs propres de $J^{(N)}$, pour $N = 2000$, sont à l'intérieur de l'intervalle $[0.313, 1.346]$ et en utilisant $e(N) \sim 0.0145$, on obtient $r = 0.299$. Cela donne $s/r \sim 5.27$ et, par (34), $\epsilon_1(N) \leq 11 \epsilon(N)$: la borne requise.

(iii) On utilise (ii) et on prend $N = 10000$. On obtient $\epsilon(N) \sim 0.00740487$, alors que la première valeur propre non nulle de la matrice $A^{(N)}$ est $\beta_2^{(N)} = 0.347112$. Donc par (ii), la première valeur non nulle de la matrice A est $\beta_2 \geq \beta_2^{(N)} - 11\epsilon(N) \sim 0.265658$. Cela montre que la seconde valeur propre $\lambda_2 = \lambda_{\max}(1 - \beta_2)$ de T vérifie $\lambda_2 \leq 0.772216$. \square

1.7 Preuve du théorème 1 de l'article original

Le calcul ci-dessus du spectre de l'opérateur compact T associé au Lemme 2 et à l'estimation (16) fournit l'information nécessaire sur le spectre de l'opérateur compact \mathbf{K}_I , puisqu'à la fois T et \mathbf{K}_I sont auto-adjoints. Alors, par [6] Théorème 1.7, avec leurs valeurs propres ordonnées selon un ordre décroissant et pour $\epsilon_1 \simeq 0.00122$, on a :

$$\|\mathbf{K}_I - T\| \leq \epsilon_1, \quad |\lambda_n(\mathbf{K}_I) - \lambda_n(T)| \leq \epsilon_1. \quad (36)$$

Ces limites permettent de transférer les résultats du §1.6 de T à \mathbf{K}_I .

À une imprécision calculatoire près que nous évaluerons plus tard, les résultats sur T sont les suivants

- 1) Les trois plus grandes valeurs propres de T sont fournies par (29) :

$$\lambda_{\max} = 1.05158, \quad \lambda_2 = 0.686494, \quad \lambda_3 = 0.0288921.$$

- 2) Le produit intérieur de ζ avec la fonction constante⁷ ξ_0 est ~ 0.94865 .

Appelons P_ζ la projection orthogonale sur $\zeta^\perp := \{\eta \in \mathcal{H} \mid \langle \zeta \mid \eta \rangle = 0\}$. La décomposition spectrale

$$T = \lambda_{\max} |\zeta\rangle\langle\zeta| + R, \quad R \leq \lambda_2 P_\zeta \quad (37)$$

montre que la forme quadratique associée à $\text{Id} - T$ est donnée, en utilisant $\text{Id} = |\zeta\rangle\langle\zeta| + P_\zeta$, par

$$\langle \xi \mid (\text{Id} - T)\xi \rangle = (1 - \lambda_{\max}) |\langle \zeta \mid \xi \rangle|^2 + \langle P_\zeta \xi \mid (P_\zeta - R)\xi \rangle \quad (38)$$

et puisque $R \leq \lambda_2 P_\zeta$, le dernier terme vérifie

$$\langle P_\zeta \xi \mid (P_\zeta - R)\xi \rangle \geq (1 - \lambda_2) \|P_\zeta \xi\|^2. \quad (39)$$

Le prochain lemme montre comment restaurer la positivité d'une forme quadratique qui est positive sur un sous-espace de codimension 1, en lui ajoutant une forme quadratique de rang 1.

Lemme 7. *Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert, $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ les vecteurs unitaires et P_ϕ la projection orthogonale sur $\phi^\perp := \{\eta \in \mathcal{H} \mid \langle \phi \mid \eta \rangle = 0\}$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Alors la forme quadratique suivante sur \mathcal{H}*

$$B(\xi) := -b |\langle \phi \mid \xi \rangle|^2 + a |\langle \psi \mid \xi \rangle|^2 + c \|P_\phi(\xi)\|^2$$

est positive si et seulement si

$$a + c \geq b, \quad b(a + c) \leq a(b + c) |\langle \phi \mid \psi \rangle|^2. \quad (40)$$

Quand (40) est vérifiée, on a : $B(\xi) \geq \epsilon \|\xi\|^2 \forall \xi \in \mathcal{H}$, où

$$2\epsilon = a - b + c - \left((a + b + c)^2 - 4a(b + c) |\langle \phi \mid \psi \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (41)$$

Pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a la décomposition orthogonale

$$\xi = P_\phi(\xi) + \phi \langle \phi \mid \xi \rangle = P_\phi(\xi) + e_\phi(\xi).$$

Appelons $\psi_1 = e_\phi(\psi)$ et $\psi_2 = P_\phi(\psi)$. Nous pouvons supposer que $\psi_2 \neq 0$ car sinon B est positif si et seulement si $a \geq b$. Nous pouvons supposer que le produit scalaire $\alpha = \langle \phi \mid \psi \rangle$ est réel. Appelons alors $E \subset \mathcal{H}$ l'espace à deux dimensions engendré par ϕ et ψ . Puisque par hypothèse $c \geq 0$, il s'ensuit que B

7. normalisée pour être de norme 1.

est positif si et seulement si sa restriction à E est positive. Dans la base orthonormée de E formée par $(\phi, \psi_2/\|\psi_2\|)$, la matrice qui représente B est

$$\begin{pmatrix} a\alpha^2 - b & a\alpha\beta \\ a\alpha\beta & a\beta^2 + c \end{pmatrix}, \quad \alpha = \langle \phi | \psi \rangle, \quad \beta = \|\psi_2\|.$$

Elle est réelle symétrique, puisque ses valeurs propres sont réelles : les valeurs propres sont toutes positives si et seulement si la trace et le déterminant de la matrice sont positifs. On a également : $\alpha^2 + \beta^2 = \|\psi\|^2 = 1$. Donc la trace est égale à $a + c - b$. Le déterminant est : $caa^2 - ba\beta^2 - bc = a\alpha^2(b + c) - b(a + c)$.

L'inégalité $B(\xi) \geq \epsilon \|\xi\|^2 \forall \xi \in \mathcal{H}$ découle alors de la formule pour les valeurs propres de la matrice ci-dessus, avec ϵ la plus petite d'entre elles, et l'inégalité $\epsilon \leq c$ qui découle de

$$(a + b + c)^2 - 4a(b + c)|\langle \phi | \psi \rangle|^2 - (-a + b + c)^2 = 4a(b + c)(1 - |\langle \phi | \psi \rangle|^2).$$

Finalement, pour $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \in E$, $\xi_2 \in E^\perp$, on a $B(\xi) = B(\xi_1) + B(\xi_2) \geq \epsilon \|\xi_1\|^2 + c \|\xi_2\|^2$. \square

Lemme 8. Soit $\mathbf{N}_I = -2e'(1_+)(\text{Id} - \mathbf{K}_I)$ l'opérateur dans $\mathcal{H} = L^2(I)$, $I = [-\frac{1}{2} \log 2, \frac{1}{2} \log 2]$ qui représente la forme quadratique associée à $E_+ \circ Q_+$ comme dans la Proposition 1.1. Alors, avec $\gamma \sim 2.94355$,

$$\langle \xi | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle \leq \gamma |\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}. \quad (42)$$

Nous travaillons d'abord avec T et appliquons le Lemme 7, avec $\phi = \zeta$, $\psi = \xi_0$.

Nous déterminons le scalaire $a > 0$ pour faire respecter (40) par $b = \lambda_{\max} - 1$, $c = 1 - \lambda_2$ et le produit intérieur des deux vecteurs donné par $\langle \zeta | \xi_0 \rangle$.

Puisque pour les valeurs numériques ci-dessus, on a $c > b$, la condition $a + c \geq b$ est automatique. La seconde condition de (40) est

$$a((c + b)|\langle \zeta | \xi_0 \rangle|^2 - b) \geq bc.$$

Pour les valeurs numériques ci-dessus, on a $b \sim 0.05158$, $\langle \zeta | \xi_0 \rangle \sim 0.94865$. Par le Lemme 6, on a $c > 0.227784$, alors en utilisant (41), l'inégalité suivante devient vérifiée pour $a \sim 0.064$, $\epsilon_2 \sim 0.00441$

$$\langle \xi | (\text{Id} - T)\xi \rangle + a|\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2 \geq \epsilon_2 \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Par (36), on a $\|\mathbf{K}_I - T\| \leq \epsilon_1$, où $\epsilon_1 \simeq 0.00122 < \epsilon_2$, ainsi

$$\langle \xi | (\text{Id} - \mathbf{K}_I)\xi \rangle + a|\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2 \geq (\epsilon_2 - \epsilon_1)\|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}$$

ce qui donne (42) après une multiplication par $-2e'(1_+)$. \square

Nous pouvons finalement établir notre résultat principal :

Théorème 9. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ une fonction lisse à support dans l'intervalle $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$ et dont la transformée de Fourier s'évanouit en $-\frac{i}{2}$. Soit \mathbf{S} la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ sur le sous-espace des fonctions paires qui s'évanouissent ainsi que leur transformée de Fourier dans l'intervalle $[-1, 1]$. Alors

$$W_\infty(g * g^*) \geq \text{Tr}(\vartheta(g) \mathbf{S} \vartheta(g)^*) - c |\hat{g}(0)|^2, \quad c = \frac{4\gamma}{\log 2}. \quad (43)$$

Par le théorème 3 de l'article original⁸, on a, pour $f = g * g^*$,

$$\mathrm{Tr}(\vartheta(f)\mathbf{S}) = W_\infty(f) + \int f(\rho^{-1})\epsilon(\rho)d^*\rho = W_\infty(f) + E(f). \quad (44)$$

Appelons $k(u) := u^{\frac{1}{2}} \int_0^u v^{-\frac{1}{2}}g(v) d^*v$. On a : $0 = \widehat{g}(-\frac{i}{2}) = \int_0^\infty v^{-\frac{1}{2}}g(v) d^*v$, et ainsi le support de k est contenu dans $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$.

De plus : $k = Y * g$, $k^* = Y^* * g^*$, $k * k^* = Y^* * Y * f$ où, comme dans le Lemme 3.3⁹, $Y(\rho) = 0$ pour $\rho < 1$, $Y(\rho) = \rho^{\frac{1}{2}}$ pour $\rho \geq 1$ et $Y^*(\rho) = Y(\rho^{-1})$. Ainsi, on obtient

$$Q(k * k^*) = g * g^* = f, \quad \widehat{k}(0) = -2\widehat{g}(0) \quad (45)$$

où la seconde égalité découle d'une intégration par parties de

$$\widehat{k}(0) = \int_0^\infty k(u)d^*u = \int_0^\infty \left(\int_0^u v^{-\frac{3}{2}}g(v) dv \right) u^{-\frac{1}{2}}du = - \int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}}g(u)2u^{\frac{1}{2}}du = -2\widehat{g}(0).$$

On obtient donc

$$\int f(\rho^{-1})\epsilon(\rho)d^*\rho = E \circ Q(k * k^*).$$

Appelons $\xi(x) := k(\exp(x))$. On a : $\xi \in \mathcal{H} = L^2([-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2])$ et en utilisant (5) de la Proposition $\mathfrak{F}\text{top}$ 1.1

$$E \circ Q(k * k^*) = E_+(Q_+(\xi * \xi^*)) = \langle \xi | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle.$$

Alors, par le Lemme 8, on obtient, en utilisant $\langle \xi_0 | \xi \rangle = (\log 2)^{-1/2}\widehat{\xi}(0) = (\log 2)^{-1/2}\widehat{k}(0)$

$$E(f) = E \circ Q(k * k^*) = \langle \xi | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle \leq \gamma |\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2 = \frac{\gamma}{\log 2} |\widehat{k}(0)|^2 = \frac{4\gamma}{\log 2} |\widehat{g}(0)|^2,$$

ce qui donne l'inégalité souhaitée. \square

Remarque 8¹⁰ : Par (36), la première valeur propre $\lambda_1(\mathbf{K}_I)$ de \mathbf{K}_I vérifie $|\lambda_1(\mathbf{K}_I) - \lambda_{\max}| \leq \epsilon_1$ alors que $\lambda_{\max} = 1.05158$ et $\epsilon_1 \simeq 0.00122$. Ainsi, puisque $C_c^\infty((-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2))$ est dense dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2([-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2])$, il existe un vecteur unitaire $\xi \in C_c^\infty((-\frac{1}{2}\log 2, \frac{1}{2}\log 2))$ tel que $\mathbf{K}_I(\xi) \sim \lambda_1(\mathbf{K}_I)\xi$. Il s'ensuit de cela, en utilisant $\mathbf{N}_I = -2\epsilon'(1_+)(\mathrm{Id} - \mathbf{K}_I)$, que

$$\langle \xi | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle \geq 2\epsilon'(1_+)(1.05 - 1)\|\xi\|^2 \geq 0.1\epsilon'(1_+)|\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2$$

Appelons alors $h(\rho) := \xi(\log \rho)$ et $g(\rho) := (\frac{1}{2} - \rho\partial_\rho)h(\rho)$, de telle manière que $g(\rho) = \eta(\log \rho)$ pour $\eta = \frac{1}{2}\xi - \xi'$. On a $\widehat{g}(-\frac{i}{2}) = 0$ et comme dans la preuve du théorème 9, on obtient

$$E(g * g^*) = E \circ Q(h * h^*) = \langle \xi | \mathbf{N}_I(\xi) \rangle \geq 0.1\epsilon'(1_+)|\langle \xi_0 | \xi \rangle|^2 > 13|\widehat{g}(0)|^2.$$

Ainsi, par (44), on obtient

$$W_\infty(g * g^*) = \mathrm{Tr}(\vartheta(g)\mathbf{S}\vartheta(g)^*) - E(g * g^*) < \mathrm{Tr}(\vartheta(g)\mathbf{S}\vartheta(g)^*) - 13|\widehat{g}(0)|^2.$$

Cela montre que la meilleure constante c vérifiant (43) est telle que $13 < c < 17$.

8. <https://arxiv.org/pdf/2006.13771.pdf>, p. 6.

9. <https://arxiv.org/pdf/2006.13771.pdf>, p. 18.

10. *Note de la rédactrice* : Peut-être à rapprocher de la constante κ_3 du théorème 3.3 égale à 14 de l'article de Aline Bonami et Abderrazek Karoui, *Bornes uniformes des fonctions d'ondes sphéroïdales et décroissance des valeurs propres*, C. R. A. S., Paris, Ser. 1, 352, 2014, p. 229-234

Appendice : Problèmes de convergence

Nous rassemblons quelques inégalités qui assurent la convergence de la série $T_n(\rho)$:

Pour $\rho > 1$, on a l'égalité

$$Q\epsilon(\rho) = \sum \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}} T_n(\rho), \quad (46)$$

où

$$T_n(\rho) = \rho^{1/2} \int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x) (D_u \zeta_n)(\rho x) dx + \rho^{-1/2} (D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1) - \rho^{1/2} \xi_n(1) (D_u \zeta_n)(\rho). \quad (47)$$

Nous considérons d'abord les termes

$$A_n(\rho) := \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}} \rho^{1/2} \int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x) (D_u \zeta_n)(\rho x) dx.$$

Nous estimons l'intégrale en utilisant l'inégalité de Schwarz

$$\left| \rho^{1/2} \int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x) (D_u \zeta_n)(\rho x) dx \right| \leq \left(\int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \zeta_n)(\rho x)^2 \rho dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a, en utilisant $D_u(f)(x) = x \partial_x f(x)$

$$\int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \zeta_n)(\rho x)^2 \rho dx = \int_1^\rho (D_u \zeta_n)(y)^2 dy \leq \rho^2 \int_1^\rho (\partial_y \zeta_n)(y)^2 dy.$$

Avec $\zeta_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}} \eta_n(x)$ et $\eta_n = F_{e_R} \xi_n$, on obtient donc

$$\int_1^\rho (\partial_y \zeta_n)^2(y) dy = \frac{1}{1-\lambda(n)^2} \int_1^\rho (\partial_y \eta_n)^2(y) dy \leq \frac{1}{1-\lambda(n)^2} (2\pi)^2,$$

puisque $\partial_y \eta_n$ est la transformée de Fourier de $2\pi i x \xi_n(x)$ dont la L^2 -norme est bornée par 2π . Nous obtenons ainsi

$$\left(\int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \zeta_n)^2(\rho x) \rho dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \rho \frac{2\pi}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}}.$$

Pour estimer $\int_{\rho^{-1}}^1 (D_u \xi_n)(x)^2 dx$, nous réécrivons l'égalité (48)

$$(\mathbf{W}\xi)(x) = -\partial((1-x^2)\partial)\xi(x) + (2\pi x)^2 \xi(x). \quad (48)$$

comme suit

$$(\mathbf{W}f)(x) = -(1-x^2)f''(x) + 2xf'(x) + 4\pi^2 x^2 f(x), \quad (49)$$

de telle façon que puisque ξ_n est un vecteur propre de \mathbf{W} (i.e. $\mathbf{W}\xi_n = \chi_{2n}^{2\pi} \xi_n$), en utilisant les notations de [7], on obtient

$$D_u(\xi_n)(x) = \frac{1}{2} (1-x^2) \xi_n''(x) + (\chi_{2n}^{2\pi} - 2\pi^2 x^2) \xi_n(x).$$

En supposant que $n \geq 3$ pour assurer que $\chi_{2n}^{2\pi} \geq 2\pi^2$, on déduit alors

$$\|D_u(\xi_n)\| \leq \chi_{2n}^{2\pi} + \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (\xi_n''(x))^2 (1-x^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Grâce à [7] (Théorème 3.6), on a, en remarquant la normalisation différente du produit intérieur due à

$$\langle \eta \mid \xi \rangle := \frac{1}{2} \int_R \overline{\eta(x)} \xi(x) dx = \int_0^\infty \overline{\eta(x)} \xi(x) dx, \quad (50)$$

$$\left(\int_0^1 (\xi_n''(x))^2 (1-x^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq (2n)^2 + (6\pi + 1)2n + 3(2\pi + 1)^2, \quad (51)$$

alors que les valeurs propres $\chi_{2n}^{2\pi}$ vérifient (voir *op.cit.*) : $\chi_{2n}^{2\pi} \leq 2n(2n + 1) + (2\pi)^2$. Ainsi, on obtient l'inégalité

$$\|D_u(\xi_n)\| \leq 8n^2 + (6\pi + 2)2n + 16\pi^2 + 12\pi + 1$$

et la borne uniforme suivante (prenons $\rho \leq 2$)

$$|A_n(\rho)| \leq \frac{\lambda(n)}{1 - \lambda(n)^2} 4\pi(8n^2 + (6\pi + 2)2n + 16\pi^2 + 12\pi + 1), \quad \forall \rho, 1 \leq \rho \leq 2. \quad (52)$$

Nous considérons alors les termes

$$B_n(\rho) := \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} \left(\rho^{-1/2} (D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1) - \rho^{1/2} \xi_n(1) (D_u \zeta_n)(\rho) \right).$$

Grâce à (53) (voir [Rokhlin], Théorème 12)

$$|\xi_n(1)| \leq \sqrt{2n + \frac{1}{2}}, \quad (53)$$

on a $|\xi_n(1)| \leq \sqrt{2n + \frac{1}{2}}$. On a également $\zeta_n = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} \eta_n$ et $\eta_n = F_{e_R} \xi_n$ donc

$$(D_u \zeta_n)(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} \rho \eta_n'(\rho) \implies |(D_u \zeta_n)(\rho)| \leq \frac{8\pi}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}}, \quad \forall \rho, 1 \leq \rho \leq 2$$

en utilisant l'égalité $\eta_n'(\rho) = -4\pi \int_0^1 \sin(2\pi\rho x) \xi_n(x) x dx$ et l'inégalité de Schwarz.

Par conséquent,

$$\frac{\lambda(n)}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} \left| \rho^{1/2} \xi_n(1) (D_u \zeta_n)(\rho) \right| \leq \frac{\lambda(n)}{1 - \lambda(n)^2} 8\pi \sqrt{2(2n + \frac{1}{2})}, \quad \forall \rho, 1 \leq \rho \leq 2.$$

Par

$$\mathcal{P}_1 \eta_n = \mathcal{P}_1 F_{e_R} \xi_n = \lambda(n) \xi_n, \quad (54)$$

on obtient : $\eta_n(x) = \lambda(n) \xi_n(x)$, car $x \in [0, 1]$ donc, on obtient par proportionnalité

$$(D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} (D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \eta_n(1) = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} (D_u \eta_n)(\rho^{-1}) \xi_n(1)$$

et la borne ci-dessus $\eta_n'(y) = -4\pi \int_0^1 \sin(2\pi y x) \xi_n(x) x dx$, appliquée pour $y = \rho^{-1}$ donne donc

$$|(D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1)| \leq \frac{4\pi}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} \sqrt{2n + \frac{1}{2}}$$

de telle manière que

$$\frac{\lambda(n)}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} \left| \rho^{-1/2} (D_u \xi_n)(\rho^{-1}) \zeta_n(1) \right| \leq \frac{\lambda(n)}{1 - \lambda(n)^2} 4\pi \sqrt{2n + \frac{1}{2}}, \quad \forall \rho, 1 \leq \rho \leq 2.$$

Les inégalités ci-dessus donnent alors

$$|B_n(\rho)| \leq \frac{\lambda(n)}{1 - \lambda(n)^2} (8\pi\sqrt{2} + 4\pi) \sqrt{2n + \frac{1}{2}}. \quad (55)$$

Nous obtenons donc le

Lemme 10. (i) La série (3) de l'appendice est convergente et le reste (après avoir remplacé la somme infinie par la somme des N premiers termes) est majoré comme suit

$$|Q\epsilon(\rho) - \sum_0^N \frac{\lambda(k)}{\sqrt{1 - \lambda(k)^2}} T_k(\rho)| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{2^{2n+2} \pi^{2n+\frac{3}{2}} p(n) ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})} \quad (56)$$

où $p(n) = 16n^2 + 8(1 + 3\pi)n + (4 + \sqrt{2})\sqrt{4n + 1} + 32\pi^2 + 24\pi + 2$.

(ii) Pour $N = 10$, le reste est inférieur à 2.366×10^{-12} pour tout $\rho \in [1, 2]$:

$$|Q\epsilon(\rho) - \sum_0^{10} \frac{\lambda(k)}{\sqrt{1 - \lambda(k)^2}} T_k(\rho)| \leq 2.366 \times 10^{-12}, \quad \forall \rho \in [1, 2]. \quad (57)$$

Démonstration :

(i) découle de (52) et (55) qui se combinent avec

$$|\lambda(n)| \leq \frac{2^{2n} \pi^{2n+\frac{1}{2}} ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})} \sim (4n + 1)^{-2n-\frac{1}{2}} (e\pi)^{2n+\frac{1}{2}}, \quad (58)$$

pour amener pour $n \geq 3$ à,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} T_n(\rho) \right| &\leq 2\lambda(n) (|A_n(\rho)| + |B_n(\rho)|) \\ &\leq \frac{2^{2n+2} \pi^{2n+\frac{3}{2}} (16n^2 + 8(1 + 3\pi)n + (4 + \sqrt{2})\sqrt{4n + 1} + 32\pi^2 + 24\pi + 2) ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})} \end{aligned}$$

ce qui donne (56).

(ii) Pour calculer la borne supérieure du côté droit de (56) pour $N = 10$, on sépare la somme en deux, en utilisant la simple estimation $p(n) \leq 120n^2$ pour $n \geq 35$:

$$\frac{2^{2n+2} \pi^{2n+\frac{3}{2}} p(n) ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})} \leq \frac{15 \cdot 2^{2n+4} n^2 \pi^{2n+\frac{1}{2}} ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})}, \quad \forall n \geq 35.$$

En appelant ν_n le côté droit de cette inégalité, on obtient la relation

$$\nu_{n+1}/\nu_n = \frac{8\pi^2(n+1)^3(2n+1)}{n^2(4n+1)(4n+3)^2(4n+5)} = \frac{\pi^2}{16n^2} + \frac{\pi^2}{32n^3} + O(n^{-4})$$

et $n^2\nu_{n+1}/\nu_n < 1$ pour tout $n \geq 35$. On a $\nu_{35} \leq 5 \times 10^{-81}$, et ainsi, en utilisant la borne triviale par la série géométrique, on obtient

$$\sum_{35}^{\infty} \nu_n \leq \frac{1225}{1224} \nu_{35} \leq 10^{-80}.$$

On calcule alors simplement les termes manquants et ils donnent

$$\sum_{11}^{34} \frac{2^{2n+2} \pi^{2n+\frac{3}{2}} p(n) ((2n)!)^2}{(4n)! \Gamma(2n + \frac{3}{2})} \sim 2.365 \times 10^{-12}$$

Ainsi en combinant les inégalités ci-dessus, nous obtenons (57). □

Remarque 9 : Pour compléter, nous donnons une courte preuve d’une forme améliorée de (51). Comme dans [7] (équation (3.26)), on a, en utilisant une intégration par parties, l’égalité, pour $f \in C^\infty([-1, 1], R)$, et $c = 2\pi$, en utilisant (48)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\mathbf{W}f)^2(x)dx &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 |f''(x)|^2 dx + 2 \int_{-1}^1 (1-x^2)(1+c^2x^2) |f'(x)|^2 dx + \\ &+ c^2 \int_{-1}^1 (c^2x^4 + 6x^2 - 2) |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

En appliquant cela à $f = \xi_n$ et en utilisant $\mathbf{W}\xi_n = \chi_{2n}^2 \xi_n$, on obtient

$$\int_{-1}^1 (\xi_n''(x))^2 (1-x^2)^2 dx \leq \int_{-1}^1 (\mathbf{W}\xi_n)^2(x) dx + 2c^2 \int_{-1}^1 \xi_n(x)^2 dx,$$

ce qui fournit l’amélioration suivante de (51)

$$\left(\int_0^1 (\xi_n''(x))^2 (1-x^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{(\chi_{2n}^2)^2 + 2c^2} \leq 2n(2n+1) + (2\pi)^2(1+\sqrt{2}).$$

□

Bibliographie

- [1] M. Bakonyi, H. Woerdeman, *Matrix completions, moments, and sums of Hermitian squares*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011.
- [2] A. Connes, *An essay on the Riemann Hypothesis*. Dans “Open problems in mathematics”, Springer (2016), volume édité par Michael Rassias et John Nash.
- [3] A. Connes, C. Consani, *Geometry of the Scaling Site*. Selecta Math. (N.S.) **23** (2017), n° 3, p. 1803–1850.
- [4] A. Connes, C. Consani, *The Riemann-Roch strategy, complex lift of the Scaling Site*, “Advances in Noncommutative Geometry, On the Occasion of Alain Connes’ 70th Birthday”, Chamseddine, A., Consani, C., Higson, N., Khalkhali, M., Moscovici, H., Yu, G. (Eds.), Springer (2020). Available at <http://arxiv.org/abs/1805.10501>. ISBN 978-3-030-29596-7.
- [5] A. Connes, W. van Suijlekom, *Spectral truncations in noncommutative geometry and operator systems*, arXiv :2004.14115.
- [6] B. Simon, *Trace ideals and their applications*. Seconde édition. Mathematical Surveys and Monographs, 120. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [7] L. L. Wang, *Analysis of spectral approximations using prolate spheroidal wave functions*, Math. of Comp. Volume **79**, Number 270, April 2010, p. 807–827.

Extrait d'un entretien entre Alain Connes, Cornelius Castoriadis et Katharina von Bulow

KATHARINA VON BULOW : Alain Connes, récipiendaire de la médaille Fields, a aussi passionné Cornelius Castoriadis, qui est toujours émerveillé par l'abondance du savoir qui peuple les grandes bibliothèques du monde.

CORNELIUS CASTORIADIS : j'ai, depuis mon adolescence, un énorme attrait pour les mathématiques, je ne suis pas mathématicien, je suis un amateur de 12e catégorie, et pour moi rencontrer un... je ne sais pas s'il faut dire un "grand" mathématicien, enfin, un mathématicien important de toute façon, c'est un peu comme pour quelqu'un qui s'émerveille devant, disons, la cathédrale de Chartres, et qui peut à peine l'inspecter, rencontrer l'un des constructeurs qui lui explique comment on a fait la cathédrale, pourquoi on a posé telle chose là, et cetera, qu'est-ce qui fait que l'édifice tient, et deuxièmement parce qu'en regardant, en lisant d'ailleurs très attentivement votre livre avec Changeux "Matière à penser", très joli titre d'ailleurs, avec les polysémies de ce titre, je me suis aperçu que, si j'ose dire, nous avons des positions très proches, pour ce qui est de l'essence des mathématiques, de ce que ça veut dire faire des mathématiques, de ce qui est présupposé, en quoi ça consiste, et finalement ce mystère de la rencontre possible et même à mes yeux, presque certaine, des constructions en mathématiques avec quelque chose que bien sûr nous redécouvrons, nous recréons, mais qui aussi nous contraint, comme une réalité objective, idéale certes, non pas matérialisée, mais avec une merveilleuse cohérence interne et une richesse et un déploiement extraordinaire.

Je voulais simplement dire une chose, c'est qu'on ne fait pas des mathématiques seulement avec son cerveau au sens trivial, je ne veux pas dire qu'on les fait avec les tripes. Mais enfin, la psyché humaine, l'âme...

ALAIN CONNES : Absolument.

CORNELIUS CASTORIADIS : ne peut *rien* faire s'il n'y a pas à la fois représentation, désir, et affect.

ALAIN CONNES : Absolument, bien sûr.

CORNELIUS CASTORIADIS : On fait des mathématiques parce qu'on désire faire des mathématiques, et parce que faire des mathématiques procure du plaisir.

ALAIN CONNES : Et aussi parce qu'on est attiré par un mystère, je veux dire c'est le pouvoir d'attraction du mystère.

CORNELIUS CASTORIADIS : Mais ça c'est du côté, disons des trois à la fois, n'est-ce pas, c'est la fascination qu'exerce la question du sens, précisément, bon, mais enfin, tout l'être humain est impliqué là-dedans. Et c'est aussi une raison pour laquelle je ne crois pas qu'une machine pourra jamais penser, je ne vois pas une machine se passionnant pour démontrer ne serait-ce que cette

Référence : https://www.youtube.com/watch?v=8dl_Jhmw1MA
Transcription en Latex : Denise Vella-Chemla, février 2025.

chose élémentaire, que les nombres premiers sont en nombre infini, leur liste ne se termine jamais.

ALAIN CONNES : Oui, alors effectivement, disons que je pense qu'on peut se poser la question, a priori, de savoir s'il existe justement des limites aux capacités, disons, éventuelles d'une machine. Et là, je pense que là où je placerais la limite, de manière assez précise d'une certaine manière, c'est la notion de... par exemple, lorsqu'on fait des mathématiques, de ce qui a un sens et de ce qui est intéressant, par opposition à ce qui n'a pas d'intérêt. Et d'une certaine manière, pour cela, trois niveaux, c'est-à-dire le premier niveau, qui est le niveau du calcul, donc sur lequel on est entièrement d'accord, le deuxième niveau qui est le niveau de la réflexion, et le troisième niveau qui est, d'une certaine manière, le niveau de l'accès à l'imaginaire, enfin, de l'imagination, et de l'accès à cette réalité mathématique indépendante de notre propre existence. Disons que c'est vraiment cette notion de sens, cette notion d'intérêt, qui est la plus difficile à formaliser, la plus difficile à définir de telle sorte qu'une machine puisse y avoir accès.

CORNELIUS CASTORIADIS : La différence avec la philosophie, c'est qu'en philosophie, nous n'avons pas des démonstrations rigoureuses, nous ne pouvons pas réduire ce que nous disons à un petit groupe d'axiomes dont on déduirait le reste ; on n'a pas de renvoi direct à l'expérience, on travaille, à mon avis, sous contrainte de l'expérience, c'est-à-dire la philosophie travaille sous contrainte de la totalité de l'expérience humaine, n'est-ce pas. Mais, on n'a pas, précisément, cette dureté qu'on a dans les mathématiques. C'est ce caractère cristallin, qui est le caractère des mathématiques, c'est l'énorme différence. Mais, le véritable travail de la réflexion est indissociable de la création imaginative, en ce sens que, pendant ce travail, on peut faire surgir, n'est-ce pas, même des critères, ou autre chose, qui n'étaient pas donnés d'avance.

KATHARINA VON BULOW : Ce qu'il m'intéresserait de savoir, c'est, si on ramène à l'expérience humaine et à la philosophie, par exemple, à la recherche, donc, d'un sens et d'une éthique, ce que vous venez de dire sur les mathématiques, on pourrait poser la question suivante : "est-ce que le monde qui est matière, le corps qui est matière, contient biologiquement, physiquement, un esprit, qui peut exploiter, à son insu, l'infini variété des possibilités infinies des mathématiques, de la biologie, d'autres sciences, des sciences humaines, par exemple, la philosophie, par exemple, mais que tout est déjà là, et en fait, il ne fait que répéter depuis toujours, la même recherche, sans jamais aboutir. C'est une question un peu provocatrice mais..."

CORNELIUS CASTORIADIS : Bon, non, bien sûr une thèse *matérialiste* cohérente, ou une thèse *rationaliste* cohérente, ou une thèse *déterministe* cohérente, devrait affirmer que tout était déjà là, non seulement dans le cerveau humain, mais dans le moment du Big Bang c'est-à-dire que la possibilité des théorèmes, pas la possibilité, virtuellement, les théorèmes mathématiques étaient là, mais aussi la Passion selon Saint-Matthieu de Bach était là et l'Olympia de Manet étaient là, *virtuellement*. Or cette thèse, en un sens, est irréfutable. Mais en même temps, c'est ce que Platon aurait appelé un "océan de bavardage", ça ne veut rien dire.

ALAIN CONNES : Je crois que là on touche un point essentiel, parce que vous avez parlé de cette *présence* ; en fait, on touche point essentiel qui est le problème du temps. Une des raisons pour laquelle la thèse matérialiste est aussi virulente, si vous voulez, c'est à cause du darwinisme, c'est-à-dire que c'est finalement ce pouvoir explicatif, soi-disant explicatif, du darwinisme. Et alors, je

pense que, si vous voulez, il y a là une énorme illusion parce qu'on touche à un problème essentiel, qui est le problème du temps. C'est-à-dire que le pouvoir explicatif du darwinisme n'existe, que pour autant que l'on comprenne le passage du temps. Et je pense qu'on ne peut pas discuter de ces questions-là sans, en même temps, revenir à ce qui, pour moi, est une question essentielle, et qui est cette question de ce qu'est le temps. En physique, bien sûr, on peut avoir l'illusion, en donnant un modèle de ce qu'on appelle l'espace-temps, que l'on conçoit ce qu'est le temps et que l'on conçoit ce qu'est le temps parce que le temps est une coordonnée, si vous voulez, dans ce qu'on appelle l'espace-temps ; mais en fait, il y a là une illusion totale au sens où la physique n'explique pas, et ne dit jamais pourquoi le temps passe, c'est-à-dire pourquoi le temps coule, si vous voulez ; c'est une coordonnée, mais les coordonnées d'espace ne coulent pas ; le temps coule, d'accord... bon. Et tant qu'on n'aura pas réfléchi, de manière suffisamment précise, sur cet écoulement du temps, l'explication darwinienne sera un cercle vicieux, si vous voulez. Pourquoi ? Parce que l'explication darwinienne ne fait qu'expliquer quelque chose par l'écoulement du temps, par le passage du temps. Pour essayer de situer mon point de vue par rapport à ce problème-là, à comprendre un petit peu les relations, si vous voulez, entre le monde physique, le monde matériel, et cetera, et cet accès à l'infini, cette espèce de transcendance, si vous voulez, où bon, d'un certain côté, ce qui fait l'espèce d'originalité de l'âme humaine par rapport à, justement, à la matière, à la machine et cetera, j'avoue que j'ai un point de vue assez radical, qui consiste à dire, si vous voulez, que justement, je ne me fie qu'aux choses qui existent indépendamment du temps. Et que pour moi, j'attribue à la réalité mathématique, justement, cette indépendance, cette atemporalité, qui permet d'assurer son existence indépendamment de notre compréhension de l'écoulement du temps. Et j'en fais, si vous voulez, la pierre, vraiment, de construction de ma conception de la réalité. Et en admettant que cette construction ait été faite, c'est-à-dire que l'on ait la sécurité de ce que j'appelle cette réalité mathématique, à ce moment-là se pose la question de comprendre comment s'insère à l'intérieur de cette réalité, l'univers que l'on connaît, c'est-à-dire le Big Bang, et cetera, et justement, cette temporalité qui nous caractérise, et qui caractérise en fait l'univers physique, c'est-à-dire l'univers dans lequel on vit.

Et en fait, j'ai abouti plus ou moins en discutant avec des physiciens et cetera, à la conclusion qu'en fait, l'origine du temps, l'origine de l'écoulement du temps, n'avait rien à voir avec une coordonnée dans l'espace-temps, n'avait rien à voir avec justement ce modèle un peu naïf que l'on a de l'espace-temps et de la physique, mais en fait avait à voir avec la thermodynamique, c'est-à-dire, si vous voulez, pour dire les choses de manière paradoxale, de manière provocante, je dirais que si le temps passe, c'est parce que nous baignons dans la radiation à 3° Kelvin, cette radiation qui est formée de photons, et cetera, et qui provient du Big Bang ; c'est-à-dire que pour moi, si vous voulez, l'origine non pas du temps mais de l'écoulement du temps, c'est parce que justement nous sommes incapables de connaître les distributions microscopiques de ce qui se passe dans l'univers qui nous entoure, et parce que ce manque d'information, cette espèce de perception macroscopique qu'on en a, fait que, graduellement, notre corps est détruit, notre précision génétique s'érode, et que finalement la seule manière que nous ayons de lutter contre cela, c'est cette espèce de phénomène discret, si vous voulez, qui est la transmission de la vie, qui fait que l'on arrive à transmettre à d'autres générations cette espèce de Bible qui est contenue dans notre information génétique, si vous voulez, et qui elle, du fait qu'elle est discrète, du fait qu'elle est rigide, si vous voulez, sera très difficile à détériorer et pourra, au contraire, prospérer et se battre, si vous voulez, contre le passage du temps, et contre cet écoulement auquel nous ne pouvons rien. Parce que, si vous voulez, c'est un

écoulement qui est dû à la destruction, qui est dû à la friction, et qui est dû au fait que justement, jamais, nous n'arriverons à connaître, justement, tous les détails de ce monde microscopique qui nous entoure.

KATHARINA VON BULOW : Je voudrais revenir à autre chose, qui est lié à ce que vous venez de dire : si on lit attentivement les pages absolument superbes de Saint-Augustin sur le temps, ou de tout autre philosophe, on constate, du moins, moi j'ai constaté, qu'en fait, ce qui leur fait le plus peur, c'est le temps, bien sûr, le temps qui s'écoule, et vous l'avez expliqué d'une manière tout à fait probante, c'est la mort, c'est-à-dire la détérioration, c'est l'oubli, le fait qu'on meurt, etc. Alors il y a le Christianisme, qui a introduit, très astucieusement, par l'intermédiaire de Saint-Paul et du Christ, un arrêt du temps, un rachat du temps, en faisant que le temps soit, de toute éternité, déjà arrivé, et déjà racheté, quel que soit l'individu qui naît ; il est donc comme dans une sorte de corbeille, où le Christ le reçoit comme un phénomène déjà là, mais qui montera au ciel quelle que soit sa trajectoire. Et vous avez parlé d'éternité, et de l'infini, alors ma question sera très précise : les sciences, surtout les mathématiques, est-ce que ce n'est pas un langage justement qui, à la fois, ouvre à l'infini, et en même temps, laisse des traces telles, que l'homme puisse s'imaginer qu'il est éternel par...

ALAIN CONNES : Non, non, si vous voulez, voilà la différence, c'est la suivante : tout en sachant très bien qu'on n'est pas éternel, quelle est la difficulté ? La difficulté, c'est que cet écoulement du temps, si vous voulez, nous empêche de concevoir notre être, en tant qu'indépendant du temps.

CORNELIUS CASTORIADIS : Oui mais c'est tout à fait juste. On peut remarquer par rapport à ce que dit Catherine que précisément, le Christianisme, et d'ailleurs, la plupart des religions, presque toutes, ont inventé ce truc merveilleux pour répondre à cette angoisse : il y a une éternité quelque part ailleurs, et à cette éternité nous participerons personnellement. Et il y a un infini, qui n'est pas seulement un infini comme le nombre infini d'infinis qu'il y a dans les mathématiques, mais qui est une personne, qui est bonne, qui nous aime, et cetera, et cetera, et c'est ça le grand hameçon, avec lequel on a attelé, et on continue d'atteler, l'humanité, à cela. Mais d'abord, une autre remarque là-dessus, c'est que cette expérience, je suis tout à fait d'accord, on l'a quand on voit l'éternité des... enfin, l'intemporalité des mathématiques, mais on la voit aussi dans d'autres domaines, c'est-à-dire encore une fois la Passion selon Saint Matthieu a été créée à une date donnée à Leipzig, par un individu qui était comme ça, qui avait 20 gosses, et tout le reste, tout ça, c'est totalement immatériel, par rapport au sens et au contenu musical de la Passion selon Saint Matthieu, c'est-à-dire, l'Homme crée, et a accès à un monde d'idéalité, n'est-ce pas, de l'imperceptible, mais qui est quand même immanent, c'est-à-dire qu'il arrive à le faire entrer dans son propre monde, même si peut-être, il a un au-delà et dont les mathématiques sont une manifestation excellente, mais dont aussi l'art, par exemple, ou même la grande pensée, est aussi une manifestation, n'est-ce pas.

Essayer de comprendre deux théorèmes, une proposition et deux lemmes de l'article de Connes-Consani de juin 2020 [2].

Théorème 3. La fonctionnelle $\text{Tr}(\vartheta(f)\mathbf{S})$ est positive et on a

$$\text{Tr}(\vartheta(f)\mathbf{S}) = W_\infty(f) + \int f(\rho)\epsilon(\rho)d^*\rho, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*), \quad (1)$$

où $\epsilon\left(\frac{1}{\rho}\right) = \epsilon(\rho)$, $d^*\rho = \frac{d\rho}{\rho}$, $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, et avec $\epsilon(\rho)$ donné, pour $\rho \geq 1$, par

$$\epsilon(\rho) = \sum \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}} \langle \xi_n | \vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right) \zeta_n \rangle. \quad (2)$$

Il est dit plus haut dans l'article que la définition de $\lambda(n)$ est à trouver dans la référence de Wang [6] : les $\lambda(n)$ sont les valeurs propres de l'opérateur suivant : fixons $c = 2\pi$. L'opérateur est défini par

$$F_{2\pi}[\phi](x) = \int_{-1}^1 e^{2i\pi xt} \phi(t) dt \quad \text{avec } x \in (-1, 1).$$

Il s'agit d'utiliser des fonctions d'onde sphéroïdales prolate (en anglais Prolate Wave Spheroidal Functions ou PSWF), dont l'ensemble est noté

$$\{\psi_n^{2\pi}(x)\}_{n=0}^\infty$$

parce que ce sont des fonctions toutes réelles, lisses et qu'elles forment un système orthonormé complet dans $L^2(I)$ (note : à la place de 2π , on peut prendre n'importe quelle constante $c > 0$).

Voici comment on note l'orthonormalité :

$$\int_{-1}^1 \psi_n^{2\pi}(x) \psi_m^{2\pi}(x) dx = \delta_{mn}$$

δ_{mn} dénotant le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $m = n$ et 0 sinon.

La définition de $W_\infty(f)$ est :

$$W_\infty(f) = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\widehat{f}u^* \widehat{d}u) \quad (3)$$

où \widehat{f} est la transformée de Fourier d'une fonction-test f , $u = u_\infty$ est l'unitaire habituellement associé à la transformée de Fourier composée avec l'inversion et $\widehat{d}u$ est la différentielle quantifiée de u (voir thèse de Tate [5] et appendices).

Proposition 4.5.

(i) Appelons $\xi_n = \mathcal{P}_1 \phi_n / \|\mathcal{P}_1 \phi_n\|$, $\eta_n = \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} \xi_n$ et $\psi_n = P\eta_n$. On a

$$\mathcal{P}_1 \eta_n = \mathcal{P}_1 \mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} \xi_n = \lambda(n) \xi_n. \quad (4)$$

(ii) Pour $\rho \geq 1$

$$\delta(\rho) = \text{Tr} \left(\vartheta \left(\frac{1}{\rho} \right) \widehat{\mathcal{P}}_1 \mathcal{P}_1 \right) = \sum_n \left(\lambda(n)^2 \langle \xi_n | \vartheta \left(\frac{1}{\rho} \right) \xi_n \rangle + \lambda(n) \langle \xi_n | \vartheta \left(\frac{1}{\rho} \right) \psi_n \rangle \right) \quad (5)$$

(iii) Les fonctions $\psi_n = P\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} \xi_n$ sont à valeurs réelles, deux à deux orthogonales, et : $\|\psi_n\| = \sqrt{1-\lambda(n)^2}$,

$$\sum \lambda(n)^2 |\zeta_n \rangle \langle \zeta_n| \leq P\widehat{P}P, \quad \zeta_n = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}} \psi_n \quad (6)$$

(iv) Soit $\tau(n) := \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1-\lambda(n)^2}}$, on a

$$\langle \xi_n | \vartheta \left(\frac{1}{\rho} \right) \xi_n \rangle = \langle \zeta_n | \vartheta \left(\frac{1}{\rho} \right) \zeta_n \rangle + \tau(n) \langle \xi_n | \vartheta \left(\frac{1}{\rho} \right) \zeta_n \rangle + \langle \zeta_n | \vartheta \left(\frac{1}{\rho} \right) \xi_n \rangle. \quad (7)$$

Théorème 4.7. Soit \mathbf{S} la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ sur le sous-espace fermé $S(1, 1)$. La fonctionnelle suivante est positive

$$\text{Tr}(\vartheta(f)\mathbf{S}) = W_\infty(f) + \int f \left(\frac{1}{\rho}\right) \epsilon(\rho) d^* \rho, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*), \quad (8)$$

où W_∞ est définie par

$$W_\infty = - \int f \left(\frac{1}{\rho}\right) \tau(\rho) d^* \rho,$$

$\epsilon(\rho)$ est la fonction de $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, avec $\epsilon\left(\frac{1}{\rho}\right) = \epsilon(\rho)$, qui est donné, pour $\rho \geq 1$, par

$$\epsilon(\rho) = \sum \frac{\lambda(n)}{\sqrt{1 - \lambda(n)^2}} \langle \xi_n \mid \vartheta\left(\frac{1}{\rho}\right) \zeta_n \rangle. \quad (9)$$

Lemme 5.1. Soient $\xi, \eta \in L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ des fonctions lisses.

Alors avec Q défini par $Q(g) := \left(-(\rho\partial_\rho)^2 + \frac{1}{4}\right)g = f$ et $\mathcal{D} := D_u^2 + D_u$, on a

$$\langle \eta \mid \vartheta(Qf)\xi \rangle = -\langle \eta \mid \vartheta(f)\mathcal{D}\xi \rangle, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*). \quad (10)$$

Lemme 5.2. Soit $\xi \in C^\infty((0, 1])$ et $\zeta \in C^\infty([1, \infty))$ des fonctions lisses et à valeurs réelles.

Prolongeons d'abord ξ, ζ à $[0, \infty)$ comme suit : $\xi(x) := 0$ pour $x > 1$ et $\zeta(x) := 0$ pour $x < 1$.

Alors, avec Q toujours définie de la même façon par $Q(g) := \left(-(\rho\partial_\rho)^2 + \frac{1}{4}\right)g = f$ et $k(\rho) = \sqrt{\rho} \int_0^\infty \xi(x)\zeta(\rho x)dx$, pour $\rho \in (1, 2]$, on a

$$(Qk)(\rho) = \sqrt{\rho} \int_{1/\rho}^1 (D_u\xi)(x)(D_u\zeta)(\rho x)dx + \frac{1}{\sqrt{\rho}}(D_u\xi)\left(\frac{1}{\rho}\right)\zeta(1) - \sqrt{\rho}\xi(1)(D_u\zeta)(\rho). \quad (11)$$

Appendice 1 : résumé de calcul quantifié

Soit C un groupe abélien localement compact doté de l'homomorphisme (propre ?)

$$\text{Mod} : C \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad \text{Mod}(u) = |u| \quad u \in C.$$

On note \widehat{C} le dual de Pontrjagin de C doté de sa mesure de Haar.

Les éléments $f \in L^\infty(\widehat{C})$ agissent comme des opérateurs multiplicatifs sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2(\widehat{C})$.

On définit la différentielle "quantifiée" de f comme étant l'opérateur

$$\tilde{d}f := [H, f] = Hf - fH, \quad (12)$$

où l'opérateur H sur \mathcal{H} est

$$H := 2\mathbb{F}_C \mathbf{1}_P \mathbb{F}_C^{-1} - 1, \quad (13)$$

où $\mathbb{F}_C : L^2(C) \rightarrow \mathcal{H}$ est la transformée de Fourier, et $\mathbf{1}_P$ est la multiplication par la fonction caractéristique de l'ensemble $P = \{u \in C \text{ de module } |u| \geq 1\}$.

Prenons le cas $C = \mathbb{R}$ avec le module $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ considéré dans cet article et identifions le dual $\widehat{C} \sim \mathbb{R}$ en utilisant le bi-caractère $\nu(s, t) := e^{-ist}$ qui correspond à l'équation $\mu(v, s) = v^{-is}$, $\forall v \in \mathbb{R}_+^*, s \in \mathbb{R}$. sous l'isomorphisme donné par le module. Nous donnons une preuve "géométrique" du lemme suivant (voir le livre d'Alain Connes [1], Chapitre IV pour la théorie générale, un opérateur compact est d'ordre infini quand ses valeurs caractéristiques forment une suite de décroissance rapide ; cela implique qu'il est de classe trace).

Lemme 1. *Pour $f \in \mathcal{S}(\widehat{C})$, la différentielle quantifiée $[H, f]$ est un infinitésimal d'ordre infini et en particulier est un opérateur de classe trace.*

Appendice 2 : Signes et normalisations

Nous suivons la thèse de Tate [5] et utilisons la formule classique exprimant la transformation de Fourier comme une composition de l'inversion

$$I(f)(s) := f(s^{-1}) \quad (14)$$

et de l'opérateur multiplicatif de convolution.

Dans notre modèle, l'unitaire u est donné par le ratio des facteurs locaux archimédiens sur la droite critique

$$u(s) = \frac{\pi^{-z/2}\Gamma(z/2)}{\pi^{-(1-z)/2}\Gamma((1-z)/2)}, \quad z = 1/2 + is. \quad (15)$$

En fonction de la fonction angulaire de Riemann-Siegel définie par $\theta(E) = -\frac{E}{2} \log \pi + \Im \log \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{E}{2}\right)$, on a

$$u(s) = e^{2i\theta(s)}, \quad (16)$$

de telle façon que la fonction $Z(t) := e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ est à valeurs réelles. En effet, cela découle de l'équation fonctionnelle puisque la fonction de zeta $\zeta_{\mathbb{Q}}(z) := \pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z)$ est de valeur réelle sur la droite critique.

La différentielle quantifiée $\tilde{d}f$ de f est donnée par le noyau

$$k(s, t) = \frac{i}{\pi} \frac{f(s) - f(t)}{s - t}. \quad (17)$$

Par conséquent, quand on prend la dérivée logarithmique de u , on obtient sur la diagonale

$$u^* \tilde{d}u(s) = e^{-2i\theta(s)} \frac{i}{\pi} \partial_s e^{2i\theta(s)} = -\frac{2}{\pi} \partial_s \theta(s) \implies \frac{1}{2} u^* \tilde{d}u(s) = \frac{-2\partial_s \theta(s)}{2\pi}. \quad (18)$$

Donc on peut écrire

$$\mathrm{Tr}(\hat{h}_1 \left(\frac{1}{2} u^{-1} \tilde{d}u \right) \hat{h}_2) = - \int \hat{h}_1(t) \hat{h}_2(t) \frac{2\partial_t \theta(t)}{2\pi} dt. \quad (19)$$

Cela correspond à l'équation qu'on peut lire dans [3] et [4] $\mathcal{W}_{\infty}(f) = \int_{w=1/2+i\tau} h_+(\tau) \tilde{f}(w) \frac{d\tau}{2\pi}$ (qui contient une transformée de Mellin) puisque $\mathcal{W}_{\mathbb{R}} = -\mathcal{W}_{\infty}$ et à la formule de trace semi-locale

$$\mathrm{Tr}(\hat{h}_1 \left(\frac{1}{2} u^{-1} \tilde{d}u \right) \hat{h}_2) = \sum_{v \in S} \int_{\mathbb{Q}_v^*}' \frac{|w|^{1/2}}{|1-w|} h(w) d^*w, \quad h = h_1 * h_2, \quad (20)$$

pour l'unique place archimédienne.

Références

- [1] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.
- [2] A. Connes, C. Consani, *Weil positivity and Trace formula, the archimedean place*, <https://arxiv.org/abs/2006.13771>.
- [3] E. Bombieri, *The Riemann hypothesis*. The millennium prize problems, 107–124, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006.
- [4] J. F. Burnol, *Sur les espaces de Sonine associés par de Branges à la transformation de Fourier*. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 689–692.

[5] J. Tate, *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-function*, Ph.D. Thesis, Princeton, 1950. Reprinted in J.W.S. Cassels and A. Frölich (Eds.) "Algebraic Number Theory", Academic Press, 1967.

[6] L. L. Wang, *Analysis of spectral approximations using prolate spheroidal wave functions*, Math. of Comp. Volume **79**, Number 270, April 2010, Pages 807–827.

Le



Théorie de l'indice, théorie du potentiel, et hypothèse de Riemann

Shai Haran

Département de mathématiques théoriques,
Institut de science Weizmann,
Rehovot 76100,
Israël

Dans ce survol, nous souhaiterions broser à touches de pinceaux expressionnistes, notre pressentiment concernant le problème de hypothèse de Riemann. Langlands l'a très bien dit [38] :

“... J'ai essayé de décrire les choses comme elles pourraient être et, à ce qu'il me semble à présent, comme elles sont vraisemblablement. Elles pourraient être autrement. Toutefois, il est utile d'avoir une conception de l'ensemble à laquelle on puisse se référer pendant le travail quotidien d'arrache-pied avec les difficultés techniques, sous la condition que l'on ne devienne pas trop attaché à elles. J'ai simplement fusionné mes propres observations et réflexions avec les idées des autres et avec les principes habituellement acceptés.”

Commençons par rappeler les analogies bien connues entre les corps de nombres et les corps de fonctions. Pour les corps de fonctions, l'hypothèse de Riemann a été résolue par Weil, sur un corps fini [49], et par Selberg, sur les nombres complexes [43]. La plupart des tentatives jusqu'à ce jour de prouver l'hypothèse de Riemann pour les corps de nombres suivent la vieille suggestion d'Hilbert : trouver un opérateur A , agissant sur un espace de Hilbert tel que $\langle Ax, y \rangle + \langle x, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, et tel que $i(\frac{1}{2} - A)$ est auto-adjoint, et identifier ses valeurs propres avec les zéros de la fonction zeta. Cette approche a reçu un examen minutieux [22 ; 25], particulièrement après le succès de la théorie de Selberg où un tel opérateur, le Laplacien, existe effectivement.

Un tel opérateur existe dans le contexte de la théorie de Weil, notamment l'opérateur de Frobenius agissant sur la cohomologie ℓ -adique (ou de façon équivalente, les points de torsion de la ℓ -ième puissance du Jacobien), mais une telle réalisation existe seulement sur \mathbb{Q}_ℓ , $\ell \neq p, \infty$, un fait qui fait allusion aux difficultés de cette approche pour les corps de nombres.

Revoyons la preuve centrale de l'hypothèse de Riemann pour une courbe C sur un corps fini F_p , comme elle a été élucidée dans [23 ; 40]. Étant donnée une fonction $f : p^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}$ de support fini, nous lui associons sa transformée de Mellin $\hat{f}(s) = \sum_n f(p^n) \cdot p^{ns}$, $s \in \mathbb{C}$, et un diviseur $\hat{f}(A) = \sum_n f(p^n) \cdot A^n$ sur la surface $C \times C$, où A^n sont les correspondances de Frobenius données par $A^n = \{(x, x^{p^n})\}$, $A^{-n} = p^{-n} \cdot (A^n)^*$, $n \geq 0$; * dénotant l'involution $(x, y)^* = (y, x)$. Sur la surface $C \times C$, nous avons la théorie de l'intersection qui est donnée explicitement pour nos diviseurs par :

$$(i) \quad \langle \hat{f}(A), \hat{g}(A) \rangle = \langle (f * g^*)^\wedge(A), \text{Diag} \rangle$$

référence de l'article : *L-functions and arithmetic*, Durham 1989, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 153, 257-270, Cambridge University Press, 1991.

où $g^*(p^n) = g(p^{-n}) \cdot p^{-n}$, (ainsi $(g^*)^\wedge(s) = \hat{g}(1-s)$) et $f * g(p^n) = \sum_m f(p^m) \cdot g(p^{n-m})$ (ainsi $(f * g^*)^\wedge(s) = \hat{f}(s) \cdot \hat{g}(s)$); i.e., la connaissance des nombres d'intersections se réduit à celles avec la diagonale $\text{Diag} = A^0$.

$$(ii) \quad \langle \hat{f}(A), \text{Diag} \rangle = \hat{f}(0) + \hat{f}(1) - \sum_{\zeta(s)=0} \hat{f}(s)$$

où la somme est étendue sur les zéros de la fonction zeta $\zeta(s)$ de C .

Dénotons par $h^0(f) = \dim_{F_p} H^0(C \times C, \mathcal{O}(\hat{f}(A)))$ la dimension de l'espace des sections globales du fibré en droites $\mathcal{O}(\hat{f}(A))$, on a :

l'inégalité de Riemann-Roch

$$h^0(f) + h^0(\omega - f) \geq \frac{1}{2} \langle \hat{f}(A), \hat{f}(A) - \omega \rangle$$

où ω est un diviseur canonique sur $C \times C$ auquel on peut penser comme à la distribution sur $p^{\mathbb{Z}}$ donnée par $\langle \omega, f \rangle = (2g_c - 2)(\hat{f}(0) + \hat{f}(1))$.

$$\text{la monotonie} \quad h^0(f) > 0 = h^0(f + g) \geq h^0(g).$$

$$\text{l'amplitude} \quad \langle \omega, f \rangle = 0 \implies h^0(m.f) \text{ est borné indépendamment de } m \in \mathbb{Z}.$$

Étant données les trois propriétés ci-dessus, il est possible de dériver

l'inégalité fondamentale $\hat{f}(0) \cdot \hat{f}(1) \geq \frac{1}{2} \langle \hat{f}(A), \hat{f}(A) \rangle$ ou de façon équivalente en utilisant (i), (ii) :

$$\sum_{\zeta(s)=0} \hat{f}(s) \cdot \hat{f}(1-s) \geq 0$$

dont on montre facilement que cela équivaut à l'hypothèse de Riemann :

$$\zeta(s) = 0 \implies \text{Re } s = \frac{1}{2}$$

En retournant aux corps de nombres, et pour des raisons de simplicité, considérons seulement le cas des nombres rationnels, \mathbb{Q} , dénotons par $\zeta(s) = \prod_{p \leq \infty} \zeta_p(s)$, $\text{Re } s > 1$, la fonction zeta de Riemann classique (complétée à l' ∞); $\zeta_p(s) = (1 - p^{-s})^{-1}$ pour $p < \infty$, $\zeta_\infty(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})$.

La relation exacte entre les zéros de $\zeta(s)$ et la distribution des nombres premiers était connue de Riemann, mais c'est Weil qui l'a "cristallisée" dans ses sommes explicites [50; 51].

Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ lisse et à support compact, nous lui associons sa transformée de Mellin $\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(x) x^s \frac{dx}{x}$, et nous avons par l'équation fonctionnelle $\zeta(s) = \zeta(1-s)$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) + \hat{f}(1) - \sum_{\zeta(s)=0} \hat{f}(s) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint \hat{f}(s) d \log \zeta(s) \\ &= \sum_{p \leq \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \hat{f}(s) d \log \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{p \leq \infty} W_p(f) \stackrel{\text{def}}{=} W(f). \end{aligned}$$

En utilisant l'inversion de Mellin, il est facile de voir que [26] :

$$W_p(f) = \log p \cdot \sum_{n \neq 0} f(p^n) \cdot \min(1, p^n) \quad \text{pour } p < \infty,$$

$$W_\infty(f) = (\gamma + \log \pi)f(1) + \int_0^1 \frac{f(x) - xf(1)}{1 - x^2} dx + \int_1^\infty \frac{x^2 f(x) - f(1)}{x^2 - 1} \frac{dx}{x}.$$

Et à nouveau, comme noté par Weil [50], en posant $f^*(x) = f(x^{-1}) \cdot x^{-1}$,

l'inégalité fondamentale $\hat{f}(0) \cdot \hat{f}(1) \geq \frac{1}{2} W(f * f^*)$ ou de façon équivalente :

$$\sum_{\zeta(s)=0} \hat{f}(s) \cdot \hat{f}(1-s) \geq 0$$

peut facilement être démontrée comme étant équivalente à l'hypothèse de Riemann.

Il ne sera pas exagéré de dire que le plus grand mystère de l'arithmétique est le simple fait que $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$, ou, de façon équivalente que du point de vue de la géométrie algébrique, $\text{spec } \mathbb{Z} \times \text{spec } \mathbb{Z} \simeq \text{spec } \mathbb{Z}$, i.e. la surface se réduit à la diagonale ! Pourtant, si l'on prend deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ lisses et à support compact, que l'on considère comme représentant les diviseurs de Frobenius sur la surface non-existante, nous pouvons définir leur nombre d'intersections : $\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} W(f * g^*)$, et à nouveau, en associant à une telle fonction f , un nombre réel $h^0(f) \geq 0$ vérifiant les trois propriétés ci-dessus amènera à la solution de l'hypothèse de Riemann. Donc notre point principal est : un Riemann-Roch à deux dimensions pour $\text{spec } \mathbb{Z}$ pourrait très bien exister !

Revoyons brièvement la preuve du théorème classique de Riemann-Roch, i.e. sur \mathbb{C} , d'une manière légèrement biaisée [2 ; 7 ; 24 ; 44]. Étant donné une variété compacte riemannienne X , et un opérateur de Dirac $D : E_+ \rightarrow E_-$, agissant sur la section de deux fibrés vectoriels E_\pm sur X , dénotons par $\Delta_+ = D^*D$, $\Delta_- = DD^*$ les Laplaciens associés, et considérons $R_\pm^\alpha = \Delta_\pm^{-\alpha}$ comme des opérateurs sur $L^2(E_\pm)$. Un fait de base est la super-symétrie : $\text{tr}(R_+^\alpha) - \text{tr}(R_-^\alpha)$ est indépendant de $\alpha > \dim X$; en fait, R_\pm^α a un spectre discret et les valeurs propres non nulles de R_+^α et R_-^α sont de mêmes multiplicités incluantes. En faisant tendre $\alpha \rightarrow \infty$, R_\pm^α converge vers les projections sur les noyaux de Δ_\pm , par conséquent

$$\text{tr}(R_+^\alpha) - \text{tr}(R_-^\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \dim \ker D - \dim \ker D^* = \text{index } D.$$

D'un autre côté, pour $\text{Re } \alpha > \dim X$, les R_\pm^α sont donnés par les noyaux continus, $R_\pm^\alpha(x, y)$, qui ont des prolongements méromorphes à tous les α , par conséquent en faisant tendre $\alpha \rightarrow 0$, nous obtenons :

$$\text{tr}(R_+^\alpha) - \text{tr}(R_-^\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \int_X Pf_{\alpha=0}(R_+^\alpha(x, x) - R_-^\alpha(x, x)) dx.$$

En mettant ces choses ensemble, et en évaluant explicitement le dernier intégrande, on obtient le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer. Pour la catégorie particulière des variétés kahleriennes, et l'opérateur $\bar{\partial}$, on obtient le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch. En remplaçant les opérateurs bornés dans un espace de Hilbert par un facteur II_∞ , Atiyah [1] a démontré un théorème de l'indice à valeur réelle pour X non-compacte, duquel une foule de théorèmes ont surgi [4 ; 13 ; 33-36].

Le théorème de l'indice relie l'information globale (la limite $\alpha \rightarrow \infty$) à l'information locale (la limite $\alpha \rightarrow 0$) et on est habituellement confronté au fait que la détermination précise de ce dernier, i.e., de $Pf_{\alpha=0}(R_+^\alpha(x, x) - R_-^\alpha(x, x))$, est l'étape la plus profonde qui inclut le passage vers un nouvel

espace géométrique, X' , l'espace cotangent à X . Un soupçon de ce que X' pourrait être dans le réglage arithmétique est gagné par une inspection de la preuve de la K -moyennabilité de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ [31 ; 32] que nous décrirons prochainement (de façon biaisée). Dénotons par $X_p = SL_2(\mathbb{Q}_p)/SL_2(\mathbb{Z}_p)$ le plan hyperbolique p -adique, c'est un arbre $(p+1)$ -régulier, et dénotons par $d(x, y)$ la mesure naturelle $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ -invariante. En agissant sur les fonctions sur X_p , nous avons l'opérateur de Hecke, $T_p f(y) = \sum_{d(x,y)=1} f(x)$, et le générateur infinitésimal de parcours au hasard sur X_p , le Laplacien $\Delta_p = \frac{\zeta_p(2)}{\zeta_p(1)} T_p - 1$, dont l'opérateur potentiel associé est donné par le noyau $\Delta_p^{-1} = \zeta_p(1) \cdot p^{-d(x,y)}$, [10 ; 11]. La fonction $d(x, y)$ est définie négative, par conséquent pour chaque $\alpha > 0$, nous avons un opérateur auto-adjoint positif sur $L^2(X_p)$ donné par le noyau $R_p^\alpha = p^{-\alpha d(x,y)}$ et l'espace de Hilbert associé $H^\alpha = \{f : X_p \rightarrow \mathbb{C} \mid (f, R_p^\alpha f)_{L^2(X_p)} < \infty\}$.

En posant $\alpha \rightarrow \infty$, nous obtenons $H^\infty = L^2(X_p)$.

D'un autre côté, en posant $\alpha \rightarrow 0$, nous obtenons $H^0 = \mathbb{C} \oplus \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} H^\alpha$, où $\Big|_{\alpha=0} H^\alpha$ est la complétion de l'espace de Hilbert de $\mathcal{S}_0(X_p) = \{f : X_p \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{supp } f \text{ finite, } \int_{X_p} f(x) dx = 0\}$ relativement à $(f, g) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} (f, R_p^\alpha g) = -\log p \cdot \iint_{X_p \times X_p} f(x) \overline{g(y)} d(x, y)$. Ce dernier espace est l'analogie de l'espace cotangent au plan hyperbolique p -adique. Pour rendre cette analogie plus suggestive, dénotons par $X'_p = SL_2(\mathbb{Q}_p)/\Gamma_0(p)$ les arcs orientés, $\Omega_c = \{\omega : X'_p \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{supp } \omega \text{ finite, } \omega(x, y) = -\omega(y, x)\}$ les formes différentielles à support compact, et $L^2(\Omega)$ la fermeture de Ω_c dans $L^2(X'_p)$. Alors, la différentiation extérieure $df(x, y) = f(x) - f(y)$ induit un isomorphisme $d : \mathcal{S}_0(X_p) \xrightarrow{\sim} \Omega_c$ et une isométrie $2(\log p)^{-\frac{1}{2}} d : \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} H^\alpha \xrightarrow{\sim} L^2(\Omega)$.

Nous arrivons maintenant aux potentiels en rapport avec l'arithmétique. Ce sont les potentiels de M. Riesz donnés par

$$R_p^\alpha = \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(\alpha)} |x|^{\alpha-1} dx, \quad \text{Re } \alpha > 0.$$

Pour une fonction φ lisse (i.e. localement constante) sur \mathbb{Q}_p , telle que $\int_{|x|>1} |\varphi(x)| \cdot |x|^{\text{Re } \alpha - 1} dx < \infty$, nous pouvons former la convolution $R_p^\alpha * \varphi$:

$$R_p^\alpha * \varphi(y) = \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(\alpha)} \int \varphi(x) \cdot |y-x|^{\alpha-1} dx, \quad \text{Re } \alpha > 0.$$

Celle-ci peut être prolongée de façon méromorphe à tous les α , en ramassant une fonction δ lorsque nous croisons la droite $\text{Re } \alpha = 0$, i.e.,

$$R_p^\alpha * \varphi(y) = \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(\alpha)} \int (\varphi(x) - \varphi(y)) \cdot |y-x|^{\alpha-1} dx, \quad \text{Re } \alpha < 0$$

(pour $p = \infty$, nous ramassons la distribution $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n$ lorsque nous traversons $\text{Re } \alpha = -2n$).

Dénotons par ψ_p le caractère additif de base de \mathbb{Q}_p , et $\psi_p^{(x)}(y) = \psi_p(x, y)$, un calcul évident donne $R_p^{-\alpha} * \psi_p^{(x)} = |x|^\alpha \cdot \psi_p^{(x)}$, i.e. $\psi_p^{(x)}$ est un vecteur propre (généralisé) pour $R_p^{-\alpha}$ avec valeur propre associée $|x|^\alpha$, reflétant le fait que, comme distribution sur \mathbb{Q}_p , $R_p^{-\alpha}$ est la transformation de Fourier de $|x|^\alpha$. De manière similaire, nous avons la formule de reproduction de M. Riesz $R_p^\alpha * R_p^\beta = R_p^{\alpha+\beta}$, $\text{Re}(\alpha + \beta) < 1$. Écrite explicitement, $|x|^\alpha = R_p^{-\alpha} * \psi_p^{(x)}(0)$ devient

$$|x|^\alpha = \int (1 - \psi_p(xy)) \left[-\frac{\zeta_p(1+\alpha)}{\zeta_p(-\alpha)} \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}} \right].$$

Notons que la mesure entre crochets est positive pour $\alpha \in (0, \alpha_p)$, où $\alpha_p = [\overline{\mathbb{Q}_p} : \mathbb{Q}_p]$ i.e., $\alpha_p = \infty$ pour $p < \infty$ et $\alpha_\infty = 2$ (mais pour des corps de nombres plus généraux ayant une place complexe v , $\alpha_v = 1$). Du théorème de Levi-Khinchin [6], nous déduisons que $|x|^\alpha$ est une fonction définie négative sur \mathbb{Q}_p , pour $\alpha \in (0, \alpha_p)$, par conséquent nous avons un semi-groupe de conduction de la chaleur [6 ; 27]

$$\mu_{p,t}^\alpha(y) = \int_{\mathbb{Q}_p} e^{-t|x|^\alpha} \psi_p(xy) dx = \sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{\zeta_p(1+n\alpha)}{\zeta_p(-n\alpha)} |y|^{-(1+n\alpha)} dy$$

$\mu_{p,t}^\alpha$ a un générateur infinitésimal $R_p^{-\alpha}$, et pour $\alpha \in (0, 1)$, il est transitoire avec le noyau de potentiel R_p^α . La théorie du potentiel de R_p^α peut être développée de manière purement analytique [27] sans aucun recours aux probabilités, et selon bien des aspects, elle est en fait plus facile que la théorie classique; e.g., l'inégalité de Harnack est une trivialité dans la situation non-archimédienne. Ici, d'un autre côté, dans le but d'ajouter à l'intuition, nous rappelons brièvement la formulation en termes d'espace de chemins de la solution au problème de Dirichlet [29; 42]. Dénotons par Δ_x l'espace des chemins $X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{Q}_p$, X continus par la droite, ayant une limite à gauche en tout point et $X(0) = x$. Pensons à un tel chemin comme décrivant le saut autour de \mathbb{Q}_p . Par le théorème de Kolmogorof, il existe une mesure de probabilité unique P_x , sur Δ_x , telle que $P_x[X(t) \in dy] = \mu_{p,t}^\alpha(dy - x)$. Nous avons maintenant une interprétation probabiliste :

$$\mu_{p,t}^\alpha * \varphi(x) = E_x[\varphi(X(t))], \quad R_p^\alpha * \varphi(x) = E_x \left[\int_0^\infty \varphi(X(t)) dt \right],$$

où E_x dénote ce qui est attendu relativement à P_x . Pour un sous-ensemble compact $K \subseteq \mathbb{Q}_p$, et une fonction continue $\varphi : K \rightarrow \mathbb{C}$, il existe une solution unique h_φ , au problème de Dirichlet avec condition aux bornes $\varphi : h_\varphi(x) = \varphi(x)$ pour $x \in K$, et h_φ est α -harmonique en dehors de K , i.e., pour $x \notin K$, h_φ est lisse près de x et $R_p^{-\alpha} * h_\varphi(x) = 0$, ou de façon équivalente, pour $p < \infty$:

$$h_\varphi(x) = (1 - p^{-\alpha}) \int_{|y| \geq 1} h_\varphi(x + p^N y) |y|^{-\alpha} d^*y, \quad \text{pour tout } N \gg 0.$$

Probabilistiquement, h_φ est donnée par $h_\varphi(x) = E_x[\varphi(X(t_K)) ; t_K < \infty]$, où

$$t_K(X) = \inf\{t > 0, X(t) \in K\}$$

est le temps de frappe de K ; e.g., $R_p^{-\alpha} * \mathbb{1} = 0$, et $\mathbb{1}$ (= la fonction constante 1) est la seule fonction α -harmonique tout au long de \mathbb{Q}_p , bornée à l'infini.

Analytiquement, l'information complète est codée par la forme de Dirichlet associée [17] qui est donnée pour $\alpha \in (0, \alpha_p)$ par

$$\mathcal{E}_p^\alpha(\varphi_1, \varphi_2) = -\frac{1}{2} \frac{\zeta_p(1+\alpha)}{\zeta_p(-\alpha)} \iint (\varphi_1(x) - \varphi_1(y)) \cdot (\varphi_2(x) - \varphi_2(y)) \cdot |x - y|^{-\alpha-1} dx dy$$

ou de façon duelle, par la distribution de l'espace de Hilbert d'énergie finie [27], la complétion de $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p) = \{\text{fonctions lisses, rapidement décroissantes sur } \mathbb{Q}_p\}$ par rapport à

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{H^\alpha} = (\varphi_1, R_p * \varphi_2)_{L^2} = \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(\alpha)} \iint \varphi_1(x) \varphi_2(y) |x - y|^{\alpha-1} dx dy.$$

Notre croyance de base qu'un analogue du théorème de l'indice existe pour les corps de nombres provient d'une formule simple reliant les nombres d'intersection $W(f) = \hat{f}(0) + \hat{f}(1) - \sum_{\zeta(s)=0} \hat{f}(s)$

avec les potentiels de Riesz. Notamment, supposons que nous commençons avec une fonction de Schwartz f sur les idèles \mathbb{A}^* , telle que f est une projection de \hat{f} sur $\mathbb{Q}^* \backslash \mathbb{A}^* / \prod_p \mathbb{Z}_p^* \cong \mathbb{R}^+$.

On a [26] :

$$W(f) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} R_{\mathbb{A}^*}^\alpha \tilde{f}(q)$$

où $R_{\mathbb{A}^*}^\alpha = \otimes_p \frac{1}{c_p(\alpha)} R_p^\alpha$ avec les constantes de renormalisation $c_p(\alpha) = R_p^\alpha \phi_p^*(1) = 1 + \frac{(p^\alpha - 1)(1 - p^{-\alpha})}{p - p^\alpha}$ pour $p < \infty$, $c_\infty(\alpha) = 1$.

Notons que $c_p(0) = 1$, $\frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} c_p(\alpha) = 0$, de telle façon que les $c_p(\alpha)$ n'affectent pas vraiment la formule ci-dessus et sont rajoutés dedans pour des besoins de convergence. Nous pouvons aussi utiliser $\tilde{c}_p(\alpha) = \frac{\zeta_p(1+\alpha)\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(1)^2}$, en notant que $\prod_p \tilde{c}_p(\alpha)c_p(\alpha)$ converge pour $\text{Re } \alpha > -\frac{1}{2}$.

Nous allons maintenant analyser le cas limite $\alpha \rightarrow \alpha_p$, où on obtient la loi normale, et la perspective d'une super-symétrie en arithmétique. Pour $p = \infty$, comme $\alpha \rightarrow \alpha_p = 2$, $\mu_{p,t}^\alpha$ converge vaguement vers la loi normale classique. D'un autre côté, pour $p < \infty$, comme $\alpha \rightarrow \alpha_p = \infty$, $\mu_{p,t}^\alpha$ converge vaguement vers une mesure de probabilité \mathbb{Z}_p -invariante $\mu_{p,t}^\infty$, i.e., la loi normale p -adique dégénère en un semi-groupe de mesures de probabilités sur $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

On pose

$$\phi_p = \mu_{p,1/\alpha_p}^{\alpha_p} = \begin{cases} e^{-\pi x^2} & p = \infty \\ \text{fonction caractéristique de } \mathbb{Z}_p & p < \infty \end{cases}$$

$\phi_{\mathbb{A}} = \otimes_p \phi_p$ la loi normale sur les adèles \mathbb{A} ; et pour un diviseur sur $\text{spec } \mathbb{Z}'$

$$a \in \mathbb{A}^* / \prod_p \mathbb{Z}_p^*, \phi_{\mathbb{A}}^{(a)}(x) = |a|^{-1} \phi_{\mathbb{A}}(a^{-1}x)$$

la loi normale avec une mesure sous-jacente perturbée par a . En notant $\text{pr} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}/\mathbb{Q}$ la projection naturelle, $\text{pr}_* \phi_{\mathbb{A}}^{(a)}$ est une mesure de probabilité sur \mathbb{A}/\mathbb{Q} , agissant sur $L^2(\mathbb{A}/\mathbb{Q})$ via la convolution, et nous avons un Riemann-Roch (à une dimension) de Tate pour $\text{spec } \mathbb{Z}$, [48] :

$$h^0(a) - h^0(a^{-1}) = \text{deg } a,$$

où $h^0(a) = \log \text{tr}(\text{pr}_* \phi_{\mathbb{A}}^{(a)})$, $\text{deg } a = -\log |a|$, qui est précisément l'équation fonctionnelle de la fonction theta classique (\log) déguisée dans un langage fantaisie. La fonction zeta de Riemann n'est rien d'autre que la transformée de Mellin de $\text{tr}(\text{pr}_* \phi_{\mathbb{A}}^{(a)}) - 1$, et le Riemann-Roch ci-dessus est équivalent à l'équation fonctionnelle $\zeta(s) = \zeta(1-s)$. Notons que l'élimination des valeurs propres n'est pas additive mais multiplicative, et nous avons $\log \text{tr}$, plutôt que tr comme dans le théorème de l'indice. Le fait que $h^0(a) > 0$, ou de façon équivalente que $\text{tr}(\text{pr}_* \phi_{\mathbb{A}}^{(a)}) > 1$, découle du fait que $\text{pr}_* \phi_{\mathbb{A}}^{(a)}$ est positive et a toujours 1 comme valeur propre puisque c'est une mesure de probabilité : $\text{pr}_* \phi_{\mathbb{A}}^{(a)} * \mathbb{1} = \mathbb{1}$.

On note en passant que R_p^α a un pôle simple en $\alpha = 1$, avec résidu de mesure de Haar, et $Pf_{\alpha=1} R_p^\alpha$ est le noyau logarithmique qui entre dans le Riemann-Roch Arakelov-Faltings pour \mathbb{P}^1 sur $\text{spec } \mathbb{Z}$ [12]. Alternativement, $-\log \prod_p \rho_p(q_1, q_2)$ est le nombre d'intersections de $q_1, q_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, considéré comme des diviseurs horizontaux de \mathbb{P}^1 sur $\text{spec } \mathbb{Z}$, où

$$\rho_p : \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \rightarrow [0, 1], \rho_p(x_1 : x_2, y_1 : y_2) = \frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|_p}{|(x_1, x_2)|_p \cdot |(y_1, y_2)|_p}$$

est la métrique naturelle sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, et où la valeur absolue deux dimensionnelle est la $L^{\alpha p}$ valeur absolue : $|(x_1, x_2)|_p = \sup(|x_1|_p, |x_2|_p)$ pour $p < \infty$,

$$|(x_1, x_2)|_{\infty} = (|x_1|_{\infty}^2 + |x_2|_{\infty}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous regarderons ensuite la compactification (ou plutôt la quantification) des potentiels de Riesz et leur connexion avec la théorie de la représentation de SL_2 . Dénotons par $\mathcal{S}^{\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ l'espace des fonctions lisses $\varphi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$, telles que $\varphi(x^{-1}) \cdot |x|^{-(1+\alpha)}$ est également lisse (i.e., pour $p < \infty$: $\varphi(x) = \text{cons.} \cdot |x|^{-(1+\alpha)}$ pour $|x| \gg 1$), et posons

$$\phi_p^{\alpha}(x) = \zeta_p(1+\alpha) \cdot |(1, x)|^{-(1+\alpha)} \in \mathcal{S}^{\alpha}(\mathbb{Q}_p).$$

Une vérification facile donne

$$R_p^{\alpha} : \mathcal{S}^{\alpha}(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^{-\alpha}(\mathbb{Q}_p), \quad R_p^{\alpha} * \phi_p^{\alpha} = \phi_p^{-\alpha}.$$

Nous pouvons identifier $\mathcal{S}^{\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ avec les fonctions lisses $\varphi : \mathbb{Q}_p^{\oplus 2} \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $\varphi(ax_1, ax_2) = |a|^{-(1+\alpha)} \varphi(x_1, x_2)$ (via $\varphi(x) = \varphi(1, x)$; $\varphi(x_1, x_2) = \varphi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \cdot |x_1|^{-(1+\alpha)}$), qui en retour peut être identifié avec les sections lisses d'un fibré de droites $\mathcal{O}_p(\alpha)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Le fibré $\mathcal{O}_p(\alpha)$ peut être trivialisé au moyen de la section qui ne s'évanouit jamais correspondant à ϕ_p^{α} , et nous obtenons :

$$\tilde{R}_p^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_p^{-\alpha})^{-1} \circ R_p^{\alpha} \circ \phi_p^{\alpha} : \mathcal{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)), \quad \tilde{R}_p^{\alpha} \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

où $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$ dénote les fonctions lisses sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, e.g., pour $p < \infty$: $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)) = \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p) \oplus \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$. Dénotons par $SL_2(\mathbb{Z}_p) = \{g \in SL_2(\mathbb{Q}_p) \mid |g(x_1, x_2)| = |(x_1, x_2)|\}$ le sous-groupe compact maximal de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, $p \leq \infty$; et par $dx_1 : x_2$ l'unique mesure de probabilité $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ -invariante sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Alors nous avons,

$$\tilde{R}_p^{\alpha} \varphi(y_1 : y_2) = \frac{1}{r_p(\alpha)} \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)} \varphi(x_1 : x_2) \rho_p(y_1 : y_2, x_1 : x_2)^{\alpha-1} dx_1 : x_2, \quad \text{Re } \alpha > 0$$

$$\text{où } r_p(\alpha) = \frac{\zeta_p(2)}{\zeta_p(1)} \cdot \frac{\zeta_p(\alpha)}{\zeta_p(1+\alpha)} = \int \rho_p(x_1 : x_2, y_1 : y_2)^{\alpha-1} dx_1 : x_2 \text{ pour tout } y_1 : y_2.$$

Notons qu'alors que R_p^{α} était diagonalisable par rapport à la transformation de Fourier en envoyant $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p)$ sur lui-même, \tilde{R}_p^{α} est diagonalisable par rapport à la transformation de Fourier envoyant $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^{\vee})$, où $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)^{\vee}$ est le groupe (discret) de caractères de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$; ici $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ est considéré comme un groupe via $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Z}_p[\sqrt{\varepsilon_p}]^*/\mathbb{Z}_p^*$, $\varepsilon_p \in \mathbb{Z}_p^* \setminus (\mathbb{Z}_p^*)^2$ [19]. En effet, pour $p < \infty$, et un caractère $\chi \neq \mathbf{1}$, primitive du conducteur p^N , $R_p^{\alpha} \chi = \frac{\zeta_p(1+\alpha)}{\zeta_p(1-\alpha)} p^{-N\alpha} \chi$; pour $p = \infty$, et le caractère $\chi_n(z) = z^{2n}$, $\tilde{R}_{\infty}^{\alpha} \chi_n = \frac{\zeta_{\infty}(1+\alpha)}{\zeta_{\infty}(1-\alpha)} \cdot \frac{\zeta_{\infty}(1-\alpha+2n)}{\zeta_{\infty}(1+\alpha+2n)} \cdot \chi_n$. Par conséquent, alors que R_p^{α} avait un spectre $p^{\alpha\mathbb{Z}}$ (\mathbb{R}^+ , pour $p = \infty$) avec d'infinies multiplicités, \tilde{R}_p^{α} a un spectre discret; tandis que R_p^{α} était non borné, $\|\tilde{R}_p^{\alpha}\|_{L^2(\mathbb{P}^1)} = 1$ pour tout $\alpha \geq 0$, et de plus \tilde{R}_p^{α} est Hilbert-Schmidt pour $\text{Re } \alpha > \frac{1}{2}$ (et de classe trace pour $\text{Re } \alpha > 1$). Notons également que nous perdons la propriété de semi-groupe $R_p^{\alpha} * R_p^{\beta} = R_p^{\alpha+\beta}$, et qu'il ne nous reste que $\tilde{R}_p^{\alpha} \geq 0$; nous perdons la positivité $R_p^{\alpha} \geq 0$, et il ne nous reste que $\tilde{R}_p^{\alpha} \geq 0$ pour $\alpha \in (-1, 1)$, correspondant à la représentation en série complémentaire de SL_2 ; nous perdons la structure de nature markovienne de $R_p^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, \alpha_p)$: $\tilde{R}_p^{-\alpha}$ n'engendre pas un semi-groupe markovien même pour $\alpha \in (0, 1)$.

Dirigeons notre attention vers les valeurs réelles de α , notons que $\tilde{R}_{\mathbb{A}}^{it} = \otimes_p \tilde{R}_p^{it}$ est l'opérateur bien connu d'entrelacement pour la représentation en série principale non-ramifiée de $SL_2(\mathbb{A})$ [19; 21; 53]. Notamment, la transformation de Fourier symplectique deux dimensionnelle (le symbole isotropique [28])

$$\mathcal{F}\varphi(y_1, y_2) = \iint_{\mathbb{A} \oplus \mathbb{A}} \varphi(x_1, x_2) \psi(x_1 y_2 - x_2 y_1) dx_1 dx_2$$

descend vers un opérateur unitaire \mathcal{F} sur l'espace $\Omega = SL_2(\mathbb{A})/\mathbb{Q}^* \prod_p \mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{A}$, qui est une fibration de $\mathbb{P}^1(\mathbb{A}) = SL_2(\mathbb{A})/\mathbb{A}^* \times \mathbb{A}$, avec comme fibre $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* \prod_p \mathbb{Z}_p^* \cong \mathbb{R}^+$. Ainsi, via une transformation de Mellin, $L_2(\Omega) = \int_0^\infty H^{it} \oplus H^{-it}$, où H^{it} dénote $L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{A}))$ avec la $SL_2(\mathbb{A})$ -action unitaire irréductible

$$\pi^{it}(g)\varphi(x_1 : x_2) = \varphi(g^{-1}(x_1 : x_2)) \cdot \left[\frac{|(x_1, x_2)|}{|g^{-1}(x_1, x_2)|} \right]^{1-it},$$

et \mathcal{F} se décompose en $\begin{pmatrix} 0 & \tilde{R}_{\mathbb{A}}^{it} \\ \tilde{R}_{\mathbb{A}}^{-it} & 0 \end{pmatrix}$.

Nous terminons ce survol en transformant nos formules de base reliant les sommes explicites en potentiels de Riesz en une formule de trace. Un calcul évident donne pour $\text{Re } \alpha > 0$:

$$\frac{1}{\tilde{c}_p(\alpha)} R_p^\alpha(\tilde{f}_p)(q) = \frac{\zeta_p(2\alpha)}{\zeta_p(\alpha)^2} \frac{\zeta_p(1)^2}{\zeta_p(1+\alpha)^2} \text{tr}(\tilde{R}_p^\alpha \pi_p^\alpha(\tilde{f}_p) \pi_p^\alpha(q))$$

où

$$\pi_p^\alpha(a)\varphi(x_1 : x_2) = \varphi(a^{-1}x_1 : x_2) \left[\frac{|(x_1, x_2)|}{|(a^{-1}x_1, x_2)|} \right]^{1+\alpha},$$

$$\pi_p^\alpha(\tilde{f}_p) = \int_{\mathbb{Q}_p^*} \tilde{f}_p(a) \pi_p^\alpha(a) d^*a.$$

En utilisant le fait que $\frac{\zeta(2\alpha)}{\zeta(\alpha)^2} = -\frac{\alpha}{2}(1 + O(\alpha^2))$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$, nous obtenons :

$$W(f * f^*) = -\frac{1}{2} \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} P f_{\alpha=0} \prod_p \frac{\zeta_p(1)^2}{\zeta_p(1+\alpha)^2} \text{tr}(\tilde{R}_p^\alpha \pi_p^\alpha(\tilde{f}_p^*) \pi_p^\alpha(\tilde{f}_p^{(q)})).$$

En dénotant par $S_p^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(1+\alpha)} \tilde{R}_p^\alpha + (1 - \frac{\zeta_p(1-\alpha)}{\zeta_p(1+\alpha)}) \tilde{R}_p^1$, \tilde{R}_p^1 la projection sur l'espace des fonctions constantes, nous avons pour $p < \infty$: $S_p^\alpha \mathbb{1} = \mathbb{1}$, $S_p^\alpha \chi = p^{-N\alpha} \cdot \chi$ pour un caractère χ primitif du conducteur p^N , de telle façon que S_p^α forme un semi-groupe positif borné pour $\alpha > 0$. À nouveau, un calcul évident donne pour $\text{Re } \alpha > 0$:

$$\frac{\zeta_p(2\alpha)}{\zeta_p(\alpha)^2} \text{tr}(S_p^\alpha \pi_p^\alpha(\phi_p^*)) = 1$$

$$\frac{\zeta_p(2\alpha)}{\zeta_p(\alpha)^2} \text{tr}(S_p^\alpha \pi_p^\alpha(\tilde{f}_p^* * \tilde{f}_p^{(q)})) = R_p^\alpha(\tilde{f}_p^* * \tilde{f}_p^{(q)})(1) + O(\alpha^2).$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$W(f * f^*) = -\frac{1}{2} \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} P f_{\alpha=0} \text{tr}(\pi^\alpha(\tilde{f}^*) S_{\mathbb{A}}^\alpha \pi^\alpha(\tilde{f}^{(q)}))$$

où $S_{\mathbb{A}}^{\alpha} = \otimes_p S_p^{\alpha}$, $\pi^{\alpha}(f) = \otimes_p \pi_p^{\alpha}(\tilde{f}_p)$, comme opérateurs sur $L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{A})) = \otimes_p L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p))$ (l'espace de Hilbert \otimes_p w.r.t. $\mathbb{1}$). Notons que pour $\text{Re } \alpha > 1$, S_p^{α} est donné par le noyau

$$S_p^{\alpha}(y, x) = \mathbb{1} - \frac{\zeta_p(1 - \alpha)}{\zeta_p(1 + \alpha)} \left(\mathbb{1} - \frac{\zeta_p(1)}{\zeta_p(2)} \frac{\zeta_p(1 + \alpha)}{\zeta_p(\alpha)} \rho_p(y, x)^{\alpha-1} \right)$$

et que pour $\text{Re } \alpha > 2$, $S_{\mathbb{A}}^{\alpha}$ est donné par le noyau $\prod_p S_p(y_p, x_p)$; notons également que l'effet de lissage : $S_p^{\alpha} \pi_p^{\alpha}(\tilde{f}_p)$ est donné par un noyau continu pour $\text{Re } \alpha > 0$. Il est facile de vérifier que, pour $\alpha \in (0, \alpha_p)$, $S_p^{-\alpha}$ engendre une forme de Dirichlet, et nous obtenons un processus de Hunt sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ [17], et le semi-groupe de Schrödinger associé [45] sur l'espace L^2 pondéré $L^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), dx_1 : x_2) \cong L^2\left(\mathbb{Q}_p, \frac{\zeta_p(2)}{\zeta_p(1)} \frac{dx}{|(1, x)|^2}\right)$. En ayant un processus sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ pour chaque p , nous obtenons un processus sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{A}) = \prod_p \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, dont le générateur infinitésimal est $\sum_p S_p^{\alpha}$, mais pour notre objectif, il est plus intéressant de considérer le processus engendré par $S_{\mathbb{A}}^{-\alpha}$.

Finalement, nous remarquons que les opérateurs que nous recherchons sont grossièrement approxi-
més par les $\tilde{R}_{\mathbb{A}}^{\alpha}$ ou $S_{\mathbb{A}}^{\alpha}$. Il est possible de construire de manière similaire des opérateurs sur les adèles \mathbb{A} (plutôt que $\mathbb{P}^1(\mathbb{A})$) avec une trace reliée aux sommes explicites comme ci-dessus. Ce qui manque dans le but de compléter notre modèle pour attaquer l'hypothèse de Riemann, c'est précisément l'analogue de la super-symétrie dans notre contexte.

Références

- [1] M. F. Atiyah, Elliptic operators, discrete groups, and von Neumann algebras, *Astérisque*, 32 (1976), 43-72.
- [2] M. F. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi, On the heat equation and the index theorem, *Invent. Math.*, 19 (1973), 279-330; also errata, *idid.* 28, 277-80.
- [3] N. Aronszajn and K. T. Smith, Theory of Bessel potentials. Part I, *Ann. Inst. Fourier*, 11 (1961), 385-475.
- [4] P. Baum and R. Douglas, K -homology and index theory, *Proceedings of A.M.S.*, 38 (1980), 117-73.
- [5] Yu. M. Berezanskii, Selfadjoint Operators in Spaces of Functions of Infinitely Many Variables, *A.M.S. Translations of Math. Monographs*, 63 (1986).
- [6] C. Berg and G. Forst, *Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups*, Springer-Verlag (1975).
- [7] J. M. Bismut, The Atiyah-Singer theorems for classical elliptic operators : a probabilistic approach, *J. Func. Anal*, 57 (1984), 56-99.

- [8] J. Bliedtner and W. Hansen, Potential Theory, Springer-Verlag (1986).
- [9] D. Cantor, On an extension of the definition of transfinite diameter and some applications, *J. Reine. Angew. Math.*, 316 (1980), 160-207.
- [10] P. Cartier, Fonctions harmoniques sur un arbre, *Symposia Mathematics*, 9 (1972), 203-70.
- [11] P. Cartier, Géométrie et analyse sur les arbres, *Sem. Bourbaki*, 1971/72, Exposé 407.
- [12] T. Chinburg, Intersection theory and capacity theory on arithmetic surfaces, *Proc. Canadian Math. Soc. Summer Seminar in Number Theory*, 7, A.M.S. (1986).
- [13] A. Connes, Non commutative differential geometry, *Publ. Math. de l'IHES*, 62 (1985), 41-144.
- [14] P. Deligne, Le déterminant de la cohomologie, *Contemporary Math.*, 67 (1987), 93-177.
- [15] W. Feller, On a generalization of M. Riesz, potentials and the semi-groups generated by them, *Proc. R. Physiogr. Soc. Lund*, 21 (1952), 73-81.
- [16] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol. 2, John Wiley & Sons (1970).
- [17] M. Fukushima, *Dirichlet Forms and Markov Processes*, North-Holland Publ. (1980).
- [18] S. Gelbart and I. I. Piatetskii-Shapiro, Distinguished representations and modular forms of half-integral weight, *Invent. Math.*, 59 (1980) 145-88.
- [19] I. M. Gel'fand, M. I. Graev and I. I. Piatetskii-Shapiro, *Representation Theory and Automorphic Functions*, Saunders Com. (1969).
- [20] I. M. Gel'fand, M. I. Graev and N. Ya. Vilenkin, *Generalized Functions* vol. 5, Academic Press (1966).
- [21] R. Godement, The decomposition of ${}^2(G/\Gamma)$ for $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$, *Proc. Symp. Pure Math. IX* (1966), 211-24.
- [22] D. Goldfeld, Explicit formulae as trace formulae in The Selberg Trace Formula and Related Topics, D. A. Hejhal et al. eds, A.M.S. (1989).
- [23] A. Grothendieck, Sur une note de Mattuck-Tate, *J. Reine Angew. Math.*, 200 (1958), 208-15.

- [24] B. Getzler, A short proof of the local Atiyah-Singer index theorem, *Topology*, 25 (1986), 111-7.
- [25] D. Hejhal, The Selberg trace formula and the Riemann zeta function, *Duke Math. J.*, 43 (1976), 441-82.
- [26] S. Haran, Riesz potentials and explicit sums in arithmetic, to appear in *Invent. Math.*
- [27] S. Haran, Analytic potential theory over the p -adics, preprint.
- [28] R. Howe, On the role of the Heisenberg group in harmonic analysis, *Bulletin of A.M.S.*, 3 (1980), no.2, 821-43.
- [29] G. A. Hunt, Markoff processes and potentials, I, II, and III, *Illinois J. Math.*, 1 (1957), 44-93; 1 (1957), 316-69; 2 (1958), 151-213.
- [30] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$, *Lecture Notes in Math.*, Springer, 114 (1970).
- [31] P. Julg and A. Valette, K -amenability for $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ and the action on the associated tree, *J. Funct. Anal.*, 58 (1984), 194-215.
- [32] P. Julg and A. Valette, Twisted coboundary operator on a tree and the Selberg principle, *J. Operator Theory*, 16 (1986), 285-304.
- [33] G. G. Kasparov, Operator K -theory and its applications : elliptic operators, group representations, higher signatures, C^* -extensions, *Proc. Int. Cong. Math. Warszawa* (1983), 987-1000.
- [34] G. G. Kasparov, An index for invariant elliptic operators, K -theory, and representations of Lie groups, *Soviet Math. Dokl.*, 27 (1983) No.1, 105-9.
- [35] G. G. Kasparov, Lorentz groups : K -theory of unitary representations and crossed products, *Soviet Math. Dokl.*, 29 (1984) No.2, 256-60.
- [36] G. G. Kasparov, The operator K -functor and extensions of C^* -algebras, *Math. USSR Izvestija*, 16 (1981), No.3, 513-72.
- [37] N. S. Landkof, *Foundations of Modern Potential Theory*, Springer-Verlag (1972).
- [38] R. P. Langlands, Automorphic representations, Shimura varieties, and motives, Ein Märchen, *Proc. Symp. Pure Math. XXIII* (1979), 205-46.
- [39] Yu. I. Manin, *New Dimensions in Geometry*, Proc. Arbeitstagung Bonn, *Lecture Notes in Math.*, Springer, 1111 (1984).

- [40] A. Mattuck and J. Tate, On the inequality of Castelnuovo-Severi, *Hamb, Abh.*, 22 (1958), 295-9.
- [41] S. J. Patterson, *Introduction to the Theory of the Riemann Zeta Functions*, Cambridge Univ. Press (1988).
- [42] S. C. Port and C. J. Stone, Infinitely divisible processes and their potential theory, I and II, *Ann. Inst. Fourier*, 21 (1971), no.2, 157-275 ; no.4 179-265.
- [43] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces, *J. Indian Math. Soc.*, 20 (1956), 47-87.
- [44] R. T. Seeley, Complex powers of an elliptic operator, *Proc. Symp. Pure Math.* X (1967), 288-307.
- [45] B. Simon, Schrödinger semigroups, *A.M.S. Bulletin*, 7 (1982), No.3, 447-526.
- [46] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press (1979).
- [47] M. H. Taibleson, *Fourier Analysis on Local Fields*, Princeton Univ. Press (1975).
- [48] J. Tate, Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions, thesis reproduced in J. W. S. Cassels and A. Fröhlich *Algebraic Number Theory*, Thompson Book Co. (1967).
- [49] A. Weil, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Hermann (1948).
- [50] A. Weil, Sur les formules explicites de la théorie des nombres premiers, *Proc. R. Physiogr. Soc. Lund*, 21 (1952), 252-65.
- [51] A. Weil, Sur les formules explicites de la théorie des nombres, *Izv. Mat. Nauk*, 36 (1972) 3-18.
- [52] A. Weil, Function zeta et distributions, *Sem. Bourbaki* 312 (1966).
- [53] D. Zagier, Eisenstein series and the Riemann zeta function, in *Automorphic forms, Representation theory and Arithmetic*, Bombay Colloquium 1979, Springer (1981).

Potentiels de Riesz et sommes explicites en arithmétique

Shai Haran

Département de mathématiques théoriques,
Institut de science Weizmann,
Rehovot 76100,
Israël

Dans [8], un livre dédié à M. Riesz, A. Weil a exprimé la relation précise entre les zéros des fonctions zeta de corps de nombres et la distribution de leurs nombres premiers. En lisant cet hommage, on ne peut s'empêcher de ressentir que Weil (au moins, subconsciemment) avait préconçu la connexion entre les sommes explicites et les potentiels de Riesz ; ceci est le sujet de notre article. Concernant la philosophie et la motivation derrière une telle connexion, nous renvoyons à la référence [3]. Pour des raisons de simplicité, nous traitons des nombres rationnels, mais avec quelques petites modifications, on peut considérer un corps de nombres arbitraire. Le long du chemin, nous obtenons deux bonus : une expression finie pour la contribution aux sommes explicites donnée par les nombres premiers à l'infini, et une manière uniforme d'exprimer la contribution d'un nombre premier fini et d'un nombre premier infini (cela a été tenté par Weil dans [9], mais il faut remarquer les deux définitions différentes de son "Pf").

Notations

Nous notons par \mathbb{Q}_p les nombres p -adiques pour $p < \infty$, et les réels pour $p = \infty$.

Nous posons $\mathbb{Z}_p^* = \{x \in \mathbb{Q}_p^* \text{ tel que } |x| = 1\}$, de telle façon que $\mathbb{Z}_\infty^* = \{\pm 1\}$.

ψ_p dénotera le caractère "canonique" de \mathbb{Q}_p donné par $\psi_\infty(x) = e^{2\pi i x}$, et pour $p < \infty$ par $\psi_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{e^{-2\pi i x}} \mathbb{C}^*$.

dx_p dénotera la mesure auto-duale sur \mathbb{Q}_p , selon ψ_p , de telle façon que $dx_\infty([0, 1]) = 1$, $dx_p(\mathbb{Z}_p) = 1$

et la transformation de Fourier $\mathcal{F}\varphi(y) = \int \varphi(x)\overline{\psi_p(xy)}dx$ satisfait $\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi(x) = \varphi(-x)$.

ϕ_p dénotera le "vacuum supplémentaire" donné par $\phi_\infty(x) = e^{-\pi x^2}$, ϕ_p la fonction caractéristique de \mathbb{Z}_p pour $p < \infty$, de telle façon que $\mathcal{F}\phi_p = \phi_p$.

d^*x_p dénotera la mesure de Haar sur \mathbb{Q}_p^* normalisée par $d^*x_p(\mathbb{Z}_p^*) = 1$ pour $p < \infty$, $d^*x_\infty = \frac{dx_\infty}{|x_\infty|}$.

ϕ_p^* dénotera la fonction caractéristique de \mathbb{Z}_p^* pour $p < \infty$.

$\zeta_p(s)$ dénotera la fonction de zeta locale, donnée par

$$\zeta_p(s) = \int_{\mathbb{Q}_p^*} \phi_p(x_p)|x_p|^s d^*x_p = \begin{cases} (1 - p^{-s})^{-1} & \text{pour } p < \infty \\ \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) & \text{pour } p = \infty \end{cases}$$

de telle façon que e.g. $d^*x_p = \zeta_p(1) \frac{dx_p}{|x_p|}$.

$\zeta(s) = \prod_p \zeta_p(s)$, $\text{Re } s > 1$, dénotera la fonction de zeta globale (complétée à l' ∞), de telle façon que $\zeta(s) = \zeta(1 - s)$.

\mathbb{A} dénotera l'anneau des adèles, \mathbb{A}^* les idèles. $\mathcal{S}(\mathbb{A}^*) = \otimes_p \mathcal{S}(\mathbb{Q}_p^*)$ est le produit tensoriel algébrique relativement à ϕ_p^* , i.e. c'est l'espace des fonctions sur \mathbb{A}^* constitué des combinaisons linéaires des fonctions "élémentaires" $f = \otimes_p f_p$, où f_p est une fonction lisse (i.e. localement constante pour $p < \infty$), fonction à support compact sur \mathbb{Q}_p^* , et $f_p = \phi_p^*$ pour presque tout p ; nous dirons qu'une telle f est "symétrique" si f_p est \mathbb{Z}_p^* -invariante pour tout p , et nous posons

$$\mathcal{S} = \left\{ \tilde{f}(x) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} f(qx) \text{ telle que } f \in \mathcal{S}(\mathbb{A}^*), f \text{ est symétrique} \right\}$$

qui contient toutes les fonctions lisses à support compact sur les réels positifs, via :

$$\mathbb{Q}^* \backslash \mathbb{A}^* / \prod_p \mathbb{Z}_p^* \cong \mathbb{R}^+.$$

Pour $\tilde{f} \in \mathcal{S}$, nous avons sa transformée de Mellin,

$$\mathcal{M}^s(\tilde{f}) = \int_{\mathbb{R}^+} \tilde{f}(x) x^s d^*x = \int_{\mathbb{A}^*} f(x) |x|^s d^*x$$

qui est une fonction entière de $s \in \mathbb{C}$, vérifiant $|\mathcal{M}^s(\tilde{f})| = O(|\text{Im } s|^{-N})$ uniformément dans toute bande verticale $a \leq \text{Re } s \leq b$, pour tout N .

Le noyau de Riesz

Nous nous concentrerons sur le cas $p < \infty$, pour $p = \infty$, voir e.g. [1.5]. Le noyau de M. Riesz est donné par $R_p^s(x) = \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} |x|^{s-1} dx$, $\text{Re } s > 0$, $s \not\equiv 1 \pmod{\frac{2\pi i}{\log p} \mathbb{Z}}$. Comme distribution, il a un prolongement méromorphe à tous les s , donné par

$$R_p^s(\varphi) = \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \varphi(0) + \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \left[\int_{|x|>1} \varphi(x) |x|^{s-1} dx + \int_{|x|\leq 1} (\varphi(x) - \varphi(0)) |x|^{s-1} dx \right].$$

En particulier, pour $\text{Re } s > 0$:

$$R_p^s(\varphi) = \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int \varphi(x) |x|^{s-1} dx$$

$$R_p^{-s}(\varphi) = \frac{\zeta_p(1+s)}{\zeta_p(-s)} \int (\varphi(x) - \varphi(0)) \frac{dx}{|x|^{1+s}}$$

et pour $s = 0$, $R_p^0(\varphi) = \varphi(0)$, i.e. $R_p^0 = \delta$.

Considérons ensuite R_p^s comme un opérateur via la convolution, notamment pour φ une fonction localement constante sur \mathbb{Q}_p , telle que $\int_{|x|>1} |\varphi(x)| |x|^{\text{Re } s-1} dx < \infty$, nous pouvons former $R_p^s * \varphi$:

$$R_p^s * \varphi(y) = \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(1)} \varphi(y) + \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \left[\int_{|x|>1} \varphi(y+x) |x|^{s-1} dx + \int_{|x|\leq 1} (\varphi(y+x) - \varphi(y)) |x|^{s-1} dx \right]$$

et à nouveau, pour $\operatorname{Re} s > 0$:

$$R_p^s * \varphi(y) = \frac{\zeta_p(1-s)}{\zeta_p(s)} \int \varphi(x) |y-x|^{s-1} dx$$

$$R_p^{-s} * \varphi(y) = \frac{\zeta_p(1+s)}{\zeta_p(-s)} \int (\varphi(y+x) - \varphi(y)) \frac{dx}{|x|^{1+s}}.$$

En prenant $\psi_p^{(x)}(y) = \psi_p(xy)$, un calcul évident donne pour $\operatorname{Re} s > 0$:

$$R_p^{-s} * \psi_p^{(x)}(y) = |x|^s \cdot \psi_p^{(x)}(y)$$

i.e. $\psi_p^{(x)}$ est un vecteur propre R_p^{-s} avec comme valeur propre associée $|x|^s$.

En prenant $y = 0$ dans cette formule, nous avons pour $s \in (0, \infty)$:

$$|x|^s = \int_{\mathbb{Q}_p^*} (1 - \operatorname{Re} \psi_p(xz)) \left\{ \frac{\zeta_p(1+s)}{\zeta_p(-s)} \frac{dz}{|z|^{1+s}} \right\}$$

où la mesure entre les crochets $\{ \dots \}$ est positive. Nous déduisons de cela, par la représentation de Levy-Khinchin [1], que la fonction $|x|^s$ est définie négative pour $s \in (0, \infty)$, et par conséquent nous obtenons un semi-groupe de convolution de mesures de probabilité $\mu_{p,t}^s$, (l'analogue p -adique du “semi-groupe stable symétrique d'ordre s ”, donné par (cf. [2], p. 549) :

$$\mu_{p,t}^s(y) = \mathcal{F} e^{-t|x|^s} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{\zeta_p(1+ns)}{\zeta_p(-ns)} |y|^{-(1+ns)} dy.$$

Il a un générateur infinitésimal $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \mu_{p,t}^s = R_p^{-s}$, et pour $s \in (0, 1)$, il est transitoire avec un noyau de potentiel donné par $\int_0^\infty \mu_{p,t}^s dt = R_p^s$.

Car une fonction localement constante à support compact φ sur \mathbb{Q}_p , $R_p^s * \varphi$ est aussi localement constante et car de plus $R_p^s * \varphi(y) = \operatorname{cons} \cdot |y|^{s-1}$ pour $|y| \gg 1$, par conséquent, nous pouvons former $R_p^{s'} * (R_p^s * \varphi)$ pour $\operatorname{Re}(s' + s) < 1$. Pour s, s' tels que $0 < \operatorname{Re} s, \operatorname{Re} s', \operatorname{Re}(s + s') < 1$, l'équation $R_p^{s'} * (R_p^s * \varphi)$ est immédiate en prenant la transformée de Fourier, et puisque tout est holomorphe dans s, s' , nous obtenons la “formule de reproduction” de M. Riesz :

$$R_p^s * R_p^{s'} = R_p^{s+s'} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s + s') < 1.$$

En particulier, R_p^{-s} car $\operatorname{Re} s \geq 0$, forme un semi-groupe holomorphe d'opérateurs avec un générateur infinitésimal $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{s=0} R_p^{-s}$ que nous calculerons ensuite.

La formule locale

Pour $f \in \mathcal{S}$, une fonction lisse à support compact sur \mathbb{R}^+ , nous dénotons par $f|_p(x_p) = f(|x_p|)$ la fonction symétrique associée sur \mathbb{Q}_p^* obtenue par restriction.

Formule locale

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} R_p^{-s} * f|_p(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \mathcal{M}^s(f) d \log \frac{\zeta_p(s)}{\zeta_p(1-s)}.$$

Preuve. Considérons d'abord le cas $p < \infty$,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} R_p^{-s} * f|_p(1) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left\{ \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-(1+s)}} f|_p(1) + \frac{1-p^s}{1-p^{-(1+s)}} \left[\int_{|x_p|>1} f|_p(1-x_p) \frac{dx_p}{|x_p|^{1+s}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_{|x_p|\leq 1} f|_p(1-x_p) - f|_p(1) \right) \frac{dx_p}{|x_p|^{1+s}} \right] \right\} \\ &= -(1-p^{-1})^{-1} \log p \left[p^{-1} f|_p(1) + \int_{|x_p|>1} f|_p(1-x_p) \frac{dx_p}{|x_p|} \right. \\ & \quad \left. + \int_{|x_p|\leq 1} f|_p(1-x_p) - f|_p(1) \right) \frac{dx_p}{|x_p|} \Big] \Big\} \\ &= -(1-p^{-1})^{-1} \log p \left[p^{-1} f|_p(1) + \int_{|x_p|>1} f|_p(x_p) \frac{dx_p}{|1-x_p|} \right. \\ & \quad \left. + \int_{|x_p|<1} f|_p(x_p) - f|_p(1) \right) \frac{dx_p}{|1-x_p|} \Big] \Big\} \\ &= -(1-p^{-1})^{-1} \log p \left[\int_{|x_p|\neq 1} f|_p(x_p) \frac{dx_p}{|1-x_p|} \right] \\ &= -\log p \sum_{n \neq 0} f(p^n) \min(1, p^n) \\ &= -\log p \sum_{n \neq 0} \min(1, p^n) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}^s(f) p^{-ns} ds \quad \text{par inversion de Mellin} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}^s(f) \left[-\log p \sum_{n \geq 1} p^{-ns} - \log p \sum_{n \geq 1} p^{-n(1-s)} \right] ds \quad \text{pour tout } c \in (0, 1) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}^s(f) [d \log \zeta_p(s) - d \log \zeta_p(1-s)]. \end{aligned}$$

Ensuite, pour $p = \infty$, nous avons, en omettant des calculs triviaux,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} R_\infty^{-s} * f|_\infty(1) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left\{ \pi^{-(\frac{1}{2}+s)} \frac{\Gamma(\frac{1+s}{2})}{\Gamma(1-\frac{s}{2})} f|_\infty(1) + \pi^{-(\frac{1}{2}+s)} \frac{\Gamma(\frac{1+s}{2})}{\Gamma(-\frac{s}{2})} \right. \\
&\quad \left. \left[\int_{|x|>1} f|_\infty(1-x) \frac{dx}{|x|^{1+s}} + \int_{|x|\leq 1} (f|_\infty(1-x) - f|_\infty(1)) \frac{dx}{|x|^{1+s}} \right] \right\} \\
&= -(\gamma + \log 2\pi) f|_\infty(1) - \frac{1}{2} \left[\int_{|x|>1} f|_\infty(1-x) \frac{dx}{|x|} + \int_{|x|\leq 1} (f|_\infty(1-x) - f|_\infty(1)) \frac{dx}{|x|} \right] \\
&= - \left[(\gamma + \log \pi) f(1) + \int_1^2 \frac{dx}{x} f(1) + \frac{1}{2} \int_{|1-x|>1} f(|x|) \frac{dx}{|1-x|} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{|1-x|\leq 1} (f(|x|) - f(1)) \frac{dx}{|1-x|} \right] \\
&= - \left[(\gamma + \log \pi) f(1) + \int_1^\infty \frac{x^2 f(x) - f(1)}{x^2 - 1} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{f(x) - x f(1)}{1 - x^2} dx \right] \\
&= - \left[(\gamma + \log \pi) f(1) + \int_1^\infty f(x) \frac{dx}{x} + \sum_{n \geq 1} \int_1^\infty (f(x) - f(1)) x^{-2n} \frac{dx}{x} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 f(x) dx + \sum_{n \geq 1} \int_0^1 (f(x) - f(1)) x^{-2n} \frac{dx}{x} \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}^s(f) \left[-\frac{1}{2}(\gamma + \log \pi) - \frac{1}{s} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+s} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}(\gamma + \log \pi) - \frac{1}{1-s} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1-s} \right) \right] ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}^s(f) [d \log \zeta_\infty(s) - d \log \zeta_\infty(1-s)] \quad \text{pour tout } c \in (0, 1).
\end{aligned}$$

La formule globale

Nous “renormaliserons” ensuite les générateurs infinitésimaux R_p^{-s} et les “collerons” ensemble pour nous donner un opérateur défini sur S .

Nous avons pour $p < \infty$, par un calcul simple,

$$c_p^s \stackrel{\text{def}}{=} R_p^{-s} * \phi_p^*(1) = 1 + \frac{(p^s - 1)(1 - p^{-s})}{(p - p^{-s})} = 1 + O(s^2)$$

et nous obtenons $c_\infty^s = 1$.

Posons $\Delta_p^s f_p = \frac{1}{c_p^s} R_p^{-s} * f_p$ et $\Delta_{\mathbb{A}^*}^s = \otimes_p \Delta_p^s$ qui est un opérateur défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{A}^*)$.

Pour $\tilde{f}(x) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} f(qx) \in \mathcal{S}$, nous posons :

$$\Delta^s \tilde{f}(x) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} \Delta_{\mathbb{A}^*}^s f(qx).$$

Il est facile de voir que la somme ci-dessus converge pour $\text{Re } s \gg 1$, et nous donne un opérateur bien défini sur \mathcal{S} . Nous ne nous étendrons pas ici, cependant, sur son prolongement analytique et noterons simplement que $\Delta^0 \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x)$. Notre but principal ici sera de prouver ci-dessous la

Formule globale

$$\sum_{q \in \mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \Delta_{\mathbb{A}^*}^s f(q) = \sum_{\zeta(s)=0} \mathcal{M}^s(f) - \mathcal{M}^0(f) - \mathcal{M}^1(f)$$

où la somme du côté droit est étendue sur tous les zéros de $\zeta(s)$.

Preuve. Par linéarité, il suffit de considérer les $f = \otimes_p f_p$ élémentaires symétriques, de telle façon

$$\begin{aligned} \text{que } \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \Delta_{\mathbb{A}^*}^s f(q) &= \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \Delta_p^s f_p(q) \\ &= \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \prod_p \Delta_p^s (f_p(qx_p))(1) \text{ puisque } \Delta_p^s f_p(q) = |q|_p^{-s} \cdot \Delta_p^s (f_p(qx_p))(1) \text{ et } \prod_p |q|_p^{-s} = 1 \\ &= \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \Delta_p^s (f_p(qx_p))(1) \cdot \prod_{p' \neq p} f_{p'}(q) \text{ puisque } \Delta_{p'}^0 f_{p'} = f_{p'}, \\ &= \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \Delta_p^s (\tilde{f}|_p)(1) \text{ puisque } \tilde{f}|_p(x_p) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} f_p(qx_p) \prod_{p' \neq p} f_{p'}(q), \\ &= \sum_{q \in \mathbb{Q}^*} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} R_p^{-s} * \tilde{f}|_p(1) \text{ puisque } c_p^0 = 1, \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} c_p^s = 0, \\ &= \sum_p \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \mathcal{M}^s(\tilde{f}) d \log \frac{\zeta_p(s)}{\zeta_p(1-s)} \quad \text{par la formule locale,} \\ &= \sum_p \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}^s(\tilde{f}) d \log \zeta_p(s) - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}^{1-s}(\tilde{f}) d \log \zeta_p(s) \quad \text{pour tout } c > 0, \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}^s(\tilde{f}) d \log \zeta(s) - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{M}^{1-s}(\tilde{f}) d \log \zeta(s) \quad \text{pour tout } c > 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} + \int_{1-c+i\infty}^{1-c-i\infty} \mathcal{M}^s(\tilde{f}) d \log \zeta(s) \quad \text{par l'équation fonctionnelle : } \zeta(s) = \zeta(1-s), \\
&= \sum_{\zeta(s)=0} \mathcal{M}^s(\tilde{f}) - \mathcal{M}^0(\tilde{f}) - \mathcal{M}^1(\tilde{f}) \quad \text{par le théorème des résidus.}
\end{aligned}$$

Références

- [1] Berg. C., Forst, G. : Potential theory on locally compact abelian groups. Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1975.
- [2] Feller, W. : An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 2, New York : John Wiley and Sons 1970.
- [3] Haran, S. : Index theory, Potential Theory, and the Riemann hypothesis, In : Proc. LMS Symp. on "L-functions and Arithmetic", Durham, 1989 (to appear).
- [4] Haran, S. : Analytic Potential Theory over the p -Adics (Preprint).
- [5] Landkof, N.S. : Foundations of Modern Potential Theory. Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1972.
- [6] Taibleson, M.H. : Fourier Analysis on Local Fields, Princeton University Press 1975.
- [7] Weil, A. : Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. Paris : Hermann (1948).
- [8] Weil, A. : Sur les formules explicites de la théorie des nombres premiers. Proc. R. Physiogr. Soc. Lund **21**, 252-265 (1952).
- [9] Weil, A. : Sur les formules explicites de la théorie des nombres, Izv. Mat. Nauk. **36**, 3-18 (1972).

Oblatum 3-XII-1989

Nombres premiers et spectres

1. Idéaux maximaux et nombres premiers

Nous disons qu'un idéal d'équivalence $\varepsilon \in eq(A)$ est *propre* si $(1, 0) \notin \varepsilon$, ou de façon équivalente, $\varepsilon_X \not\subseteq A_X \times A_X$ pour quelques / tous les $X \in \mathbb{F}_\bullet$, ou de façon équivalente $A/\varepsilon \neq 0$.

Nous disons qu'un idéal, ou un h -idéal, \mathfrak{a} est *propre* si $1 \notin \mathfrak{a}$, ou de façon équivalente $\mathfrak{a}_{[1]} \not\subseteq A_{[1]}$.

Puisqu'une union de chaîne d'idéaux propres est encore un h -idéal propre, une application du lemme de Zorn donne la

(1.1) **Proposition** : Pour $A \in \mathcal{GR}$, il existe un h -idéal propre maximal.

Nous notons $Max(A) \subseteq h-il(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux.

(1.2) **Définition** : Un h -idéal (propre) $\mathfrak{p} \in h-il(A)$ est dit être un *premier* si $A_{[1]} \setminus \mathfrak{p}$ est fermé relativement à la multiplication, i.e. si pour tout $a, b \in A_{[1]}$,

$$a \circ b \in \mathfrak{p} \quad \text{implique} \quad a \in \mathfrak{p} \quad \text{ou} \quad b \in \mathfrak{p}$$

Nous notons $spec(A) \subseteq h-il(A)$ l'ensemble des premiers de A .

(1.3) **Proposition** : $Max(A) \subseteq spec(A)$.

2. La topologie de Zariski

Les *ensembles fermés* dans $spec(A)$ sont définis comme étant les ensembles de la forme

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in spec(A), \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\}, \tag{0.1}$$

avec $\mathfrak{a} \subseteq A_{[1]}$, que nous pouvons prendre comme étant un h -idéal $\mathfrak{a} \in il(A)$.

On a (2.2)

$$(i) \quad V(\sum_i \mathfrak{a}_i) = \bigcap_i V(\mathfrak{a}_i),$$

$$(ii) \quad V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a}'),$$

$$(iii) \quad V(0) = spec(A), \quad V(1) = \emptyset$$

Cela montre que les ensembles $V(\mathfrak{a})$ définissent une topologie sur $spec(A)$, la *topologie de Zariski*.

Pour un sous-ensemble $C \subseteq \text{spec}(A)$, on a le h -idéal,

$$I(C) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in C} \mathfrak{p} \quad (0.2)$$

Il y a une correspondance de Galois

$$h\text{-il}(A) \begin{array}{c} \xrightarrow{V} \\ \xleftarrow{I} \end{array} \{C \subseteq \text{spec}(A)\} \quad (0.3)$$

Les fonctions V, I sont monotones

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 &\Rightarrow V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \\ C_1 \subseteq C_2 &\Rightarrow I(C_1) \supseteq I(C_2) \end{aligned} \quad (0.4)$$

et on a

$$\mathfrak{a} \subseteq IV(\mathfrak{a}), \quad C \subseteq VI(C) \quad (0.5)$$

Il en découle qu'on a

$$V(\mathfrak{a}) = VIV(\mathfrak{a}) \quad \text{et} \quad I(C) = IVI(C) \quad (0.6)$$

et les fonctions V, I induisent des bijections inverses

$$\{\mathfrak{a} \in h\text{-il}(A), \mathfrak{a} = IV(\mathfrak{a})\} = \{I(C), C \subseteq \text{spec}(A)\} \xrightarrow{\sim} \{C \subseteq \text{spec}(A), C = VI(C)\} = \{V(\mathfrak{a}), \mathfrak{a} \in h\text{-il}(A)\}$$

(2.9) **Lemme :** Pour $\mathfrak{a} \in h\text{-il}(A)$, on a

$$IV(\mathfrak{a}) = \{a \in A_{[1]}, a^n \in \mathfrak{a} \text{ pour un certain } n > 0\} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathfrak{a}}$$

(2.11) **Lemme :** Pour un sous-ensemble $C \subseteq \text{spec}(A)$, $VI(C) = \overline{C}$ la fermeture de C .

3. Ensembles ouverts de base

Une base d'ensembles ouverts de $\text{spec}(A)$ est donnée par les *ensembles ouverts de base*, ceux-ci sont définis pour $a \in A_{[1]}$ par

$$D_a = \text{spec}(A) \setminus V(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{spec}(A), a \notin \mathfrak{p}\} \quad (0.8)$$

On a

$$\begin{aligned} D_{a_1} \cap D_{a_2} &= D_{a_1 \circ a_2} \\ D_1 &= \text{spec}(A), \quad D_0 = \emptyset \end{aligned} \quad (0.9)$$

Le fait que tout ensemble ouvert est l'union d'ensembles ouverts de base est démontré par

$$\text{spec}(A) \setminus V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} D_a \quad (0.10)$$

Notons qu'on a

$$D_a = \text{spec}(A) \Leftrightarrow a \circ A_{[1]} = \{a\}_A = (1) \Leftrightarrow \text{il existe un (unique) } a^{-1} \in A_{[1]}, a \circ a^{-1} = 1$$

Nous disons qu'un tel a est *inversible*, et nous notons par A^* l'ensemble des éléments inversibles.

Notons que A^* est un groupe abélien (avec involution), et que $A \mapsto A^*$ est un foncteur $\mathcal{GR} \rightarrow Ab$ (= groupes abéliens).

Notons que l'on a

$$D_a = \emptyset \Leftrightarrow a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{spec}(A)} \mathfrak{p} = \sqrt{0} \Leftrightarrow \text{il existe } n > 0 \text{ avec } a^n = 0$$

Nous disons qu'un tel a est *nilpotent*.

(3.6) **Lemme** : Soit $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \in h\text{-il}(A)$ soit un h -ideal racine. Alors $V(\mathfrak{a})$ est irréductible si et seulement si \mathfrak{a} est premier.

(3.9) **Proposition** : Pour $a \in A_{[1]}$, l'ensemble ouvert de base D_a est compact.

En particulier, $D_1 = \text{spec}(A)$ est compact.

4. Functorialité

Pour un homomorphisme d'anneaux généraux $\varphi \in \mathcal{GR}(A, B)$, le pull-back d'un premier est un premier, et nous avons l'application

$$\begin{aligned} \varphi^* = \text{spec}(\varphi) : \text{spec}(B) &\rightarrow \text{spec}(A) \\ \mathfrak{q} &\mapsto \varphi^*(\mathfrak{q}) = \varphi_{[1]}^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned} \quad (0.11)$$

L'image inverse selon φ^* d'un ensemble fermé est un ensemble fermé, nous avons

$$\varphi^{*-1}(V_A(\mathfrak{a})) = \{\mathfrak{q} \in \text{spec}(B), \varphi_{[1]}^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq \mathfrak{a}\} = \{\mathfrak{q} \in \text{spec}(B), \mathfrak{q} \supseteq \varphi_{[1]}(\mathfrak{a})\} = V_B(\varphi_{[1]}(\mathfrak{a}))$$

De plus, l'image inverse selon φ^* d'un ensemble ouvert de base est un ensemble ouvert de base, nous avons

$$\varphi^{*-1}(D_a) = \{\mathfrak{q} \in \text{spec}(B), \varphi_{[1]}^{-1}(\mathfrak{q}) \not\ni a\} = \{\mathfrak{q} \in \text{spec}(B), \varphi_{[1]}(a) \notin \mathfrak{q}\} = D_{\varphi_{[1]}(a)}$$

Par conséquent, l'application $\varphi^* = \text{spec}(\varphi)$ est continue, et nous voyons que spec est un foncteur contravariant de \mathcal{GR} vers la catégorie Top , dont les objets sont des espaces topologiques (compacts, sobres), et les applications continues

$$\text{spec} : (\mathcal{GR})^{op} \rightarrow Top \quad (0.12)$$

(4.5) **Lemme** : Pour $\varphi \in \mathcal{GR}(A, B)$, et pour $\mathfrak{b} \in h\text{-il}(B)$, on a $V_A(\varphi_{[1]}^{-1}(\mathfrak{b})) = \overline{\varphi^*(V_B(\mathfrak{b}))}$.

5. Le spectre stable

Dans cette section, supposons que $A \in \mathcal{GR}^+$ est self-adjoint.

Une application du lemme de Zorn, en remarquant que $0 \in E\text{-}[1]\text{-il}(A)$, et que pour une chaîne $\mathfrak{a}_i \in E\text{-}[1]\text{-il}(A)$ également, l'union est stable, $\bigcup \mathfrak{a}_i \in E\text{-}[1]\text{-il}(A)$, donne la

(5.1) **Proposition** : Il existe des h -idéaux propres maximaux *stables*.

Plus généralement, pour un h -idéal stable $a \in E-[1]-il(A)$, et pour $f \in A_{[1]}$, tel que $f^n \notin a$ pour tout n , une application du lemme de Zorn permet d'affirmer qu'il existe un élément maximal m dans l'ensemble

$$\{b \in E-[1]-il(A), b \supseteq a, f^n \notin b \text{ pour tout } n\} \quad (0.13)$$

(5.3) **Assertion** : Un tel m maximal est premier, $m \in Spec(A)$.

(5.4) **Corollaire** : Pour un h -idéal stable $a \in E-[1]-il(A)$, on a

$$\sqrt{a} = \bigcap_{a \subseteq p \in ESpec(A)} p$$

l'intersection prise sur tous les premiers *stables* contenant a .

On a $ESpec(A) \subseteq spec(A)$, le sous-ensemble des premiers stables, et on lui donne la topologie induite de Zariski.

Les ensembles fermés sont

$$\tilde{V}(a) = V(a) \cap ESpec(A), \quad a \subseteq A_{[1]} \quad (0.14)$$

Notons que cet ensemble dépend seulement de $ZE(a)_{[1]}$, et nous pouvons prendre $a \in E-[1]-il(A)$.

Pour un sous-ensemble $C \subseteq ESpec(A)$, $I(C) = \bigcap_{p \in C} p$ est stable, $I(C) \in E-[1]-il(A)$.

Les formules, et les lemmes du paragraphe 2 ramènent au modèle stable. On a une correspondance de Galois

$$E-[1]-il(A) \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{V}} \\ \xleftarrow{I} \end{array} \{C \subseteq ESpec(A)\} \quad (0.15)$$

induisant une bijection.

$$\{a \in E-[1]-il(A), a = \sqrt{a}\} \xrightarrow{\sim} \{C \subseteq ESpec(A), C = \overline{C} \text{ closed}\} \quad (0.16)$$

Une base pour la topologie de $ESpec(A)$ est donnée par les *ensembles ouverts stables de base*,

$$\tilde{D}_a = ESpec(A) \setminus \tilde{V}(a) = \{p \in ESpec(A), a \notin p\} = D_a \cap ESpec(A) \quad (0.17)$$

Notons que nous avons $\tilde{D}_a = ESpec(A) \Leftrightarrow ZE(a \circ A)_{[1]} = A_{[1]}$ si et seulement si il existe un chemin $1 = a_1, a_2, \dots, a_l = 0$, avec $\{a_j, a_{j+1}\}$ de la forme $\{(b \circ c, d), (b \circ \bar{c}, d)\}$, avec $b, d \in A_{X_j \oplus Y_j}$, $c, \bar{c} \in (A_{[1]})^{X_j \oplus Y_j}$, et $c^{(x)} = \bar{c}^{(x)}$ pour $x \in X_j$, $c^{(y)} = a$, $\bar{c}^{(y)} = 0$ pour $y \in Y_j$.

Nous disons que a est une *unité*, et nous notons $A^{(1)}$ l'ensemble des unités; $A^* \subseteq A^{(1)} \subseteq A_{[1]}$.

Notons que d'un autre côté,

$$\tilde{D}_a = \emptyset \Leftrightarrow a \in \bigcap_{p \in ESpec(A)} p = \sqrt{0} \Leftrightarrow a \text{ est nilpotent} \Leftrightarrow D_a = \emptyset \quad (0.18)$$

Par conséquent, nous avons la

(5.11) **Proposition** : $ESpec(A)$ est dense dans $spec(A)$.

Pour un idéal stable radical, $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \in E\text{-}[1]\text{-il}(A)$, et pour $a \in A_{[1]}$, nous avons, voir l'équation (3.7),

$$\tilde{V}(\mathfrak{a}) \cap \tilde{D}_a \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists \mathfrak{p} \in E\text{Spec}(A), \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}, \mathfrak{p} \not\ni a \Leftrightarrow a \notin \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$$

Ainsi (3.6) devient : $\tilde{V}(\mathfrak{a})$ est irréductible si et seulement si \mathfrak{a} est premier.

Par conséquent la bijection (0.16) induit une bijection

$$E\text{Spec}(A) \xrightarrow{\sim} \{C \subseteq E\text{Spec}(A), C \text{ fermé et irréductible}\} \quad (0.19)$$

i.e. l'espace $E\text{Spec}(A)$ est également sobre.

(5.14) **Proposition** : Les ensembles de base ouverts stables $\tilde{D}_a = D_a \cap E\text{Spec}(A)$ sont compacts.

En particulier, $\tilde{D}_1 = E\text{Spec}(A)$ est compact.

TRIPLETS SPECTRAUX ET ζ -CYCLES

Alain Connes, Caterina Consani

Juin 2021

Résumé : Nous exhibons de très petites valeurs propres de la forme quadratique associée aux formules explicites de Weil restreinte aux fonctions test dont le support est dans un intervalle fixé de borne supérieure S . Nous montrons à la fois numériquement et conceptuellement que les vecteurs propres associés sont obtenus par une opération arithmétique simple de somme finie utilisant les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates associées au facteur d'échelle S . Puis nous utilisons ces fonctions pour conditionner le triplet spectral canonique du cercle de longueur $L = 2\text{Log}(S)$ de telle façon qu'elles appartiennent au noyau de l'opérateur de Dirac perturbé. Nous montrons l'évidence d'une propriété numérique qui fait que, quand on fait varier L , les valeurs du spectre sous-tendu par le triplet spectral perturbé ressemblent aux zéros de la fonction zeta de Riemann. Nous justifions conceptuellement ce résultat et montrons que, pour chaque valeur propre, la coïncidence est parfaite pour les valeurs particulières de la longueur L du cercle pour lesquelles les deux manières naturelles de réaliser la perturbation donnent la même valeur propre. Ce fait est testé numériquement en reproduisant les 30 premiers zéros de la fonction zeta de Riemann de notre côté spectral, et nous estimons quelle serait la probabilité d'obtenir cette coïncidence de façon aléatoire, comme un petit nombre dont les 50 premières décimales vaudraient 0. Le concept théorique qui émerge est celui de ζ -cycle et notre résultat principal établit comment ce concept est relié à la fonction zeta de Riemann et à la réalisation spectrale de ces zéros, réalisation spectrale qui avait été découverte par le premier auteur.

1 Introduction

Quand on contemple les zéros les plus petits de la fonction zeta de Riemann, on est tenté d'émettre l'hypothèse qu'ils pourraient former le spectre d'un opérateur de la forme $\frac{1}{2} + iD$ avec $D = D^*$ auto-adjoint, et de rechercher la géométrie fournie par un triplet spectral¹ dont D est l'opérateur de Dirac. Dans cet article, nous donnons la construction d'un triplet spectral $\Theta(\lambda, k) = (\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{H}(\lambda), D(\lambda, k))$ qui admet, comme on le montre pour les petites valeurs de $\lambda > 1$, un spectre de forme $\frac{1}{2} + iD$ très similaire aux zéros de la fonction zeta de Riemann (un exemple de ce fait est fourni dans la Figure 1, pour $\lambda^2 = 10.5$). Plus précisément, le triplet spectral $\Theta(\lambda, k)$ dépend de λ et également du choix d'un entier $k < 2\lambda^2$; de plus, pour une valeur fixée de k , les valeurs propres positives non-nulles $\lambda_n(D(\lambda, k))$ ordonnées de manière croissante, varient continuellement selon λ . Un fait étrange (d'abord découvert numériquement) est que pour des valeurs spécifiques de λ , la dépendance de $\lambda_n(D(\lambda, k))$ de la valeur de k (suffisamment proche de $2\lambda^2$) disparaît (voir la Figure 2 pour le cas $n = 1$), alors que les *valeurs communes* de ces $\lambda_n(D(\lambda, k))$ coïncident exactement avec la partie imaginaire du n -ième zéro de la fonction zeta de Riemann !

Cela signifie que la ressemblance qualitative des spectres comme dans la Figure 1 produit en fait une coïncidence fine dans un certain intervalle : en faisant varier λ dans l'intervalle $5 \leq \lambda^2 \leq 16.5$, et en déterminant les valeurs propres coïncidant jusqu'à $n = 31$, on produit 31 nombres dans un accord surprenant avec la collection complète des valeurs des 31 premiers zéros de la fonction zeta (voir la Figure 3 ; incidemment, noter que la probabilité d'obtenir un tel accord par choix aléatoire est de l'ordre de 10^{-50}).

La seconde auteure est partiellement financée par la Fondation Simons n 691493.

Traduction de l'article <https://arxiv.org/abs/2106.01715> : Denise Vella-Chemla (on n'a traduit aucune démonstration).

Mots-clés : Triplet spectral, positivité de Weil, fonction zeta de Riemann, réalisation spectrale, fonctions sphéroïdales prolates.

Classification des sujets mathématiques : 11M55 (primaire), 11M06, 46L87, 58B34 (secondaire).

¹La notion de triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ où \mathcal{A} est une algèbre agissant dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} et D est un opérateur auto-adjoint non borné dans \mathcal{H} , est un paradigme essentiel de la géométrie non-commutative [2].

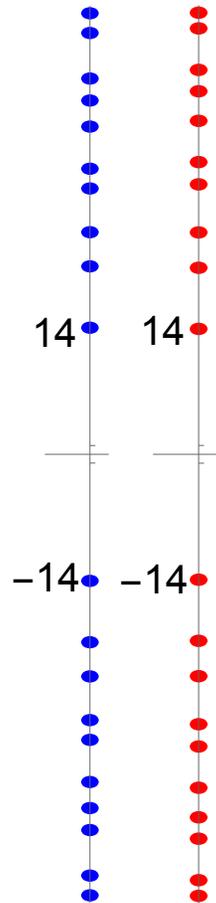


Figure 1: Les valeurs basses du spectre de $iD(\lambda, k)$ pour $\lambda^2 = 10.5$, $k = 18$, sur la gauche (en bleu). Sur la droite (en rouge), les valeurs basses des zéros de la fonction zeta de Riemann.

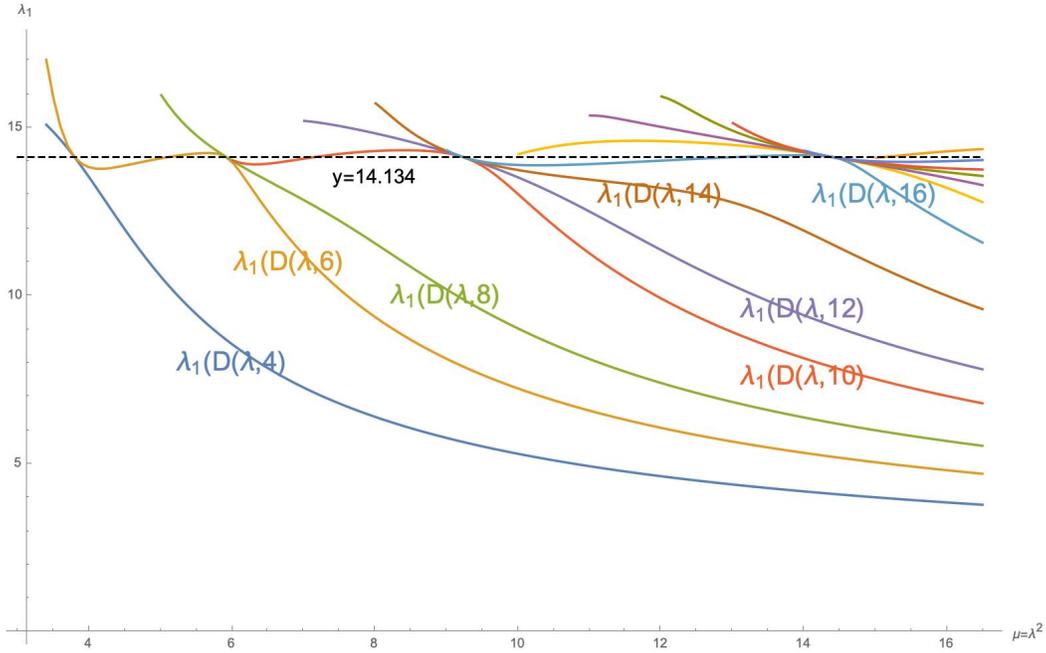


Figure 2: Ces courbes représentent comme une fonction de $\mu = \lambda^2$ la première valeur propre positive $\lambda_1(D(\lambda, 2k))$ de $D(\lambda, 2k)$. L'ordonnée des points où les courbes se touchent est constante et coïncide avec la partie imaginaire $\zeta_1 \sim 14.134$ du premier zéro de zeta. Les abscisses, i.e. les valeurs de μ , sont éléments d'une progression géométrique de raison $\exp(\frac{2\pi}{\zeta_1})$.

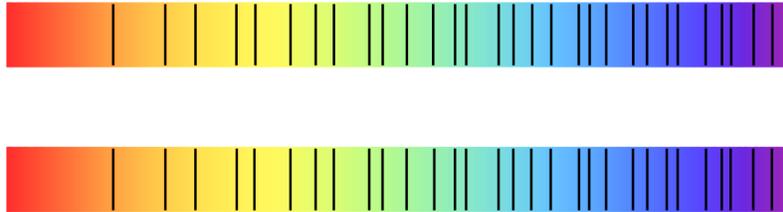


Figure 3: En calculant les valeurs propres qui coïncident $\lambda_j(D(\lambda, k))$, on obtient une liste (la ligne inférieure) qu'on compare avec la liste (la ligne supérieure) des parties imaginaires ζ_j des zéros de zeta.

Le but principal de cet article est de fournir une explication théorique pour cette “coïncidence” numérique et de la relier à la réalisation spectrale des zéros de la fonction zeta donnée en [3]. Le nouveau concept qui émerge est celui de ζ -cycle.

Dans la Section 6.1, nous expliquons comment définir des sommes de Riemann invariantes par mise à l'échelle pour des fonctions définies sur $[0, \infty)$ dont l'intégrale s'évanouit. Cela est réalisé en définissant une fonction linéaire

$$\Sigma_\mu \mathcal{E} : \mathcal{S}_0^{\text{ev}} \rightarrow L^2(C)$$

de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ des fonctions paires, $f, f(0) = 0$, dont l'intégrale s'évanouit, vers les fonctions de carré intégrable sur le cercle $C = \mathbb{R}_+^* / \mu^{\mathbb{Z}}$ de longueur $L = \log \mu$. La notion-clé est fournie par la

Définition 1.1. Un ζ -cycle est un cercle C de longueur $L = \log \mu$ tel que le sous-espace $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})$ n'est pas dense dans l'espace de Hilbert $L^2(C)$.

Il s'avère que comme pour les géodésiques fermées, les ζ -cycles sont stables selon les recouvrements finis, et que si C est un ζ -cycle de longueur L , alors la couverture n -pliée de C est un ζ -cycle de longueur nL , pour tout entier positif $n > 0$.

Par construction, le sous-espace $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}}) \subset L^2(C)$ est invariant par le groupe des rotations du cercle qui apparaît ici à partir de l'action de mise à l'échelle du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* sur $C = \mathbb{R}_+^*/\mu^{\mathbb{Z}}$. Le principal résultat de cet article est le suivant :

Théorème 1.1.

(i) *Le spectre de l'action du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* sur l'orthogonal de $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})$ dans $L^2(C)$ est constitué par les parties imaginaires des zéros de la fonction zeta de Riemann qui sont situés sur la droite critique.*

(ii) *Soit $s > 0$ tel que $\zeta(\frac{1}{2} + is) = 0$, alors tout cercle de longueur un multiple entier de $2\pi/s$ est un ζ -cycle, et le spectre de l'action de \mathbb{R}_+^* sur $(\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}}))^\perp$ contient s .*

Les espaces de Sobolev ad-hoc utilisés dans [3] pour fournir la réalisation des zéros de zeta sont ici remplacés par l'espace de Hilbert canonique $L^2(C)$ des fonctions intégrables de carré mesurable. De plus, le théorème 1.1 fournit la justification théorique de la coïncidence présentée ci-dessus des valeurs spectrales. En effet, les valeurs particulières de $\lambda^2 = \mu = \exp L$ auxquelles la dépendance de k de la valeur propre $\lambda_n(D(\lambda, k))$ disparaît, indiquent que le cercle relié de longueur L est un ζ -cycle et que $\lambda_n(D(\lambda, k))$ appartient à son spectre. Cela explique pourquoi la partie basse du spectre du triplet spectral $\Theta(\lambda, k)$ possède une extraordinaire ressemblance avec les premiers zéros de la fonction zeta de Riemann. En effet, les valeurs particulières de la longueur (L) du cercle pour lesquelles les $\lambda_n(D(\lambda, k))$ coïncident font partie de la progression arithmétique des multiples de $2\pi/\zeta_n$, où ζ_n est la partie imaginaire du n -ième zéro de la fonction zeta. Cela oblige les courbes des fonctions $\lambda_n(D(\mu^{1/2}, k))$ à passer par des points de la forme $(\exp(2\pi m/\zeta_n), \zeta_n)$ (comme dans la Figure 2), ce qui entraîne que la partie basse du spectre de $D(\lambda, k)$ (lorsque $k \sim 2\lambda^2$) imite les premiers zéros de la fonction zeta.

Le triplet spectral $\Theta(\lambda, k)$ est une perturbation de rang fini de l'opérateur de Dirac sur un cercle de longueur $\log \mu = 2 \log \lambda$ et met en jeu, comme ingrédient-clé, les fonctions d'ondes prolates sphéroïdales classiques [11, 12, 13]. Ces fonctions sont utilisées pour définir un sous-espace de dimension finie (de dimension k) de l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur le cercle de longueur $2 \log \lambda$, et l'opérateur $D(\lambda, k)$ est alors *canoniquement* obtenu à partir de l'opérateur de différentiation ordinaire $D_0(\lambda)$ pour assurer que son noyau contient le sous-espace de dimension finie ci-dessus.

A priori, il ne semble pas qu'il y ait de relation entre la construction du triplet spectral $\Theta(\lambda, k)$ et la fonction zeta de Riemann : dans la Section 3, nous expliquons comment nous sommes tombés sur $\Theta(\lambda, k)$ en poursuivant nos recherches de la forme quadratique de Weil restreinte aux fonctions de test à support dans un intervalle fixé. Les formules explicites de Riemann-Weil fournissent une expression finie et concrète de la forme quadratique semi-locale de Weil (voir la Section 2) qui permet une exploration numérique puisqu'elle n'implique que les nombres premiers inférieurs à, disons, λ^2 . Par formule quadratique de Weil semi-locale, nous entendons la restriction QW_λ de la forme sesquilinéaire

$$QW(f, g) := \sum_{1/2+is \in Z} \overline{\widehat{f}(s)} \widehat{g}(s) \tag{1.1}$$

des fonctions-test f, g dont le support est contenu dans l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda] \subset \mathbb{R}_+^*$. Dans (1.1), Z est l'ensemble des zéros non triviaux de la fonction zeta de Riemann et la transformation de Fourier est définie sur $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ par

$$\widehat{f}(s) = \mathbb{F}_\mu(f)(s) := \int_{\mathbb{R}_+^*} f(u) u^{-is} d^* u. \tag{1.2}$$

On sait que la positivité de la forme quadratique de Weil QW_λ pour tout λ implique l'hypothèse de Riemann (RH), et dans le cas où RH est vérifiée, on sait que QW_λ est strictement positive. Dans [14], la positivité a été démontrée comme étant vérifiée lorsque $\lambda = \sqrt{2}$ en utilisant l'analyse numérique. Dans la Section 2, nous testons numériquement la positivité pour des valeurs plus grandes de λ , en montrant

(au § 2.2) que la contribution de la place archimédienne seule cesse d'être positive dans la partie haute de l'intervalle $\log(\lambda^2) \in [\log 2 - 0.2, \log 2 + 0.2] \sim [0.493, 0.893]$, alors que cette positivité est restaurée en ajoutant la contribution du nombre premier 2. Cette dernière contribution dépend explicitement de $p = 2$ dans une forme W_p qui peut en fait être évaluée pour tout nombre réel $p \sim 2$ (*i.e.* proche de 2 mais non égal à 2). Nous montrons (au § 2.3) qu'en requérant la positivité, on restreint les valeurs autorisées de p à appartenir à un intervalle de taille $\sim 10^{-3}$ autour de $p = 2$, et au § 2.4, nous montrons que lorsque λ^2 croît au-delà d'une puissance de nombre premier et si l'on ignore sa contribution, la forme quadratique QW_λ ne réussit pas à rester positive. Ce fait est vérifié jusqu'à $\lambda^2 \sim 7$.

Un résultat numérique frappant est décrit au § 2.5, où nous signalons l'évidence numérique selon laquelle lorsque λ croît, l'opérateur correspondant dans $\mathcal{H}(\lambda) := L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ admet un nombre fini de valeurs propres positives extrêmement petites. Par exemple, on trouve que quand $\lambda^2 = 11$, la plus petite valeur positive est 2.389×10^{-48} .

Les fonctions propres correspondantes sont présentées graphiquement sur les Figures 22, 23, 24.

La Section 3 explique conceptuellement la présence de ces valeurs propres positives extrêmement petites et on fournit alors également une excellente approximation des fonctions propres qui leur sont associées. La raison théorique de la présence de ces valeurs propres extrêmement petites provient du fait que le radical de la forme quadratique de Weil contient le domaine de la fonction \mathcal{E} de [3], qui est définie sur le sous-espace de codimension 2 $\mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ des fonctions de Schwartz paires en remplaçant la condition $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$ par

$$\mathcal{E}(f)(x) := x^{1/2} \sum_{n>0} f(nx), \quad \forall f \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}}. \quad (1.3)$$

Même si RH implique que QW_λ est strictement positive, et qu'ainsi son radical est $\{0\}$, en utilisant (1.3), on peut cependant construire des fonctions g dont le domaine est inclus dans $[\lambda^{-1}, \lambda]$ qui sont dans le "radical proche" de la forme quadratique de Weil *i.e.* qui vérifient $QW_\lambda(g) \ll \|g\|^2$. Plus précisément, si le support de la fonction paire $f \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ est contenu dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$, le support de $\mathcal{E}(f)$ est contenu dans $(0, \lambda] \subset \mathbb{R}_+^*$. D'un autre côté, la formule de Poisson

$$\mathcal{E}(\widehat{f})(x) = \mathcal{E}(f)(x^{-1}), \quad \forall f \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}} \quad (1.4)$$

montre que le support de $\mathcal{E}(f)$ est contenu dans $[\lambda^{-1}, \infty)$ à partir du moment où le support de la fonction paire \widehat{f} est contenu dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$. L'impossibilité d'obtenir un élément $\mathcal{E}(f)$ du radical de QW_λ est l'égalité $\mathcal{P}_\lambda \cap \widehat{\mathcal{P}}_\lambda = \{0\}$, où \mathcal{P}_λ et $\widehat{\mathcal{P}}_\lambda$ sont les projections de cutoff dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ des fonctions paires de carré intégrable (la projection \mathcal{P}_λ est donnée par la multiplication par la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$, la projection $\widehat{\mathcal{P}}_\lambda$ est son conjugué par la transformation de Fourier $\text{tF}_{e_\mathbb{R}}$). Le travail séminal de Slepian et Pollack [11, 12, 13] sur les fonctions à bande limitée montre alors que lorsque $\mathcal{P}_\lambda \cap \widehat{\mathcal{P}}_\lambda = \{0\}$, l'opérateur d'angle entre ces deux projections admet un nombre fini $1 + \nu(\lambda^2) \sim 2\lambda^2$ de valeurs propres non-nulles extrêmement petites et que les fonctions propres correspondantes sont les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates

$$\psi_{m,\lambda}(x) := PS_{2m,0} \left(2\pi\lambda^2, \frac{x}{\lambda} \right), \quad m \leq \nu(\lambda^2) \sim 2\lambda^2.$$

Par construction, chaque $\psi_{m,\lambda}$ est une fonction sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$ que l'on étend par 0 en dehors de cet intervalle. Sa transformation de Fourier $\mathbb{F}_{e_\mathbb{R}}(\psi_{m,\lambda})$ restreinte à l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$, est égale à $\chi_m \psi_{m,\lambda}$ où le scalaire χ_m est très proche de $(-1)^m$ à condition que m soit inférieur à $\nu(\lambda^2) \sim 2\lambda^2$. En prêtant attention à la vérification de ces deux conditions, $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$, la restriction de $\mathcal{E}(f)$ à l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$ permet d'obtenir une fonction que nous appelons un "vecteur prolate", et sur lequel QW_λ prend des valeurs non nulles, mais extrêmement petites. Ce fait est vérifié concrètement dans la Section 3 dans laquelle nous comparons les vecteurs propres de la forme quadratique de Weil QW_λ associée à ces plus petites valeurs propres avec l'orthogonalisation des vecteurs prolates obtenus en utilisant les techniques décrites ci-dessus, à partir des fonctions d'onde sphéroïdales prolates.

La construction du triplet spectral $\Theta(\lambda, k)$ est menée dans la Section 4. Même si cette construction est motivée par les résultats de la Section 3 sur le presque radical de la forme quadratique de Weil QW_λ , la technique employée n'utilise que les vecteurs prolates sans aucune référence à QW_λ . En utilisant les $k + 2$ premières fonctions prolates, on obtient un sous-espace k -dimensionnel de $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u) \simeq L^2(\mathbb{R}_+^*/\lambda^{2\mathbb{Z}}, d^*u)$, on dénote alors par $\Pi(\lambda, k)$ la projection orthogonale associée. Par définition, le triplet spectral $\Theta(\lambda, k) = (\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{H}(\lambda), D(\lambda, k))$ est donné par l'action par multiplication de l'algèbre des fonctions lisses $\mathcal{A}(\lambda) := C^\infty(\mathbb{R}_+^*/\lambda^{2\mathbb{Z}})$ sur $\mathcal{H}(\lambda) := L^2(\mathbb{R}_+^*/\lambda^{2\mathbb{Z}}, d^*u)$, alors que l'opérateur $D(\lambda, k)$ est la perturbation de rang fini

$$D(\lambda, k) := (1 - \Pi(\lambda, k)) \circ D_0 \circ (1 - \Pi(\lambda, k)), \quad D_0 = -iu\partial_u \quad (1.5)$$

de l'opérateur de Dirac standard $D_0 = -iu\partial_u$ (avec conditions périodiques aux limites quand on se place dans $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u) \simeq L^2(\mathbb{R}_+^*/\lambda^{2\mathbb{Z}})$). Nous calculons les valeurs basses du spectre de ces triplets spectraux et nous trouvons une ressemblance fine avec les premiers zéros de la fonction zeta de Riemann, à condition que k soit suffisamment proche de la plus grande valeur autorisée $\nu(\lambda^2)$. D'un autre côté, puisque les valeurs propres $\lambda_n(D(\lambda, k))$ varient selon λ , on ne peut pas s'attendre à ce qu'elles reproduisent exactement le n -ième zéro de la fonction zeta. La subtilité de la relation est expliquée dans la Section 5, où nous fournissons plusieurs critères pour retrouver les zéros de la fonction zeta de Riemann en utilisant les valeurs propres non-nulles $\lambda_n(D(\lambda, k))$. D'abord, nous montrons que pour $k = 2\ell$, les valeurs propres vérifient l'inégalité $\lambda_n(D(\lambda, k+1)) \leq \lambda_n(D(\lambda, k))$; ensuite nous démontrons (cf. § 5.1) que pour certaines valeurs de λ , on a $\lambda_n(D(\lambda, k+1)) \simeq \lambda_n(D(\lambda, k))$. Quand cela advient et quand k est suffisamment proche de la borne supérieure $\nu(\lambda^2)$, la valeur propre commune coïncide avec la partie imaginaire du n -ième zéro de la fonction zeta. Ce résultat est renforcé au § 5.2, où nous présentons sur des graphiques l'évolution des valeurs propres $\lambda_n(D(\lambda, k))$, comme des fonctions de $\mu = \lambda^2$, pour k fixé, et où nous trouvons que plusieurs courbes coïncident aux valeurs spécifiques ci-dessus de λ comme on le voit sur la Figure 2. Au § 5.3, on découvre que les points particuliers ainsi obtenus dans le plan (μ, λ_n) vérifient la condition de quantification

$$\mu^{i\lambda_n} = 1.$$

Ce résultat suggère que pour les valeurs spécifiques ci-dessus de λ , on a un vecteur propre qui est déjà un vecteur propre de l'opérateur de Dirac non perturbé D_0 . Au § 5.4 nous appliquons ce critère pour sélectionner les valeurs particulières de λ , et nous calculons les 31 premiers zéros de la fonction zeta de Riemann avec la précision fournie dans la Figure 3.

L'explication conceptuelle de ces découvertes expérimentales est le Théorème 1.1 dont la démonstration est fournie dans la section 6 (2).

2 La forme quadratique semi-locale de Weil

Dans cette section, nous testons numériquement la positivité de la forme quadratique de Weil $QW(f, g)$, dans le cas semi-local, notamment pour les fonctions de test f, g avec support dans l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$. Cette recherche se décompose en deux cas indépendants tels que $QW_\lambda = QW_\lambda^+ \oplus QW_\lambda^-$, selon la parité de f et g par rapport à l'opérateur de symétrie $u \mapsto u^{-1}$. Le Lemme 2.5 montre que pour les fonctions de test réelles, les fonctions paires n'interfèrent pas avec les fonctions impaires. De plus, par construction, la positivité de QW_λ dépend de la longueur $L = 2 \log \lambda$ du support des fonctions de test. Nous définissons dans (2.14) une base orthonormale $\{\eta_n, n \in \mathbb{Z}\}$ de l'espace de Hilbert $L^2([\lambda^{-1}, \lambda])$ formé par les fonctions réelles impaires (à cause de la symétrie $u \mapsto u^{-1}$) pour $n < 0$, et par des fonctions réelles paires pour $n \geq 0$. La matrice $\sigma(n, m) = QW(\eta_n, \eta_m)$ est la somme directe $\sigma = \sigma^+ \oplus \sigma^-$ de deux matrices réelles symétriques infinies, chacune d'elle s'exprimant comme une somme finie impliquant la contribution archimédienne $-W_{\mathbb{R}}$, ainsi que la contribution $-W_p$ pour les nombres premiers p inférieurs à $\mu = \lambda^2$. Les tests numériques consistent à évaluer les valeurs propres des très grandes portions de ces matrices correspondant aux indices n et m dont les valeurs absolues sont $\leq N$. Ces calculs mettent clairement en évidence que l'accroissement pour les grandes valeurs de N n'altère pas substantiellement la partie inférieure du spectre de $\sigma(n, m)$. Au § 2.2, nous trouvons que la contribution archimédienne $-W_{\mathbb{R}}$ à la forme quadratique de Weil, quand elle est

²La présente traduction ne contient aucune démonstration ; se reporter à l'article original en anglais <https://arxiv.org/abs/2106.01715>.

prise séparément, finit par être positive, lorsqu'on la calcule dans un intervalle s'étendant légèrement autour de la valeur $L = \log 2$ (Figure 6). Pourtant, la positivité est restaurée après cette valeur, et précisément dans l'intervalle $\log 2 \leq L < \log 3$, en implémentant également la contribution du nombre premier $p = 2$, en fonction de la fonctionnelle qui lui est liée $-W_2$. Au § 2.3, nous fournissons les résultats numériques obtenus qui confortent l'évidence du fait que le signe de QW_λ est également sensible au remplacement de $-W_2$ par une fonctionnelle $-W_p$ dont la définition utilise la même formule que celle fournie pour $-W_2$ en remplaçant 2 par p , prise comme une variable réelle dans un proche voisinage de $p = 2$. En effet, les calculs montrent que la positivité de la forme quadratique n'est pas vérifiée si l'on considère des valeurs réelles de p en dehors d'un intervalle de taille $< 10^{-3}$ autour de 2. Au § 2.4, nous rapportons l'évidence graphique indiquant combien la contribution de chaque fonctionnelle $-W_p$ est importante pour préserver la positivité de la forme quadratique, si le support de la fonction de test s'étend au-delà d'une puissance de nombre premier p^n . Finalement, au § 2.5, nous montrons l'évidence numérique du fait-clé qui est qu'en augmentant adéquatement le support des fonctions de test, les matrices "paires" et "impaires" σ^\pm admettent un nombre fini de valeurs positives extrêmement petites. La discussion théorique de ce résultat est présentée dans la section 3.

2.1 La matrice $\sigma = \sigma^+ \oplus \sigma^-$

Cette sous-section décrit le choix des fonctions de test utilisées dans le présent article pour effectuer les calculs numériques. Quand on la considère selon le point de vue de la théorie de Hilbert, la restriction QW_λ de la forme quadratique aux fonctions à support dans l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$ est une forme quadratique bornée inférieurement, semi-continue inférieurement, définie sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ avec des valeurs dans $(-\infty, +\infty]$. On choisit une base orthonormale $\{\eta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de \mathcal{H} qui est un noyau pour QW_λ et on calcule les valeurs propres pour de très larges portions de la matrice associée $QW(\eta_n, \eta_m) = \sigma(n, m)$.

2.1.1 Formule explicite

En se basant sur [1], on considère la classe \mathcal{W} des fonctions f à valeurs complexes sur \mathbb{R}_+^* qui sont continues et dont la dérivée est continue excepté en un nombre fini de points sur lesquels à la fois $f(x)$ et $f'(x)$ ont au plus une discontinuité de première espèce, et en lesquels les valeurs de $f(x)$ et $f'(x)$ sont définies comme moyenne de leur limite à droite et à gauche. De plus, on suppose que pour un certain $\delta > 0$, on a

$$f(x) = O(x^\delta), \text{ for } x \rightarrow 0+, \quad f(x) = O(x^{-1-\delta}), \text{ pour } x \rightarrow +\infty.$$

La transformée de Mellin de $f \in \mathcal{W}$ est définie par

$$\tilde{f}(s) := \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \quad (2.1)$$

Notons $f^\sharp(x) := x^{-1}f(x^{-1})$, alors la formule explicite de Weil prend la forme

$$\sum_\rho \tilde{f}(\rho) = \int_0^\infty f(x)dx + \int_0^\infty f^\sharp(x)dx - \sum_v \mathcal{W}_v(f), \quad (2.2)$$

où la somme du côté gauche est calculée sur tous les zéros complexes ρ de la fonction zeta de Riemann, et la somme du côté droit est calculée sur toutes les places rationnelles v de \mathbb{Q} . Les distributions non-archimédiennes \mathcal{W}_p sont définies par

$$\mathcal{W}_p(f) := (\log p) \sum_{m=1}^\infty (f(p^m) + f^\sharp(p^m)) \quad (2.3)$$

alors que la distribution archimédienne est donnée par

$$\mathcal{W}_\mathbb{R}(f) := (\log 4\pi + \gamma)f(1) + \int_1^\infty \left(f(x) + f^\sharp(x) - \frac{2}{x}f(1) \right) \frac{dx}{x - x^{-1}}. \quad (2.4)$$

La traduction en formules (équivalentes) en utilisant la transformation de Fourier (à la place de celle de Mellin) est effectuée en implémentant l'automorphisme Δ

$$f \mapsto \Delta^{1/2}f = F, \quad F(x) = x^{1/2}f(x) \quad (2.5)$$

qui respecte le produit de convolution et satisfait les égalités

$$(\Delta^{1/2} f^\sharp)(x) = x^{1/2} f^\sharp(x) = x^{-1/2} f(x^{-1}) = (\Delta^{1/2} f)(x^{-1}).$$

Après avoir pris les conjugués complexes, Δ est compatible avec les involutions naturelles. Pour une place rationnelle v , on pose $W_v(F) := \mathcal{W}_v(\Delta^{-1/2} F)$, alors les distributions ci-dessus \mathcal{W}_p prennent la forme suivante

$$W_p(F) = (\log p) \sum_{m=1}^{\infty} p^{-m/2} (F(p^m) + F(p^{-m})). \quad (2.6)$$

En utilisant la version multiplicative $d^*x = dx/x$ de la mesure de Haar, la distribution archimédienne $\mathcal{W}_{\mathbb{R}}$ devient

$$W_{\mathbb{R}}(F) := (\log 4\pi + \gamma)F(1) + \int_1^{\infty} (F(x) + F(x^{-1}) - 2x^{-1/2}F(1)) \frac{x^{1/2}}{x - x^{-1}} d^*x. \quad (2.7)$$

2.1.2 La forme quadratique semi-locale de Weil

La forme quadratique de Weil est maintenant réécrite comme

$$QW(f, g) = \psi(f^* * g), \quad \psi(F) := \widehat{F}(i/2) + \widehat{F}(-i/2) - W_{\mathbb{R}}(F) - \sum_p W_p(F) \quad (2.8)$$

où $\widehat{F}(s) := \int F(u)u^{-is}d^*u$ dénote la transformée de Fourier de la fonction F . De plus, la fonctionnelle $W_{\infty} := -W_{\mathbb{R}}$ vérifie la formule suivante

$$W_{\infty}(F) = \int \widehat{F}(t) \frac{2\partial_t \theta(t)}{2\pi} dt \quad (2.9)$$

en fonction de la dérivée de la fonction angulaire de Riemann-Siegel $\theta(t)$

$$\theta(t) = -\frac{t}{2} \log \pi + \Im \log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2} \right), \quad (2.10)$$

avec $\log \Gamma(s)$, pour $\Re(s) > 0$, la branche du log qui est réel pour s réel.

Par “forme quadratique bornée inférieurement, semi-continue inférieurement (lsc) q sur un espace de Hilbert \mathcal{H} ”, nous entendons “fonction semi-continue inférieurement”³ $q : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ qui vérifie $q(\lambda\xi) = |\lambda|^2 q(\xi)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la loi du parallélogramme

$$q(\xi + \eta) + q(\xi - \eta) = 2q(\xi) + 2q(\eta)$$

et également une inégalité de la forme $q(\xi) \geq -c\|\xi\|^2$ pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, réfléchissant la borne inférieure de q .

La forme sesquilinéaire associée (antilinéaire en la première variable) est donnée sur le domaine de q , $\text{Dom}(q) := \{\xi \in \mathcal{H} \mid q(\xi) < \infty\}$ par

$$q(\xi, \eta) := \frac{1}{4} (q(\xi + \eta) - q(\xi - \eta) + iq(i\xi + \eta) - iq(i\xi - \eta)).$$

Par un résultat de Kato (voir [10], Théorème 2) qui énonce que les formes quadratiques inférieurement bornées correspondent aux opérateurs auto-adjoints définis par une densité inférieurement bornée $T \geq -c$ sur \mathcal{H} par la formule

$$q(\xi) + c\|\xi\|^2 = \langle (T + c)^{\frac{1}{2}} \xi \mid (T + c)^{\frac{1}{2}} \xi \rangle = \|(T + c)^{\frac{1}{2}} \xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

D’un point de vue informel, cela signifie que $q(\xi, \eta) = \langle \xi \mid T\eta \rangle$.

³*i.e.* telle que quand $\xi_n \rightarrow \xi$, on a $q(\xi) \leq \liminf q(\xi_n)$

Proposition 2.1. Soit $\lambda > 1$. La formule suivante définit une forme quadratique bornée inférieurement à borne inférieure semi-continue $QW_\lambda : L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u) \rightarrow (-\infty, +\infty]$

$$QW_\lambda(f, f) := \int |\widehat{f}(t)|^2 \frac{2\partial_t \theta(t)}{2\pi} dt + 2\Re \left(\widehat{f}\left(\frac{i}{2}\right) \overline{\widehat{f}\left(-\frac{i}{2}\right)} \right) - \sum_{1 < n \leq \lambda^2} \Lambda(n) \langle f | V(n)f \rangle \quad (2.11)$$

où $\Lambda(n)$ est la fonction de von Mangoldt et $V(n)$ est l'opérateur auto-adjoint borné dans $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ tel que

$$\langle f | V(n)g \rangle = n^{-1/2} ((f^* * g)(n) + (f^* * g)(n^{-1})). \quad (2.12)$$

Lemme 2.2. Soit $\lambda > 1$, et $U \in L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$ étant la fonction $U(u) := u^{\frac{i\pi}{\log \lambda}}$. Alors l'espace des polynômes de Laurent $\mathbb{C}[U, U^{-1}]$ est un noyau de la forme quadratique QW_λ .

Proposition 2.3. Soit $\lambda > 1$. La forme quadratique $QW_\lambda : L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u) \rightarrow (-\infty, +\infty]$ de (2.11) vérifie, pour tout $f \in L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*u)$,

$$QW_\lambda(f) = \liminf_{g_n \rightarrow f} QW_\lambda(g_n), \quad g_n \in \mathbb{C}[U, U^{-1}] \quad (2.13)$$

Corollaire 6.5. La borne inférieure de QW_λ est la limite, quand $N \rightarrow \infty$, de la plus petite valeur propre de la restriction de QW_λ au sous-espace vectoriel E_N engendré par les fonctions U^k pour $|k| \leq N$.

2.1.3 Base des fonctions réelles dans $\mathbb{C}[U, U^{-1}]$

Dans le but de calculer explicitement la plus petite valeur propre de la restriction de QW_λ à l'espace vectoriel E_N engendré par les fonctions U^k , pour $|k| \leq N$, comme dans le Corollaire 6.5, nous trouvons d'abord une base orthonormée convenable formée des fonctions à valeurs réelles. Nous considérons d'abord l'espace de Hilbert $L^2([-L/2, L/2]) \subset L^2(\mathbb{R})$ avec le produit intérieur défini par la formule

$$\langle \xi | \eta \rangle := \int_{-L/2}^{L/2} \overline{\xi(x)} \eta(x) dx$$

Une base orthonormale réelle est donnée par la fonction constante $\xi_0(x) = L^{-1/2}$ avec les fonctions $\xi_n(x)$ $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, définies comme suit

$$\begin{aligned} \xi_n(x) &:= (-1)^n \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \quad \forall n > 0 \\ \xi_n(x) &:= (-1)^n \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \quad \forall n < 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

On remarque les simples faits suivants

Lemme 2.5. Soit $L > 0$, $\phi_j \in L^2([-L/2, L/2])$ et $\theta = \phi_1 * \phi_2^*$. Alors

(i) Le support de θ est contenu dans l'intervalle $[-L, L]$, et pour $t \in [0, L]$, on a

$$\theta(t) = \int_{t-L/2}^{L/2} \phi_1(x) \overline{\phi_2(x-t)} dx, \quad \theta(-t) = \int_{t-L/2}^{L/2} \phi_1(x-t) \overline{\phi_2(x)} dx.$$

(ii) Si les fonctions ϕ_j sont réelles, alors : $\phi_1 * \phi_2^*(-t) = \phi_2 * \phi_1^*(t)$.

(iii) Si les fonctions ϕ_j sont réelles, avec ϕ_1 pair et ϕ_2 impair, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi_1 * \phi_2^*(t) + \phi_2 * \phi_1^*(t) = 0.$$

Il est pratique de réécrire la forme sesquilineaire de Weil $QW(f, g) = \psi(f^* * g)$ en utilisant l'invariance naturelle de la fonctionnelle ψ selon la symétrie $h^\sigma(u) := h(u^{-1})$. Ainsi

$$\psi(h) = \psi^\#(h + h^\sigma), \quad h^\sigma(u) := h(u^{-1}) \quad (2.15)$$

où

$$\psi^\#(F) := W_{0,2}^\#(F) - W_{\mathbb{R}}^\#(F) - \sum W_p^\#(F) \quad (2.16)$$

avec

$$W_{0,2}^\#(F) = \int_1^\infty F(x)(x^{1/2} + x^{-1/2})d^*x \quad (2.17)$$

$$W_{\mathbb{R}}^\#(F) = \frac{1}{2}(\log 4\pi + \gamma)F(1) + \int_1^\infty \frac{x^{1/2}F(x) - F(1)}{x - x^{-1}}d^*x \quad (2.18)$$

$$W_p^\#(F) = (\log p) \sum_{m=1}^\infty p^{-m/2}F(p^m). \quad (2.19)$$

Lemme 2.6. Avec $\eta_n(u) := \xi_n(\log u)$, les η_j , $|j| \leq n$ forment une base orthonormée de E_n .

(i) La matrice de la forme sesquilineaire de Weil est donnée par la formule suivante

$$QW_\lambda(\eta_n, \eta_m) = \sigma(n, m) = \psi^\#(h), \quad h(u) = (\xi_n * \xi_m^* + \xi_m * \xi_n^*)(\log u), \quad (2.20)$$

où $\psi^\#(h)$ est définie dans (2.16).

(ii) Pour $n \geq 0$, $m < 0$, on a $(\xi_n * \xi_m^* + \xi_m * \xi_n^*)(y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

(iii) Pour $nm > 0$, où $n = 0$ et $m \geq 0$, on a : $\xi_n * \xi_m^* = \xi_m * \xi_n^*$.

De plus, la convolution $\xi_n * \xi_m^*(y)$ est une fonction paire de y dont la description explicite, pour $y \in [0, L]$, est donnée dans la table suivante le terme général donne la fonction $1/2(\xi_n * \xi_m^* + \xi_m * \xi_n^*)(y)$

| | $n > 0$ | $n = 0$ | $n < 0$ |
|-------------------|--|---|--|
| $m > 0, n \neq m$ | $\frac{n \sin(\frac{2\pi n y}{L}) - m \sin(\frac{2\pi m y}{L})}{\pi(m^2 - n^2)}$ | $-\frac{\sin(\frac{2\pi m y}{L})}{\sqrt{2\pi m}}$ | 0 |
| $m = n > 0$ | $\frac{(L-y) \cos(\frac{2\pi n y}{L})}{L} - \frac{\sin(\frac{2\pi n y}{L})}{2\pi n}$ | \emptyset | \emptyset |
| $m = 0$ | $-\frac{\sin(\frac{2\pi n y}{L})}{\sqrt{2\pi n}}$ | $\frac{L-y}{L}$ | 0 |
| $m < 0, n \neq m$ | 0 | 0 | $\frac{m \sin(\frac{2\pi n y}{L}) - n \sin(\frac{2\pi m y}{L})}{\pi(m^2 - n^2)}$ |
| $m = n < 0$ | \emptyset | \emptyset | $\frac{\sin(\frac{2\pi n y}{L})}{2\pi n} + \frac{(L-y) \cos(\frac{2\pi n y}{L})}{L}$ |

Le Lemme 2.6 (ii) montre que σ est une matrice symétrique et que

$$\sigma(n, m) = 0, \quad \forall n \geq 0, m < 0.$$

Ainsi σ se sépare en deux blocs $\sigma = \sigma^+ \oplus \sigma^-$ que nous appellerons informellement les matrices “paires” et “impaires”. Elles correspondent à la partition $\mathbb{Z} = \{n \geq 0\} \cup \{n < 0\}$ et on a

$$QW_\lambda = QW_\lambda^+ \oplus QW_\lambda^-, \quad \sigma = \sigma^+ \oplus \sigma^-. \quad (2.21)$$

Cette décomposition montre que la positivité de la forme quadratique de Weil peut être testée en traitant séparément les cas des fonctions paires (en utilisant la matrice σ^+) et les cas des fonctions impaires (en utilisant σ^-). Dans la base choisie η_n , le cas pair correspond au fait de considérer les éléments de la base indexés par $n \geq 0$, tandis que le cas impair implique d'indexer les η_n par les $n < 0$.

2.1.4 La matrice $w_{0,2}(n, m)$

Dans la suite, nous allons décrire la contribution des deux premiers termes de (2.8) à la matrice $\sigma(m, n)$. Le Lemme suivant montre que ces termes contribuent par une matrice de rang 1 à la fois aux matrices impaires et aux matrices paires σ^\pm .

Lemme 2.7. *Soient $n, m > 0$ deux entiers positifs, $\theta = \xi_m * \xi_n^*$, $F(x) = \theta(\log x)$. L'égalité suivante est vérifiée*

$$\widehat{F}(i/2) + \widehat{F}(-i/2) = \frac{8e^{-\frac{i}{2}} (e^{L/2} - 1)^2 L^3}{(L^2 + 16\pi^2 m^2)(L^2 + 16\pi^2 n^2)}. \quad (2.22)$$

Si $n, m < 0$ sont des entiers négatifs, alors on a

$$\widehat{F}(i/2) + \widehat{F}(-i/2) = -\frac{256\pi^2 L e^{-\frac{i}{2}} (e^{L/2} - 1)^2 mn}{(L^2 + 16\pi^2 m^2)(L^2 + 16\pi^2 n^2)}. \quad (2.23)$$

2.1.5 La somme $\sum W_p$

La contribution des nombres premiers non archimédiens est donnée par (2.6), maintenant écrite comme

$$\sum W_p = \sum_{1 < m \leq \exp(L)} \Lambda(m) m^{-1/2} (\xi_n * \xi_m^* + \xi_m * \xi_n^*) (\log m). \quad (2.24)$$

2.1.6 La fonctionnelle $W_{\mathbb{R}}$

Soit $\theta_{\text{sym}}(t) = (\xi_n * \xi_m^* + \xi_m * \xi_n^*)(t)$, alors (2.7) se lit comme

$$W_{\mathbb{R}} = \int_0^L \frac{\exp\left(\frac{x}{2}\right) \theta_{\text{sym}}(x) - \theta_{\text{sym}}(0)}{\exp(x) - \exp(-x)} dx - \theta_{\text{sym}}(0) \int_L^\infty \frac{dx}{\exp(x) - \exp(-x)} + \frac{1}{2}(\gamma + \log(4\pi))\theta_{\text{sym}}(0).$$

On a

$$\int_L^\infty \frac{dx}{\exp(x) - \exp(-x)} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{e^L + 1}{e^L - 1}\right)$$

de telle façon que l'on obtient

$$W_{\mathbb{R}} = \frac{\theta_{\text{sym}}(0)}{2} \left(\gamma + \log\left(4\pi \frac{e^L - 1}{e^L + 1}\right) \right) + \int_0^L \frac{\exp\left(\frac{x}{2}\right) \theta_{\text{sym}}(x) - \theta_{\text{sym}}(0)}{\exp(x) - \exp(-x)} dx. \quad (2.25)$$

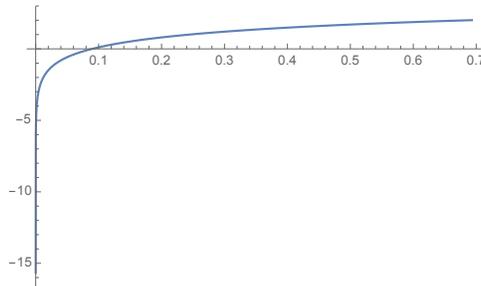


Figure 4: Coefficient de $\frac{\theta_{\text{sym}}(0)}{2}$. Sa valeur en $L = \log 2$ est 2.00963.

La Figure 4 montre que le coefficient de $\frac{\theta_{\text{sym}}(0)}{2}$ est négatif à proximité de l'origine ($L = 0$), ainsi sa contribution à la forme quadratique QW est positive pour les petites valeurs de L , à cause du signe moins devant $W_{\mathbb{R}}^+$ (dans (2.16)). Cette contribution très similaire devient négative pour des valeurs plus grandes de L .

2.2 Sensibilité de la positivité de Weil, à la place archimédienne

Le premier fait que nous constatons à partir des calculs numériques est que la contribution archimédienne ne parvient pas à rester positive quand on l'étend un peu au-delà de la valeur $L = \log 2$. Dans les deux graphiques suivants (Figure 5 et 6), est visualisée la variation de la plus petite valeur propre de la matrice paire σ^+ , lorsque la valeur de L approche et ensuite va un peu au-delà de $\log 2$. Quand on considère les valeurs de L dans l'intervalle $\log 2 \leq L < \log 3$, la contribution des nombres premiers à la forme quadratique de Weil ne se fait que par $p = 2$, et est de la forme

$$W_p(F) = p^{-1/2} \log p (\theta(\log p) + \theta(-\log p)). \quad (2.26)$$

La Figure 7 montre qu'en ajoutant la contribution du nombre premier 2 à la contribution archimédienne, on restaure la positivité de la matrice paire σ^+ . La courbe est une fonction de $\mu := \exp L$, et ce choix de la variable est dicté par le fait que les valeurs puissances entières de premiers jouent un rôle crucial dans cette étude.

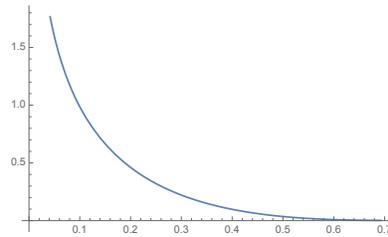


Figure 5: Positivité de la contribution archimédienne à la matrice paire pour $L \in [0, \log 2]$. La plus petite valeur propre lorsque $L = \log 2$ est ~ 0.00133 .

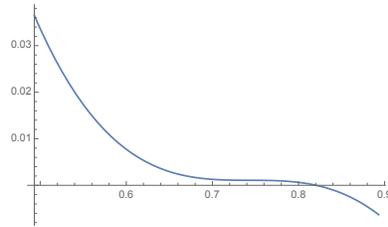


Figure 6: Changement de signe de la plus petite valeur propre de la contribution archimédienne à la matrice paire pour $L \in [\log 2 - 0.2, \log 2 + 0.2] \sim [0.493, 0.893]$.

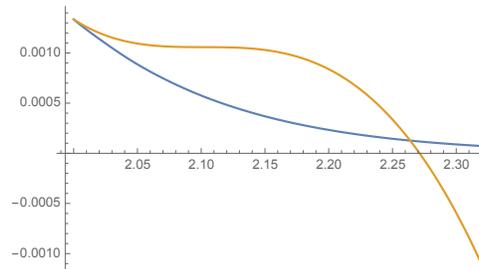


Figure 7: Changement de signe de la plus petite valeur propre pour la contribution archimédienne seule, comme une fonction de $\mu := \exp L$, à proximité de $\mu = 2$ (en jaune). Après avoir ajouté la contribution du nombre premier 2, la plus petite valeur propre de la matrice paire est > 0 (en bleu).

2.3 Sensibilité de la positivité de Weil pour la valeur précise $p = 2$

La Figure 7 montre qu'au-delà de $\mu = 2$, la contribution (2.26) du nombre premier 2 d'abord fait baisser la plus petite valeur propre dans l'intervalle $\exp L \in (2, 2.27)$ mais également l'empêche d'être négative. La valeur de la plus petite valeur propre de σ^+ pour $\mu = 3$ est $< 6 \times 10^{-8}$. Cela suggère d'utiliser p comme une variable dans (2.26) et de tester la sensibilité de la positivité de Weil pour la valeur précise $p = 2$. A cette fin, on fixe $L = \log 3$ (*i.e.* $\mu = 3$) et on remplace 2 par une variable p dans (2.26).

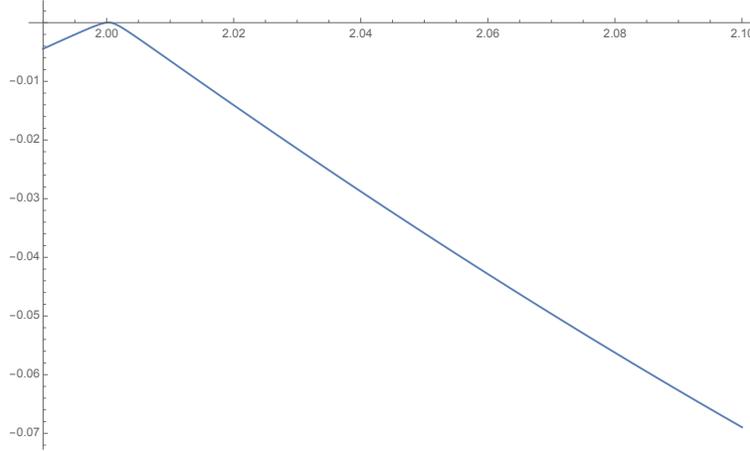


Figure 8: Sensibilité à la valeur spécifique $p = 2$.

Comme le montre la Figure 8, on trouve que la plus petite valeur propre $\lambda(p)$ pour $L = \log 3$ est négative pour $p = 1.9999$ et également pour $p = 2.0005$, de telle façon que la contrainte de positivité restreint le choix de p à un intervalle de taille $< 10^{-3}$ autour de $p = 2$.

2.4 Changement de signe de la plus petite valeur propre

Au-delà de $p = 3$, le signe de la plus petite valeur propre de la somme des contributions de ∞ et de 2 à la matrice paire σ^+ est montré en jaune dans la Figure 9. Une fois de plus, on note que ce signe est négatif au-delà de $\mu = 3$ est “à nouveau le même” et la sortie (en bleu dans la figure) est rendue positive en ajoutant la contribution du nombre premier 3.

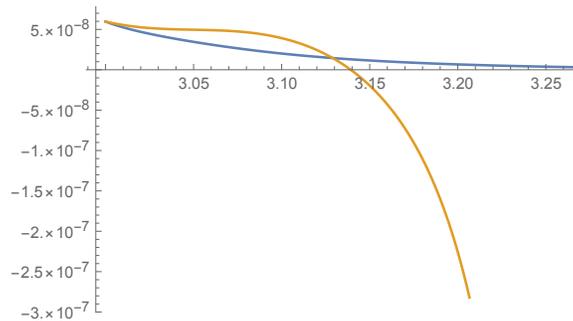


Figure 9: Changement de signe de la plus petite valeur propre (en jaune) des contributions de ∞ et de 2 à la matrice paire au-delà de $\mu = 3$. En bleu, après ajout de la contribution du nombre premier 3 : le total est > 0 .

Quand μ va au-delà de la puissance de nombre premier 4 = 2^2 , le comportement de la plus petite valeur propre est similaire aux cas rapportés précédemment, et est présenté sur la Figure 10.

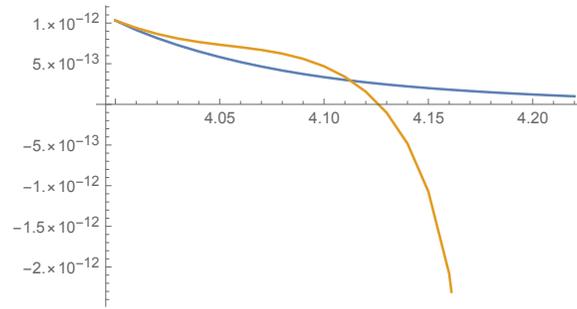


Figure 10: Changement de signe de la plus petite valeur propre de la matrice paire au-delà de 4 : en jaune, si on néglige la contribution de la puissance de premier 4 = 2², en bleu si on ne le fait pas. Si on le fait, la plus petite valeur propre de la contribution totale est > 0.

Pour $\mu \sim 5$, et $\mu \sim 7$, le comportement de la plus petite valeur propre de la matrice paire σ^+ est similaire à ceux présentés dans les cas précédents et est fourni sur les Figures 11 et 12.

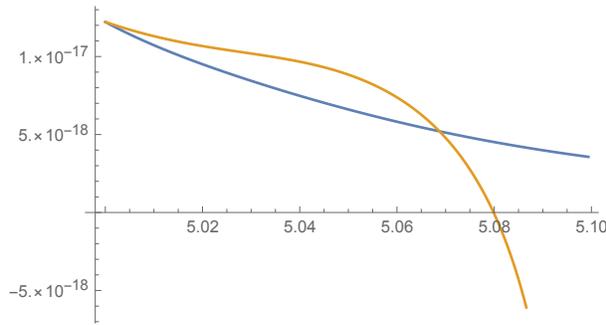


Figure 11: Aller au-delà de $\mu = 5$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre premier 5.

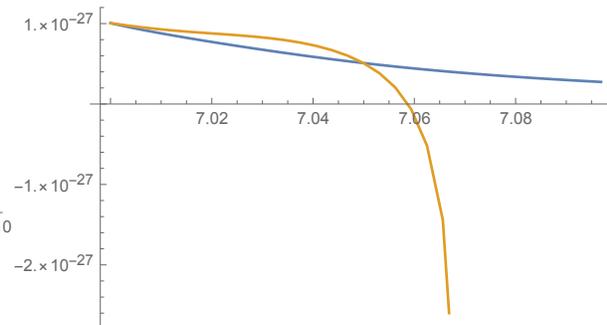


Figure 12: Aller au-delà de $\mu = 7$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre premier 7

Les graphiques suivants montrent les changements de signes des plus petites valeurs propres pour les matrices impaires σ^- , et pour les mêmes choix de puissances de nombres premiers : notamment près de 2, 3, 4, 5 et 7.

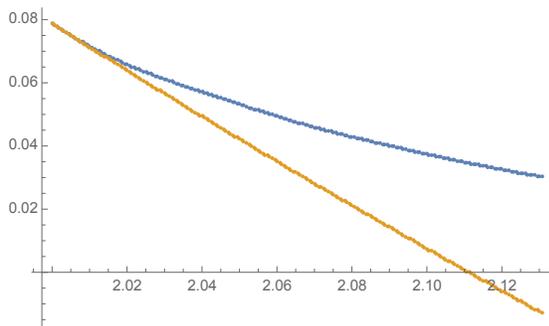


Figure 13: Cas impair. Aller au-delà de $\mu = 2$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre premier 2.

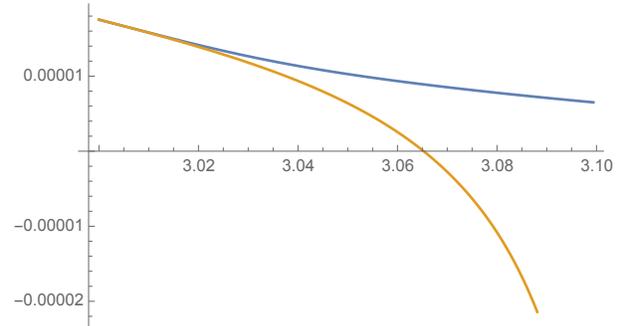


Figure 14: Cas impair. Aller au-delà de $\mu = 3$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre premier 3.

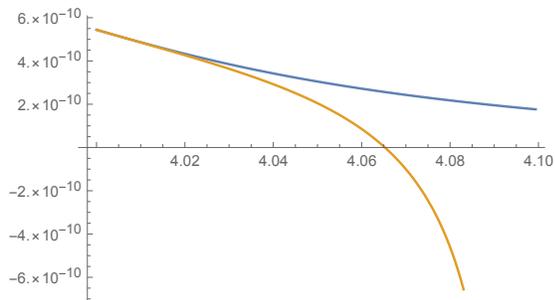


Figure 15: Cas impair. Aller au-delà de $\mu = 4$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre puissance de premier 4.

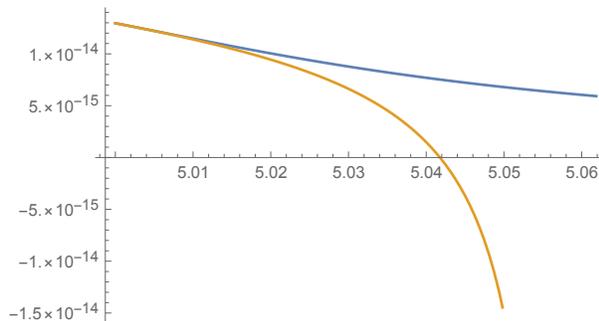


Figure 16: Cas impair. Aller au-delà de $\mu = 5$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre premier 5.

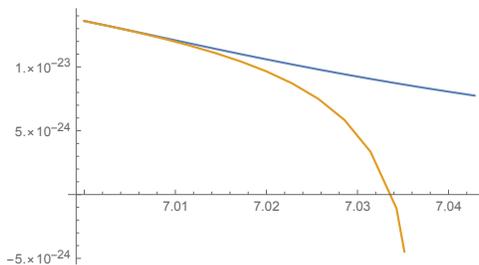


Figure 17: Cas impair. Aller au-delà de $\mu = 7$ sans (jaune) et avec (bleu) la contribution du nombre premier 7.

2.5 Forme quadratique semi-locale de Weil, petites valeurs propres

En poussant plus loin les calculs et en augmentant la précision, on obtient une estimation de la taille de la plus petite valeur propre $s(L)$ de la matrice paire, en fonction de $\mu = \exp L$. On trouve un comportement exponentiel, comme montré sur les Figures 18 et 19, où le $\log s(L)$ est représenté en fonction de $\mu = \exp L$.

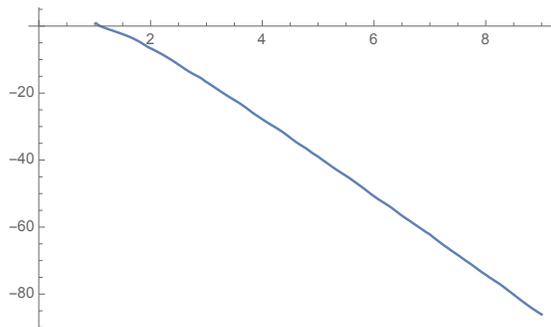


Figure 18: Décroissance du logarithme de la plus petite valeur propre de la matrice paire en fonction de $\mu = \exp L$.

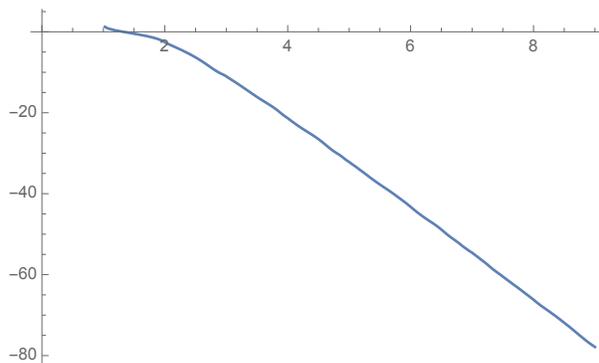


Figure 19: Décroissance du logarithme de la plus petite valeur propre de la matrice impaire en fonction de $\exp L$.

Quand on sélectionne les petites valeurs propres de la matrice paire σ^+ et qu'on représente graphiquement le logarithme de leur taille, on trouve (voir la Figure 20) que leur nombre croît grossièrement comme $\mu = \exp L$.

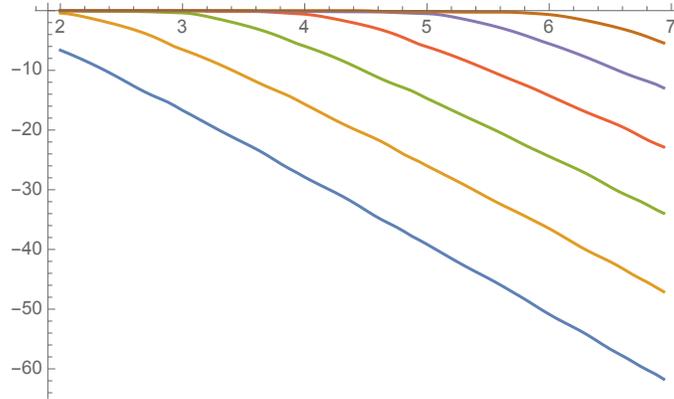


Figure 20: Décroissance du logarithme des plus petites valeurs propres de la matrice paire σ^+ en fonction de $\mu = \exp L$.

Pour la matrice impaire σ^- , le comportement est similaire mais avec une valeur propre plus petite, comme montré sur la Figure 21.

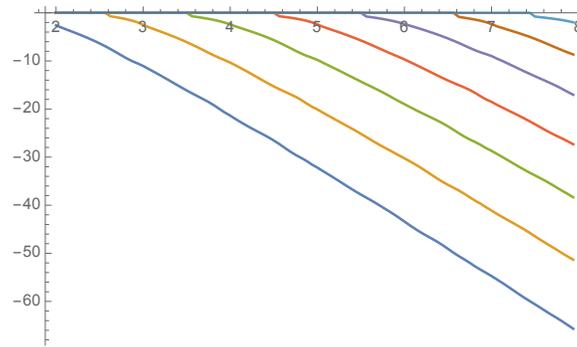


Figure 21: Décroissance du logarithme des plus petites valeurs propres de la matrice impaire σ^- en fonction de $\mu = \exp L$.

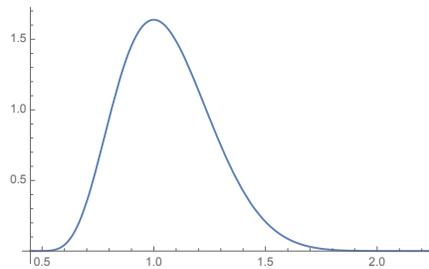


Figure 22: Vecteur propre pour la plus petite valeur propre de QW_λ^+ comme une fonction sur \mathbb{R}_+^* .

Les Figures 22, 23 et 24 montrent les courbes des vecteurs propres de la forme quadratique QW_λ^+ respectivement pour la plus petite, la seconde plus petite et la troisième plus petite valeurs propres.

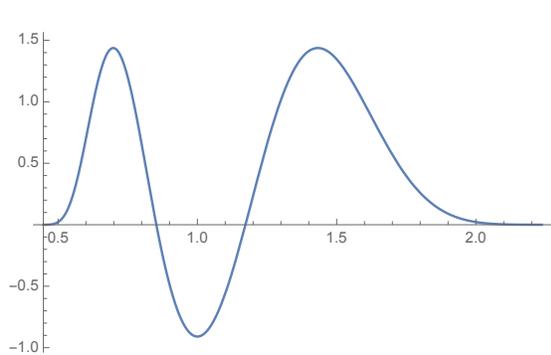


Figure 23: Vecteur propre pour la seconde plus petite valeur propre de QW_λ^+ comme fonction sur \mathbb{R}_+^* .

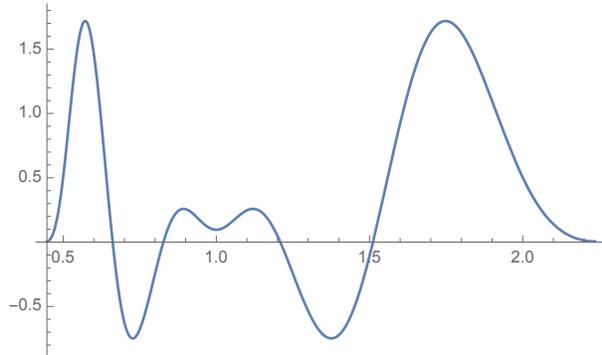


Figure 24: Vecteur propre pour la troisième plus petite valeur propre de QW_λ^+ comme fonction sur \mathbb{R}_+^* .

3 Fonctions propres et projection prolate $\Pi(\lambda, k)$

Dans cette section, nous expliquons l’existence de très petites valeurs propres de la forme quadratique de Weil QW_λ sur les fonctions de test à support dans un intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda] \subset \mathbb{R}_+^*$. Nous commençons par rappeler que si RH est vraie, alors la forme quadratique de Weil restreinte aux fonctions à support dans un intervalle fini n’a pas de racine, puisque le nombre $N(r)$ de zéros de module au plus r de la transformation de Fourier d’une fonction f à support compact est de l’ordre de $N(r) = O(r)$ (voir [8] § 15.20 (2)), tandis que si f appartient au radical de QW , elle devrait (en supposant RH) s’évanouir sur tous les zéros de la fonction zeta de Riemann dont le nombre croît plus vite que $O(r)$. D’un autre côté, le radical de QW contient le domaine de la fonction \mathcal{E} définie sur le sous-espace $\mathcal{S}_0^{\text{ev}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de codimension 2 des fonctions de Schwartz vérifiant $f(0) = \widehat{f}(0) = 0$ par la formule ([3])

$$\mathcal{E}(f)(x) = x^{1/2} \sum_{n>0} f(nx). \quad (3.1)$$

Il est donc naturel d’utiliser (3.1) pour construire les fonctions g avec support dans $[\lambda^{-1}, \lambda] \subset \mathbb{R}_+^*$ qui appartiennent au “radical proche” de QW_λ *i.e.* vérifient $QW_\lambda(g) \ll \|g\|^2$. La définition de \mathcal{E} montre que si le support de la fonction paire $f \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ est contenu dans l’intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$, alors le support de $\mathcal{E}(f)$ est contenu dans $(0, \lambda] \subset \mathbb{R}_+^*$. D’un autre côté, en appliquant la formule de Poisson (avec \widehat{f} la transformation de f), on a

$$\mathcal{E}(\widehat{f})(x) = \mathcal{E}(f)(x^{-1}), \quad \forall f \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}}. \quad (3.2)$$

Ainsi, nous voyons que λ^{-1} serait une borne inférieure du support de $\mathcal{E}(f)$ si le support de la fonction paire $\widehat{f} \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ était contenu dans l’intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$. Pourtant, cette dernière inclusion est impossible puisque la transformation de Fourier d’une fonction à support compact est analytique. Malgré cet obstacle apparent dans la construction, le travail de Slepian et Pollack sur les fonctions à bande limitée [11] fournit une solution approximative très utile. La manière conceptuelle de formuler ce résultat consiste à utiliser la paire de projections \mathcal{P}_λ et $\widehat{\mathcal{P}}_\lambda$ dans l’espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ des fonctions paires de carré intégrable. L’opérateur \mathcal{P}_λ est la multiplication par la fonction caractéristique de l’intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$, et la projection $\widehat{\mathcal{P}}_\lambda$ est son conjugué par la transformation de Fourier (additive) $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$. Ces deux projections n’ont pas d’intersection mais leur “angle” – un opérateur avec spectre discret – admet approximativement $2\lambda^2$ très petites valeurs propres dont les fonctions propres associées fournissent d’excellentes candidates pour l’“intersection approximative” $\mathcal{P}_\lambda \cap' \widehat{\mathcal{P}}_\lambda$. Dans leur travail sur la transmission du signal, Slepian et Pollack ont découvert que ces fonctions propres sont exactement les fonctions d’ondes sphéroïdales prolates qui étaient déjà bien connues comme étant solutions (par séparation des variables) de l’équation de Helmholtz pour les sphéroïdes prolates.

Le résultat de base de Slepian et Pollack est la diagonalisation de l'opérateur positif $\mathcal{P}_\lambda \widehat{\mathcal{P}}_\lambda \mathcal{P}_\lambda$ dans l'espace de Hilbert $L^2([-\lambda, \lambda])$. Ils montrent que cet opérateur commute avec l'opérateur de différentiation

$$(\mathbf{W}_\lambda \psi)(q) = -\partial((\lambda^2 - q^2)\partial) \psi(q) + (2\pi\lambda q)^2 \psi(q) \quad (3.3)$$

(ici ∂ est l'opérateur de différentiation ordinaire en une variable $q \in [-\lambda, \lambda]$ et le domaine dense est celui des fonctions lisses sur $[-\lambda, \lambda]$). L'opérateur \mathbf{W}_λ (obtenu en fermant son domaine selon la norme du graphe) est auto-adjoint et positif et ses fonctions propres sont les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates. Quand nous considérerons la forme quadratique de Weil QW_λ évaluée sur les fonctions de test avec support dans $[\lambda^{-1}, \lambda]$, nous comparerons les vecteurs propres associés aux valeurs propres extrêmement petites avec le domaine de la fonction \mathcal{E} appliquée aux combinaisons linéaires des fonctions propres ψ de \mathbf{W}_λ qui appartient à l'intersection approximative $\mathcal{P}_\lambda \cap \widehat{\mathcal{P}}_\lambda$ et qui s'évanouit en zéro. Pour ce processus, nous ne prenons que les fonctions propres ψ qui sont des fonctions paires de la variable q , et nous distinguons deux cas puisque l'action de la transformation de Fourier vérifie $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}} \psi \simeq \pm \psi$ sur les fonctions propres ψ de \mathbf{W}_λ . Le signe correspondant \pm détermine précisément le choix d'un vecteur propre pour la matrice paire ou impaire. Selon une notation standard, on pose

$$\psi_{m,\lambda}(x) := PS_{2m,0} \left(2\pi\lambda^2, \frac{x}{\lambda} \right)$$

où $\psi_{m,\lambda}$ est une fonction sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$ qu'on étend par 0 en dehors de cet intervalle. Sa transformée de Fourier $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(\psi_{m,\lambda})$ est égale à $\chi_m \psi_{m,\lambda}$ sur $[-\lambda, \lambda]$, où le scalaire χ_m est très proche de $(-1)^m$ en supposant que m est inférieure à $2\lambda^2$. Plus précisément, $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(\psi_{m,\lambda})$ est calculé en utilisant l'égalité

$$\int_{-1}^1 PS_{2m,0}(\gamma, \eta) \exp(i\gamma\eta\omega) d\eta = (-1)^m 2S_{2m,0}^{(1)}(\gamma, 1) PS_{2m,0}(\gamma, \omega)$$

pour $\gamma = 2\pi\lambda^2$, $\omega = \frac{y}{\lambda}$. Après avoir changé les variables $\xi = \lambda\eta$, l'égalité ci-dessus devient

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \psi_{m,\lambda}(\xi) \exp(i2\pi\xi y) d\xi = (-1)^m 2\lambda S_{2m,0}^{(1)}(2\pi\lambda^2, 1) \psi_{m,\lambda}(y).$$

Etant donné $\mu = \lambda^2$, on retient uniquement les valeurs de m pour lesquelles la valeur caractéristique $\chi(\mu, m) = 2\lambda S_{2m,0}^{(1)}(2\pi\mu, 1)$ est presque égale à 1. Cela détermine une collection $\{0, \dots, \nu(\mu)\}$ de longueur approximativement égale à 2μ , telle que $\chi(\mu, m) \sim 1$ pour $m \leq \nu(\mu)$. La formule $\nu(\mu) = 2\mu - 1$ marche bien quand μ est un petit demi-entier.

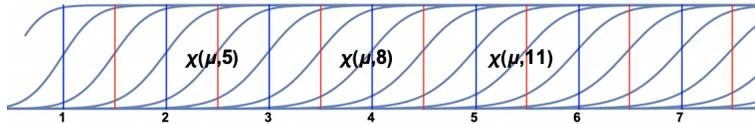


Figure 25: Graphiques des fonctions $\chi(\mu, m)$ comme fonctions de μ

Dans le but de définir la projection prolata, nous considérons les combinaisons linéaires des fonctions prolates qui s'évanouissent en 0 et sont données, pour $n > 0$, par

$$\phi_{2n}(x) := \psi_{2n}(x)\psi_0(0) - \psi_0(x)\psi_{2n}(0), \quad \phi_{2n+1}(x) := \psi_{2n+1}(x)\psi_1(0) - \psi_1(x)\psi_{2n+1}(0).$$

Pour $1 < n \leq \nu(\mu)$, on peut approximer $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(\phi_n)$ par $(-1)^n \phi_n$ et, en utilisant la formule de Poisson, agir comme si $\mathcal{E}(\phi_n)$ vérifiait l'égalité $\mathcal{E}(\phi_n)(u^{-1}) = (-1)^n \mathcal{E}(\phi_n)(u)$. Nous pouvons alors calculer les composants de $\mathcal{E}(\phi_n)$ dans la base orthogonale $\eta_j(u) = \xi_j(\log u)$ de $\mathcal{H} = L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*x)$ (Lemme 2.6) qui vérifie $\eta_j(u^{-1}) = -\eta_j(u)$ pour $j < 0$ et $\eta_j(u^{-1}) = \eta_j(u)$ pour $j \geq 0$. Pour $1 < n \leq \nu(\mu)$, le composant

de $\mathcal{E}(\phi_n)$ sur η_j est non-nul seulement si η_j a la même parité que n , *i.e.* vérifie $\eta_j(u^{-1}) = (-1)^n \eta_j(u)$, et dans ce cas, est donné par la formule,

$$\mathcal{E}(\phi_n)_j \simeq 2 \sum_{1 \leq r < \lambda} \int_1^{\lambda/r} u^{1/2} \phi_n(ru) \eta_j(u) d^*u. \quad (3.4)$$

On calcule toutes ces composantes pour $|j| \leq N$ avec N grand, et on applique le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (séparément pour les cas pair et impair) pour obtenir les vecteurs dans E_N . Ce processus détermine les vecteurs orthonormés $\epsilon_n \in E_N \subset \mathcal{H} = L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*x)$ pour $1 < n \leq \nu(\mu)$ qui sont, par construction, les fonctions candidates naturelles pour être comparées (au signe près) avec les fonctions propres de la forme quadratique semi-locale de Weil QW_λ sur E_N .

Définition 3.1. Soit $k < \nu(\lambda^2)$. On définit $\Pi(\lambda, k)$ comme la projection orthogonale sur l'espace vectoriel engendré par les vecteurs ϵ_n , pour $n \in \{2, \dots, k+1\}$.

Soit γ l'opérateur de mise à l'échelle dans $\mathcal{H} = L^2([\lambda^{-1}, \lambda], d^*x)$ qui prend les valeurs ± 1 sur les fonctions satisfaisant l'égalité $f(u^{-1}) = \pm f(u)$. Par construction, les vecteurs ϵ_n sont les vecteurs propres de γ et la relation de commutativité ci-dessous est vérifiée

$$\gamma \Pi(\lambda, k) = \Pi(\lambda, k) \gamma, \quad \forall \lambda, k \quad (3.5)$$

La série de graphiques présentée ci-dessous montre la coïncidence des ϵ_n avec les fonctions propres effectives de la forme quadratique semi-locale de Weil QW_λ pour les plus petites valeurs propres. Quand une seule courbe apparaît (en jaune sur la courbe des ϵ), cela signifie que les deux fonctions coïncident avec une grande précision, sinon, la courbe bleue de la fonction propre n'est pas cachée sous la courbe jaune. Noter qu'on s'attend à la coïncidence de ϵ_{2m} avec la fonction propre de la matrice paire pour sa m -ième valeur propre seulement quand cette valeur propre est petite et par conséquent seulement lorsque $\mu > m$. De façon similaire, on s'attend à ce que ϵ_{2m+1} coïncide avec la fonction propre de la matrice impaire pour sa m -ième valeur propre seulement quand $\mu > m + 1$ (puisque le nombre de petites valeurs propres de la matrice impaire est inférieure de 1 à celui pour la matrice paire). Nous avons cependant visualisé les courbes pour toutes les valeurs demi-entières de μ comprises entre 3.5 et 11 pour montrer la non-concordance des courbes lorsque μ est trop petit.

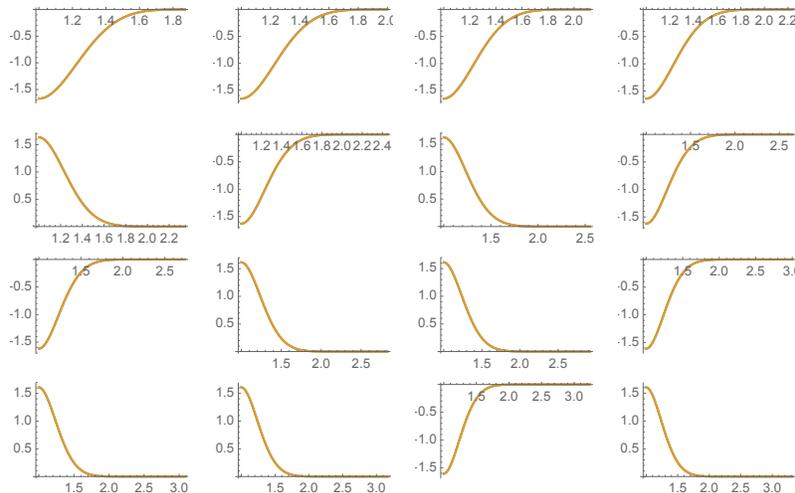


Figure 26: accord entre les fonctions propres de la matrice paire et la plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Pour $\mu = 11$, la valeur propre est 2.389×10^{-48} .

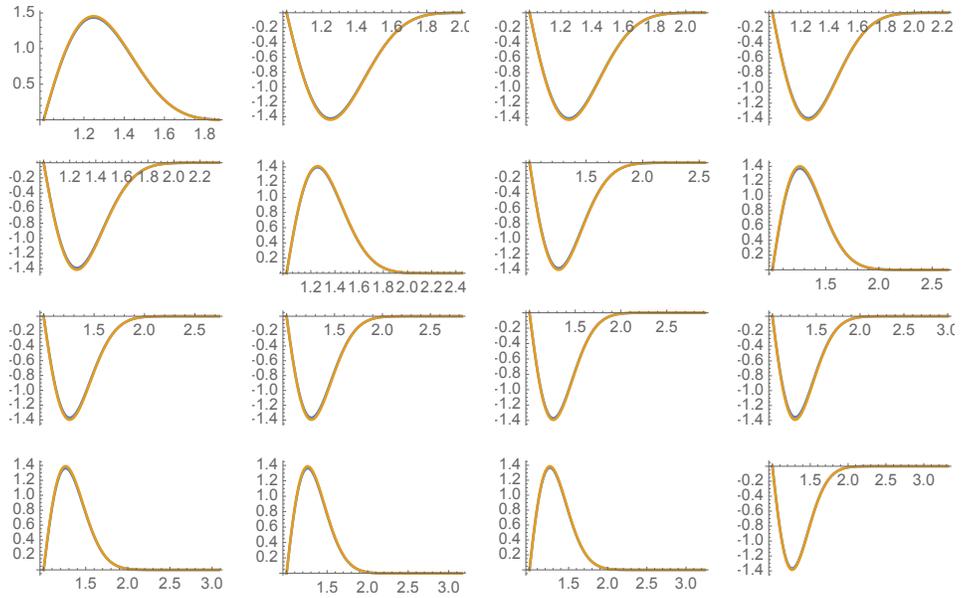


Figure 27: accord entre les fonctions propres de la matrice impaire et la plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11.

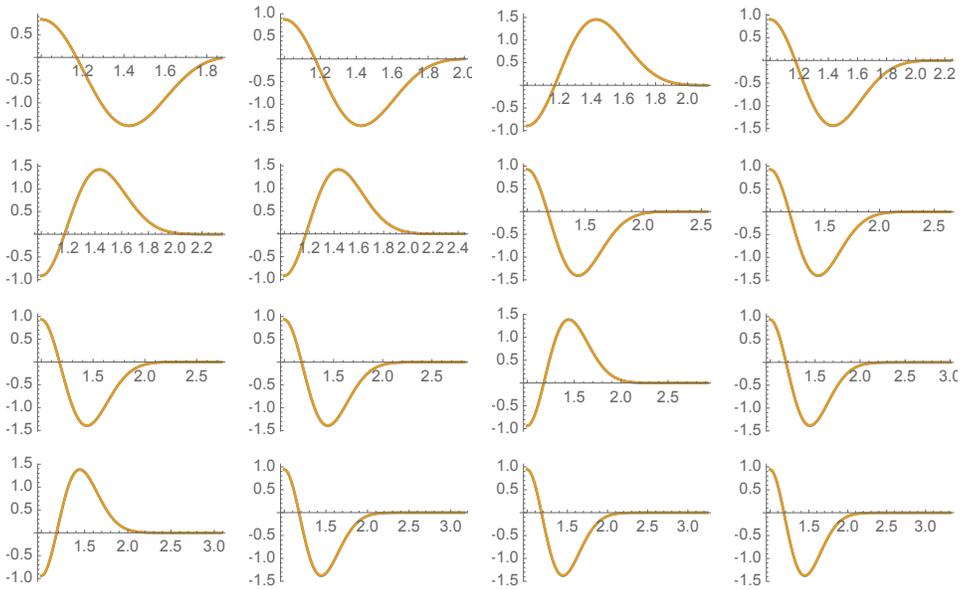


Figure 28: accord entre les fonctions propres de la matrice paire et la seconde plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11.

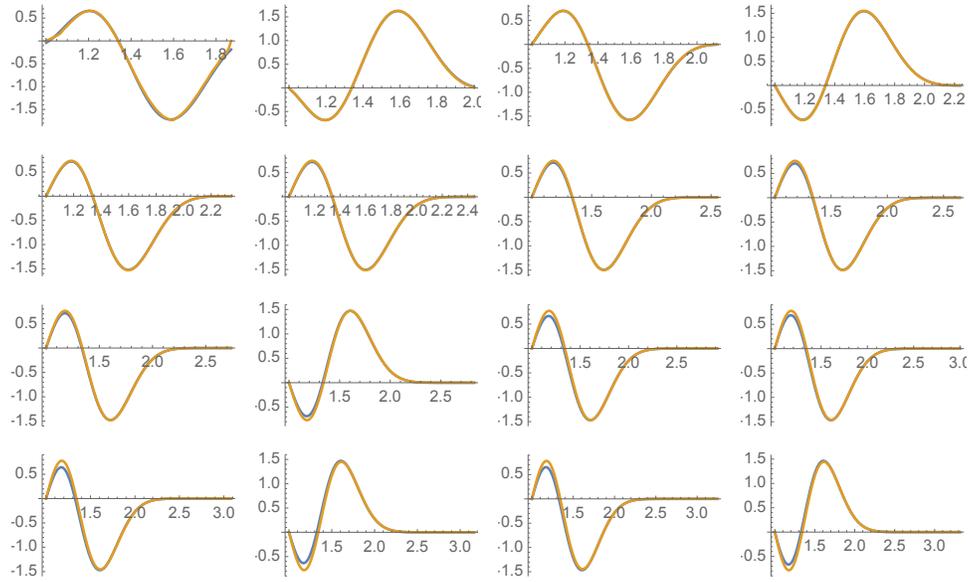


Figure 29: accord entre les fonctions propres de la matrice impaire et la seconde plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11.

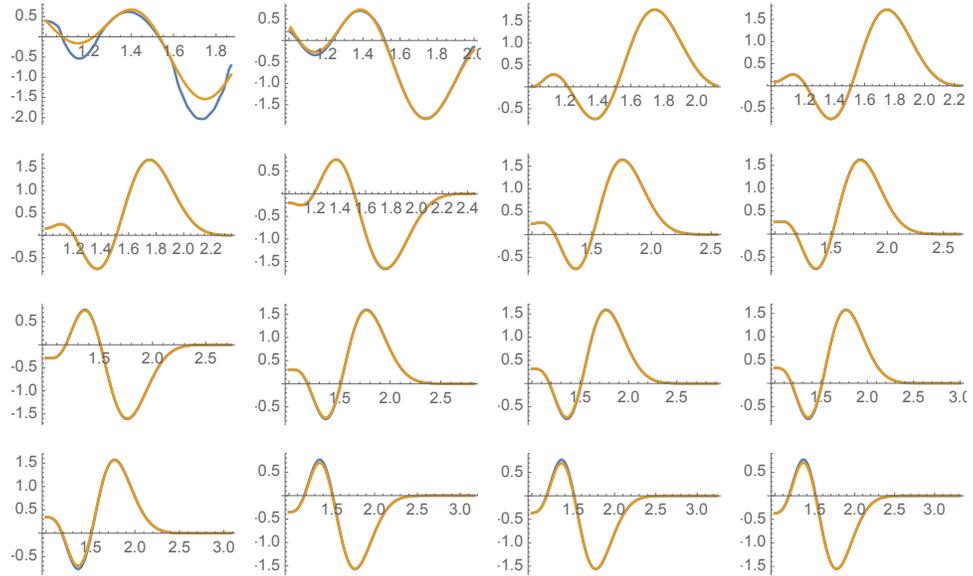


Figure 30: accord entre les fonctions propres de la matrice paire et la troisième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 4$.

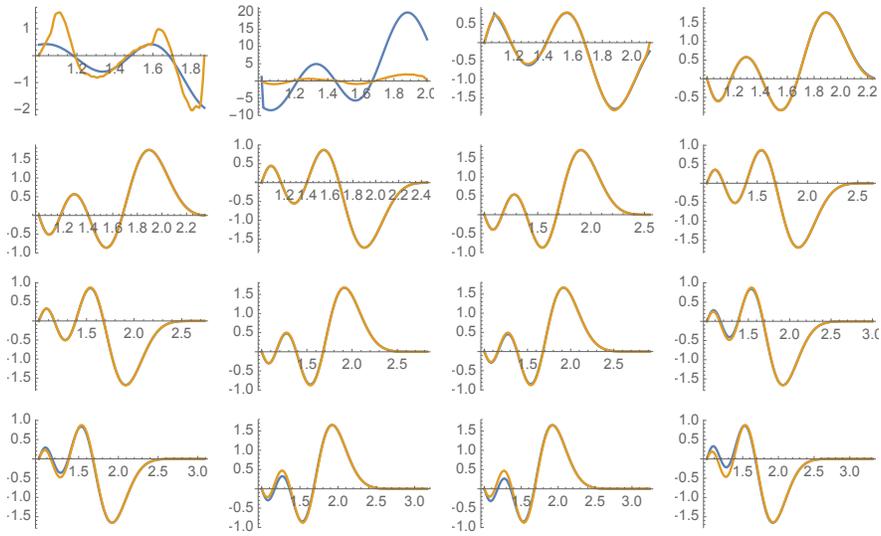


Figure 31: accord entre les fonctions propres de la matrice impaire et la troisième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 4.5$.

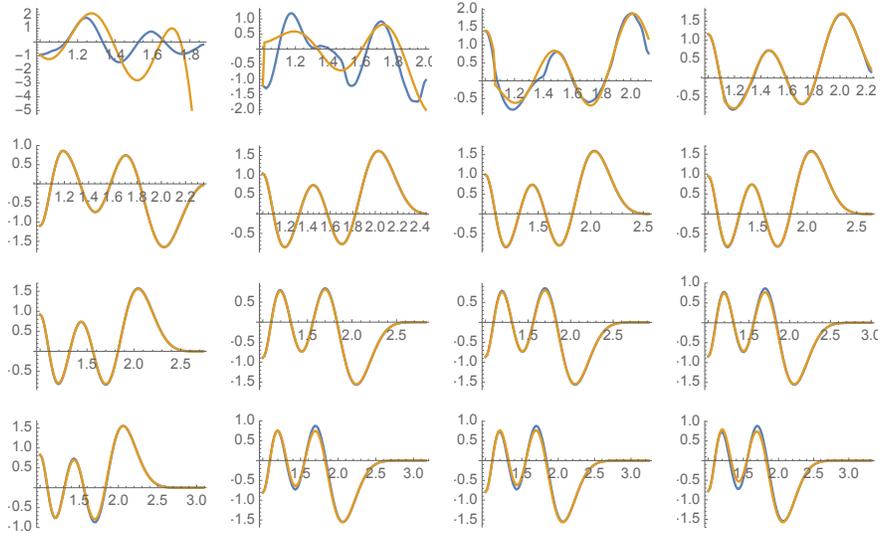


Figure 32: accord entre les fonctions propres de la matrice paire et la quatrième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 5$.

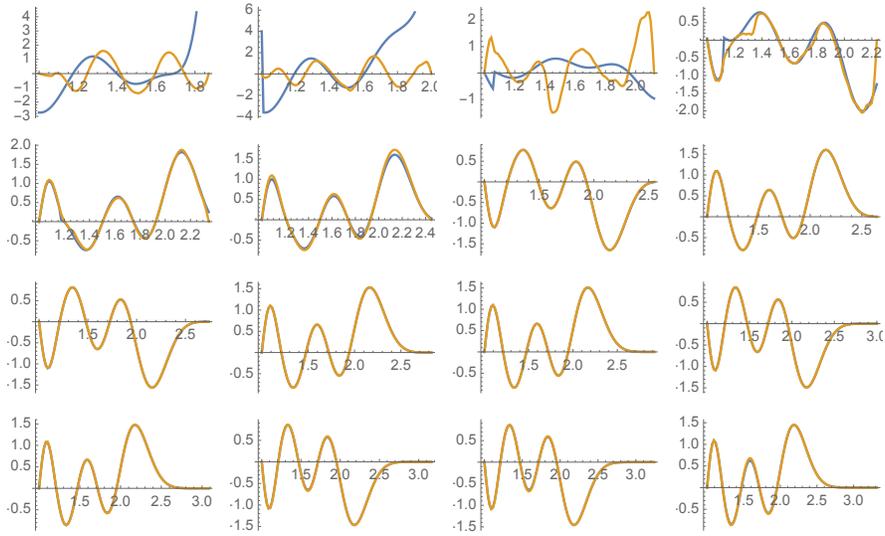


Figure 33: accord entre les fonctions propres de la matrice impaire et la quatrième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 5.5$.

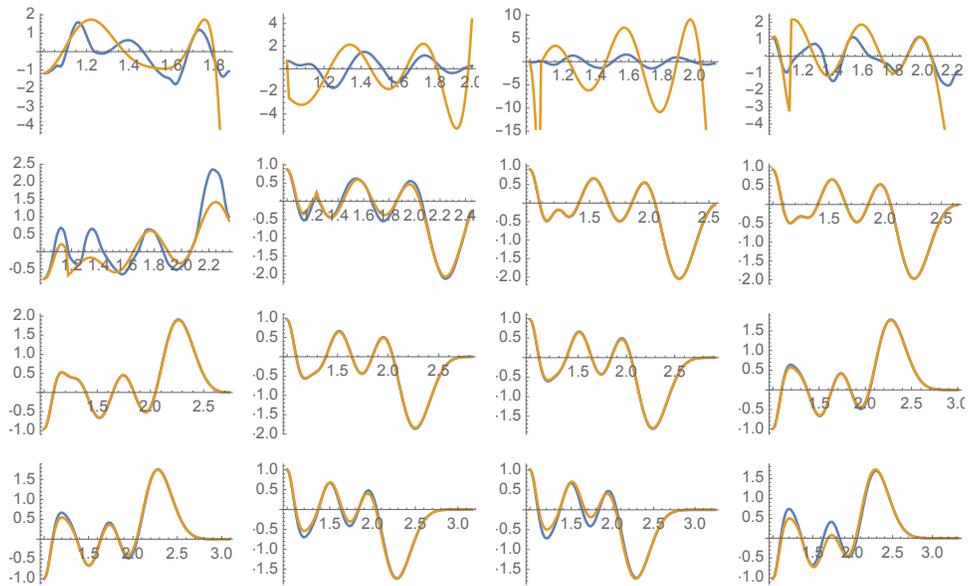


Figure 34: accord entre les fonctions propres de la matrice paire et la cinquième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 6$.

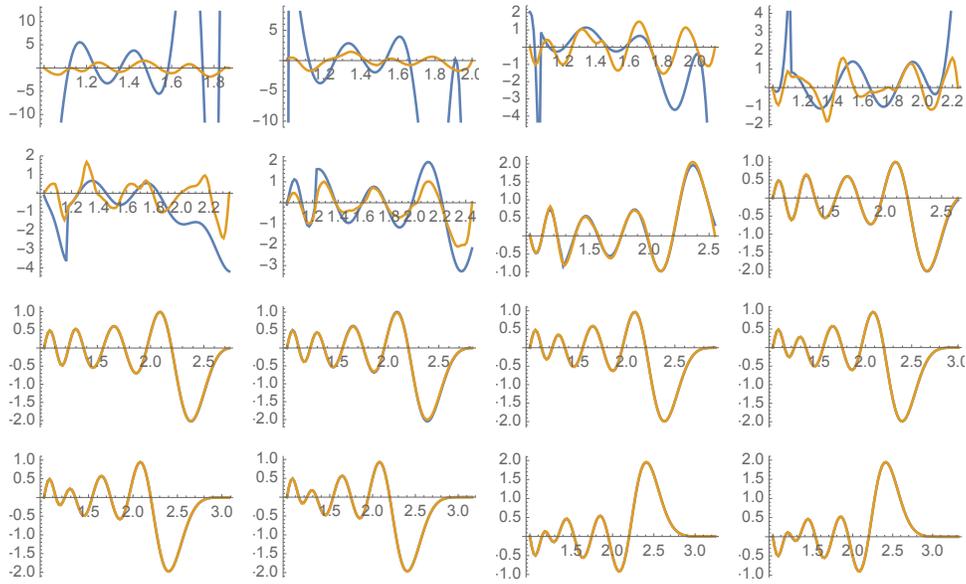


Figure 35: accord entre les fonctions propres de la matrice impaire et la cinquième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 6.5$.

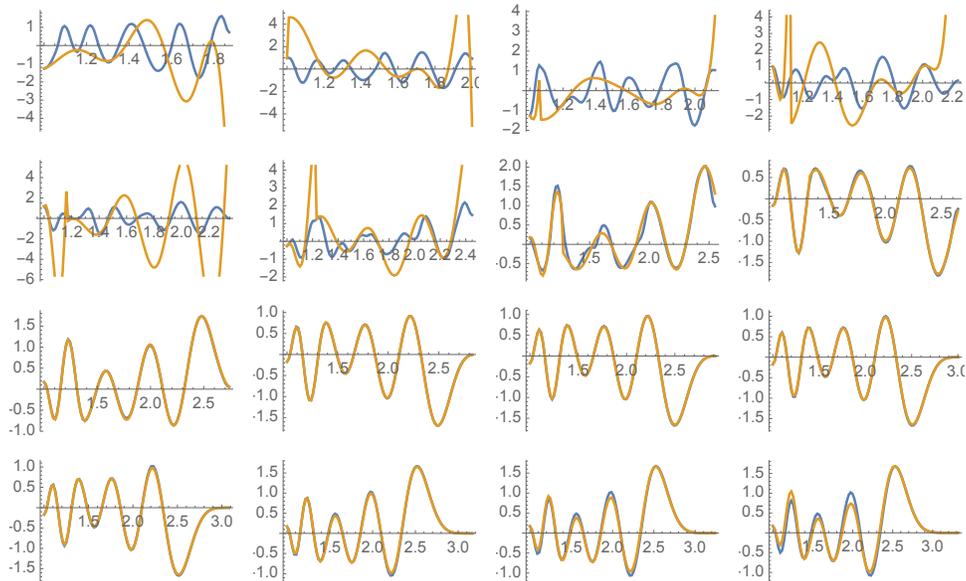


Figure 36: accord entre les fonctions propres de la matrice paire et la sixième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 7$.

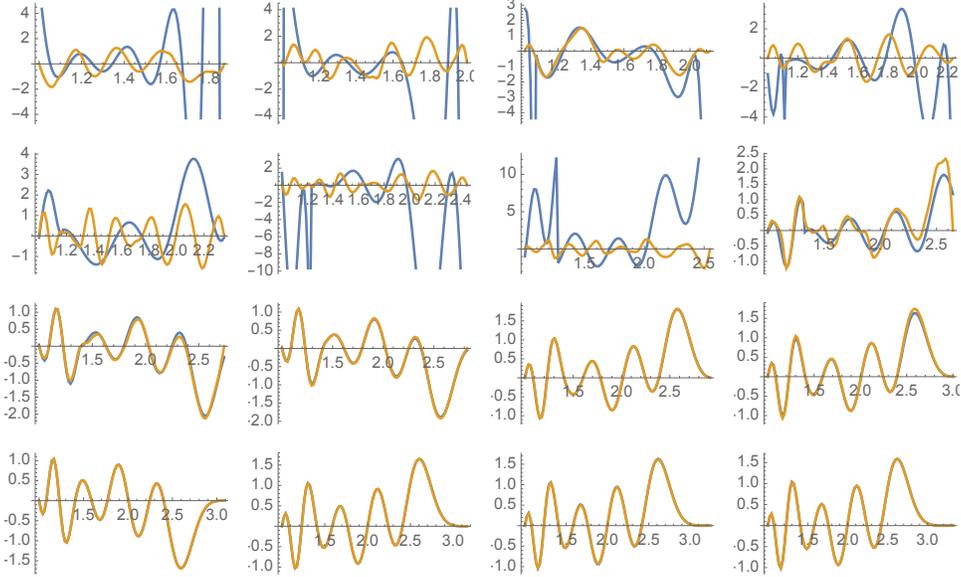


Figure 37: accord entre les fonctions propres de la matrice impaire et la sixième plus petite valeur propre pour les 16 valeurs de μ entre 3.5 et 11. Elles commencent à coïncider vers $\mu = 7.5$.

4 Triplet spectral $\Theta(\lambda, k) = (\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{H}(\lambda), D(\lambda, k))$

Le triplet spectral $\Theta(\lambda, k) = (\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{H}(\lambda), D(\lambda, k))$ décrit dans cette section, dont le spectre présente une similarité remarquable avec les premiers zéros de la fonction zeta de Riemann est défini à travers l'action par multiplication de l'algèbre des fonctions lisses $\mathcal{A}(\lambda) := C^\infty(\mathbb{R}_+^*/\lambda^{2\mathbb{Z}})$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(\lambda) := L^2(\mathbb{R}_+^*/\lambda^{2\mathbb{Z}}, d^*u)$. L'opérateur $D(\lambda, k)$ est défini par la formule suivante

$$D(\lambda, k) := (1 - \Pi(\lambda, k)) \circ D_0(\lambda) \circ (1 - \Pi(\lambda, k)), \quad D_0(\lambda) := (-iu\partial_u). \quad (4.1)$$

Ceci est une perturbation de rang fini de l'opérateur standard de Dirac $D_0(\lambda)$, puisque par construction le domaine de la projection prolate $\Pi(\lambda, k)$ est contenu dans le domaine de $D_0(\lambda)$, de sorte que l'on peut dériver

$$D(\lambda, k) = D_0(\lambda) - \Pi(\lambda, k)D_0(\lambda) - D_0(\lambda)\Pi(\lambda, k) + \Pi(\lambda, k)D_0(\lambda)\Pi(\lambda, k).$$

Proposition 4.1. *L'opérateur $D(\lambda, k)$, combiné avec l'action des fonctions périodiques par multiplication dans $L^2([-L/2, L/2])$ définit un triplet spectral.*

Pour comparer le spectre de $D(\lambda, k)$, pour k juste en-dessous de la borne supérieure $\nu(\lambda^2) \sim 2\lambda^2$ (discuté dans la section 3), avec les zéros de la fonction zeta de Riemann, on a besoin de sélectionner un domaine approprié de valeurs propres pour lesquelles la comparaison a du sens. Par construction, le nombre de valeurs propres de $D(\lambda, k)$ dans l'intervalle $[0, E]$ a le même comportement asymptotique que pour $D_0(\lambda)$, et ainsi diffère du comportement asymptotique du nombre $N(E)$ de zéros de la fonction zeta de partie imaginaire dans l'intervalle $[0, E]$, notamment

$$N(E) = \#\{\rho \mid \zeta(\rho) = 0, \text{ and } 0 < \Im(\rho) \leq E\}. \quad (4.2)$$

Ce nombre est la somme de deux contributions: $N(E) = \langle N(E) \rangle + N_{\text{osc}}(E)$. Le terme oscillant $N_{\text{osc}}(E)$ est de l'ordre de $\log E$ et, ce qui est plus important dans ce contexte, on sait que

$$\langle N(E) \rangle = \frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi} - \frac{E}{2\pi}. \quad (4.3)$$

Quand on considère l'opérateur $D(\lambda, k)$, avec k plus petit et proche de la borne supérieure $\nu(\lambda^2)$, on pose $\mu = \lambda^2$ et on obtient la

Proposition 4.2. *Pour $E = 2\pi\mu$, le nombre $N'(E)$ de valeurs propres non-nulles de l'opérateur $D(\lambda, k)$ dans l'intervalle $(0, E]$ vérifie $N'(E) \sim \langle N(E) \rangle$.*

4.1 Exemples $\mu = 5.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.5$

Dans cette partie, nous rapportons des résultats numériques montrant la proche ressemblance entre le spectre de $D(\lambda, k)$ et les premiers zéros de la fonction zeta de Riemann, pour des exemples de petites valeurs de μ .

4.1.1 $\mu = 5.5$

Pour $\mu = 5.5$, les valeurs propres cosinusoidales sont extrêmement proches de 1 quand $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et données pour les valeurs suivantes de n dans la table ci-dessous :

| n | $\chi(5.5, n)$ |
|-----|-------------------------|
| 5 | 0.99999999999647719857 |
| 6 | 0.99999999894391115741 |
| 7 | 0.9999980631702676769 |
| 8 | 0.99997809227622865324 |
| 9 | 0.99852183576050441685 |
| 10 | 0.95065832620623051607 |
| 11 | 0.57197061534624863399 |
| 12 | 0.139174533954574303539 |

Ainsi on déduit que $\nu(5.5) = 10$, puisque la prochaine valeur propre 0.5719706153 est loin de 1. On a $2\pi 5.5 \sim 34.5575$. La table suivante compare les valeurs propres positives $\lambda_j = \lambda_j(D(\lambda, k))$ de $D(\lambda, k)$ (notées dans la colonne de gauche) avec les parties imaginaires ζ_j des premiers zéros de la fonction zeta de Riemann (en colonne de droite).

| λ_j | ζ_j |
|-------------|-----------|
| 14.781 | 14.1347 |
| 21.701 | 21.022 |
| 25.547 | 25.0109 |
| 29.345 | 30.4249 |
| 33.168 | 32.9351 |

La visualisation spectrale est montrée dans la Figure 38, avec les zéros de zeta en bas.

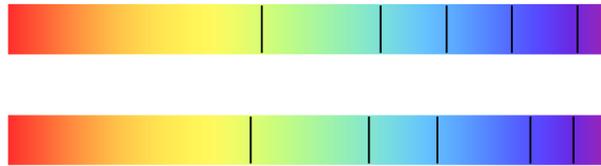


Figure 38: Les 5 premières valeurs propres non-nulles pour le Dirac dans la ligne supérieure et parties imaginaires des zéros de zeta dans la ligne inférieure.

4.1.2 $\mu = 6.5$

Pour $\mu = 6.5$, les valeurs propres cosinusoidales $\chi(6.5, n)$ sont extrêmement proches de 1 quand $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; pour $7 \leq n \leq 14$ les valeurs sont reportées dans la table suivante :

| n | $\chi(6.5, n)$ |
|-----|------------------------|
| 7 | 0.9999999998668315975 |
| 8 | 0.9999999731589077585 |
| 9 | 0.9999963978717981581 |
| 10 | 0.9999680893668767767 |
| 11 | 0.99821407841789989100 |
| 12 | 0.94788066237037484836 |
| 13 | 0.57534099083086049406 |
| 14 | 0.14710511279564130503 |

Ainsi on a $\nu(6.5) = 12$, puisque la prochaine valeur propre 0.5753409908 est loin de 1. On a $2\pi 6.5 \sim 40.8407$. Une fois encore, la table suivante reporte les valeurs propres $\lambda_j = \lambda_j(D(\lambda, k))$ comparées avec les parties imaginaires ζ_j des premiers zéros de la fonction zeta.

| λ_j | ζ_j |
|-------------|-----------|
| 13.936 | 14.1347 |
| 20.580 | 21.022 |
| 24.690 | 25.0109 |
| 30.194 | 30.4249 |
| 33.454 | 32.9351 |
| 36.826 | 37.5862 |
| 40.259 | 40.9187 |

La visualisation spectrale est montrée dans la Figure 39 avec les zéros de zeta dans la seconde ligne

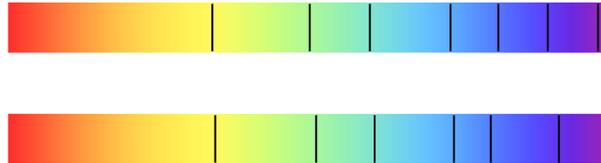


Figure 39: Les 7 premières valeurs propres non-nulles pour le Dirac dans la ligne supérieure et les parties imaginaires des zéros de zeta dans la ligne inférieure.

4.1.3 $\mu = 7.5$

Les valeurs propres cosinusoidales $\chi(7.5, n)$ sont extrêmement proches de 1 pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, et alors données par

| n | $\chi(7.5, n)$ |
|-----|------------------------|
| 9 | 0.9999999996397226733 |
| 10 | 0.9999999453062631606 |
| 11 | 0.99999941709770526957 |
| 12 | 0.99995709581648305854 |
| 13 | 0.99792322303841470726 |
| 14 | 0.94552083061302325507 |
| 15 | 0.57809629788957190907 |
| 16 | 0.15383636015962926720 |

Ainsi, on a $\nu(7.5) = 14$ puisque la prochaine valeur propre 0.5780962979 est loin de 1. On a $2\pi 7.5 \sim 47.1239$. La prochaine table compare les valeurs propres $\lambda_j = \lambda_j(D(\lambda, k))$ avec les parties imaginaires ζ_j

des premiers zéros de la fonction zeta.

| λ_j | ζ_j |
|-------------|-----------|
| 15.060 | 14.1347 |
| 21.683 | 21.022 |
| 24.948 | 25.0109 |
| 30.979 | 30.4249 |
| 33.243 | 32.9351 |
| 37.406 | 37.5862 |
| 40.514 | 40.9187 |
| 43.643 | 43.3271 |
| 46.658 | 48.0052 |

La visualisation spectrale est montrée sur la Figure 40, avec les zéros de zeta sur la seconde ligne.

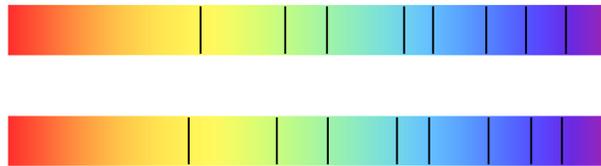


Figure 40: Les 9 premières valeurs propres non-nulles pour le Dirac dans la ligne supérieure et parties imaginaires des zéros de zeta dans la ligne inférieure.

4.1.4 $\mu = 8.5$

Les $\chi(8.5, n)$ sont extrêmement proches de 1 pour $n \leq 10$, et les suivants sont donnés par :

| n | $\chi(8.5, n)$ |
|-----|------------------------|
| 11 | 0.9999999992101000288 |
| 12 | 0.99999999034148375362 |
| 13 | 0.99999913999089362040 |
| 14 | 0.99994536408530411219 |
| 15 | 0.99764801726717553636 |
| 16 | 0.94347292951033144975 |
| 17 | 0.58041289343441020661 |
| 18 | 0.15967051202562674536 |

Ainsi, on a $\nu(8.5) = 16$, (la prochaine valeur propre 0.5804128934 est loin de 1) et $2\pi 8.5 \sim 53.4071$. La table suivante fournit les valeurs propres $\lambda_j = \lambda_j(D(\lambda, k))$ comparées aux parties imaginaires ζ_j des premiers zéros de la fonction zeta de Riemann.

| λ_j | ζ_j |
|-------------|-----------|
| 14.887 | 14.1347 |
| 20.778 | 21.022 |
| 25.535 | 25.0109 |
| 29.928 | 30.4249 |
| 32.473 | 32.9351 |
| 37.965 | 37.5862 |
| 41.088 | 40.9187 |
| 43.741 | 43.3271 |
| 46.685 | 48.0052 |
| 49.910 | 49.7738 |
| 52.845 | 52.9703 |

La visualisation spectrale est fournie sur la Figure 41, avec les zéros de zeta dans la seconde ligne.

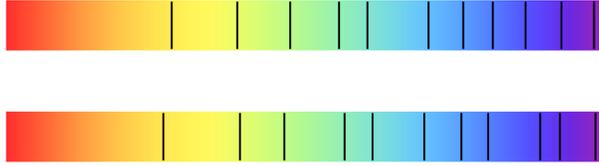


Figure 41: Les 11 premières valeurs propres non-nulles pour le Dirac sont sur la ligne supérieure et les parties imaginaires des zéros de zeta sont sur la ligne inférieure.

4.1.5 $\mu = 9.5$

Pour $\mu = 9.5$, les valeurs propres cosinusoidales $\chi(9.5, n)$ sont extrêmement proches de 1 quand $0 \leq n \leq 12$, et pour $13 \leq n \leq 20$, elles sont fournies dans la table :

| n | $\chi(9.5, n)$ |
|-----|------------------------|
| 13 | 0.99999999984990646525 |
| 14 | 0.99999998455736228573 |
| 15 | 0.99999881131048713492 |
| 16 | 0.99993308190344158164 |
| 17 | 0.99738707752987412262 |
| 18 | 0.94166650390462098514 |
| 19 | 0.58240244869697875785 |
| 20 | 0.16480962032526478957 |

Ainsi, on a $\nu(9.5) = 18$, puisque la prochaine valeur propre 0.5824024487 est loin de 1. On a $2\pi 9.5 \sim 59.6903$ et la table suivante fournit les valeurs propres $\lambda_j = \lambda_j(D(\lambda, k))$ comparées aux parties imaginaires ζ_j des premiers zéros de la fonction zeta.

| λ_j | ζ_j |
|-------------|-----------|
| 13.998 | 14.1347 |
| 21.501 | 21.022 |
| 25.121 | 25.0109 |
| 30.689 | 30.4249 |
| 33.583 | 32.9351 |
| 37.813 | 37.5862 |
| 41.272 | 40.9187 |
| 43.050 | 43.3271 |
| 47.319 | 48.0052 |
| 50.190 | 49.7738 |
| 53.026 | 52.9703 |
| 55.731 | 56.4462 |
| 58.581 | 59.347 |

La visualisation spectrale est montrée dans la Figure 42, avec les zéros de zeta sur la seconde ligne.

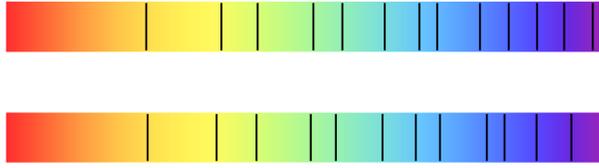


Figure 42: Les 13 premières valeurs propres non-nulles pour le Dirac dans la ligne supérieure et les parties imaginaires des zéros de zeta dans la ligne inférieure.

4.1.6 $\mu = 10.5$

Pour $\mu = 10.5$, les valeurs propres cosinusoidales $\chi(10.5, n)$ sont extrêmement proches de 1 quand $0 \leq n \leq 14$, et pour $15 \leq n \leq 22$, elles sont fournies dans la table :

| n | $\chi(10.5, n)$ |
|-----|------------------------|
| 15 | 0.99999999974270022369 |
| 16 | 0.99999997703659571104 |
| 17 | 0.99999843436641476606 |
| 18 | 0.99992039045021729410 |
| 19 | 0.99713907784499135361 |
| 20 | 0.94005235637340584775 |
| 21 | 0.58413979804862029634 |
| 22 | 0.16939519615152177689 |

Ainsi, on a $\nu(10.5) = 20$, puisque la prochaine valeur propre 0.5841397980 est loin de 1. On a également $2\pi 10.5 \sim 65.9734$. La table des valeurs propres (colonne de gauche) comparée aux premiers zéros (colonne de droite) est :

| λ_j | ζ_j |
|-------------|-----------|
| 14.450 | 14.1347 |
| 21.455 | 21.022 |
| 25.356 | 25.0109 |
| 30.345 | 30.4249 |
| 32.600 | 32.9351 |
| 37.410 | 37.5862 |
| 40.387 | 40.9187 |
| 42.895 | 43.3271 |
| 48.095 | 48.0052 |
| 50.346 | 49.7738 |
| 53.272 | 52.9703 |
| 56.050 | 56.4462 |
| 58.737 | 59.347 |
| 61.386 | 60.8318 |
| 63.949 | 65.1125 |

La visualisation spectrale est montrée sur la Figure 43, avec les zéros de zeta sur la seconde ligne.

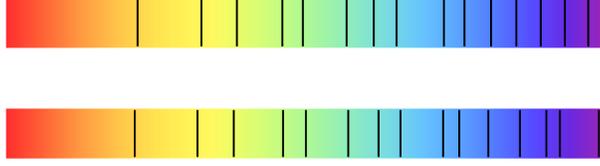


Figure 43: Les 15 premières valeurs propres non-nulles pour le Dirac dans la ligne supérieure et les parties imaginaires des zéros de zeta dans la ligne inférieure.

4.2 Divergence moyenne

Pour une comparaison objective des $N'(2\pi\mu)$ valeurs propres λ_j dont la valeur peut aller jusqu'à $2\pi\mu$, avec les parties imaginaires ζ_j des zéros de la fonction zeta de Riemann, on a à disposition les trois mesures possibles pour la divergence :

1. Erreur moyenne absolue:

$$A(\mu) := \frac{1}{N'(2\pi\mu)} \sum |\lambda_j - \zeta_j|$$

Quand on calcule cette erreur pour les valeurs de μ utilisées dans les pages précédentes, cela fournit la liste de valeurs suivantes :

$$A(5.5) = 0.635176, \quad A(6.5) = 0.44693, \quad A(7.5) = 0.528827,$$

$$A(8.5) = 0.456739, \quad A(9.5) = 0.395068$$

2. Racine carrée de la moyenne des carrés des déviations.

$$R(\mu) := \sqrt{\frac{1}{N'(2\pi\mu)} \sum (\lambda_j - \zeta_j)^2}$$

Cela donne la liste suivante de valeurs :

$$R(5.5) = 0.691088, \quad R(6.5) = 0.48858, \quad R(7.5) = 0.650648,$$

$$R(8.5) = 0.562489, \quad R(9.5) = 0.459776$$

3. Déviation normalisée. Cette déviation s'obtient en divisant la déviation précédente par le diamètre du domaine des variables. Elle est invariante par transformations affines et est ainsi une bonne mesure de la divergence, habituellement exprimée par un pourcentage. Le diamètre du domaine des variables est ici égal à $2\pi\mu - 14$, et cela donne la liste :

$$NR(5.5) = 0.0375848, \quad NR(6.5) = 0.0185609, \quad NR(7.5) = 0.0205914,$$

$$NR(8.5) = 0.0148189, \quad NR(9.5) = 0.0103126, \quad NR(10.5) = 0.00995148$$

Ces nombres montrent que la déviation normalisée s'améliore régulièrement et atteint 1% (un pourcent) pour $\mu = 9.5$ et alors tombe à moins de un pourcent pour $\mu = 10.5$.

5 Zéros de zeta à partir des valeurs propres des triplets spectraux

Dans la section précédente, on a exploré les petites valeurs propres des triplets spectraux $\Theta(\lambda, k) = (\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{H}(\lambda), D(\lambda, k))$ pour $k = 2\ell$ un nombre pair aussi proche que possible de la borne $\nu(\lambda^2) \sim 2\lambda^2$ de

l'intervalle admis. Ces résultats numériques montrent à l'évidence une profonde relation entre les valeurs basses du spectre $\lambda_n(D(\lambda, k))$ de ces triplets spectraux et les premiers zéros de la fonction zeta de Riemann. La dépendance des paramètres (λ, k) , et la différence entre la croissance des valeurs propres et celle de zeta montrent que la relation est certainement plus subtile qu'une simple égalité entre les valeurs propres $\lambda_n(D(\lambda, k))$ et les parties imaginaires ζ_n des zéros.

La principale observation de cette section est que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a des valeurs spécifiques du paramètre λ pour lesquelles la dépendance de $\lambda_n(D(\lambda, k))$ à k disparaît. Pour ces valeurs spéciales de λ , la valeur commune des $\lambda_n(D(\lambda, k))$ coïncide avec la partie imaginaire ζ_n du n -ième zéro de la fonction zeta de Riemann. De plus, ces valeurs spécifiques de λ forment une progression géométrique dont le facteur d'échelle est l'exponentielle de π/ζ_n .

Cette observation a été d'abord testée expérimentalement et elle sera complètement justifiée conceptuellement dans la section 6.

Nous allons utiliser 4 critères différents pour détecter ces valeurs spécifiques de λ . Ce sont :

- la comparaison de $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell))$ et de $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell + 1))$ (§ 5.1) ;
- l'évolution de $\lambda_n(D(\lambda, k))$ comme une fonction de λ (§ 5.2) ;
- le critère de quantification $x^{2iy} = 1$ appliqué au point $(\lambda, \lambda_n(D(\lambda, k)))$ (§ 5.3) ;
- la distance qui empêche le vecteur propre $\xi_n(D(\lambda, k))$ pour $D(\lambda, k)$ d'être un vecteur propre de $D_0(\lambda)$.

Les tests numériques de ces critères montrent leur accord, mais la précision devient plus fine quand on applique le dernier critère. En appliquant la dernière méthode pour le petit intervalle de λ dans l'intervalle $(2, 4)$, on obtient l'accord avec les 31 premiers zéros ζ_n ($n \leq 31$) de zeta avec une précision suffisante pour évaluer la probabilité d'une coïncidence fortuite 10^{-50} .

5.1 Le critère $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell)) \sim \lambda_n(D(\lambda, 2\ell + 1))$

La première étape dans le but de détecter les valeurs spécifiques de λ est de voir ce qui se produit si l'on remplace $k = 2\ell$ par le nombre impair $k + 1 = 2\ell + 1$. On voit que les valeurs propres positives $\lambda_n(D(\lambda, *))$ décroissent et coïncident effectivement avec des valeurs spécifiques de λ . Nous expliquons d'abord brièvement pourquoi $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell)) \geq \lambda_n(D(\lambda, 2\ell + 1))$ et visualisons alors quelques résultats numériques montrant la coïncidence pour des valeurs spécifiques de λ .

Par construction, le noyau de $D(\lambda, k)$ contient le domaine de $\Pi(\lambda, k)$ et est ainsi au moins de dimension k . De plus, par (3.5), on a, pour la mise à l'échelle γ de $\mathcal{H}(\lambda)$,

$$\gamma D(\lambda, k) = -D(\lambda, k) \gamma \quad (5.1)$$

Le noyau de l'opérateur $D_0(\lambda)$ est de dimension un et est donné par la fonction constante 1_λ qui est paire (*i.e.* $\gamma(1_\lambda) = 1_\lambda$).

Cela entraîne que l'index mis à l'échelle de l'opérateur $D_0(\lambda)$ est égal à 1. Alors, par stabilité de l'index, il s'ensuit que l'index mis à l'échelle de l'opérateur $D(\lambda, k)$ est aussi égal à 1. Cela signifie que la signature de la restriction de γ au noyau de $D(\lambda, k)$ est 1 et par conséquent que la dimension de $\ker(D(\lambda, k))$ est un nombre impair.

Par conséquent, pour $k = 2\ell$ pair, il est naturel de s'attendre à ce que ce noyau soit de dimension $k + 1$. On est tenté de comparer les deux valeurs propres non-nulles $\lambda_n(D(\lambda, k))$ et $\lambda_n(D(\lambda, k + 1))$. Par construction, on a $\Pi(\lambda, k) < \Pi(\lambda, k + 1)$, et nous expliquons maintenant pourquoi les valeurs positives de ces opérateurs, arrangées en ordre croissant, vérifient l'inégalité

$$\lambda_n(D(\lambda, k + 1)) \leq \lambda_n(D(\lambda, k)), \quad \forall n, \lambda \quad (5.2)$$

Lemme 5.1. Soit A une matrice auto-adjointe de dimension N , et $E \subset \text{Ker}A$ un sous-espace de son noyau. Alors les valeurs propres positives $\mu_n(A)$ arrangées en ordre décroissant vérifient

$$\mu_n(A) = \max_{\substack{F \mid \dim F = n \\ F \perp E}} \min_{\substack{\xi \in F \\ \|\xi\|=1}} \langle \xi \mid A\xi \rangle \quad (5.3)$$

Proposition 5.2. Soit $D \in M_N(\mathbb{C})$ une matrice auto-adjointe.

(i) Soit $P \in M_N(\mathbb{C})$ une projection (idempotente auto-adjointe) et $Q = 1 - P$, $D_P := QDQ$. Alors les valeurs propres positives de D_P arrangées en ordre décroissant vérifient l'égalité

$$\mu_n(D_P) = \max_{\substack{F \mid \dim F = n \\ F \perp P}} \min_{\substack{\xi \in F \\ \|\xi\|=1}} \langle \xi \mid D\xi \rangle \quad (5.4)$$

(ii) Soient $P_j \in M_N(\mathbb{C})$ des projections telles que $P_1 \leq P_2$. Alors, avec les notations de (i) les valeurs propres positives de D_{P_j} vérifient l'inégalité

$$\mu_n(D_{P_2}) \leq \mu_n(D_{P_1}) \quad (5.5)$$

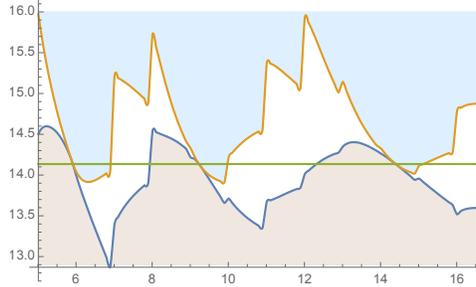


Figure 44: Pour la première valeur propre, le graphique inférieur est celui de $\lambda_1(D(\lambda, k+1))$ et le graphique supérieur est celui de $\lambda_1(D(\lambda, k))$. La ligne horizontale est la partie imaginaire du premier zéro de zeta.

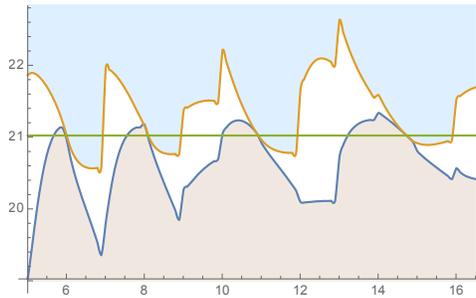


Figure 45: Pour la seconde valeur propre, le graphique inférieur est celui de $\lambda_2(D(\lambda, k+1))$ et le graphique supérieur est celui de $\lambda_2(D(\lambda, k))$. La ligne horizontale est la partie imaginaire du second zéro de zeta.

En appliquant le critère $\lambda_n(D(\lambda, k)) \sim \lambda_n(D(\lambda, k+1))$ pour déterminer les valeurs correspondant à $\mu \in I = [5, 16.5]$, i.e. en minimisant la différence $\lambda_n(D(\lambda, k)) - \lambda_n(D(\lambda, k+1))$ sur l'ensemble fini de $\mu \in \frac{1}{10}\mathbb{Z} \cap I$, on obtient la liste approximative des 31 premiers zéros de zeta montrés dans la Figure 46.

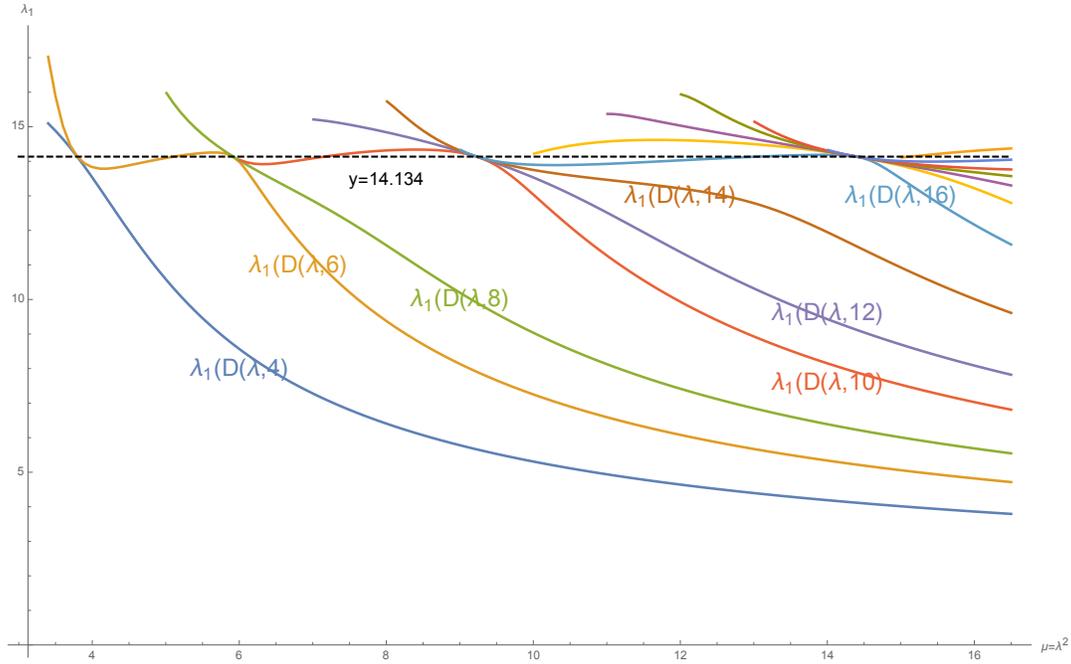


Figure 47: Evolution de la première valeur propre non-nulle de $D(\lambda, 2\ell)$. La ligne horizontale pointillée est la valeur de la partie imaginaire ζ_1 du premier zéro de zeta.

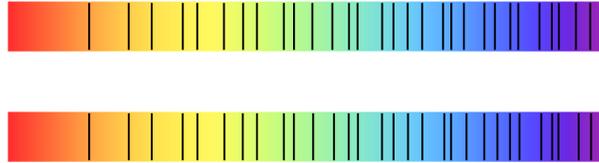


Figure 46: En utilisant le critère $\lambda_n(D(\lambda, k)) \sim \lambda_n(D(\lambda, k + 1))$.

5.2 Evolution continue des valeurs propres non-nulles pour un nombre fixé de conditions prolates

Quand on travaille avec les opérateurs $D(\lambda, k)$, avec k proche de la plus grande valeur autorisée $\nu(\lambda^2) \sim 2\lambda^2$, on introduit nécessairement une discontinuité due à la nature discrète de la variable k . Pour éviter cela, on peut, pour k fixé, considérer la dépendance des valeurs propres $\lambda_n(D(\lambda, k))$ tant que λ est suffisamment grand pour que $k < \nu(\lambda^2)$. On trouve que, pour les valeurs $\ell = 2, 3$, les $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell))$ coïncident aux alentours de $\mu \sim 3.8$ et que leur valeur commune est proche de ζ_1 . Ce fait est d'autant plus remarquable que quand $\mu < 4$ *i.e.* $\lambda < 2$, il n'y a pas de sommation impliquée dans l'équation (3.4). Pour $\ell = 3, 4, 5$, les $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell))$ coïncident aux alentours de $\mu \sim 5.95$ et à nouveau, nous trouvons que leur valeur est proche de ζ_1 . Pour $\ell = 5, 6, 7, 8$, les $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell))$ coïncident autour de $\mu \sim 9.2$ et à nouveau, leur valeur est proche de ζ_1 . Pour $\ell = 8, 9, 10, 11, 12, 13$, les $\lambda_n(D(\lambda, 2\ell))$ coïncident aux alentours de $\mu \sim 14.4$ et leur valeur est proche de ζ_1 . Les valeurs spécifiques de μ auxquelles les courbes coïncident semblent former une progression géométrique. On trouve que le ratio de deux termes consécutifs est $\sim \exp(2\pi/\zeta_1)$ et, plus généralement, pour la n -ième valeur propre de μ elles forment une progression géométrique de ratio $\sim \exp(2\pi/\zeta_n)$ où ζ_n est la partie imaginaire du n -ième zéro de zeta. Ces faits "expérimentaux" seront expliqués théoriquement par le Théorème 6.4.

5.3 Quantification de la longueur $\log \mu$

Le fait que plusieurs courbes des valeurs propres $\lambda_n(D(\lambda, k))$ coïncident en des points spécifiques du plan suggère qu'on pourrait pousser la comparaison plus avant encore et comparer ces points avec le spectre de l'opérateur non perturbé $D_0(\lambda)$. En fonction des coordonnées (x, y) où $x = \mu = \lambda^2$ et $y = \lambda_n(D(\lambda, k))$, le spectre de $D_0(\lambda)$ est caractérisé par la condition de quantification $x^{iy} = 1$. Le sous-ensemble du plan défini par cette condition est l'union des graphiques des fonctions $2\pi n / \log x$.

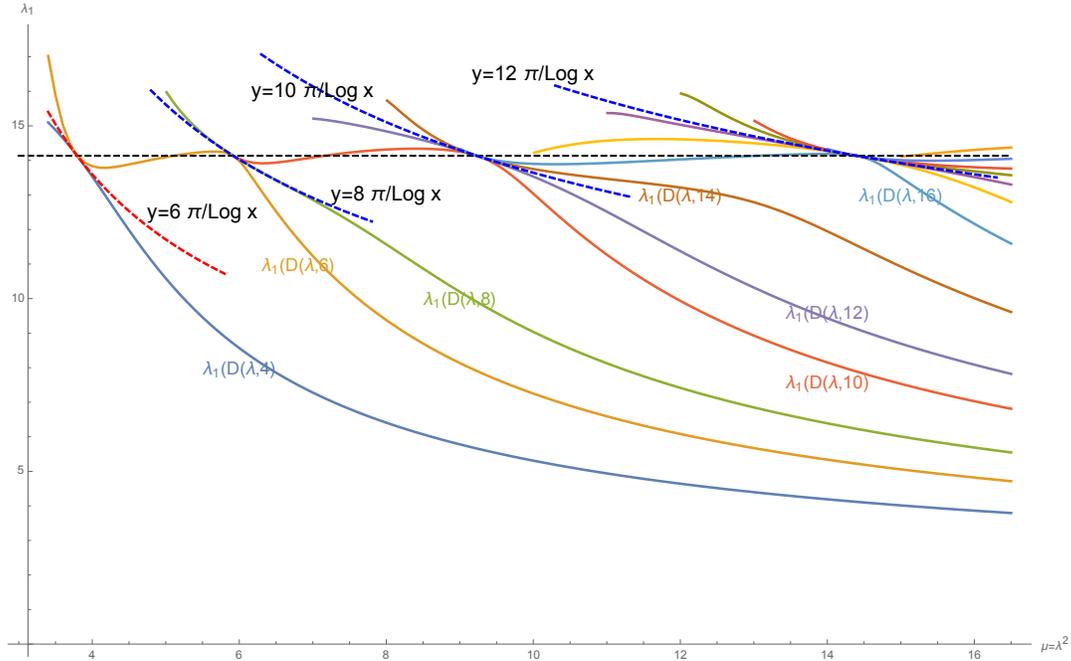


Figure 48: Coïncidence avec les solutions de $x^{iy} = 1$.

La Figure 48 montre une coïncidence parfaite entre les courbes et les points de rencontre des graphiques des valeurs propres. Indépendamment de ce résultat, on peut mesurer la distance séparant le point $(\mu, \lambda_n(D(\lambda, k)))$ du fait de vérifier la condition de quantification en l'écrivant sous la forme

$$\mu^{i\lambda_n(D(\lambda, k))} = 1 \iff |\mu^{i\lambda_n(D(\lambda, k))} - 1| = 0$$

et en dessinant les graphiques de ces fonctions pour chaque entier n . Ils sont montrés sur la Figure 49 pour $n = 1$ et sur la Figure 50 pour $n = 2$. Le fait-clé est que les valeurs de μ en lesquelles ces fonctions s'évanouissent coïncident avec les valeurs déterminées précédemment pour lesquelles on avait $\lambda_1(D(\lambda, k + 1)) \sim \lambda_1(D(\lambda, k))$ des Figures 44 et 45.

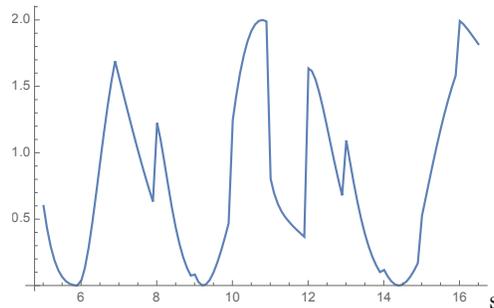


Figure 49: Graphe de $|\mu^{i\lambda_1(\mu)} - 1|$.

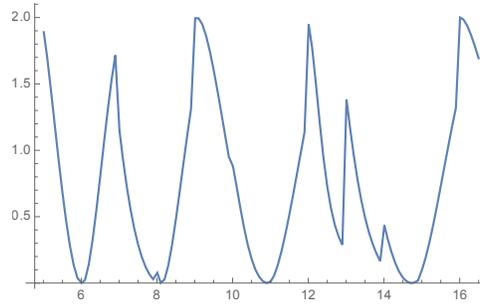


Figure 50: Graphe de $|\mu^{i\lambda_2(\mu)} - 1|$.

5.4 Le critère du vecteur propre commun pour $D(\lambda, k)$ et $D_0(\lambda)$

L'accord de la quantification avec les points de rencontre des courbes des valeurs propres suggère que tous les vecteurs propres des $D(\lambda, k)$ impliqués s'accordent les uns aux autres et sont en fait les vecteurs propres de l'opérateur non perturbé $D_0(\lambda)$. Cela donne un critère très fort obtenu en mesurant la distance dans l'espace de Hilbert d'un vecteur propre $\xi_n(D(\lambda, k))$ pour $D(\lambda, k)$ avec le vecteur propre de $D_0(\lambda)$ qui a le même nombre de rotation. Dans les Figures 51 et 52, la norme de la différence est visualisée et on obtient accord entre les zéros dont les valeurs ont été déterminées par les trois précédents critères. Finalement, la Figure 53 compare les 31 premières valeurs propres sélectionnées en utilisant le dernier critère avec les parties imaginaires des 31 premiers zéros de la fonction zeta de Riemann.

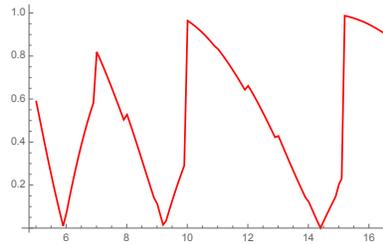


Figure 51: Distance du vecteur propre de $D(\lambda, k)$ pour λ_1 aux vecteurs propres de $D_0(\lambda)$.

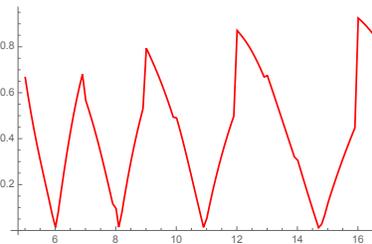


Figure 52: Distance du vecteur propre de $\xi_2(D(\lambda, k))$ aux vecteurs propres de $D_0(\lambda)$.

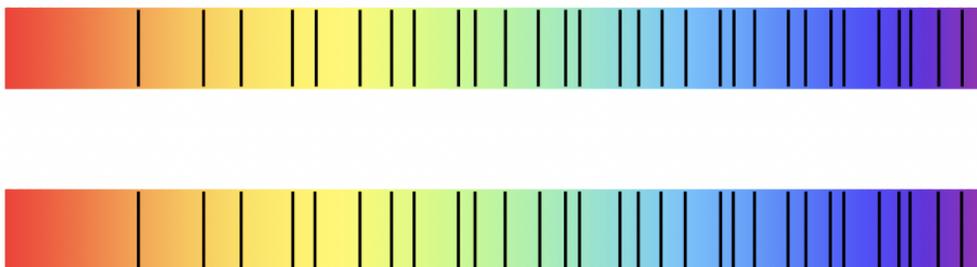


Figure 53: En utilisant le critère $\xi_n(D(\lambda, k))$ vecteur propre de $D_0(\lambda)$, on obtient les 31 valeurs propres ci-dessus à comparer aux parties imaginaires des 31 premiers zéros de la fonction zeta de Riemann.

6 ζ -cycles

Le but de cette section est de fournir une explication théorique pour les calculs numériques rapportés dans la section précédente, et en particulier de donner une justification théorique de la proche similarité entre les valeurs du spectre de l'opérateur $D(\lambda, k)$ dans le triplet spectral $\theta(\lambda, k)$ (voir la Section 4) et les premiers zéros de la fonction zeta de Riemann. Le but que nous poursuivrons ici sera de relier ces résultats numériques surprenants avec la réalisation spectrale des zéros de la fonction zeta de Riemann telle que présentée en [3]. Le nouveau concept qui émerge est celui de ζ -cycle C . Dans la prochaine partie, nous expliquons d'abord comment définir des sommes de Riemann invariantes par mise à l'échelle pour les fonctions définies sur $[0, \infty)$ dont l'intégrale s'évanouit. Cette technique est implémentée en définissant une fonction linéaire $\Sigma_\mu \mathcal{E} : \mathcal{S}_0^{\text{ev}} \rightarrow L^2(C)$ qui joue un rôle central dans le développement et qui entre dans la définition de la notion de ζ -cycle (Définition 6.1). Au § 6.2, nous prouvons que les ζ -cycles sont stables selon des recouvrements finis, et finalement, nous établissons et prouvons le principal résultat de cet article, qui est le théorème 6.4. Ce résultat sélectionne naturellement une famille d'espaces de Hilbert $\mathcal{H}(L) := \Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})^\perp$ qui sont associés aux zéros de la fonction zeta de Riemann qui sont sur la droite critique.

6.1 Sommes de Riemann invariantes par mise à l'échelle et fonction $\Sigma_\mu \mathcal{E}$

Soient $\mu > 1$ et Σ_μ la fonction linéaire définie sur les fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule suivante :

$$(\Sigma_\mu g)(u) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(\mu^k u). \quad (6.1)$$

Cette définition a du sens point par point sous la contrainte que g décroît suffisamment rapidement en 0 et en $l'∞$ dans \mathbb{R}_+^* . La fonction \mathcal{E} est définie comme suit :

$$(\mathcal{E}f)(u) := u^{1/2} \sum_{n>0} f(nu). \quad (6.2)$$

Elle est, par construction, proportionnelle à une somme de Riemann pour l'intégrale de f .

On dénote par $\mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ l'espace linéaire des fonctions de Schwartz paires à valeurs réelles $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0 = \int f(x)dx$. Le lemme suivant décrit le "bon comportement" de la fonction \mathcal{E} .

Lemme 6.1. *Soit f une fonction de variation bornée sur $(0, \infty)$, de décroissance rapide pour $u \rightarrow \infty$, $O(u^2)$ quand $u \rightarrow 0$, et telle que $\int_0^\infty f(t)dt = 0$. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $\mathcal{E}(f)(u)$ est bien définie point par point, elle est $O(u^{1/2})$ quand $u \rightarrow 0$ et elle est de décroissance rapide pour $u \rightarrow \infty$.

(ii) La série (6.1) définissant $\Sigma_\mu \mathcal{E}(f)$ est géométriquement convergente, et elle définit une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}_+^*/\mu^{\mathbb{Z}}$.

L'action de mise à l'échelle de \mathbb{R}_+^* sur les fonctions est définie par $(\vartheta(\lambda)f)(x) := f(\lambda^{-1}x)$. Le lemme ci-dessous décrit le comportement de l'action de mise à l'échelle en relation avec la fonction \mathcal{E} .

Lemme 6.2.

(i) L'espace de Schwartz $\mathcal{S}_0^{\text{ev}}$ est globalement invariant sous l'action de mise à l'échelle ϑ et si $\mu > 1$, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\mathcal{E} \circ \lambda^{-1/2} \vartheta(\lambda) = \vartheta(\lambda) \circ \mathcal{E}, \quad \vartheta(\lambda) \Sigma_\mu = \Sigma_\mu \vartheta(\lambda) \tag{6.3}$$

(ii) L'action de mise à l'échelle ϑ induit une action du groupe multiplicatif $C_\mu = \mathbb{R}_+^*/\mu^{\mathbb{Z}}$ sur $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})$.

(iii) Soit f une fonction comme dans le lemme 6.1 qui coïncide au voisinage de 0 avec une fonction paire lisse, alors $\Sigma_\mu \mathcal{E}(f)$ appartient à la fermeture de $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})$ dans $L^2(C_\mu)$.

6.2 Zéros de zeta et ζ -cycles

Nous identifions un cercle de longueur $L = \log \mu > 0$ avec l'espace-quotient $C_\mu := \mathbb{R}_+^*/\mu^{\mathbb{Z}}$ vu comme un espace homogène sur le groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* . Cet espace est doté de la mesure d^*u associée à la mesure de Haar du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* . On obtient ainsi un fibré canonique des espaces \mathbb{R}_+^* -homogènes sur la base $(0, \infty)$.

On conserve les notations introduites dans la partie précédente.

Définition 6.1. Un ζ -cycle est un cercle C de longueur $L = \log \mu$ tel que le sous-espace $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})$ n'est pas dense dans l'espace de Hilbert $L^2(C)$.

Comme pour les géodésiques fermées, les ζ -cycles sont stables selon les recouvrements finis.

Proposition 6.3. Soit C un ζ -cycle de longueur $L = \log \mu$, alors pour tout entier positif $n > 0$, le recouvrement plié n -fois de C est un ζ -cycle.

Nous sommes maintenant prêts à énoncer et prouver notre résultat principal. La réalisation spectrale des zéros de la fonction zeta de Riemann de [3] admet la variante géométrique suivante :

Théorème 6.4.

(i) Soit C un ζ -cycle. Alors le spectre de l'action du groupe multiplicatif \mathbb{R}_+^* sur le complément orthogonal de $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})$ dans $L^2(C)$ est constitué des parties imaginaires des zéros de zeta sur la droite critique.

Inversement :

(ii) Soit $s > 0$ tel que $\zeta(\frac{1}{2} + is) = 0$, alors tout cercle réel C de longueur un multiple entier de $2\pi/s$ est un ζ -cycle et son spectre, pour l'action de \mathbb{R}_+^* sur $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}}) \subset L^2(C)$, contient is .

Le développement ci-dessus nous fournit une famille d'espaces de Hilbert $\mathcal{H}(L) := \Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0^{\text{ev}})^\perp \subset L^2(C)$ et, pour chaque entier $n > 0$, des fonctions $\pi_n^* : \mathcal{H}(L) \rightarrow \mathcal{H}(nL)$ qui font monter (lift) l'action de \mathbb{N}^\times sur $(0, \infty)$. De plus, on a également une action $\vartheta(\lambda)$ de \mathbb{R}_+^* sur $\mathcal{H}(L)$ et on a montré que les fonctions linéaires π_n^* sont équivariantes. Soit Z l'ensemble des parties imaginaires des zéros critiques de la fonction zeta, on déduit finalement le

Corollaire 2.4.

$$\mathcal{H}(L) \neq \{0\} \iff \exists s \in Z, n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } sL = 2\pi n. \tag{6.4}$$

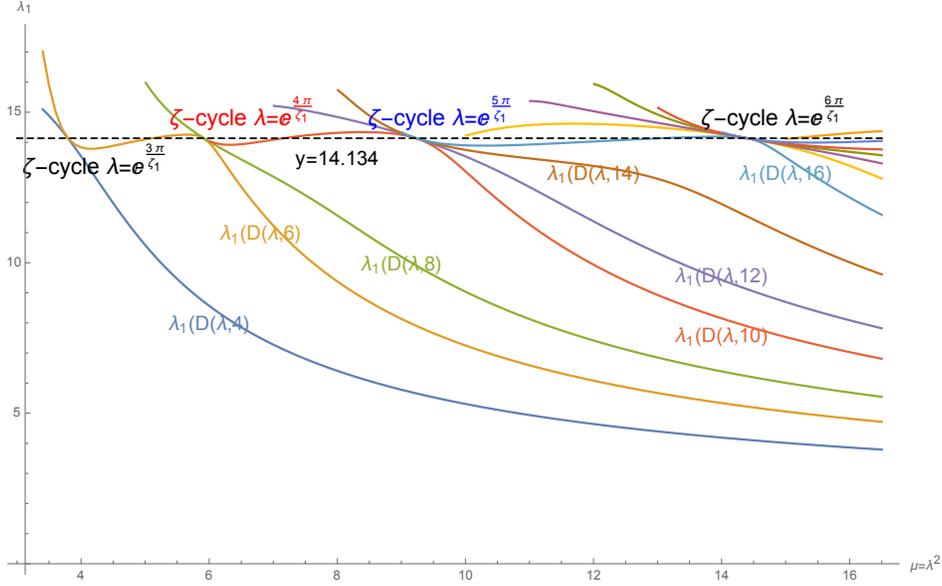


Figure 54: Exemple de ζ -cycles. Ils sont montrés ici pour la première valeur propre non-nulle $\lambda_1(D(\lambda, k))$. Les courbes se touchent les unes les autres en les points $P(k) = (\exp(\frac{2\pi k}{\zeta_1}), \zeta_1)$.

7 Perspectives

Dans cet article, nous avons dévoilé une nouvelle relation entre la géométrie non-commutative et la fonction zeta de Riemann en utilisant le concept de triplet spectral. Les relations précédentes sont :

- Le système de Bost-Connes est un système de mécanique quantique statistique avec brisure spontanée de symétrie qui admet la fonction zeta de Riemann comme fonction de partition.
- L'espace des classes d'adèles de \mathbb{Q} est un espace non-commutatif, dual du système de Bost-Connes et directement relié aux zéros des L -fonctions à Grossencharacter [3].
- Le calcul quantifié est un ingrédient-clé de la formule de trace semi-locale et il fournit une cause de la positivité de la forme quadratique de Weil [6].

Il s'avère que l'espace des classes d'adèles de \mathbb{Q} dans son incarnation dans la théorie des topos en tant que Site de mise à l'échelle (le topos $\mathcal{S} = [0, \infty) \times \mathbb{N}^\times$) est l'espace paramètre naturel pour les cercles de longueur L qui jouent un rôle essentiel dans le présent article. La Proposition 6.3 fournit la compatibilité des ζ -cycles avec l'action de \mathbb{N}^\times par multiplication sur le paramètre L . L'action de \mathbb{N}^\times provenant des recouvrements transforme $L^2(C)$ en un faisceau sur le Site de mise à l'échelle \mathcal{S} . La famille des sous-espaces $\Sigma_\mu \mathcal{E}(\mathcal{S}_0) \subset L^2(C)$ engendre un sous-faisceau de modules sur le faisceau des fonctions lisses et on est alors en droit de considérer la cohomologie du faisceau quotient sur \mathcal{S} . Dotée de la \mathbb{R}_+^* -équivariance, cette cohomologie fournit la réalisation spectrale des zéros de zeta sur la droite critique, en prenant garde, en particulier, aux multiplicités éventuelles. Nous discuterons de ce fait en détail dans un article à venir, qui, donnera notamment une application de la géométrie algébrique sur \mathbb{S} développée dans [4].

Finalement, la stabilité des ζ -cycles sous les recouvrements rappelle le comportement des géodésiques fermées dans une variété riemannienne, suggérant de rechercher un mystérieux "rebroussement" dont les géodésiques fermées correspondraient aux ζ -cycles.

Références

- [1] E. Bombieri, *The Riemann hypothesis*. The millennium prize problems, 107–124, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, 2006.
- [2] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994.
- [3] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*. *Selecta Math.* (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.
- [4] A. Connes, C. Consani, *On Absolute Algebraic Geometry, the affine case*, Preprint (2019).
<https://arxiv.org/abs/1909.09796>
- [5] A. Connes, C. Consani, *The Scaling Hamiltonian*, *J. Operator Theory*, 85 (1), pp. 257–276, 2019.
- [6] A. Connes, C. Consani, *Weil positivity and Trace formula, the archimedean place*, (2020).
<https://arxiv.org/abs/2006.13771>.
- [7] A. Connes, C. Consani, *Quasi-inner functions and local factors*, *Journal of Number Theory*, 226 , pp. 139–167, 2021.
- [8] W. Rudin, *Real and Complex analysis*, Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
- [9] K. Schmudgen, *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*. Graduate Texts in Mathematics, 265. Springer, Dordrecht, 2012.
- [10] B. Simon, *Lower semi-continuity of positive quadratic forms*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 79, (1977), 267–273.
- [11] D. Slepian, H. Pollack, *Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty*, The Bell System technical Journal (1961), 43–63.
- [12] D. Slepian, *Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions*, *J. Math. Phys.* Vol. 44 (1965), 99–140.
- [13] D. Slepian, *Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling*, *Siam Review*. Vol. 23 (1983), 379–393.
- [14] H. Yoshida, *On Hermitian forms attached to zeta functions*. *Zeta functions in geometry* (Tokyo, 1990), 281–325, *Adv. Stud. Pure Math.*, 21, Kinokuniya, Tokyo, 1992.