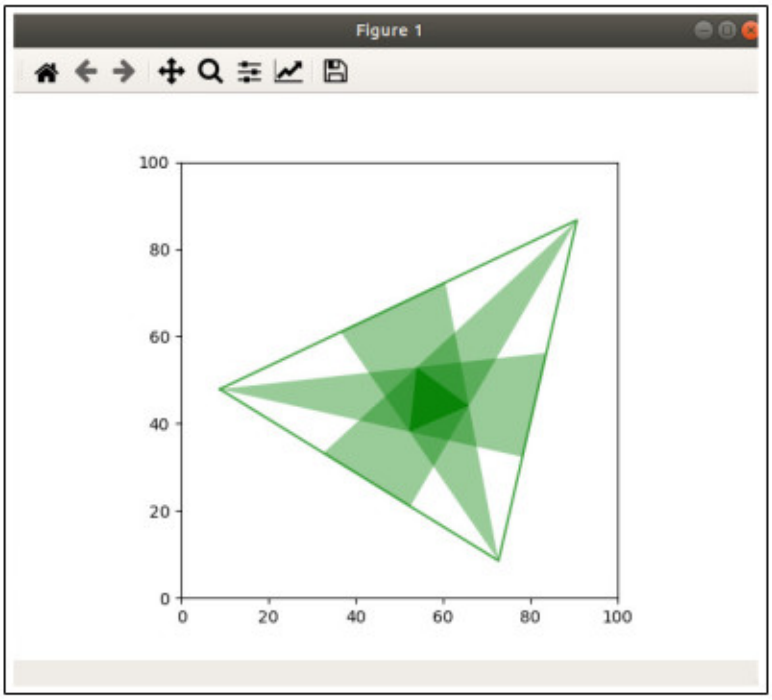
le troisième côté : la différence entre les valeurs est négligeable, les côtés sont de longueur égale, le théorème le prouve, même si l'ordinateur ne le constate qu'à un ε près (d'ailleurs, l'ordinateur détecte toujours l'égalité de flottants (les réels en langage informatique) à un ε près).



On avait également programmé des rotations dans le cercle unité en langage Asymptote, puis en langage python, pour visualiser les décomposants de Goldbach sur le cercle par les programmes suivants :

Bibliographie

[1] Alain Connes, "A new proof of Morley's theorem", *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, **S88** : 43-46, 1998.

[2] Transcription d'une vidéo d'Alain Connes au Collège de France, visionnable ici :https://www.college-de-france.fr/site/colloque-2018/symposium-2018-10-18-10h00.htm, http://denisevellachemla.eu/transc-AC-langage.pdf.

[3] Denise Vella-Chemla, Snurpf, exemple, 2019 http://denisevellachemla.eu/snurpf-exemple.pdf, démonstration de la caractérisation :http://denisevellachemla.eu/demo-caracterisation-DG.pdf.

"Functional Analysts and Operator Theorists Celebrate the 100th Anniversary of Acta Sci. Math."
Alain Connes's talk

In the meantime, let me say that you know, a long time ago, I wrote a paper, this was in 1977 and it was published in Acta. and I mean so for me, it's a great occasion actually to celebrate this anniversary, this was my paper published in 1977, so here is the title of my talk : "Prolate wave operator and zeta". So if you want the motivation from operator theory is very simple to explain and I mean, and it is the following : it is that you know when you look at the zeros of the riemann zeta function, I mean the critical zeros okay, they are a tantalizing spectrum and I mean they are a tantalizing spectrum of something like not a Laplacian but like a Dirac operator, and I mean in a way, if you want, they are mysterious both in the infrared, so if you want, when you look at them for small values of the frequencies, you see something which is extremely strange, it starts around 14 and so on, and continues keep going. But they are also extremely mysterious at the ultraviolet level and the reason why they are so mysterious at the ultraviolet level is that when you count the number of zeros with imaginary part is between zero and E where E is some large number, what you find is something which has been already, if you want, devised by Riemann and it's a very strange expression because I mean if it were something like Dirac operator on a circle, it would be proportional to E to the energy level, but here there is a log term so it's precisely it's $\frac{E}{2\pi}\log\frac{E}{2\pi}$, there is a correction, $-\frac{E}{2\pi}$ and then there is a logarithmic term $+O(\log E)$.

Now when you think geometrically and of course many people have thought geometrically what this could be, it's very difficult to see what type of geometry could be behind this. And I mean if you want at the purely intuitive level and that's what I will follow, what is going on is that, in some sense if you want, one should think of these zeros, I mean the way I think about them is like you know an infinite pole. And I mean one has to prove that it's exactly what it should be. But because it's infinite I mean you know it's uh it's, it's extremely difficult. And uh I mean so what I will explain today is in two parts I mean the main part will be a very recent joint work with Henri Moscovici which will appear in the Proceedings of the National Academy of Sciences and which will handle the ultraviolet part of the spectrum. So what we have found, essentially I mean you know what we found with Henri I will explain what it is, but what I should stress from the start is that we were not looking for what we found : we were you know looking at an operator and so on and we were amazed to find that it was related to the zeros of data and if we had been asked to write a proposal, we would never have been able to guess what we were going to find. And the second part is about the low-lying part of the spectrum and what is also amazing is that in both cases, the functions which are involved and the operator which is involved is an operator which is the prolate wave operator. So let me first explain about this operator. I mean it's related to an important fact which is quite useful when we work with Hilbert space, which is the situation when you have a pair of projections in Hilbert space, we know very well that we have a single projection okay well they're all the same if they have the same dimension. But what about a pair of projections ? Now if you have a pair of projections, it turns out that the situation is not at all out of ends because it's really essentially a two-dimensional situation in the following sense that giving a pair of projections in Hilbert space is the same thing as giving a unitary representation of the dihedral group. And I mean this is straightforward to obtain because what you have, you have two unitaries of square one which are obtained by taking one minus two times the first projection ($\mathcal{U}_1 = 1 - 2P_1$) and one

Référence : https://www.youtube-nocookie.com/embed/vLekXpbT_BI.
Transcription : Denise Vella-Chemla, juin 2022.

minus two times the second projection ($\mathcal{U}_2 = 1 - 2P_2$) ; they are of square one obviously. They don't commute but even though they don't commute, the group they generate is very very nice if you want : it's a solvable group, it's much simpler than solvable, it's just semi-direct product $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ of $\mathbb{Z}$ by the group with two elements ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). So once you know that and you know a little bit of representation theory, you find out that the irreducible representations are just parametrized by an angle and that you can think of the irreducible situation as being two-dimensional at the most, and being given if you want by the projection on the x-axis and the projection on a line which is making an angle with the x-axis.

And so what happens is that from this knowledge of the irreducible representations, and from the knowledge of course of the fact that any representation is a direct integral of irreducible representations, you have a full control of the situation. And you understand that the situation is completely known once you know the cosine for instance of the angle, or the sine of the angle, which both are, if you want, determined by simple equations, I mean (rounding $P_1P_2P_1 = \cos^2(\alpha)P_1, (P_1 - P_2)^2 = \sin^2(\alpha)$). The nicest is about the sine because I mean what you find, when you take the square of the difference between the two projections, it is an operator which is in the center namely which commutes with both P_1 and P_2. And so I mean it will serve to diagonalize the the pair of projections.

Now, so, in 1996 when I started, you know, also by accident, working on zeta, I wanted to introduce a cut-off in terms of suitable operators, and I had to deal with a specific pair of projections, which is the following : you take L^2-functions which are even and you take the following pairs : the first projection is extremely simple, it's an extremely simple cut-off projection, which means that you consider only those functions which vanish when the argument is an absolute value larger than λ, λ is a fixed number. And the second projection is what you obtain by taking the Fourier transform of this first projection. So you conjugate this first projection by the fourier transform, and it is convenient, I mean for, you know, normalization number theoretic purposes to take the Fourier transform as defined here, namely with a factor 2π. In fact you know there is a general rule in mathematics which one learns very early which is that when you have i, it's rare that you don't have a 2π and when you have a 2π, it's very rare that you don't have an i. So I mean this is the rule. And so when you take this pair of projections P_λ and $\widehat{P}_\lambda$, it turns out that there is a miracle which happens. And this miracle was discovered in several places actually but one of them was Bell-labs in the 60s and it was discovered by Slepian, Landau and Pollak, and what they did was to actually be able to diagonalize using prolate functions (I will come later to the main operator) but they were able to, if you want, diagonalize the angle and what they did more precisely so in several papers, what they did, uh was to diagonalize something which is like the square root of the cosine, namely they diagonalize the operator which is called the truncated Fourier transform and which is essentially the product $P_\lambda\widehat{P}_\lambda P_\lambda$, I mean, if you square it, okay.

So the motivation was a very concrete motivation : it was a paradox in the communication of signals which is the paradox is the following ; it is that, you know, for instance, when I am talking now, the duration of my talk is limited so I mean I am limited in time ; on the other hand it's clear also that I am not using extremely high frequencies and so on, so somehow, the range of frequencies is also limited. And so I mean there is a paradox and the paradox is the following : the paradox is that if you think a bit and you look at this pair of projections that I was explaining, you know, these two projections, then it's clear that their intersection is empty, I mean, is zero. Why ? Because a function which has compact support, I mean, which is zero outside, when $|q|$ is larger than λ has a Fourier transform which is analytic, and so it cannot vanish on an interval. So somehow I mean what Slepian and this collaborators found, they found that there was an answer, and the answer was given by very special functions which are called the prolate spheroidal wave functions, and which as I said, diagonalize the truncated Fourier transform. So here, you see the Fourier transform but you only apply it to functions with compact support and you only look at it for the variable in the same interval *(rounding the blue line describing the Fourier transform of his slide)*. And so you get functions, they are extremely specific functions, they have modes, they are labeled by integers, okay, and they form the best possible solution to this paradox in communication theory. They have nothing to do with cosine and sine or anything like that, okay, but they have to do with the cosine of the angle between the two projections. And so what they do, they diagonalize this truncated Fourier transform with eigenvalues and as a consequence, they compute the cosine of the angle between the two projections. The angle of the two projections turns out to be... for a while so the cosine square is for a while, I mean for the first value of m extremely close to one, which means that even though these two projections don't intersect, the angle is almost zero for these values. And then okay it transits from essentially from zero to $\frac{\pi}{2}$, okay. And so what you see you see the behavior of this cosine square that it's essentially one, and then it transits, and then it's essentially zero, it's incredibly close to zero which means that the two projections are essentially orthogonal after a while. Okay, so these are, if you want, the graphs of these functions.

I don't spend much time about it but as a concrete instance, for instance, you can see for a very small value, which is quite reasonable, which is 3.8, you can see the value of the cosine square. So you can see that the cosine square is essentially one and the angle is essentially zero and so in a way I mean in many ways you know one can think that these projections even though they don't intersect they have something which is an essential intersection which are these vectors these prolate wave functions.

Now the secret behind these functions is the fact which was discovered by Slepia, and his collaborators but also by Mehta in random matrix theory, is the fact that these two projections, they commute with a differential operator. If you want, rather, the way they found it is that this truncated Fourier transform commutes with a differential operator. Now it might seem very surprising that the differential operator could commute with a projection namely a function which is zero somewhere and one somewhere, you know, because of course this function is not continuous. So in order to have a concrete sample of that, just consider the differential operator which is $x\frac{d}{dx}$ *(notated* ∂_x*)*. Now this operator in fact commutes with the characteristic function of the positive interval. Why ?

Because, if you want, the group that it generates is a group of scaling, and of course this function is invariant under scaling. So if you replace the variable x by λx okay, you don't change the function. So if one thinks a little more, what one finds is that in fact the operator, which is $(\lambda^2 - x^2)\partial_x$, commutes with the characteristic function of the interval, and with a little more work, one finds that this operator now *(showing* $\partial_x(\lambda^2 - x^2)\partial_x$*)* commutes with this characteristic function $1_{[-\lambda,\lambda]}$ of the interval $[-\lambda, \lambda]$.

Now so the operators that Slepian and his collaborators found is the following operator : $W_\lambda = -\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x) + (2\pi\lambda x)^2$: it is given by the same as before, up to sign, so minus d by dx times lambda squared minus x squared times d by dx plus a potential, plus 2 π lambda x squared and I mean, what happens is that because you have added this other term which of course commutes with any function, so this doesn't change the fact that it will commute with P_λ, when you have added this term, it implies that the operator is now invariant under Fourier. So because it's invariant under Fourier it commutes, not only with P_λ, but also with its Fourier transform.

And that's really a miracle I mean that's really a fact which is totally amazing. And this specific operator was known before, I mean, it was known, you know, in the 30s and so on, and how did it come around ? It came around because it appears by separation of variables when you look at the Laplacian on the spheroid. So what happens is that you consider the Laplacian in a spheroid which is prolate. so what does it mean ? There is an axis of revolution and it's somehow if you want, the axis direction is longer than the other direction here it's like you know a rugby ball, so that's why it's called prolate.

And then there is a way to deal with the Laplacian which is to take what are called prolate coordinates, and when you use these prolate coordinates, it turns out that you have separation of variables. So in other words, the Laplacian now separates like this, and what it means is that if you want to to know the sound of this spheroid and so on, if you want to diagonalize the Laplacian, what you have to do is that you have to separately solve these prolate operators, but look at eigenvalues which are the same for both. And this restricts for you to positive eigenvalues oops okay so okay okay so this restricts to positive eigenvalues. Okay so that's what happens. And I mean, in my class in the College de France in 98, I had looked at this prolate operator, I was amazed by this operator and I had looked at the operator not only on the interval which is what people do normally, on the interval from minus lambda to lambda $[-\lambda, \lambda]$ but I had looked at it on the full line. and I had been interested in the self-adjoint extensions but I didn't do anything with it. And what we did with the Henri Moscovici is that last year, we started looking in real detail at this self-adjoint extension which I knew to exist, and which is obtained as follows : when you look at this, the prolate operator, on the full line, and when you take the minimal domain which is a Schwartz space, the space of Schwartz functions on the line, then you can compute the von Neumann deficiency indices of this operator. You find that it is symmetric but it's not self-adjoint, and what you find is that the deficiency indices are 4 and 4. I mean this is, you know, already uh quite a surprising thing, so it's from self-adjoint. But okay it admits the unique self-adjoint extension, which has the properties that as an extension, you know, it commutes with these projections P_λ and $\widehat{P}_\lambda$ and now on the full line, not just, you know, when you restrict to L^2 of the interval. So it commutes with these two projections, and it's also invariant under Fourier, okay.

And now I mean, what we started doing with Henri, a little bit more than a year ago, was to take seriously this operator, and understand what it is, and look at its spectrum and so on, and we were going from one surprise to another, and so what we found, the first things that we found which I found extremely surprising, because this was not at all what could be expected, was of course it comes with Fourier but the amazing fact, the first amazing fact is that it has discrete spectrum. And I mean we shall see a reason why later when we pass in the Liouville coordinates, and we shall see that it's in the limit circle in both ends okay.

And now it's self-adjoint, it has discrete spectrum, and now one can look at the eigenfunctions, and the way the eigenfunctions, if you want, behave is of course by boundary conditions both at the finite lambda and at infinity. At finite lambda, the boundary condition is essentially that the function doesn't blow up, I mean you know, at the singularity (at lambda) what happens is that solutions have normally either logarithmic singularity or are regular, and so we put as boundary condition the fact that they are regular. And now at infinity, it turns out that at infinity, the eigenfunctions have to have this behavior *(showing* $\phi(x) \sim c\dfrac{\sin(2\pi\lambda x)}{x}$*)* that they are equivalent to a quotient of the sine function with the correct coefficient I mean divided by x. And this is for even functions, and if you take odd functions, they have to have the cosine behavior. And this is what will allow us of course to compute the spectrum by using the computer, okay.

So we were already quite amazed to find that this operator had discrete spectrum. This was, you know, one could have expected that there was a continuous spectrum appearing because we were outside this compact interval and so on and so forth. No. It has discrete spectrum and then we started investigating this spectrum. And the first thing that we did in order to understand what this spectrum could be like, could look like, was to use what physicists do, namely to use the semi-classical approximation. So what happens in the semi-classical approximation is as follows : what we have is really an Hamiltonian which is of the following form. I mean, when you look at this operator W_λ, the prolate wave operator on the full line, then I mean, up to sign and up to an additional term, it's really the product of two terms, it's really like p squared minus lambda squared times q squared minus lambda squared $((p^2-\lambda^2)(q^2-\lambda^2))$, where p and q are, you know, the phase space variables as in the physics case. And when we look at first sight, if you want, at the number of eigenvalues of the operator, now they are negative eigenvalues because of the minus sign here, which are fulfilling that the Hamiltonian is less than a where a is e over two pi squared $a=\left(\frac{E}{2\pi}\right)^2$ because this would be the link with ζ, then we have to compute an area, we have to compute an area in phase space, okay, which is the area which is bounded by this curve here, and where p is larger than λ and q is larger than λ. Okay and so, one can do this calculation I mean it's given by an integral, the integral is convergent and it turns out that when one computes the integral ah okay one already has a pretty good sign which is coming up, which is that this area has the same term, the same type of leading term as for the zeros of ζ. Namely that it's $\frac{E}{2\pi}\left(\log\frac{E}{2\pi}\right)$. I mean what I have used, I have used a square here because I'm thinking of the Laplacian and we shall have to reach the Dirac operator at some point. So already what we see is this. But there is a dependency in lambda, in the lower terms or in what you get here, and of course one has to take care of that. And I mean the more precise calculation is that, first of all one has a kind of you know a rule of scaling, which is what happens when you rescale the parameter a by lambda, and in fact one can compute the integral explicitly in terms of elliptic integrals and it's given you know in terms of the first kind and the second kind, I mean, it's given by a formula of this type. And this of course gives us a first control on the number of eigenvalues. But okay, you know, this control led us to fix the value of lambda to be square root of two and I will explain later how this is related, I mean, to the work with Katia Consani. So, it allowed us to fix the value of lambda but then, we wanted to have a much better control on the eigenvalues. And for that, okay, I mean it's useful to do a Liouville transformation. And to pass to a Sturm-Liouville problem. And when you do a Liouville transformation, then what you find is that, you know, there is a a unitary isomorphism of the operator which you restrict to the relevant interval, you will ignore, if you want, the eigenvalues which are already known, which are positive. And it conjugates the operator to an operator on the half line which now has the following form $(Q(y)=-(2\pi\wedge^2)^2\cosh(y)^2-\frac{1}{4}(\coth^2(y)-2))$: I mean there is a potential, there is this term here, and there is a potential which is a quite delicate potential, if you want, because it involves this cosh function squared and the coth squared. So in fact, there is a new Hamiltonian which appears here in Liouville variables which is of the form p square plus q of the space variable $(H=p^2+Q(q))$. And I mean this Hamiltonian has the following property, this is where we see that we are in the case of discrete spectrum, because it is in the limit circle case at infinity and it's also in the limit circle case at zero. Now we have switched to zero by the change of variables. And the function which is involved in this as a potential, in this

Hamiltonian, is this function :

$$h(y) = 16\pi^2 \cosh^2(y) + \tfrac{1}{4}(\coth^2(y) - 2)$$

So I mean it's involved but it has a wrong sign and this is very important, otherwise, we wouldn't get negative eigenvalues. So I mean what we found with Henri is is a beautiful computation which has been done by Nursultanov and Rozenblum, and which gives the eigenvalue asymptotics for exactly the type of operators that we have, namely a Sturm-Liouville operator with potential having a strong local negative singularity.

And so we used this paper, which I reproduce here, I reproduce the main formula that we are using in this paper. And I mean in this paper there is a formula for the number of positive eigenvalues and the number of negative eigenvalues. And because we are interested for our prolate wave operator in the negative eigenvalue and there is a minus sign, we shall be using this formula, the first formula here.

So you know, one one has to start computing, and so the formula in terms of the function $h(y)$ which I had shown before is of the following form : it is this formula of Nursultanov and Rozenblum so it's one over pi times the integral from zero to infinity of this expression here ($N(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty ((a + h(y))^{1/2} - h(y)^{1/2})dy$) and I mean as such, it's not easy to handle, but if you differentiate with respect to a you get a simpler expression obviously, there is a factor one half because of the square root and so on, and so you get this expression and then, you have to change variable : when you change variable and you set x equals exponential of y, all these trigonometric functions, you know, like the hyperbolic cosine and so on, they spit out rational functions, and this means that at the end of the day, you have to compute an integral which is of the kind that Legendre was computing : it's an elliptic integral ; the term that is inside the square root is pretty complicated, okay, it's given by this expression, and I mean... so one has to refer to the standard notation for elliptic integrals which are, you know ,this incomplete elliptic integral here *(showing $F(\phi|m) := \ldots$)* and here is the complete one *(showing $K(m) := \ldots$)*, and then okay, what one finds is there is an explicit form for the answer for this function which is a derivative J of a, and it's given by a sum of two terms : so there is a first term which involves this complete elliptic integral of the first kind and then there is this term.

And I mean, all the coefficients that you see are all pretty complicated, but kind of polynomials you know so like this s of a for instance is given by this expression, d of a is given by this square root and so on, and then there is this overall factor ($v(u)$) which is given by this. So you compute, you compute, and you can you use the asymptotic expansions of the various terms and of the complete elliptic integral, you keep computing, and then, when you evaluate what it should be for $a = (E/2)^2$, you find exactly now the contribution which gives you the number of zeros of zeta and you find $\frac{E}{2\pi}\log\frac{E}{2\pi} - \frac{E}{2\pi}$.

And you find that there is an additional term, which is the most difficult one, which is coming from the incomplete elliptic integral. And amazingly, this additional term gives you, in the formula for the counting of the number of eigenvalues for the operator, it gives you a term which resembles incredibly the additional terms that you get for the Riemann zeta function. I mean for the Riemann zeta function, you have a term which is due to Trudgian and which tells you that the difference between the expected number of zeros which is this, and the formula of Riemann is of the order of $\log E$ with a certain coefficient. What we found with Henri is a very similar formula where the coefficient that we have is this coefficient (0.159155 for Connes-Moscovici instead of 0.112 for the estimation of Trudgian).

So if you want, then of course, one has to work more because what one has at this point is the knowledge of the Laplacian and what one has to find is a kind of square root, if you want, of this Laplacian. So we looked for the corresponding Dirac operator and what we did was tofind the corresponding operator and then to explore the associated geometry. Okay. And I mean, then I will come back to the fact that, I will come back to the Dirac operator a bit later, but let me before I do that, let me show you that how we computed the eigenvalues of the Laplacian W, which will be eventually the square of the Dirac operator, and then, after taking the square root, we compare them with the zeros of zeta, and I will show you this comparison of the eigenvalues.

But for that, we need to take the square root, so we need to find the Dirac operator. Okay. So how did we find the Dirac operator : well we used a well-known method in operator theory which is, if you want, the Darboux method. And this Darboux method is the following : it's a factorization of the operator as a product of two operators of order one. And then, if you want, the idea is that if you have a factorization of this type of two unitary equivalence of the operator W_λ, then you can define a square root as a two by two matrix. So it's well known of course that you know, from the Laplacian to the Dirac operator, you have to use Clifford matrices. So this is what we shall do and I mean, so the Darboux method is a general method which applies not only in the Liouville case but also in the case where you have, you know, the canonical form of Sturm-Liouville operator in the sense that you are allowed to insert a p of x between the two differentiations, and when you do that, okay there is a recipe, which is a Riccati equation that you have to solve, in order to be able to kind of, you know, find a connection that will allow you to write the differential operator of order two as being factorized. So in our case, what we found, we found the solution of the Ricatti equation by using a combination of solutions of the differential equation with a complex coefficient, and as soon as the coefficient is really complex, then we have the factorization. There is a modulus in the choice of the factorization which is, if you want, a complex number but with the real axis excluded and then once we have the solution of the Riccati equation, we have the Dirac operator : it's a two-by-two matrix and this 2×2 matrix is such that when you square it, you get essentially... the first term you get on the diagonal is the original operator and the second term that you get on the diagonal is isospectral to the original operator $(W_\lambda + 2\delta w(x))$.

And I mean, if you want, what this means is that somehow, the problem of finding the eigenvalues of the Dirac operator is reduced, of course, to the problem of the eigenvalues of W_λ, but essentially what you have done is to eliminate the symmetry which occurs naturally in the zeros of zeta by taking the function which which like squaring, if you want, of the zeros, which will eliminate the symmetry. And so now, of course, one is reduced to computing the spectrum of this operator W_λ ; what one finds then is that this operator, you have to multiply by two the Dirac operator, has discrete simple spectrum, its spectrum is contained in the real line union the imaginary real line, and this is because its square corresponds to this prolate wave operator on the full line, and this prolate wave operator has both positive and negative eigenvalues. The positive eigenvalues will in fact imitate the trivial zeros of the Riemann zeta function and the imaginary eigenvalues will really imitate the zeros, the non-trivial zeros. So they are symmetric exactly for zeta and when you compute the counting function of those which have positive imaginary parts lesser and E, they fulfill exactly the Riemann estimate, okay.

So we went on to compute, to make these computations with the computer. And the way we did this computation was, if you want, to expand the eigen function at infinity, depending on the eigenvalue. We knew what was its behavior : in fact, there is a detailed expansion which is in the paper of Ramis and its collaborators. We also expanded the eigenfunction for the corresponding eigenvalue with the boundary condition at λ I mean which is square root of two. And then we extended the solution if you want by the differential equation and we tried to match them. Now in general they don't match, of course, but they match for specific values of the parameter m and we collected these values okay and then we did this operation to get to the Dirac and we compared. And when you compare, okay, you begin to be totally mystified, because what you find so on the left column, there is what you get from our operator, and on the right column, there is what you get from the zeros of zeta, and it keeps going, I mean, it keeps going quite far, in fact, we were able to compute them quite far. uh and and and this is the type of of coincidence that you get.

So in fact then, what you can do is that you can plot these values okay, where you have on the same plot and for the same integer n you have the n-th eigenvalue of the Dirac and you have the n-th zero of data and when you see only one spot, it means that in fact the red spot is hiding the blue spot, so I mean if you want, it means that they are really too close to see any difference, so you keep going for higher and higher number, and these are eigenvalues or if you want the zeros for the same n so which is very surprising because normally you would expect some shift or something like that. And so when you go really far, when you go up to 100, you see that the behavior is pretty similar. Okay.

So once you have reached this, then there is an obvious geometric problem, which is that now, if you want, what we know in non-commutative geometry is that a geometry is given by the Dirac operator, is given by what is called a spectral triple, where everything occurs in Hilbert space, and, if you want, where the metric of the space in question is dictated by the Dirac operator.

So here, the metric is on the half line if you want if you want to consider the interesting part which is the part from square root of 2 to infinity, and so lambda is is square root of 2 here, and what you find out is that the metric associated to the relevant spectral triple, the one which is coming from the Dirac operator is given by this formula ($ds^2 = -\frac{1}{4}dx^2/(x^2 - \lambda^2) = \frac{1}{\alpha(x)}dx^2$). It's given by this formula and what is very striking of course is that the metric changes sign when you cross the singular point of the operator.

So what happens is that this metric turns out to extend to the real line, okay, by changing sign and so on, and in fact, it's naturally related to a metric which is two-dimensional, what we shall do of course is to make the time variable periodic, and when you look at this metric as a two-dimensional metric, you find that it's in fact related to... it's just a black hole.

And there is a trick when you look at black holes to make the metric smooth and when you make it smooth you find the following, you find this expression ($ds^2 = 4(x^2 - \lambda^2)dv^2 - 2dvdx$). So I mean, here we are still driving behind, because we have to understand a lot more about this geometry than what we do at the moment, but what is nice is that in fact you can draw a picture of this geometry if you want, of this black hole because what you can do is that you can actually embed it, you can actually embed this two-dimensional geometry in Minkowski space. And when you embed it in Minkowski space, you get the following picture. So this is the first picture that you get. So you see, here is the singular point of the operator, here is the the part which goes from square root of two to infinity *(showing the yellow cone at the top of the picture)* and here in the middle is the part where if you want people had been working and they know what is going on and so on, and when you look at it more closely, you find out that as it should be in the black hole, you have these lightrays, which are in white here which are spiraling inside you know and which of course, while, if you want, the the line which is obtained by taking $t = 0$ is crossing through in a straight way. So I mean, what we have done if you want with Henri is to fall, almost by accident, on an operator, which defines a geometry, which is a Dirac operator, and which amazingly has the properties, it's like a lorentzian geometry if you want it's not a riemannian geometry because there is this minus sign, and this corresponds to the fact that when you look at the zeros of zeta, you have the critical zeros, but you also have the trivial zeros, and this corresponds to the fact that the prolate operator has both negative and positive eigenvalues. So we did a lot more computations on this and, for instance, we have the the guess, if you want, that actually the negative spectrum of the prolate operator corresponds exactly to Sonin space, where the Sonin space is defined as being the orthogonal of these two projections P_λ and $P_\lambda^\top$ (P_λ orthogonal). In other words, it's not true that these projections span the world space when you take their supremum, there is a subspace of Hilbert space which is orthogonal to both and which is the Sonin space. So the Sonin space is going back to the 19th century, and it's characterized by the fact that you take functions and such functions exist, so you have functions which vanish on the interval $[-\lambda, \lambda]$ now, okay, so this is orthogonal to the projection P_λ and whose Fourier transform also vanish on the corresponding interval, okay.

And that relates to the work that I've been doing for many years with Katia Consani and this work is if you want linked with another approach to the Riemann zeta function, not using operators, but trying to prove what is called Weil positivity. So if you want, what happens is the following : what happens is that there is a formula which is due to Riemann and Weil (Riemann-Weil formula), and which expresses the evaluation of a function on the zeros of zeta, the non-trivial zeros, by means of the Fourier transform of the function evaluated on the places, what are called the places, of the field of rational numbers and this evaluation involves the sum over primes, and the terms which are involved, in the evaluation, are relatively simple for each prime, if you want, they are of this form, you just evaluate the function on p^m (p to the m) and take a sum, but it's rather complicated at what is called the archimedean place ; it's given by a principal value distribution which is of this form.

And then it turns out if you want that the Riemann hypothesis is equivalent to the positivity of a suitable functional, which is this functional *(showing* $QW_\lambda(f, g) := \sum_{1/2+is\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}(\overline{s})}\widehat{g}(s)$*)*, I mean this is obvious, from the point of view of the Hilbert space, but the fact that this functional can be computed in terms of primes is what makes the problem extremely difficult, because you have to prove the positivity of a functional using this type of expression.

Now what we did in several papers with Katia Consani, very recent papers I mean this paper which appeared in 2021, so what we did was to prove a strong form of the Weil positivity, but again with the same square root of two, so what we proved with Katia Consani was that we have Weil positivity in a strong form using the same Sonin space as I was mentioning before in my work with Henri, and proving an inequality between the Weil quadratic form and the trace of the scaling operator, compressed if you want, I mean using the Sonin space. Now this is a very tricky expression, why ?

Because if you want to have the projection on Sonin space, you have the scaling action but the scaling action does not commute with the projection on the Sonin space. And so you are forced to take an expression of this type, which is you know like a completely positive, and so on, of this nature.

And it turned out that in the work with Katia, we were again using the prolate functions, so we were using the prolate wave functions, these prolate wave functions, I had introduced them in my paper in 98 I mean in Selecta. They were reappearing already in the work with Katia, two years ago, with this formula which was involving the projection on Sonin space and the scaling. And now, if you want, what is the conceptual reason that is behind this story and why is this prolate operator so important and so on, well, what happens is that scaling doesn't commute with this Sonin space, with the Sonin projection, but the prolate wave operator does commute with the Sonin projection and this means that instead of taking scaling, one should take the function applied to the prolate operator and use it as a replacement.

Now in the work with Katia we also did the following point, we also remarked the following, using the computer, we remarked that the Weil quadratic form is a quadratic form which is non-degenerate, okay, so it has no zero, it has no radical, but it has in fact when you compute it by using matrices and so on, it has incredibly small eigenvalues. For instance, for the value of lambda square which is 11 okay so essentially when you take into account the primes two and three and not more, you find that the smallest positive eigenvalue is is of the order of 10 to the minus 48. So again, what happened is that the presence of this minuscule positive eigenvalues for the Weil quadratic form which has anything to do with, you know, this wave operator a priori, that it is conceptually explained by the prolate operator ; and how is it explained, it's explained by the fact that one knows, this is a very simple fact, that if you take the full Weil quadratic form, on the full line, then it has a radical and this radical contains functions which are obtained by the map $\mathcal{E}$, which was the map which I used at the first to obtain if you want the spectrum as an absorption spectrum, but this map $\mathcal{E}$ will never give you a function with compact support. Why ? because I mean if the function f has compact support dominated by lambda, when you take the sum of f of nx for x bigger than one, you will respect this support, okay. But then the problem that you have is what about the support when x goes to zero because we are taking functions of a positive variable, we are on $\mathbb{R}_+^*$, and in order to do that, what you have to do, in order to get that the support of the function epsilon of f, I mean this sum here, is contained in the interval lambda inverse infinity ($[\lambda^{-1}, \infty)$), what you have to do, you have to use the Fourier transform of the function. And you would have to use the fact that the function belongs to the Fourier transform of the projection P_λ. But we know that the intersection between P_λ and $\widehat{P}_\lambda$ is empty. However it's empty, but not quite, there are functions which are almost in the intersection of both, and again these are the prolate functions. So what we did with Katia, we use the prolate functions, we applied this formula to the prolate functions and then, we compared with... okay, so this I will come back later, I mean. This is the change of the eigenvalues when you don't take into account the higher primes okay. But these are the log of the smallest eigenvalues, and you can see that you know when you go for instance around this value to 7, you get like e to the power minus 60, which is incredibly small for eigenvalues. And so, what we did with Katia was to compare the smallest eigenvalues, the ones that were giving us these incredibly small numbers, with the prolate functions, with what happens when you apply the map $\urcorner$ to the prolate functions. And what we found, by the computer of course okay, what we found is that after constructing these functions using the prolate functions okay by this map $\urcorner$, and constructing the corresponding projection, what we found is that the coincidence is amazing, namely that the space of eigenvectors for the k lowest eigenvalues for the

Weil quadratic form corresponds exactly to the prolate projection. So this was done by comparing them, you know, numerically, and when you see a graph like this, in fact, it means that there are two graphs which actually coincide because you see only one graph. So these were for the first values okay and for this value which was you know so small, and then we keep going, and then what happens is that when you try to push it further, when you try to apply it to things which are not the smallest eigenvalues, then there is a discrepancy which appears but this is normal. So here you see what would happen if we didn't have the coincidence, you can see that there are two graphs which appear, there is a blue graph and there is a red graph and they are definitely different.

Okay so starting from there then we had a completely crazy idea, with Katia, which was the following, which was that now let's try to get hold of the small eigenvalues, of the small zeros of the Riemann zeta function and how do we try to do that ? Well we try to do that again by the Dirac operator, and by taking this Dirac operator, and by conditioning the Dirac operator by this prolate projection, namely, if you want, by forcing the Dirac operator to have as zeros as this prolate function. And when we did that, we went from one surprise to the next, in the sense that we computed the corresponding spectra for small values okay, and it was like you know if there was a devil in the back-scene that was making fun of us, because we were comparing always this low spectrum that happens for zeta okay, which is on the right here and I mean, what was shown by the computation, this is the computation of the angle of the two projections which is almost zero. So what happened was that you know we are getting a kind of clearer and clearer resemblance between what we are getting for this Dirac operator and what we are getting from the zeros of zeta. On the other hand okay, we had no chance, you know, to get the full agreement because the Dirac operator on the circle of course doesn't have the right behavior at infinity ; it doesn't have at all the right behavior of eigenvalues at infinity. Okay but we kept going, we kept going, and then we understood after a while that we should expect the agreement so I mean we looked at you know various cases up to 13.5 and so on, okay which were looking alike, more and more, so there was a spectral similarity. And then, we realized that in fact there was a theorem which was behind the scene, namely that what was going on, which was giving us this likelihood if you want of these eigenvalues of the Dirac operator pushed if you want in the orthogonal of these prolate functions and zeros of data, so what was going on was that there is a theorem behind and so to get to this theorem, we understood that we should not just, you know, look at one specific spectrum for a specific value of lambda, but we should compare what happens when we change the number of prolate functions that we use to condition. And what happens is that when you do that, you find out that okay, for instance, if you consider like n or $n+1$ of them, they will give you different graphs for the eigenvalues, but for certain values of the parameter lambda, the two will coincide and when the two coincide, they agree exactly with the corresponding zero of zeta. So we did that for the first eigenvalue, for the second eigenvalue, for the third eigenvalue, and the agreement was incredibly good. And after a while, by looking at the evolution of eigenvalues and so on and so forth, we found that there was a mathematical theorem behind the scene and I will end my talk about that and this mathematical theorem does determine completely the, if you want, the low lying spectrum. So we did this first of course by comparing the evolution of eigenvalues, comparing how they touch and so on, how they touch with the quantization conditions okay, which was defined here. But first of all, here is the comparison of the spectra that you get by using the criterion that we had, so here I am not able to tell you which one corresponds to zeros of data and which one corresponds to the one we computed by our criterion because they are essentially identical, I mean, there is no difference. And we were able to compute like this the 31 first zeros by only using the primes two, three and the number four and after doing these computations, we looked in what is called the Riemann-Siegel approximate functional equation and formula, and we found that the estimate were exactly the same, namely that what we had been doing was in fact to find an operator theoretic incarnation of the Riemann-Siegel formula. And the conceptual explanation, I will be very short with it, I mean it's the notion of zeta-cycle which we have described in great detail in our paper with Katia.

So I mean, to conclude, I would like to say the following, you see : to conclude, we have, in the work with Henri, we have unveiled an operator, which is the prolate operator, which has to do of course only with the archimedean place, but which already exhibits exactly the right ultraviolet behavior, for the zeros of zeta. Okay. On the other hand we know that it would be impossible to get the right operator without involving the primes. Now in the work with Katia, we involve the primes, but we also involve the prolate functions, except that we apply to this prolate function this map $\rceil$, and that's related to the work that we did with Katia on the semi-local trace formula. So at this moment, if you want, the key missing piece in this puzzle, which ought to allow one to begin to put together if you want the ultraviolet with infrared is to understand that, when in the work with Katia, we're taking the orthogonal of the prolate projection, we were already like looking at the negative eigenvalues of an analog of the prolate wave operator but not for the single archimedean place, but by putting already a few of the primes in the machine, by using the semi-local Hilbert space which I had defined long ago to find the semi-local trace formula.

So if you want, this is the situation now, but it relates to a lot of work and in a way, it's a realization of a dream of Slepian because when Slepian wrote very interesting papers, with his collaborators, and among his papers there was one in which he had the impression because of this miracle if you want of the commutation, he had the impression that he was dealing with something, with the prolate operator, which was much deeper and so the fact that this operator here in fact you know is intimately related to the zeros, I mean, to the trivial and non-trivial zeros, this is, in many ways, you know, a justification of the dream of Slepian I mean in these old times where the Bell-lab was existing and unfortunately disappeared in the meantime.

Okay so I think I will end my talk here yeah I want to end on Slepian actually, yeah.

"Les analystes fonctionnels et les théoriciens des opérateurs célèbrent le 100e anniversaire d'Acta Sci. Math." Alain Connes

Pour commencer, laissez-moi vous dire qu'il y a longtemps, j'ai écrit un article, c'était en 1977 et cet article a été publié dans Acta. Et je veux dire que pour moi, donc, c'est une excellente occasion de célébrer cet anniversaire, que de revenir à cet article publié en 1977, donc voici le titre de mon exposé: "Opérateur d'onde prolate et zêta". Donc si vous voulez, la motivation de la théorie des opérateurs est très simple à expliquer, c'est la suivante : vous savez que lorsque vous regardez les zéros de la fonction zêta de Riemann, je veux dire les zéros critiques, d'accord, ils sont un spectre fascinant et je veux dire qu'ils sont un spectre fascinant de quelque chose qui n'est pas comme un laplacien mais comme un opérateur de Dirac, et je veux dire que d'une certaine manière, si vous voulez, ils sont mystérieux à la fois dans l'infrarouge, donc si vous voulez, lorsque vous les regardez pour de petites valeurs de fréquences, vous voyez quelque chose d'extrêmement étrange, cela commence vers 14 et ainsi de suite, et continue sans cesse. Mais ils sont aussi extrêmement mystérieux au niveau ultraviolet et la raison pour laquelle ils sont si mystérieux au niveau ultraviolet, c'est que lorsque vous comptez le nombre de zéros dont la partie imaginaire est comprise entre zéro et E où E est un grand nombre, ce que vous trouvez, c'est quelque chose qui a déjà été, si vous voulez, conçu par Riemann et c'est une expression très étrange parce que je veux dire que si c'était quelque chose comme l'opérateur de Dirac sur un cercle, il serait proportionnel à E comme niveau d'énergie, mais ici, il y a un terme logarithmique donc qui est précisément égal à $\frac{E}{2\pi}\log\frac{E}{2\pi}$, et il y a une correction, $-\frac{E}{2\pi}$ and then there is a logarithmic term $+O(\log E)$.

Maintenant, quand vous pensez géométriquement, et bien sûr, beaucoup de gens ont pensé géométriquement à ce que cela pourrait être, il est très difficile de voir quel type de géométrie pourrait être derrière cela. Et je veux dire, au niveau purement intuitif, et je vais suivre cette intuition, ce qui se passe, c'est que, dans un certain sens, on devrait penser à ces zéros, disons la façon dont je pense à eux, est que, comme vous savez, vous avez un pôle infini. Et je veux dire, il faut prouver que c'est exactement ainsi que cela devrait être. Mais parce que c'est infini, je veux dire, vous savez que c'est... c'est extrêmement difficile. Et euh, je veux dire, ce que je vais expliquer aujourd'hui est constitué de deux parties, je veux dire que la partie principale sera un travail conjoint très récent avec Henri Moscovici, qui paraîtra dans les Proceedings of the National Academy of Sciences, et qui traitera de la partie ultraviolette du spectre. Donc ce que nous avons trouvé, essentiellement je veux dire, vous savez, ce que nous avons trouvé avec Henri, je vais vous expliquer ce que c'est, mais ce que je dois souligner dès le début, c'est que nous ne cherchions pas ce que nous avons trouvé : nous regardions un opérateur, et ainsi de suite, et nous avons été étonnés de découvrir qu'il était lié aux zéros de ζ, et si on nous avait demandé d'écrire une proposition, nous n'aurions jamais pu deviner ce que nous allions trouver. Et la deuxième partie concerne la partie basse du spectre et ce qui est également étonnant, c'est que dans les deux cas, les fonctions qui sont impliquées et l'opérateur qui est impliqué est un opérateur qui est l'opérateur d'onde prolate. Alors laissez-moi d'abord vous expliquer cet opérateur. Je veux dire qu'il est lié à un fait important qui est assez utile lorsque nous travaillons avec l'espace de Hilbert, qui est la situation lorsque vous avez une

Référence : https://www.youtube-nocookie.com/embed/vLekXpbT$_B I$.

Traduction : Denise Vella-Chemla, janvier 2025 (assistée de Google translate).

paire de projections dans l'espace de Hilbert, nous savons très bien que lorsque nous avons une seule projection, d'accord, les projections sont toutes les mêmes si elles ont la même dimension. Mais qu'en est-il d'une paire de projections ? Maintenant, si vous avez une paire de projections, il s'avère que la situation n'est pas du tout inextricable, car il s'agit essentiellement d'une situation bidimensionnelle dans le sens suivant : donner une paire de projections dans l'espace de Hilbert revient à donner une représentation unitaire du groupe diédral. Et je veux dire que c'est simple à obtenir, car ce que vous avez, ce sont deux unitaires, de carré un, qui s'obtiennent en prenant un moins deux fois la première projection ($\mathcal{U}_1 = 1 - 2P_1$) et un moins deux fois la seconde projection ($\mathcal{U}_2 = 1 - 2P_2$) ; elles sont de carré un évidemment. Elles ne commutent pas mais même si elles ne commutent pas, le groupe qu'elles génèrent est très très joli si on veut : c'est un groupe résoluble, c'est beaucoup plus simple que résoluble, c'est juste le produit semi-direct $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ par le groupe à deux éléments ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Donc une fois qu'on sait ça et qu'on connaît un peu la théorie des représentations, on découvre que les représentations irréductibles sont juste paramétrées par un angle et qu'on peut penser la situation irréductible comme étant bidimensionnelle au plus, et comme étant donnée, si on veut, par la projection sur l'axe des x d'une part, et d'autre part, la projection sur une droite qui fait un certain angle avec l'axe des x.

Et donc ce qui se passe, c'est que de cette connaissance des représentations irréductibles, et de la connaissance bien sûr du fait que toute représentation est une intégrale directe de représentations irréductibles, vous avez un contrôle total de la situation. Et vous comprenez que la situation est complètement connue une fois que vous connaissez le cosinus par exemple de l'angle, ou le sinus de l'angle, qui sont tous deux, si vous voulez, déterminés par des équations simples, je veux dire, $(P_1P_2P_1 = \cos^2(\alpha)P_1, (P_1 - P_2)^2 = \sin^2(\alpha))$. Le plus intéressant, c'est de considérer le sinus, car je veux dire que ce que vous trouvez, lorsque vous prenez le carré de la différence entre les deux projections, c'est un opérateur qui est au centre, c'est-à-dire qui commute avec P_1 et P_2. Et donc je veux dire qu'il va servir à diagonaliser la paire de projections.

Donc, en 1996, quand j'ai commencé, vous savez, aussi par accident, à travailler sur ζ, j'ai voulu introduire une coupure en termes d'opérateurs appropriés, et j'ai dû traiter une paire spécifique de projections, qui est la suivante : vous prenez des L^2-fonctions qui sont paires et donc vous prenez les paires suivantes : la première est extrêmement simple, c'est une projection de coupure extrêmement simple, ce qui signifie que vous ne considérez que les fonctions qui s'annulent lorsque l'argument est une valeur absolue supérieure à λ, λ est un nombre fixe. Et la deuxième projection est ce que vous obtenez en prenant la transformée de Fourier de cette première projection. Donc vous conjuguez cette première projection par la transformée de Fourier, et il est pratique, je veux dire, pour des raisons de normalisation en théorie des nombres, de prendre la transformée de Fourier telle que définie ici, à savoir avec un facteur 2π. En fait, vous savez qu'il y a une règle générale en mathématiques qu'on apprend très tôt, c'est que quand on a i, il est rare qu'on n'ait pas un 2 et quand on a un 2π, il est très rare qu'on n'ait pas un i. Donc je veux dire que c'est la règle. Et donc quand on prend cette paire de projections P_λ et $\widehat{P_\lambda}$, il s'avère qu'il y a un miracle qui se produit. Et ce miracle a été découvert à plusieurs endroits en fait, mais l'un de ces endroits était les laboratoires Bell (Bell-labs) dans les années 60 et il a été découvert par Slepian, Landau et Pollak, et ce qu'ils ont fait, c'est de pouvoir diagonaliser en utilisant des fonctions prolate (je reviendrai plus tard sur l'opérateur principal) mais ils ont pu, si vous voulez, diagonaliser l'angle et ce qu'ils ont fait plus précisément dans plusieurs articles, ce qu'ils ont fait, c'est de diagonaliser quelque chose qui est comme la racine carrée du cosinus, à savoir ils diagonalisent l'opérateur qui s'appelle la transformée de Fourier tronquée et qui est essentiellement le produit $P_\lambda \widehat{P_\lambda} P_\lambda$, je veux dire, si vous le mettez au carré, d'accord.

Donc leur motivation était très concrète, c'était de résoudre un paradoxe dans la communication des signaux qui est le suivant : c'est que, vous savez, par exemple, quand je parle maintenant, la durée de mon discours est limitée, donc je suis limité dans le temps ; d'un autre côté, il est clair aussi que je n'utilise pas de fréquences extrêmement élevées, etc., donc d'une certaine manière, la gamme de fréquences est également limitée. Et donc, je veux dire qu'il y a un paradoxe, et le paradoxe est le suivant : le paradoxe est que si vous réfléchissez un peu, et que vous regardez cette paire de projections que j'expliquais, vous savez, ces deux projections, alors il est clair que leur intersection est vide, je veux dire, est nulle. Pourquoi ? Parce qu'une fonction qui a un support compact, je veux dire, qui est nulle à l'extérieur, lorsque $|q|$ est plus grand que λ a une transformée de Fourier qui est analytique, et donc, elle ne peut pas s'annuler sur un intervalle. Donc d'une certaine manière, je veux dire, ce que Slepian et ses collaborateurs ont trouvé, ils ont trouvé qu'il y avait une réponse, et la réponse était donnée par des fonctions très spéciales qui sont appelées les fonctions d'onde sphéroïdales prolates, et qui, comme je l'ai dit, diagonalisent la transformée de Fourier tronquée. Donc ici, vous voyez la transformée de Fourier mais vous ne l'appliquez qu'aux fonctions à support compact et vous ne la regardez que pour la variable dans le même intervalle (*entourant de bleu la ligne décrivant la transformée de Fourier de sa diapositive*). Et donc vous obtenez des fonctions, ce sont des fonctions extrêmement spécifiques, elles ont des modes, elles sont étiquetées par des entiers, d'accord, et elles forment la meilleure solution possible à ce paradoxe de la théorie de la communication. Elles n'ont rien à voir avec le cosinus et le sinus ou quoi que ce soit de ce genre, d'accord, mais elles ont à voir avec le cosinus de l'angle entre les deux projections. Et donc ce qu'ils font, ils diagonalisent cette transformée de Fourier tronquée avec des valeurs propres et en conséquence, ils calculent le cosinus de l'angle entre les deux projections. L'angle des deux projections s'avère être... pendant un certain temps, donc le carré du cosinus est pendant un certain temps, je veux dire pour la première valeur de m extrêmement proche de un, ce qui signifie que même si ces deux projections ne se croisent pas, l'angle est presque nul pour ces valeurs. Et puis, d'accord, il passe essentiellement de zéro à $\frac{\pi}{2}$, d'accord. Et donc ce que vous voyez, vous voyez le comportement de ce carré du cosinus qui est essentiellement un, puis il transite, et ensuite il est essentiellement nul, il est incroyablement proche de zéro, ce qui signifie que les deux projections sont essentiellement orthogonales après un certain temps. Ok, donc ce sont, si vous voulez, les graphiques de ces fonctions.

Je n'y consacre pas beaucoup de temps, mais à titre d'exemple concret, par exemple, vous pouvez voir que pour une très petite valeur, ce qui est tout à fait raisonnable, qui est 3.8, vous pouvez voir la valeur du cosinus carré. Vous pouvez donc voir que le cosinus carré est essentiellement un et que l'angle est essentiellement zéro et donc, d'une certaine manière, je veux dire, à bien des égards, vous savez, on peut penser que ces projections, même si elles ne se croisent pas, ont quelque chose qui est une intersection essentielle qui sont ces vecteurs, ces fonctions d'onde prolates.

Le secret de ces fonctions est le fait qui a été découvert par Slepian et ses collaborateurs, mais aussi par Mehta en théorie des matrices aléatoires, c'est le fait que ces deux projections commutent avec un opérateur différentiel. Si vous voulez, plutôt, la façon dont ils l'ont trouvé est que cette transformée de Fourier tronquée commute avec un opérateur différentiel. Maintenant, il peut sembler très surprenant que l'opérateur différentiel puisse commuter avec une projection, à savoir une fonction qui est nulle quelque part et un quelque part, vous savez, car bien sûr cette fonction n'est pas continue. Donc, pour avoir un exemple concret de cela, il suffit de considérer l'opérateur différentiel qui est $x\frac{d}{dx}$ (*noté* ∂_x). Or, cet opérateur commute en fait avec la fonction caractéristique de l'intervalle positif. Pourquoi ?

Parce que, si vous voulez, le groupe qu'il génère est un groupe de mise à l'échelle, et bien sûr cette fonction est invariante sous mise à l'échelle. Donc si vous remplacez la variable x par λx ok, vous ne changez pas la fonction. Donc si on réfléchit un peu plus, ce qu'on trouve c'est qu'en fait l'opérateur, qui est $\partial x((\lambda^2 - x^2)\partial_x)$, commute avec la fonction caractéristique de l'intervalle, et avec un peu plus de travail, on trouve que cet opérateur maintenant (montrant $\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x)$ commute avec cette fonction caractéristique $1_{[-\lambda,\lambda]}$ de l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$.

Maintenant, l'opérateur que Slepian et ses collaborateurs ont trouvé est l'opérateur suivant : $W_\lambda = -\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x) + (2\pi\lambda x)^2$: il est donné par les mêmes éléments que précédemment, au signe près, donc moins d par dx fois lambda carré moins x au carré fois d par dx plus un potentiel, plus $2\pi\lambda x$ au carré et je veux dire, ce qui se passe, c'est que parce que vous avez ajouté cet autre terme qui bien sûr commute avec n'importe quelle fonction, donc cela ne change pas le fait qu'il commutera avec P_λ, quand vous avez ajouté ce terme, cela implique que l'opérateur est maintenant invariant sous Fourier. Donc parce qu'il est invariant sous Fourier, il commute, non seulement avec P_λ, mais aussi avec sa transformée de Fourier.

Et c'est vraiment un miracle, je veux dire que c'est vraiment un fait qui est totalement incroyable. Et cet opérateur spécifique était connu avant, je veux dire, il était connu, vous savez, dans les années 30 et ainsi de suite, et comment est-il apparu? Il est apparu parce qu'il apparaît par séparation de variables lorsque vous regardez le laplacien sur le sphéroïde. Donc ce qui se passe, c'est que vous considérez le laplacien dans un sphéroïde qui est prolate. Alors qu'est-ce que cela signifie ? Il y a un axe de révolution et c'est en quelque sorte si vous voulez, la direction de l'axe selon laquelle le sphéroïde est plus long (que dans l'autre direction ici), c'est comme vous savez un ballon de rugby, c'est pourquoi on l'appelle prolate.

Et puis il y a une façon de traiter le laplacien qui consiste à prendre ce qu'on appelle des coordonnées prolates, et lorsque vous utilisez ces coordonnées prolates, il s'avère que vous avez une séparation des variables. Donc en d'autres termes, le laplacien sépare maintenant comme ceci, et ce que cela signifie, c'est que si vous voulez connaître le son de ce sphéroïde et ainsi de suite, si vous voulez diagonaliser le laplacien, ce que vous devez faire, c'est que vous devez résoudre séparément ces opérateurs prolates, mais ensuite, regarder les valeurs propres qui sont les mêmes pour les deux. Et cela vous limite aux valeurs propres positives, ok, donc c'est ce qui se passe. Et je veux dire, dans mon cours au Collège de France en 98, j'avais regardé cet opérateur prolate, j'avais été étonné par cet opérateur et j'avais regardé l'opérateur non seulement sur l'intervalle, ce que les gens font normalement, sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$ mais je l'avais regardé sur la droite complète. Et je m'étais intéressé aux extensions auto-adjointes mais je n'en ai rien fait. Et ce qu'on a fait avec Henri Moscovici, c'est que l'année dernière, on a commencé à regarder en détail cette extension auto-adjointe dont je savais qu'elle existait, et qui s'obtient comme suit : quand on regarde ça, l'opérateur prolate, sur la droite complète, et quand on prend le domaine minimal qui est un espace de Schwartz, l'espace des fonctions de Schwartz sur la droite, alors on peut calculer les indices de déficience de von Neumann de cet opérateur. Vous trouvez qu'il est symétrique mais qu'il n'est pas auto-adjoint, et ce que vous trouvez, c'est que les indices de déficience sont 4 et 4. Je veux dire, c'est, vous savez, déjà une chose assez surprenante, donc il est auto-adjoint. Mais d'accord, il admet une extension auto-adjointe unique, qui a les propriétés qu'en tant qu'extension, vous savez, elle commute avec ces projections P_λ and $\widehat{P_\lambda}$ et non, pas sur la droite réelle complète, non, seulement, vous savez, lorsque vous vous limitez aux fonctions L^2 de l'intervalle. Donc elle commute avec ces deux projections, et elle est aussi invariante selon Fourier, d'accord.

Et maintenant, je veux dire, ce que nous avons commencé à faire avec Henri, il y a un peu plus d'un an, c'était de prendre au sérieux cet opérateur, et de comprendre ce qu'il est, et de regarder son spectre et ainsi de suite, et nous allions d'une surprise à l'autre, et donc ce que nous avons trouvé, les premières choses que nous avons trouvées et que j'ai trouvées extrêmement surprenantes, parce que ce n'était pas du tout ce à quoi on pouvait s'attendre, c'est bien sûr qu'il est livré avec Fourier, mais le fait étonnant, le premier fait étonnant, c'est qu'il a un spectre discret. Et je veux dire que nous verrons une raison plus tard, lorsque nous passerons aux coordonnées de Liouville, et nous verrons que c'est dans le cercle limite aux deux extrémités, d'accord.

Et maintenant, il est auto-adjoint, il a un spectre discret, et maintenant on peut regarder ses fonctions propres, et la façon dont ses fonctions propres, si vous voulez, se comportent et bien sûr, par des conditions aux limites à la fois avec λ fini, et à l'infini. Pour λ fini, la condition aux limites est essentiellement que la fonction n'explose pas, je veux dire, vous savez, à la singularité (au λ), ce qui se passe, c'est que les solutions ont normalement soit une singularité logarithmique, soit sont régulières, et donc nous mettons comme condition aux limites le fait qu'elles soient régulières. Et maintenant, à l'infini, il s'avère qu'à l'infini, les fonctions propres doivent avoir ce comportement (*montrant* $\phi(x) \sim c\,\frac{\sin(2\pi\lambda x)}{x}$) qu'elles sont équivalentes à un quotient de la fonction sinus avec le coefficient correct, je veux dire divisé par x. Et c'est pour les fonctions paires, et si vous prenez des fonctions impaires, elles doivent avoir le comportement cosinus. Et c'est ce qui va nous permettre bien sûr de calculer le spectre en utilisant l'ordinateur, d'accord.

Nous étions déjà assez étonnés de découvrir que cet opérateur avait un spectre discret. On aurait pu s'attendre à ce qu'un spectre continu apparaisse parce que nous étions en dehors de cet intervalle compact et ainsi de suite. Non. Il a un spectre discret et nous avons donc commencé à étudier ce spectre. Et la première chose que nous avons faite pour comprendre à quoi ce spectre pouvait ressembler, a été d'utiliser ce que font les physiciens, à savoir utiliser l'approximation semi-classique. Donc ce qui se passe dans l'approximation semi-classique, c'est la chose suivante ; ce que nous avons en réalité, c'est un hamiltonien qui est de la forme suivante. Je veux dire, lorsque vous regardez cet opérateur W_λ, l'opérateur d'onde prolate sur la droite réelle complète, alors je veux dire, au signe près et à un terme supplémentaire près, c'est en réalité le produit de deux termes, c'est vraiment comme $(p^2-\lambda^2)(q^2-\lambda^2)$, où p et q sont, vous savez, les variables de l'espace des phases comme dans le cas de la physique. Et quand on regarde à première vue, si vous voulez, le nombre de valeurs propres de l'opérateur, maintenant ce sont des valeurs propres négatives à cause du signe moins ici, qui vérifient que l'hamiltonien est inférieur à a où $a=\left(\frac{E}{2\pi}\right)^2$ parce que ça serait le lien avec ζ, alors, on doit calculer une aire dans l'espace des phases, c'est l'aire qui est délimitée par cette courbe ici, et où p est plus grand que λ et où q est plus grand que λ, ok et donc, on peut faire ce calcul, je veux dire qu'il est donné par une intégrale, cette intégrale est convergente, et il s'avère que lorsqu'on calcule l'intégrale ah, ok, on a déjà un assez bon signe qui arriv, ete qui est que cette aire a le même type de terme principal que pour les zéros de ζ. A savoir qu'elle est de la forme $\frac{E}{2\pi}\log\frac{E}{2\pi}$.

Je veux dire que ce que j'ai utilisé, j'ai utilisé un carré ici parce que je pense au laplacien et nous devrons atteindre l'opérateur de Dirac à un moment donné. Donc déjà, ce que nous voyons, c'est ceci. Mais il y a une dépendance à λ, dans les termes inférieurs ou dans ce que vous obtenez ici, et bien sûr il faut s'en occuper. Et je veux dire que le calcul plus précis est que, tout d'abord, on a une sorte de règle de mise à l'échelle, qui est ce qui se passe quand on redimensionne le paramètre par λ, et en fait on peut calculer l'intégrale explicitement en termes d'intégrales elliptiques et elle est donnée, vous savez, en termes de première espèce et de deuxième espèce, je veux dire, elle est donnée par une formule de ce type. Et cela nous donne bien sûr un premier contrôle sur le nombre de valeurs propres. Mais bon, vous savez, ce contrôle nous a conduit à fixer la valeur de λ à la racine carrée de deux, et j'expliquerai plus tard comment cela est lié, je veux dire, au travail avec Katia Consani. Donc, ça nous a permis de fixer la valeur de lambda mais ensuite, on voulait avoir un bien meilleur contrôle sur les valeurs propres. Et pour ça, ok, je veux dire, c'est utile de faire une transformation de Liouville. Et pour passer à un problème de Sturm-Liouville. Et quand on fait une transformation de Liouville, alors ce qu'on trouve, c'est que, vous savez, il y a un isomorphisme unitaire de l'opérateur que l'on restreint à l'intervalle pertinent, on va ignorer, si on veut, les valeurs propres qui sont déjà connus, qui sont positives. Et il conjugue l'opérateur à un opérateur sur $(coth^2(y)-2))$: la demi-droite qui a suivante $(Q(y)=-(2\pi)$. Ca veut dire qu'il y a un potentiel, il y a ce terme ici, et il y a $2cosh(y)^2$. Maintenant, cela a la forme d'un potentiel, qui est un potentiel assez délicat, si vous voulez, parce qu'il fait intervenir cette fonction cosh au carré et le coth au carré. Donc en fait, il y a un nouvel hamiltonien qui apparaît ici dans les variables de Liouville qui est de la forme p au carré plus q de la variable d'espace $(H=p+Q(q))$. Et je veux dire que cet hamiltonien a la propriété suivante, c'est là qu'on voit qu'on est dans le cas du spectre discret, parce qu'il est dans le cas du cercle limite à l'infini et il est aussi dans le cas du cercle limite à zéro. Maintenant on est passé à zéro par le changement de variables. Et la fonction qui intervient là-dedans comme potentiel, dans cet hamiltonien, est cette fonction : $(Q(y)=-(2\pi\Lambda^2)2\cosh(y)^2-\frac{1}{4}(\coth^2(y)-2))$:

$$h(y)=16\pi^2\cosh^2(y)+\frac{1}{4}(\coth^2(y)-2)$$

Donc, je veux dire que c'est impliqué mais que c'est du mauvais signe et c'est très important, sinon on n'aurait pas de valeurs propres négatives. Donc, je veux dire que ce que nous avons trouvé avec Henri, c'est un beau calcul qui a été fait par Nursultanov et Rozenblum, et qui donne l'asymptotique des valeurs propres pour exactement le type d'opérateurs que nous avons, à savoir un opérateur de Sturm-Liouville avec un potentiel ayant une forte singularité locale négative.

Nous avons donc utilisé cet article, que je reproduis ici, je reproduis la formule principale que nous utilisons dans cet article. Et je veux dire que dans cet article, il y a une formule pour le nombre de valeurs propres positives et le nombre de valeurs propres négatives. Et comme nous nous intéressons pour notre opérateur d'onde prolate à sa valeur propre négative, et qu'il y a ce signe moins, nous allons utiliser cette formule, la première formule ici.

Donc vous savez, il faut commencer à calculer, et donc la formule en termes de fonction $h(y)$ que j'avais montrée avant est de la forme suivante : c'est cette formule de Nursultanov et Rozenblum donc c'est $\frac{1}{\pi}$ fois l'intégrale de zéro à l'infini de cette expression ici ($N(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty((a+h(y))^{1/2} - h(y)^{1/2})dy)$) et je veux dire qu'en tant que tel, ce n'est pas facile à gérer, mais si $N(a) = \frac{1}{2}a$ vous différenciez par rapport à a, vous obtenez une expression plus simple évidemment, il y a un facteur cause de la racine carrée et ainsi de suite, et donc vous obtenez cette expression et ensuite, vous devez changer de variable : quand vous changez de variable et que vous définissez x égal à l'exponentielle de y, toutes ces fonctions trigonométriques, vous savez, comme le cosinus hyperbolique et ainsi de suite, elles crachent des fonctions rationnelles, et cela signifie qu'à la fin de la journée, vous devez calculer une intégrale qui est du type de celle que Legendre calculait : c'est une intégrale elliptique; le terme qui est à l'intérieur de la racine carrée est assez compliqué, ok, il est donné par cette expression, et je veux dire... donc il faut se référer à la notation standard pour les intégrales elliptiques qui sont, vous savez, cette intégrale elliptique incomplète ici (*montrant* $F(\phi|m) := ...$) et voici l'intégrale complète (*montrant* $K(m) := ...$), et puis ok, ce que l'on trouve c'est qu'il y a une forme explicite pour la réponse pour cette fonction qui est une dérivée J de a, et elle est donnée par une somme de deux termes donc il y a un premier terme, qui implique cette intégrale elliptique complète de première espèce et puis il y a ce terme.

Et je veux dire, tous les coefficients que vous voyez sont tous assez compliqués, mais ce sont des sortes de polynômes, vous savez, comme par exemple $s(a)$ est donné par cette expression, $d(a)$ est donné par cette racine carrée et ainsi de suite, et puis il y a ce facteur global $v(u)$ qui est donné par cela. Donc vous calculez, vous calculez, et vous pouvez utiliser les développements asymptotiques des différents termes et des intégrales elliptiques complètes, vous continuez à calculer, puis, lorsque vous évaluez ce que cela devrait être pour $a = (E/2)^2$, vous trouvez exactement maintenant la contribution qui vous donne le nombre de zéros de zêta et vous trouvez $\frac{E}{2\pi}\log\frac{E}{2\pi}$.

Et vous trouvez qu'il y a un terme supplémentaire, qui est le plus difficile, qui vient de l'intégrale elliptique incomplète. Et étonnamment, ce terme supplémentaire vous donne, dans la formule de comptage du nombre de valeurs propres pour l'opérateur, un terme qui ressemble incroyablement aux termes supplémentaires que vous obtenez pour la fonction zêta de Riemann. Je veux dire que pour la fonction zêta de Riemann, vous avez un terme qui est dû à Trudgian et qui vous dit que la différence entre le nombre attendu de zéros qui est ceci, et la formule de Riemann est de l'ordre de $\log s\ E$ avec un certain coefficient. Ce que nous avons trouvé avec Henri est une formule très similaire où le coefficient que nous avons est ce coefficient (0.159155 pour Connes-Moscovici au lieu de 0.112 pour l'estimation de Trudgian).

Donc, si vous voulez, alors bien sûr, il faut travailler davantage parce que ce que l'on a à ce stade, c'est la connaissance du laplacien et ce qu'il faut trouver, c'est une sorte de racine carrée, si vous voulez, de ce laplacien. Nous avons donc cherché l'opérateur de Dirac correspondant et ce que nous avons fait, c'est de trouver l'opérateur correspondant, puis d'explorer la géométrie associée. Ok. Et je veux dire, je reviendrai sur le fait que, je reviendrai sur l'opérateur de Dirac un peu plus tard, mais laissez-moi avant de faire cela, laissez-moi vous montrer comment nous avons calculé les valeurs propres du laplacien W, qui sera finalement le carré de l'opérateur de Dirac, puis, après avoir pris la racine carrée, nous les comparons avec les zéros de zêta, et je vous montrerai cette comparaison des valeurs propres.

Mais pour ça, il faut prendre la racine carrée, donc il faut trouver l'opérateur de Dirac. Ok. Alors comment a-t-on trouvé l'opérateur de Dirac ? Eh bien, on a utilisé une méthode bien connue en théorie des opérateurs, qui est, si vous voulez, la méthode de Darboux. Et cette méthode de Darboux est la suivante : c'est une factorisation de l'opérateur comme un produit de deux opérateurs d'ordre un. Et puis, si vous voulez, l'idée, c'est que si on a une factorisation de ce type de deux équivalents unitaires de l'opérateur W_λ, alors on peut définir une racine carrée comme une matrice 2×2. Donc c'est bien connu, bien sûr, et vous savez, que pour passer du laplacien à l'opérateur de Dirac, il faut utiliser des matrices de Clifford. Donc c'est ce que nous allons faire, et donc, la méthode Darboux est une méthode générale qui s'applique non seulement dans le cas de Liouville mais aussi dans le cas où vous avez, vous savez, la forme canonique de l'opérateur de Sturm-Liouville, dans le sens où vous êtes autorisé à insérer un p de x entre les deux différentiations, et quand vous faites ça, ok, il y a une recette, qui est une équation de Riccati que vous devez résoudre, afin de pouvoir en quelque sorte, vous savez, trouver une connexion qui vous permettra d'écrire l'opérateur différentiel d'ordre deux comme étant factorisé. Donc dans notre cas, ce que nous avons trouvé, nous avons trouvé la solution de l'équation de Ricatti en utilisant une combinaison de solutions de l'équation différentielle avec un coefficient complexe, et lorsque le coefficient est vraiment complexe, alors, nous avons la factorisation. Il y a un module dans le choix de la factorisation qui est, si vous voulez, un nombre complexe mais avec l'axe réel exclu et puis une fois qu'on a la solution de l'équation de Riccati, on a l'opérateur de Dirac : c'est une matrice 2×2, et cette matrice 2×2 est telle que lorsqu'on la met au carré, on obtient essentiellement... le premier terme qu'on obtient sur la diagonale est l'opérateur d'origine et le deuxième terme qu'on obtient sur la diagonale est isospectral à l'opérateur d'origine $W_\lambda + 2\delta w(x)$.

Et je veux dire, si vous voulez, ce que cela signifie, c'est que d'une certaine manière, le problème de trouver les valeurs propres de W_λ, le problème de l'opérateur de Dirac, se réduit bien sûr au problème des valeurs propres de W_λ, mais ce que vous avez fait essentiellement, c'est éliminer la symétrie qui se produit naturellement entre les zéros de zêta, en prenant la fonction qui, comme la mise au carré, si vous voulez, des zéros, ce qui élimine la symétrie. Et donc maintenant, bien sûr, on en est réduit à calculer le spectre de cet opérateur W_λ : ce que l'on trouve alors, c'est que cet opérateur, il faut multiplier par deux l'opérateur de Dirac, a un spectre simple discret, son spectre est contenu dans l'union de la droite réelle et de la droite imaginaire réelle, et cela parce que son carré correspond à cet opérateur d'onde prolate sur la droite complète, et cet opérateur d'onde prolate a des valeurs propres positives et négatives. Les valeurs propres positives vont en fait imiter les zéros triviaux de la fonction zêta de Riemann et les valeurs propres imaginaires vont vraiment imiter les zéros, les zéros non triviaux. Ils sont donc exactement symétriques pour zêta et lorsque vous calculez la fonction de comptage de ceux qui ont des parties imaginaires positives inférieures à E, ils remplissent exactement l'estimation de Riemann, d'accord.

Nous avons donc continué à calculer, à faire ces calculs avec l'ordinateur. Et la façon dont nous avons fait ce calcul a été, si vous voulez, d'étendre la fonction propre à l'infini, en fonction de la valeur propre. Nous savions quel était son comportement en fait, il y a un développement détaillé qui se trouve dans l'article de Ramis et de ses collaborateurs. Nous avons également étendu la fonction propre pour la valeur propre correspondante avec la condition limite à λ, je veux dire, qui est la racine carrée de deux. Et puis nous avons étendu la solution si vous voulez par l'équation différentielle et nous avons essayé de les faire correspondre. Maintenant, en général, elles ne correspondent pas, bien sûr, mais elles correspondent pour des valeurs spécifiques du paramètre et nous avons collecté ces valeurs, d'accord, puis nous avons fait cette opération pour arriver au Dirac et nous avons comparé. Et quand vous comparez, ok, vous commencez à être totalement mystifié, parce que ce que vous trouvez donc dans la colonne de gauche, il y a ce que vous obtenez de notre opérateur, et dans la colonne de droite, il y a ce que vous obtenez des zéros de zêta, et ça continue, je veux dire, ça continue assez loin, en fait, nous avons pu les calculer assez loin, euh, et c'est le type de coïncidence que vous obtenez.

Donc en fait, ce que vous pouvez faire, c'est que vous pouvez tracer ces valeurs, d'accord, où vous avez sur le même tracé et pour le même entier n, vous avez la n-ième valeur propre du Dirac et vous avez le n-ième zéro de ζ qui est donné, et quand vous ne voyez qu'un seul point, cela signifie qu'en fait le point rouge cache le point bleu, donc je veux dire, si vous voulez, cela signifie qu'ils sont vraiment trop proches pour voir une différence, donc vous continuez pour des nombres de plus en plus élevés, et ce sont des valeurs propres ou si vous voulez les zéros pour le même n, ce qui est très surprenant car normalement vous vous attendriez à un décalage ou quelque chose comme ça. Et donc quand vous allez vraiment loin, quand vous montez jusqu'à 100, vous voyez que le comportement est assez similaire. Ok.

Donc, une fois que vous avez atteint cela, il y a un problème géométrique évident, qui est que maintenant, si vous voulez, ce que nous savons en géométrie non-commutative, c'est qu'une géométrie est donnée par l'opérateur de Dirac, elle est donnée par ce qu'on appelle un triplet spectral, où tout se passe dans l'espace de Hilbert, et, si vous voulez, où la métrique de l'espace en question est dictée par l'opérateur de Dirac.

Donc ici, la métrique est sur la demi-droite réelle, si vous voulez, et si vous voulez considérer la partie intéressante, c'est la partie de la racine carrée de 2 à l'infini, et donc $\lambda = \sqrt{2}$ ici, et ce que vous découvrez, c'est que la métrique associée au triple spectral pertinent, celui qui vient de l'opérateur de Dirac est donnée par cette formule $\mathrm{d}s^2\ \mathrm{d}x^2$. Elle est donnée par cette formule et ce qui est très frappant, bien sûr, c'est que la métrique change de signe lorsque vous traversez le point singulier de l'opérateur.

Donc ce qui se passe, c'est que cette métrique s'avère s'étendre à la droite réelle, d'accord, en changeant de signe et ainsi de suite, et en fait, elle est naturellement liée à une métrique qui est bidimensionnelle, ce que nous allons faire bien sûr, c'est de rendre la variable temporelle périodique, et lorsque vous regardez cette métrique comme une métrique bidimensionnelle, vous constatez qu'elle est en fait liée à... c'est juste un trou noir.

Et il y a une astuce quand on regarde les trous noirs pour rendre la métrique lisse et quand on la rend lisse, on trouve ce qui suit, on trouve cette expression ($\mathrm{d}s^2 = 4x^2\mathrm{d}v^2 - 2\mathrm{d}v\mathrm{d}x$). Donc je veux dire, ici on est toujours en retard, parce qu'il nous faut comprendre beaucoup plus de choses sur cette géométrie que ce que nous faisons pour le moment, mais ce qui est bien, c'est qu'en fait, on peut dessiner une image de cette géométrie si on le veut, de ce trou noir parce que ce qu'on peut faire, c'est l'intégrer, on peut réellement intégrer cette géométrie bidimensionnelle dans l'espace de Minkowski. Et quand on l'intègre dans l'espace de Minkowski, on obtient l'image suivante. C'est donc la première image qu'on obtient. Donc vous voyez, voici le point singulier de l'opérateur, voici la partie qui va de la racine carrée de deux à l'infini (*montrant le cône jaune en haut de l'image*) et ici au milieu se trouve la partie à propos de laquelle, si vous voulez, les gens ont travaillé, et ils savent ce qui se passe et ainsi de suite, et quand vous regardez de plus près, vous découvrez que comme cela devrait être dans le trou noir, vous avez ces rayons de lumière, qui sont en blancs ici, qui tournent en spirale à l'intérieur, vous savez, et qui, bien sûr, tandis que, si vous voulez, la ligne qui est obtenue en prenant $t = 0$ la traverse de manière rectiligne. Donc, ce que nous avons fait avec Henri, c'est de tomber, presque par accident, sur un opérateur qui définit une géométrie, qui est un opérateur de Dirac, et qui a étonnamment les propriétés d'une géométrie lorentzienne, si vous voulez, ce n'est pas une géométrie riemannienne parce qu'il y a ce signe moins, et cela correspond au fait que lorsque vous regardez les zéros de zêta, vous avez les zéros critiques, mais vous avez aussi les zéros triviaux, et cela correspond au fait que l'opérateur prolate a des valeurs propres à la fois négatives et positives. Nous avons donc fait beaucoup plus de calculs sur ce sujet et, par exemple, nous avons l'hypothèse, si vous voulez, que le spectre négatif de l'opérateur prolate correspond exactement à l'espace de Sonin, où l'espace de Sonin est défini comme étant $(P_\lambda^\perp)$. En d'autres termes, il n'est pas vrai que l'orthogonalité de ces deux projections P_λ et $\widehat{P_\lambda}$ soit telle que ces projections couvrent l'espace. Quand on prend leur supremum, il y a un sous-espace de l'espace de Hilbert qui est orthogonal aux deux et qui est l'espace de Sonin. Donc l'espace de Sonin remonte au 19e siècle, et il est caractérisé par le fait que vous prenez des fonctions et que de telles fonctions existent, donc vous avez des fonctions pour lesquelles ce $P_\lambda^\perp$ est orthogonal à la projection P_λ et dont la transformée de Fourier s'annule aussi sur l'intervalle correspondant, d'accord, s'annulent sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$ maintenant, d'accord.

Et ça, c'est en rapport avec le travail que je mène depuis de nombreuses années avec Katia Consani et ce travail est, si vous voulez, lié à une autre approche de la fonction zêta de Riemann, qui n'utilise pas d'opérateurs, mais qui essaie de prouver ce qu'on appelle la positivité de Weil. Donc si vous voulez, ce qui se passe, c'est qu'il y a une formule qui est due à Riemann et Weil (formule de Riemann-Weil), et qui exprime l'évaluation d'une fonction sur les zéros de zêta, les zéros non triviaux, au moyen de la transformée de Fourier de la fonction évaluée sur les places, ce qu'on appelle les places, du corps des nombres rationnels et cette évaluation porte sur la somme sur les nombres premiers, et les termes qui sont impliqués, dans l'évaluation, sont relativement simples pour chaque nombre premier, si vous voulez, ils sont de cette forme, on évalue juste la fonction sur p mais on prend une somme, mais c'est assez compliqué, à ce qu'on appelle la place archimédienne ; elle est donnée par une distribution de valeurs principales qui est de cette forme, cette fonctionnelle avec $z = 1/2 + is$.

Et puis il s'avère que si vous voulez que l'hypothèse de Riemann est équivalente à la positivité d'un $f(s)g(s)$ approprié, qui est cette fonctionnelle (*montrant* $Q...(f, g) :=$) ; c'est évident du point de vue de l'espace de Hilbert, mais le fait que cette fonctionnelle puisse être calculée en termes de nombres premiers, c'est ce qui rend le problème extrêmement difficile, car il faut prouver la positivité d'une fonctionnelle en utilisant ce type d'expression.

Maintenant, ce que nous avons fait dans plusieurs articles avec Katia Consani, des articles très récents, je veux dire cet article qui est paru en 2021, donc ce que nous avons fait, c'est de prouver une forme forte de la positivité de Weil, mais encore une fois avec la même valeur $\sqrt{2}$, donc ce que nous avons prouvé avec Katia Consani, c'est que nous avons la positivité de Weil sous une forme forte en utilisant le même espace de Sonin que je mentionnais avant, dans mon travail avec Henri, et en prouvant une inégalité entre la forme quadratique de Weil et la trace de l'opérateur d'échelle, compressée si vous voulez, je veux dire, en utilisant l'espace de Sonin. Maintenant, c'est une expression très délicate, pourquoi ?

Parce que si vous voulez avoir la projection sur l'espace de Sonin, vous avez l'action de mise à l'échelle, mais l'action de mise à l'échelle ne commute pas avec la projection sur l'espace de Sonin. Et donc vous êtes obligé de prendre une expression de ce type, qui est, vous savez, complètement positive.

Et il s'est avéré que dans le travail avec Katia, nous utilisions à nouveau les fonctions prolate, donc nous utilisions les fonctions d'onde prolate, ces fonctions d'onde prolate, je les avais introduites dans mon article de 98, je veux dire dans Selecta. Elles réapparaissaient déjà dans le travail avec Katia, il y a deux ans, avec cette formule qui impliquait la projection sur l'espace de Sonin et la mise à l'échelle. Et maintenant, si vous voulez, quelle est la raison conceptuelle qui se cache derrière cette histoire et pourquoi cet opérateur prolate est-il si important, etc., eh bien, ce qui se passe, c'est que la mise à l'échelle ne commute pas avec cet espace de Sonin, avec la projection de Sonin, mais l'opérateur d'onde prolate commute avec la projection de Sonin et cela signifie qu'au lieu de prendre la mise à l'échelle, on devrait prendre la fonction appliquée à l'opérateur prolate et l'utiliser en remplacement.

Maintenant, dans le travail avec Katia, nous avons aussi fait le point suivant, nous avons aussi remarqué ce qui suit, en utilisant l'ordinateur, nous avons remarqué que la forme quadratique de Weil est une forme quadratique qui n'est pas dégénérée, d'accord, donc elle n'a pas de zéro, elle n'a pas de radical, mais elle en a en fait quand on la calcule en utilisant des matrices et ainsi de suite, elle a des valeurs propres incroyablement petites. Par exemple, pour la valeur de lambda carré qui est 11, d'accord, donc essentiellement quand on prend en compte les nombres premiers deux et trois et pas plus, on trouve que la plus petite valeur propre positive est de l'ordre de 10 puissance moins 48. Donc encore une fois, ce qui s'est passé, c'est que la présence de ces minuscules valeurs propres positives pour la forme quadratique de Weil qui a quelque chose à voir avec, vous savez, cet opérateur d'onde a priori, qui est conceptuellement expliqué par l'opérateur prolate ; et comment ça s'explique, ça s'explique par le fait qu'on sait, c'est un fait très simple, que si on prend la forme quadratique de Weil complète, sur la droite réelle complète, alors elle a un radical et ce radical contient des fonctions qui s'obtiennent par l'application E, qui était l'application que j'ai utilisée au début pour obtenir si on veut le spectre comme spectre d'absorption, mais cette application E ne vous donnera jamais une fonction à support compact. Pourquoi ? parce que je veux dire que si la fonction f a un support compact dominé par λ, quand on prend la somme de $f(nx)$ pour x plus grand que un, vous allez respecter ce support, d'accord. Mais alors le problème que vous avez c'est : "qu'en est-il du support quand x tend vers zéro ?", parce que nous prenons des fonctions d'une variable positive, nous sommes sur $\mathbb{R}$ et pour faire ça, ce que vous devez faire, pour obtenir que le support de la fonction $\epsilon(f)$, je veux dire cette somme ici, soit contenu dans l'intervalle, ce que vous devez faire, c'est utiliser la transformée de Fourier de la fonction. Et vous devriez utiliser le fait que la fonction appartient à la transformée de Fourier de la projection P_λ. Mais nous savons que l'intersection entre P_λ et $\widehat{P_\lambda}$ est vide. Cependant, elle est vide, mais pas tout à fait, il y a des fonctions qui sont presque à l'intersection des deux, et encore une fois, ce sont les fonctions prolates. Donc ce que nous avons fait avec Katia, nous utilisons les fonctions prolates, nous appliquons cette formule aux fonctions prolates et ensuite, nous comparons avec... ok, donc là-dessus, je reviendrai plus tard, je veux dire. Voici la variation des valeurs propres, lorsque vous ne prenez pas en compte les nombres premiers les plus élevés, d'accord. Mais ce sont les logarithmes des plus petites valeurs propres, et vous pouvez voir que vous savez que lorsque vous allez par exemple autour de cette valeur à 7, vous obtenez quelque chose comme 10^{-60}, ce qui est incroyablement petit pour les valeurs propres. Et donc, ce que nous avons fait avec Katia, c'est de comparer les plus petites valeurs propres, celles qui nous donnaient ces nombres incroyablement petits, avec les fonctions prolates, avec ce qui se passe lorsque vous appliquez l'application aux fonctions prolates. Et ce que nous avons trouvé, par ordinateur bien sûr, d'accord, ce que nous avons trouvé, c'est qu'après avoir construit ces fonctions en utilisant les fonctions prolates d'accord par cette application, et en construisant la projection correspondante, ce que nous avons trouvé, c'est que la coïncidence est étonnante, à savoir que l'espace des vecteurs propres pour les k valeurs propres les plus basses pour la forme quadratique de Weil correspond exactement à la projection prolate. Donc, cela a été fait en les comparant, vous savez, numériquement, et quand vous voyez un graphique comme celui-ci, en fait, cela signifie qu'il y a deux graphiques qui coïncident en fait parce que vous ne voyez qu'un seul graphique. Donc, ce sont les premières valeurs, d'accord, et pour cette valeur qui était, vous savez, si petite, et puis on continue, et ensuite ce qui se passe, c'est que lorsque vous essayez de pousser plus loin, lorsque vous essayez de l'appliquer à des choses qui ne sont pas les plus petites valeurs propres, alors il y a une divergence qui apparaît mais c'est normal. Donc, vous voyez, ici, ce qui se passerait si nous n'avions pas la coïncidence, vous pouvez voir qu'il y a deux graphiques qui apparaissent, il y a un graphique bleu et il y a un graphique rouge, et ils sont clairement différents.

Bon, donc à partir de là, on a eu une idée complètement folle, avec Katia, qui était la suivante, qui était que maintenant, on allait essayer de saisir les petites valeurs propres, les petits zéros de la fonction zêta de Riemann et comment on essaie de faire ça ? On essaie de faire ça encore une fois avec l'opérateur de Dirac, et en prenant cet opérateur de Dirac, et en conditionnant l'opérateur de Dirac par cette projection prolate, c'est-à-dire, si vous voulez, en forçant l'opérateur de Dirac à avoir autant de zéros que cette fonction prolate. Et quand on a fait ça, on est allés d'une surprise à l'autre, dans le sens où on a calculé les spectres correspondants pour les petites valeurs, d'accord, et c'était comme si, vous savez, il y avait un diable dans l'arrière-scène qui se moquait de nous, parce qu'on comparait toujours ce spectre bas qui se produit pour zêta, d'accord, qui est à droite ici et je veux dire, ce qui a été montré par le calcul, c'est le calcul de l'angle des deux projections qui est presque nul. Donc ce qui s'est passé, c'est que, vous savez, nous obtenons une sorte de ressemblance de plus en plus claire entre ce que nous obtenons pour cet opérateur de Dirac et ce que nous obtenons pour les zéros de zêta. D'un autre côté, d'accord, nous n'avions aucune chance, vous savez, d'obtenir un accord complet parce que l'opérateur de Dirac sur le cercle n'a bien sûr pas le bon comportement à l'infini ; il n'a pas du tout le bon comportement des valeurs propres à l'infini. D'accord, mais nous avons continué, nous avons continué, puis nous avons compris après un certain temps que nous devions nous attendre à un accord, je veux dire que nous avons examiné, vous savez, différents cas jusqu'à 13,5 et ainsi de suite, d'accord, qui se ressemblaient de plus en plus, donc il y avait une similitude spectrale.

Et puis, on s'est rendu compte qu'en fait il y avait un théorème qui était derrière la scène, à savoir que ce qui se passait, c'est que nous obtenions cette vraisemblance, si vous voulez, de ces valeurs propres de l'opérateur de Dirac poussé si vous voulez dans l'orthogonale de ces fonctions prolates et des zéros de données, donc ce qui se passait, c'est qu'il y a un théorème derrière et donc pour arriver à ce théorème, nous avons compris que nous ne devrions pas simplement, vous savez, regarder un spectre spécifique pour une valeur spécifique de lambda, mais que nous devrions comparer ce qui se passe lorsque nous changeons le nombre de fonctions prolates que nous utilisons pour conditionner. Et ce qui se passe, c'est que lorsque vous faites cela, vous découvrez que, d'accord, par exemple, si vous considérez comme nou n + 1 d'entre elles, elles vous donneront des graphiques différents pour les valeurs propres, mais pour certaines valeurs du paramètre lambda, les deux coïncideront et lorsque les deux coïncident, elles concordent exactement avec le zéro correspondant de zêta. Nous avons donc fait cela pour la première valeur propre, pour la deuxième valeur propre, pour la troisième valeur propre, et la concordance était incroyablement bonne. Et après un certain temps, en regardant l'évolution des valeurs propres et ainsi de suite, nous avons découvert qu'il y avait un théorème mathématique derrière la scène et je vais terminer mon exposé là-dessus et ce théorème mathématique détermine complètement, si vous voulez, le spectre de basse altitude. Nous avons donc fait cela d'abord bien sûr en comparant l'évolution des valeurs propres, en comparant la façon dont elles se touchent et ainsi de suite, la façon dont elles se touchent avec les conditions de quantification, d'accord, qui ont été définies ici. Mais tout d'abord, voici la comparaison des spectres que vous obtenez en utilisant le critère que nous avions, donc ici je ne suis pas en mesure de vous dire lequel correspond aux zéros de données et lequel correspond à celui que nous avons calculé par notre critère car ils sont essentiellement identiques, je veux dire, il n'y a Et nous avons pu calculer ainsi les 31 premiers zéros en utilisant seulement les nombres premiers deux, trois et le nombre quatre et après avoir fait ces calculs, nous avons examiné ce qu'on appelle l'équation fonctionnelle approximative et la formule de Riemann-Siegel, et nous avons trouvé que les estimations étaient exactement les mêmes, à savoir que ce que nous avions fait était en fait de trouver une incarnation théorique de l'opérateur de la formule de Riemann-Siegel. Et l'explication conceptuelle, je serai très brève, c'est la notion de cycle zêta que nous avons décrite en détail dans notre article avec Katia.

Donc, je veux dire, pour conclure, je voudrais dire la chose suivante, vous voyez pour conclure, nous avons, dans le travail avec Henri, nous avons dévoilé un opérateur, qui est l'opérateur prolate, qui n'a à voir bien sûr qu'avec la place d'Archimède, mais qui présente déjà exactement le bon comportement ultraviolet, pour les zéros de zêta. D'accord. D'un autre côté, nous savons qu'il serait impossible d'obtenir le bon opérateur sans faire intervenir les nombres premiers. Maintenant, dans le travail avec Katia, nous faisons intervenir les nombres premiers, mais nous faisons également intervenir les fonctions prolates, sauf que nous appliquons à cette fonction prolate cette application [, et cela est lié au travail que nous avons fait avec Katia sur la formule de la trace semi-locale. Alors à ce moment-là, si vous voulez, la pièce clé qui manque dans ce puzzle, et qui devrait permettre de commencer à assembler si vous voulez l'ultraviolet avec l'infrarouge, c'est de comprendre que, quand dans le travail avec Katia, on prend l'orthogonale de la projection prolate, on était déjà en train de regarder les valeurs propres négatives d'un analogue de l'opérateur d'onde prolate mais pas pour la seule place archimédienne, mais en mettant déjà quelques- uns des nombres premiers dans la machine, en utilisant l'espace de Hilbert semi-local que j'avais défini il y a longtemps pour trouver la formule de trace semi-locale.

Donc, si vous voulez, c'est la situation maintenant, mais cela concerne beaucoup de travail et d'une certaine manière, c'est la réalisation d'un rêve de Slepian parce que lorsque Slepian a écrit des articles très intéressants, avec ses collaborateurs, et parmi ses articles il y en avait un dans lequel il avait l'impression, à cause de ce miracle, si vous voulez, de la commutativité, il avait l'impression qu'il avait affaire à quelque chose, à l'opérateur prolate, qui était beaucoup plus profond, et donc le fait que cet opérateur ici, en fait, vous savez, soit intimement lié aux zéros, je veux dire, aux zéros triviaux et non triviaux de zêta, c'est, à bien des égards, vous savez, une justification du rêve de Slepian, je veux dire, en ces temps anciens où les laboratoires Bell existaient, et ils ont malheureusement disparu depuis.

Ok, donc je pense que je terminerai mon exposé ici, oui, je souhaite vraiment terminer sur le travail de Slepian, vraiment.

Espaces et modèles

Alain Connes
Thibault Damour

Alain Connes est mathématicien, Professeur au Collège de France et à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, auteur de "Matière à pensée" (Odile Jacob) et "Géométrie non commutative" (Inter Editions).

Thibault Damour est physicien théoricien, Professeur à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Directeur de recherche au CNRS et à l'Observatoire de Paris.

Alain Connes : Je pense qu'on pourrait commencer par évoquer comment dans le passé la notion d'espace est apparue de manière de plus en plus précise pour les physiciens. Donc... si tu veux bien...

Thibault Damour : Oui, effectivement, c'est une bonne question, une bonne façon d'aborder le débat. Il me semble qu'on peut commencer à Newton. Newton a hérité d'une conception de l'espace qui remonte aux Grecs. Mais, c'est Newton le premier qui, en tant que physicien, a eu vraiment besoin d'un espace pour fonder la physique qu'il créait. Et ce qui caractérise l'espace de Newton, c'est d'abord le mélange d'une structure mathématique, que Newton n'a pas inventée, qui était celle de l'espace des Grecs, de l'espace euclidien, avec une structure simple, un ensemble de points, une notion de distance et puis, une certaine position philosophique à propos de cet espace qui était la croyance en la réalité de cet espace, réalité au sens naïf, c'est-à-dire que l'espace, vraiment, est une chose qui préexiste en dehors de nous. Or cette conception, qui est entrée dans la physique historiquement donc en 1687, quand Newton a publié son œuvre maîtresse, cette conception a été mise en doute tout de suite par d'autres physiciens-mathématiciens, comme Leibniz, disons grossièrement pour lequel l'espace en fait n'était pas une chose préexistante aux objets, mais n'était comme il disait qu'un ordre des coexistants, disons, l'ensemble des relations entre objets, entre choses existant en soi, l'ensemble de leurs relations réciproques, de leur configuration

Transcription d'un entretien visionnable à l'Institut National de l'Audiovisuel (INA).
Référence de la vidéo :
https://www.primevideo.com/detail/Espaces-et-mod%C3%A8les/0L4FTZOKK8WG666ZJ9NTDYEPFY.
Transcription : Denise Vella-Chemla, janvier 2022.

géométrique définissait l'espace, mais l'espace n'existait pas en tant qu'objet lui-même. Mais en fait, ces deux conceptions, que l'on pourrait croire être des positions extrêmes de l'existence de l'espace, soit l'espace existe, soit il n'existe que des objets, la matière, il n'existe pas d'espace, ont été plus tard réexaminées par Kant, et bien que ça ne soit pas le but de notre entretien de parler dans le moindre détail de la philosophie, juste se souvenir que Kant a perçu profondément qu'en fait, ce n'était ni Newton, ni Leibniz qui avaient raison, qu'on ne pouvait pas concevoir l'espace comme existant réellement, ni la matière comme existant seulement, et l'espace étant une illusion liée aux configurations de la matière, mais qu'en fait, nécessairement, il fallait poser l'espace mathématiquement, comme un a priori mathématique, une chose idéale, qui n'est pas une chose de la réalité et que c'est cet espace comme structure mathématique posée a priori qui permet ensuite de faire de la physique, et que les objets n'acquièrent de réalité que s'il y a un espace de fond dans lequel on puisse les poser.

Alain Connes : L'espace, c'est un mot qu'on emploie, c'est le théâtre dans lequel tous les phénomènes physiques se produisent. Evidemment, on peut dire qu'il n'y a pas de théâtre, qu'il n'y a que les phénomènes physiques eux-mêmes, mais je ne comprends pas bien l'opposition entre le point de vue de Leibniz et le point de vue de Newton, au sens où, si tu veux, il faudrait que tu expliques plus en quel sens pour Newton, l'espace même vide avait un sens, existait, contrairement à Leibniz. J'arrivais à voir plus difficilement la nuance entre les deux.

Thibault Damour : Oui, en fait, visiblement, tu es familier avec l'approche newtonienne parce que...

Alain Connes : Tout à fait.

Thibault Damour : ... pour Newton, c'est ce que tu viens de dire, l'espace est un grand théâtre vide, qui préexiste à l'existence des objets que l'on peut mettre dedans, même s'il n'y a pas de matière, l'espace est là, d'abord. L'espace est là, réellement. Alors pour essayer de... bon, l'idée de Leibniz, le problème, c'est qu'elle n'a jamais été mathématisée. En termes modernes, en fait, c'est très proche d'une idée, de certaines idées par exemples de Bacry[1],

1. Henri Bacry, physicien français, 1928-2010.

avec lesquelles tu es familier...

Alain Connes : Oui.

Thibault Damour : ... qui seraient que ce qui existe vraiment, c'est la matière, bon. En termes modernes, disons, la matière est décrite comme des vecteurs, dans, ce qu'il faut bien appeler espace, mais qui n'est pas du tout l'espace ordinaire, qui s'appelle espace de Fock, ou espace de Hilbert, plus généralement. Donc en fait, la matière elle-même est donnée, indépendamment de l'espace habituel dans lequel elle se place, c'est la matière qui est donnée de façon primordiale, et on pourrait considérer que Leibniz a défini un programme qui, étant donnée la description mathématique de la matière en physique des particules moderne, c'est-à-dire cet espace de Hilbert, est-ce que je peux quelque part retrouver l'espace avec ses trois dimensions habituelles à partir des vecteurs de cet espace de Hilbert qui définit la matière.

Alain Connes : Ce que je ne comprends pas bien dans le point de vue de Leibniz, justement, c'est comment, en rejetant la notion d'espace, même d'espace vide, comment on arrive à faire une physique qui a un contact quelconque avec les modèles actuels même.

Thibault Damour : Oui, bon, en fait, tu as tout à fait raison : le programme de Leibniz n'a jamais marché. Leibniz l'a esquissé, c'était une réaction intuitive ; il y a quelque chose qui lui semblait insatisfaisant dans la synthèse newtonienne et il n'a jamais réussi à proposer mieux. Donc ça reste toujours un programme. On peut essayer de regarder maintenant qu'est-ce que Leibniz trouvait insatisfaisant dans l'attitude newtonienne, puisque ça, ça reste avec nous en fait. Donc ce qui le gênait, c'était que l'espace soit une chose supposée exister indépendamment des objets, qu'on ne puisse jamais le toucher, l'espace, et pourtant, qu'il ait une certaine conséquence visible, en particulier, la notion de repos absolu, et la notion de déplacement à vitesse constante, c'est-à-dire le principe d'inertie, qu'on puisse distinguer si on est dans un train qui se déplace à vitesse uniforme, ou si on est dans un merry-go-round, dans un manège qui tourne à grande vitesse, il y a des effets, là, Newton disait ce sont des effets réels, qui distinguent un repère accéléré et un repère qui ne l'est pas et par conséquent, il doit y avoir une cause en dehors des deux. Et ça, ça gênait Leibniz.

Alain Connes : Oui donc malgré l'intérêt philosophique des vues de Leibniz, et de ses critiques, on peut dire quand même que c'est le point de vue de Newton qui s'est imposé pendant un temps extrêmement long et en partie, évidemment, par les succès du modèle qu'il proposait pour l'espace, et des succès vraiment incroyables des prédictions qu'on peut faire avec la théorie newtonienne.

Thibault Damour : Oui, tout à fait. Pendant des siècles après Newton, des armées de mathématiciens et de physiciens ont mis en chantier ce qui était en germe dans la synthèse newtonienne et ont montré comment de façon inouïe jusqu'alors, tous les phénomènes autour de nous, et surtout cette magnifique horloge céleste, toute la mécanique céleste, tout marchait très bien, ce qui fait que pendant des siècles, la conception newtonienne s'est imposée, et qu'elle est devenue complètement évidente ; on n'a plus pensé aux difficultés philosophiques qu'elle pouvait inclure, vraiment, la notion d'espace s'est identifiée à un objet réel existant autour de nous, à l'intérieur duquel les objets existent.

Alain Connes : On peut dire que ça a influencé considérablement même le point de vue des physiciens, de mathématiciens comme Lagrange ou Laplace, qui en sont arrivés à croire que le monde était entièrement déterministe, au sens où, comme ils le disaient à l'époque, si on connaissait toutes les positions et les vitesses des particules présentes, on pourrait prédire ce qui se passerait. Il y a eu une illusion, qui a duré pendant un temps assez considérable et qui a fait penser que la physique pouvait être non seulement modélisée, mais qu'en fait, on avait attrapé la réalité, et cette réalité était à la limite déterministe.

Thibault Damour : Tout à fait. Et finalement, ce n'est qu'à la fin du XIXe siècle et au début du XXe qu'un certain nombre de nuages noirs se sont accumulés, concernant les deux aspects que tu viens de relever : le caractère parfait du déterminisme, et le caractère absolu de l'espace. Les premiers doutes sont arrivés à la fin du XIXe siècle. Bon, d'abord, c'est Planck et les mystères du corps noir : quand on chauffe un corps et qu'on le maintient en équilibre thermique, quelle est la quantité d'énergie lumineuse qui rayonne dans l'espace autour de lui ? Ce simple problème posait un paradoxe épouvantable à la mécanique classique.

Alain Connes : On verra que ce genre de paradoxe n'a pas effrayé les physiciens du XXe siècle, loin de là. Mais en tout cas, disons qu'il y avait une crise assez grave qui s'était produite, effectivement à partir du moment où l'on essayait de comprendre le rayonnement du corps noir, mais on peut dire aussi le rayonnement qui nous vient de l'étoile la plus proche, le Soleil.

Thibault Damour : Oui, bon, toute la théorie du rayonnement, il était clair qu'il fallait la refaire à zéro, à cette époque, l'existence des raies spectrales, aussi, c'est-à-dire qu'effectivement les étoiles n'émettent pas une lumière quelconque mais que l'on voit des raies particulières, en absorption ou en émission, que la lumière émise par les atomes ne soit pas un continu de fréquences mais contienne des fréquences particulières, tout ça était très mystérieux et la lumière a commencé à venir[2] à partir de 1900 quand Planck, puis des générations entières de physiciens après lui, se sont attaqués au problème de comprendre la mécanique de l'atome. Et là, pour comprendre ça, ils ont été obligés non pas de remettre en cause la notion d'espace, puisqu'ils pouvaient présupposer la même notion d'espace newtonien, et même sans aucun effet lié aux grandes vitesses des particules pendant longtemps. Donc ils ont modifié l'autre aspect, qui est le déterminisme de la mécanique dont tu parlais, qui est le fait que la matière n'est pas représentée comme des points massiques dans un espace à trois dimensions mais par des choses plus floues. Il a compris que le fait d'introduire une nouvelle constante de la nature, cette constante de Planck qui mesure cette quantification de l'énergie, par tranches $h\nu$ où h est la constante de Planck, il a compris, et c'était pour lui un saut conceptuel dans l'inconnu parce qu'il n'avait pas à remettre en cause la notion d'espace à ce moment-là. Mais, purement mathématiquement, il s'est dit "j'ai introduit une nouvelle constante dans la physique (la constante de Planck), or, il existe la vitesse de la lumière, il existe la constante de Newton, et dès 1905, au moins dans un livre, et j'ai vérifié que c'était dans un livre, mais je crois aussi dans un article, il a dit "en jouant avec ces constantes, je peux faire d'autres choses, et en particulier, je peux faire une longueur caractéristique", et il a trouvé une longueur de 10^{-33} cm.

Alain Connes : Ce qu'on appelle maintenant longueur de Planck.

Thibault Damour : Et c'est vraiment lui qui l'a trouvée. Ce n'est pas parce qu'elle est faite avec la constante de Planck, c'est parce qu'il l'a trouvée.

2. sic !

Alain Connes : D'accord.

Thibault Damour : Et là, peut-être, je ne connais pas l'allemand, et là, sans doute, il n'a pas tout de suite formalisé ça, et il s'est dit “il va se passer des choses là” mais comme c'était quelqu'un de très profond, il a dû se dire “il doit y avoir là quelque chose de profond et l'apparition d'une nouvelle constante dans la physique va changer des choses à la notion d'espace et à la notion de distance.” Mais ça, les choses ont beaucoup changé avant qu'on arrive à conceptualiser en fait, ce qui peut se passer à la longueur de Planck, puisqu'après cette introduction par Planck du discontinu dans la physique, Einstein a émis sa première théorie, qui, d'un certain point de vue, modifie beaucoup la théorie de Newton, mais qui, d'un autre point de vue, ne la modifie pas du tout. C'est-à-dire la grande différence, c'est que Newton pensait l'espace comme absolu, et que cette notion d'absolutisme de l'espace disparaît en 1905 avec la théorie de la relativité restreinte, mais ça remplace l'espace absolu par un espace-temps qui est tout aussi absolu que l'était l'espace de Newton ; il n'y a plus de notion de repos absolu mais finalement, la préexistence du théâtre dont tu parlais, de ce grand théâtre vide qui préexiste à la matière est de nouveau imposée par la relativité restreinte, donc on est dans le règne de l'absolu en 1905.

Alain Connes : Absolument, oui. D'ailleurs, je voulais dire, quand même, c'est vrai que d'un côté, il y a ça, et de l'autre côté, comme Einstein a réactualisé la notion de corpuscule comme transportant la lumière, il y avait un retour à Newton de cette manière-là, sous une certaine forme, puisqu'il y avait eu ce long débat après Newton, sur le caractère non corpusculaire de la lumière, mais finalement, à la même époque, on revenait tout à fait à la même idée.

Thibault Damour : Tout à fait, et dans les exposés de vulgarisation habituels, on a trop tendance à indiquer que les vérités scientifiques arrivent, sont acquises. En fait, il y a beaucoup plus d'inertie, les vieilles conceptions vivent toujours, et on sait qu'à tout moment, le physicien ne connaît pas la vérité, à tout moment, la nature intime de ce dont on parle en physique peut changer du tout au tout, et que finalement, on n'est sûr de rien, en physique.

La conception newtonienne de l'espace donc, ce théâtre préexistant à l'existence des objets, théâtre neutre, vide, plat, a été complètement modifiée en 1915, par Einstein, proposant une nouvelle théorie physique de l'espace, où l'espace, en termes intuitifs, devient mou, n'est plus un objet préexistant à la matière, mais un partenaire dynamique de la matière, puisque l'espace est une entité dynamique, maintenant, il contient des degrés de liberté, c'est un objet physique, qui évolue. L'espace pour la première fois devient quelque chose qui peut évoluer, qui peut avoir une naissance, qui peut avoir un âge mûr, qui peut avoir une mort, et qui est en interaction avec ce qu'il contient.

Alain Connes : Je pense quand même que si on se place, non pas au niveau de l'espace, mais au niveau de l'espace-temps, lorsque tu décris ce caractère dynamique et évolutif de l'espace, lorsqu'on le voit au niveau de l'espace-temps, il disparaît puisqu'on peut très bien essayer de concevoir l'espace-temps comme un tout, et de considérer son évolution simplement comme le passage du temps, un petit peu comme l'idée que si on essaie de deviner ce qu'est par exemple une orange dans un espace à 4 dimensions, il faut se l'imaginer comme étant rien, puis une petite orange, qui grossit qui grossit de plus en plus pour atteindre une certaine taille puis qui ensuite diminue, pour finalement disparaître. Donc ça, c'est une image un petit peu dynamique qui permet de s'imaginer ce qui se passe dans une dimension plus grande. Et il y a quand même toujours cette même idée que, à partir du moment où on considère l'espace-temps, il y a quand même ce cadre, il y a quand même ce théâtre, qui n'en est pas moins, tu disais tout à l'heure "il n'est plus figé", bon, il n'est plus figé, au sens où effectivement, le temps est un paramètre et la forme de la tranche de genre espace va changer avec le temps, mais il n'en est pas moins figé quand même dans sa globalité.

Thibault Damour : Tout à fait, et là, il faut peut-être insister sur le fait que, lié à cette conception newtonienne d'un espace absolu, d'un temps absolu, on croit encore aujourd'hui que le temps est un absolu de la physique, qu'il y a un temps zéro, on parle du Big-Bang dans les modèles cosmologiques. Or effectivement, dans un modèle cosmologique relativiste, le Big-Bang, ça n'est pas un événement, ça n'est pas vraiment un temps qui existe, et on ne peut pas se poser le problème de savoir ce qu'il y a avant, même sans parler du fait que la physique classique s'arrête au Big-Bang, c'est cohérent à l'intérieur de la physique relativiste de dire "le temps a un début" mais il ne faut pas imaginer que le temps naît de rien : on se donne un bloc espace-temps, qui est le cadre qui va permettre de décrire la matière et ce bloc a une frontière naturelle, point à la ligne. Parce que la réalité intime, la façon dont l'être humain perçoit le temps, dans la notion de réalité de monde extérieur et perçue par l'être humain n'a rien à voir avec ce que dit la physique ; la physique a finalement des modèles mathématiques de la réalité, qui sont complètement séparés de la vraie notion de perception intuitive du temps. Donc le problème de poser le Big-Bang comme temps est un faux problème.

Alain Connes : Bien sûr. Et d'ailleurs il y a quelque chose d'extrêmement frustrant dans le modèle tel qu'il est par rapport à l'intuition courante, qui est qu'à partir du moment où on s'imagine que l'espace-temps existe de manière globale, et que notre ligne-univers, par exemple, en tant qu'individu est déjà tracée, on deviendrait complètement fataliste, je veux dire. C'est une vision du monde, de l'évolution, etc., qui est entièrement, comment dire, qui est écrite à l'avance. Finalement à partir du moment où on essaie d'imaginer un espace-temps globalement, c'est excellent comme modèle, mais disons que par rapport aux idées intuitives, comme tu disais, par rapport à la perception intuitive qu'on a du temps, ça apparaît comme étant tout à fait déroutant.

Thibault Damour : Oui, mais je crois que la physique n'aura jamais rien de mieux à offrir, que de toute façon, ce problème du temps intuitif, ce problème, disons, du maintenant, la séparation, pour chacun de nous, qu'il y a un maintenant, par opposition à des choses passées, et par opposition à des événements futurs, ce problème est complètement non résolu et ne le sera jamais.

Alain Connes : Quand tu dis “il ne le sera jamais” on ne peut pas le savoir, je pense... Tu es un petit peu pessimiste, là.

Thibault Damour : Sauf que l'expérience montre que finalement, la physique ne donne que des modèles de la réalité, et qu'à tout moment, on sait que ces modèles vont être remplacés, peuvent être remplacés, et que dans l'histoire de tous ces modèles, jamais finalement, la vraie réalité telle qu'elle est vécue n'est apparue puisque l'image que la physique donne de la réalité est toujours neutre, factice, disons, c'est un modèle, c'est une représentation de ce qui se passe, mais ça n'est pas ce qui est.

Alain Connes : Oui. Je pense qu'on peut aller un petit peu plus loin là-dessus. Je veux dire, avant de parler de l'espace vu par les mathématiciens, je pense qu'effectivement, comme on a vu qu'après Newton, les physiciens avaient eu cette idée que finalement, la physique pourrait être déterministe, je pense que comme on a fait un pas en arrière considérable depuis et comme tu le disais très bien, on en est à donner certains modèles, je pense qu'on pourrait essayer de définir plus précisément quel est le lien entre un modèle et la réalité physique qu'il est censé décrire. Alors j'aimerais prendre une image qui est la suivante : c'est que finalement, la réalité physique, les expériences qu'on fait dans la physique, l'expérience qu'on a quotidiennement en vivant, je les caractériserais comme étant un apport journalier d'informations. C'est-à-dire que chaque jour amène un certain flux d'informations, et que pour moi, le propos, le but de la physique, c'est d'éliminer les informations qui sont sans intérêt. Alors je vais essayer de m'expliquer en termes très simples. Ce que je veux dire, c'est que par exemple, il ne viendrait jamais à l'idée d'un présentateur de télévision, le soir quand il parle au 20 heures, quand il donne les informations, de dire “Demain, le soleil va se lever.”. Pourquoi ? Parce qu'on sait que c'est automatique, c'est un fait qu'on a remarqué, on a remarqué que c'était répétitif, que ça se produisait, et finalement je veux dire, c'est une information qui est sans intérêt parce que justement, elle fait partie d'un modèle qui est parfaitement admis, qui est un modèle de la physique, on pourrait dire, c'est un modèle élémentaire qui est parfaitement admis par tout le monde, et donc comme il est parfaitement admis par tout le monde, la quantité d'information qu'il donne a été codée une fois pour toutes, elle a été codée dans ce modèle et elle réduit les informations que nous captons dans la journée aux informations qui, elles, sont originales, qui font vraiment partie du flux d'informations nouvelles. Alors la manière dont j'aimerais présenter justement la physique, c'est, justement, la possibilité de capturer un nombre tout à fait considérable d'informations, comme par exemple qu'il va y avoir une éclipse de lune tel jour, etc., et de les coder de telle sorte qu'elles soient codées par des lois simples, c'est d'ailleurs pourquoi on insiste sur la simplicité, et quand je parle de simplicité, je ne parle pas en termes esthétiques, je parle vraiment au niveau quantité d'information, comme on parle de quantité d'information pour un ordinateur, etc., le nombre de bits d'information qu'il faut avoir pour communiquer le message. Et donc je pense que maintenant, on est arrivé à peu près à la conception suivante, tu me diras si tu n'es pas d'accord mais... à la conception qui consiste à dire qu'on ne pourra jamais réduire la quantité d'information qui nous est fournie par la réalité extérieure, qui nous est fournie par la Nature, qui nous est fournie par l'Univers, on ne pourra jamais la réduire à zéro, au sens où, justement, la physique n'est pas un système déterministe qui fait que, si l'on connaissait tout le passé, on arriverait à prédire l'avenir, mais par contre, on arrive à réduire cette quantité d'information, ce flux d'information nouveau, à le réduire à une quantité de plus en plus petite, et finalement, cette originalité qu'apporte le passage du temps, elle est due en partie bien sûr à la mécanique quantique, elle est due en partie au fait qu'on a l'indéterminisme dans la mécanique quantique mais elle est due aussi au fait que les équations qui gouvernent même la mécanique soi-disant classique et déterministe sont en général des équations qui sont hyperboliques, et qui ne permettent pas justement, de prédire vraiment, de manière précise, ce qui va se passer.

Thibault Damour : Ce modèle, pour faire sentir ce qu'il y a de nouveau dans la mécanique quantique, cette originalité que le temps apporte, ça fait sentir aussi, encore plus violemment, l'incompatibilité fondamentale entre la mécanique quantique, dont non seulement les descriptions usuelles, mais même la façon de penser l'interprétation, a besoin d'un temps qui s'écoule, a besoin de choses qui se passent dans un certain temps, et la nature justement fictive et illusoire du temps, dans la théorie de l'espace-temps einsteinien, où l'espace-temps est donné comme bloc, et où il n'y a pas de maintenant, où il n'y a pas de présent, il n'y a pas quelque chose qui se passe. Donc ici, on voit bien déjà qu'à ce niveau conceptuel, il semble y avoir incompatibilité entre la mécanique quantique et la relativité générale, et tout ça est encore renforcé si on revient à ce qu'avait prévu Planck il y a longtemps, c'est-à-dire que si l'on combine purement, comme un enfant combine des legos, si on combine le petit lego qui est la constante de la mécanique quantique avec le petit lego qui est la constante de la gravitation, on construit une petite longueur fondamentale, 10^{-33} cm, et là, toute la physique montre très clairement que si on arrivait à essayer de mesurer des régions de l'espace assez petites pour contenir des dimensions de l'ordre de 10^{-33} cm, alors là, on ne pourrait avoir ni la relativité générale, ni la théorie quantique, on ne peut pas cerner un point de l'espace à mieux que 10^{-33} cm près, il faut avoir autre chose.

Alain Connes : Ce que ça m'évoque, si tu veux, c'est qu'en fait, un problème qui me semble être très intéressant, est qui est l'idée un petit peu préconçue que l'on a, c'est un a priori, qui est que l'espace, quel qu'il soit, le modèle que l'on va s'en faire va toujours tourner autour de la théorie des ensembles, c'est-à-dire finalement, cette idée que, un petit peu par éducation finalement, puisque c'est comme ça qu'on nous apprend les mathématiques, un espace est nécessairement un ensemble de points. Alors je crois qu'on va essayer de réfléchir là-dessus et disons la question que l'on peut décemment se poser, on peut se la poser d'une part à un niveau philosophique : "est-ce qu'un point de l'espace est quelque chose de bien défini ?". Mais on peut surtout je crois se la poser au niveau des modèles, et je pense que c'est comme ça que je préfèrerais aborder le problème, non pas en essayant de réfléchir sur savoir si l'espace est formé de points ou pas, parce qu'au fond, ça, ça présuppose l'existence d'une notion bien définie de l'espace en dehors d'un modèle, mais d'un espace physique bien réel. Et par contre, je préfère me poser la question au niveau des modèles, donc, et de savoir si on peut arriver à faire des modèles intéressants, qui soient des modèles mathématiques, de l'espace, et qui ne s'appuient plus sur l'idée que l'espace est nécessairement formé de points, est nécessairement un ensemble. Alors je crois que si on veut essayer de comprendre cette question, il faut commencer par analyser, au fur et à mesure du développement des mathématiques, comment on en est arrivé, avec finalement la théorie des ensembles, avec Cantor, comment on en est arrivé à tout essayer de formaliser en terme d'ensembles. Alors je ne propose pas de rejeter les ensembles à la poubelle, bien entendu, ce n'est pas du tout mon idée, mais ce que je propose de faire, c'est de libérer la notion d'espace de ce carcan qui lui est imposé, lorsqu'on lui impose d'être un ensemble. Alors donc ce que je voudrais expliquer, c'est d'abord comment cette notion d'ensembles, de théorie des ensembles, a envahi les mathématiques au point d'empêcher de considérer un espace autrement que comme un ensemble, et ensuite, comment en fait la physique quantique a libéré cette notion, pour autant que la mécanique classique soit concernée.

Alors bon, c'est vrai que la notion d'ensemble, la théorie des ensembles a permis de formaliser les mathématiques à un point tel qu'elle a même engendré la maladie du formalisme, je dirais, c'est-à-dire à un point tel qu'elle a fini par faire croire qu'on pouvait oublier que les mathématiques avaient à voir avec une certaine réalité, penser que c'était un jeu, comme un petit peu comme un jeu d'assemblage, donc, c'est ce qu'on appelle un formalisme, qui consistait en un certain nombre de propositions supposées vraies, qu'on appelle des axiomes, un certain nombre de règles grammaticales, qui sont des règles d'assemblage des propositions, d'un ensemble de règles logiques qui permettent d'en déduire d'autres propositions, et ce qu'on appelle donc le formalisme, c'est ce qui conduit à essayer de déduire des théorèmes uniquement par un procédé qui est pratiquement automatique, en tout cas qui est vérifiable : on peut savoir si oui ou non une démonstration est correcte ou pas. Alors la théorie des ensembles a contribué à cela en particulier, et elle a contribué aussi à faire penser en général la notion d'espace sous cette forme-là. On ne peut pas dire que la théorie des ensembles soit une théorie au sens usuel, au sens où elle n'a pas d'implication en général dans les mathématiques courantes, on ne peut pas dire que les subtilités qu'elle renferme ait des implications vraiment importantes dans les mathématiques courantes, mais il est vrai que toutes les mathématiques sont formulées en ces termes-là. Alors, si on veut maintenant, justement, analyser un espace, on s'aperçoit que la manière dont l'espace intervient dans la théorie physique qui est sans doute la plus élaborée, hormis la relativité générale, la théorie des champs, l'espace n'intervient pas du tout pour autant que l'on s'intéresse aux particules libres. C'est ce que je disais tout à l'heure. Là intervient seulement l'espace des impulsions et disons, même, les champs sont paramétrés par des points de l'espace, mais ce sont simplement des paramètres muets, ce sont comme des indices, on pourrait leur donner n'importe quel autre nom, cela n'aurait aucune importance. Par contre, un espace intervient au moment où on écrit les interactions, et il intervient au moment où, finalement, je crois qu'on peut réexprimer le principe de localité des interactions de manière plus économique, et il me semble que lorsqu'on a atteint ce point-là, on se rend compte beaucoup plus facilement qu'il y a cette dualité qui a toujours existé, qui est un peu comme la dualité entre Leibniz et Newton, qui est la dualité entre algèbre et géométrie. Alors géométriquement, on arrive à avoir une intuition visuelle simple des choses, et une fois qu'on les traduit algébriquement, c'est un petit peu ce qu'a fait Descartes, lorsqu'il a pris les coordonnées cartésiennes, qu'il est arrivé à remplacer les points par des coordonnées, par un certain nombre de coordonnées, lorsqu'on arrive à rendre les choses plus algébriques, on se rend compte qu'on n'est plus limité par une intuition, même une intuition ensembliste des choses et on arrive à manipuler des objets dont l'abord est peut-être plus difficile parce qu'il est plus algébrique et plus abstrait, mais qui permet d'aller plus loin, au sens où il permet justement d'aller au-delà d'une notion intuitive de la notion d'espace, qui elle est basée sur la notion d'ensemble. Donc il me semble qu'il y a un problème qui est posé d'une certaine manière, qui consiste à essayer de comprendre quel est le rôle exact que l'algèbre de l'espace, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions, des coordonnées sur l'espace joue, dans la physique, comme la physique des particules élémentaires, ou la relativité générale, et d'arriver à octroyer à cette algèbre une flexibilité plus grande, une liberté plus grande, pour éventuellement répondre au besoin que l'on ressent, qui est celui d'avoir ce côté un petit peu flou de la notion de point, lorsqu'on se place à l'échelle qui va apparaître au niveau de la gravité quantique, qui est l'échelle de Planck. Je pense pouvoir défendre avec force l'idée suivante, qui est que finalement, lorsque les gens font, au Cern, les expérimentateurs, font des expériences sur les particules élémentaires, découvrent des particules nouvelles, essayent de simplifier leurs données expérimentales en créant des modèles etc., ce qu'ils donnent aux mathématiciens, c'est un cryptogramme, et un cryptogramme qu'il faut arriver à déchiffrer, mais pour le déchiffrer, je pense qu'on aurait tort d'essayer à toute force d'avoir une idée préconçue de ce qu'est l'espace-temps, et d'essayer de faire cadrer les données de ce cryptogramme avec des données classiques. Et donc le point de vue que je voudrais défendre, c'est que justement il faut se donner une certaine liberté, à la fois sur ce qu'est l'espace, et surtout sur ce qu'est la géométrie différentielle, donc c'est pour ça, en partie, que j'ai essayé de développer cette géométrie différentielle non-commutative, pour avoir plus de liberté pour déchiffrer le cryptogramme que nous donnent les expérimentateurs. Ces modèles finalement nous renseignent sur la structure de l'espace, ou de l'espace-temps comme on voudra, à une échelle qui est de l'ordre du 10 millionième de milliardième de centimètre. Donc c'est une échelle incroyablement petite et c'est une échelle à laquelle il faut bien se rendre compte que la vue ne sert à rien. Donc nos instruments de perception ne sont plus notre organe visuel, nos instruments de perception sont un modèle, et le dialogue entre ce modèle et l'expérimentation. Et il faut bien se rendre compte que donc notre perception de l'espace à ce niveau-là ne se fait plus à travers des images que l'on pourrait montrer, on pourrait montrer bien sûr des images d'accélérateur où l'on voit des positrons ou des électrons qui se déplacent dans un champ électromagnétique, ce n'est pas comme ça qu'il faut penser, il faut simplement se reculer un petit peu, et regarder le modèle tel qu'il a été systématisé, tel qu'il a été obtenu par les physiciens, le paradigme actuel.

Thibault Damour : Plus généralement, donc, admettons que la physique a accumulé un nombre effrayant, énorme de données, et qu'on essaye maintenant, on a ce cryptogramme et on essaye de l'interpréter. Est-ce que tu penses qu'un jour, on saura la vraie nature de l'espace ? Quelle est ta position philosophique du point de vue de savoir quelle est la connaissance que l'on peut *obtenir* de l'espace ?

Alain Connes : Tout à fait. Bon alors, disons que mon point de vue philosophique, d'abord, je crois que le problème se pose très tôt parce qu'on nous apprend ce que sont les nombres réels. Donc, le mathématicien se familiarise avec les nombres réels. Et il s'aperçoit assez vite que lorsqu'on donne un nombre réel, eh bien, on doit donner toutes ses décimales. Et en physique, on n'utilise jamais, comme tu le disais à propos de la longueur de Planck, je veux dire, la précision expérimentale est toujours limitée et sera pratiquement limitée sans autre possibilité à un nombre de décimales que l'on pourrait donner comme étant une trentaine ou une quarantaine de décimales, et je pense que l'on pourrait arriver à démontrer, pour des raisons physiques relativement simples, que certaines quantités, on n'arrivera jamais à les connaître avec une précision infinie. L'impression que j'ai, c'est qu'on a réussi à attraper une certaine partie de la réalité, mais cette partie a peu à voir, effectivement, avec ce qu'on pourrait appeler une réalité physique.

Thibault Damour : Je suis assez d'accord avec ça : le fait que la physique finalement n'attrape jamais la réalité, qui restera, quelle que soit la succession des modèles successifs de plus en plus, ouvrez les guillemets, "précis" que la physique donnera de la, ouvrez les guillemets, "réalité", il restera toujours une distance, et un flou entre les deux. Mais j'aimerais insister sur le fait que, moi en tant que physicien je suis censé parler plus de la réalité matérielle, extérieure à nous que toi, que là aussi, il y a un... comme on dit en franglais, un "gap", un trou énorme, et je tiens à insister là-dessus, entre la réalité au sens existentiel, c'est-à-dire le fait d'être, d'être ici maintenant, de parler sous la lumière des projecteurs ici, ce soir, telle journée de telle année, vraiment vécu, le fait d'être inséré dans l'être, et le fait d'avoir une connaissance d'objet physique. Pour moi la physique, même si elle se raffine de plus en plus, et je pense qu'elle ne se raffinera jamais jusqu'à avoir une précision infinie, il y aura toujours cette limite, mais que ça, finalement, n'est pas très intéressant. Le fait que la physique puisse avoir une limite asymptotique qui soit différente du maximum d'informations que l'on puisse espérer avoir de la réalité m'intéresse moins que ce trou métaphysique énorme entre le fait que même si on a la physique du vingt-cinquième siècle la plus parfaite possible, elle laissera le trou aussi grand entre ce que Newton savait de la réalité et ce qu'aujourd'hui on croit savoir de la réalité, qui est que de toute façon, la réalité dans ce qu'elle a de plus réel est complètement non touchée par la physique.

Le premier conférencier de la matinée est Alain Connes qui arrive tout droit de Boston pour nous parler de ***Quelques avatars de l'isomorphisme de Thom***

Mon but aujourd'hui est d'essayer d'expliquer un théorème, qui est une résolution partielle de la conjecture de Novikov pour une classe de groupes qui est une classe très large, qui est la classe des groupes hyperboliques. Ce que je voudrais faire, c'est énoncer le théorème, expliquer en quel sens la démonstration du théorème est basée sur la géométrie différentielle non-commutative, et ensuite essayer d'expliquer, assez brièvement, comment l'isomorphisme de Thom a joué un rôle essentiel dans l'élaboration de ce résultat.

Mais en fait, je vais commencer par parler du problème d'invariance à homotopie près des classes de Pontryagin et en fait, je vais commencer par parler de travaux de Thom, puisqu'il est clair qu'au départ, la théorie du cobordisme de René Thom implique pratiquement qu'il existe une formule pour la signature d'une variété, orientée de dimension $4n$, uniquement en fonction d'un polynôme qui invente les classes de Pontryagin. La raison pour cela, ce sont les propriétés élémentaires de la signature et le fait que, on connaît, justement grâce à la théorie du cobordisme de René Thom, on connaît exactement les classes de cobordisme de variétés et d'autre part, le problème de la signature est un problème rationnel, c'est-à-dire que la torsion s'élimine.

Donc en fait, on a un théorème, qui est le théorème de signature de Hirzebruch, et qui s'énonce sous la forme suivante : il existe donc un polynôme universel pour chaque n (ce sont toujours des polynômes homogènes dans les classes de Pontryagin) $L_1 = \frac{1}{3}p_1, L_2 = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$ et le polynôme général est déterminé par la règle suivante qui est que, si on considère la somme de $1 + L_1 + L_2 + \ldots$, cette somme-là est une fonction mulitplicative de $1 + p_1 + p_2 + \ldots$ et d'autre part, le coefficient des puissances de p_1 qui apparaît ici est le même que celui qui apparaît dans la fonction $\dfrac{\sqrt{t}}{\tanh \sqrt{t}}$, ce qu'on vérifie en regardant les espaces projectifs.

Le théorème de Hirzebruch dit la chose suivante : la signature d'une variété M est

Transcription de la vidéo d'Alain Connes sur Carmin visionnable ici :
https://www.carmin.tv/fr/video/quelques-avatars-de-lisomorphisme-de-thom
(Denise Vella-Chemla, septembre 2022).
Se reporter également au cours au Collège de France d'Alain Connes de l'année 88-89 dans cette page
https://www.college-de-france.fr/chaire/alain-connes-analyse-et-geometrie-chaire-statutaire
et à l'article trouvable dans la page de Publications du site officiel d'Alain Connes ici
https://alainconnes.org/wp-content/uploads/novikov-1.pdf
ou à l'article de référence *Conjecture de Novikov et groupes hyperboliques* de A. Connes et H. Moscovici, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., vol. 307, no. 9, pp. 475-480, 1988, ISSN: 0249-6291.

donnée par l'évaluation du polynôme L, qui a le bon degré, sur la classe fondamentale de M :

$$\mathrm{Sign}(M) = \langle L(M), [M] \rangle$$

D'autre part, il y a une remarque, qui est due à Cahn, et qui dit qu'il n'y a pas d'autre combinaison des classes de Pontryagin qui donne un invariant rationnel pour la variété, c'est-à-dire que les classes de Pontryagin, d'après un théorème de Novikov, sont des invariants d'homéomorphismes. Mais par contre si on cherche des combinaisons d'autres polynômes en fonction des classes de Pontryagin qui sont invariants d'homotopie, ces polynômes-là sont les seuls.

Alors si on considère maintenant des variétés qui ne sont pas simplement connexes, donc si on part d'une variété M, en général bien sûr, $\pi_1(M)$ n'est pas trivial, on peut former des combinaisons de classes de Pontryagin mais on peut aussi invoquer une classe de cohomologie ω qui appartient à la cohomologie du groupe Γ ; ici, je note ça $H^*(B\Gamma, \mathbb{C})$ mais bien sûr, c'est la cohomologie de groupe, il s'agit de cocycles de groupes si vous voulez. Et à ce moment-là, on peut, chaque fois qu'on prend une variété qui a pour groupe fondamental Γ, on a automatiquement une application classifiante ψ qui va de M dans $B\Gamma$ et on peut former l'expression suivante, qui est une forme plus élaborée de la signature, que je noterai comme ça :

$$\mathrm{Sign}_\omega(M) = \langle L(M)\psi^*(\omega), [M] \rangle$$

en appelant ω un élément de la cohomologie de $B\Gamma$. Cette signature sera l'évaluation sur la classe fondamentale de M du produit *(montrant $L(M)$)* ici, je ne prends pas un seul polynôme L, mais je prends la somme non homogène des polynômes L pour les divers degrés, et je multiplie ça par l'image inverse de ω par l'application classifiante ($\psi^*(\omega)$) et ensuite on évalue sur la classe fondamentale de M *(c'est le $[M]$)*.

Alors Novikov a conjecturé que ces nombres-là (*encadrant la formule ci-dessus*) qui sont des nombres réels associés à une variété orientée M, pas forcément de dimension $4n$ (parce que la variété de dimension $2n$ donne des résultats intéressants), que ces nombres-là étaient des invariants d'homotopie.

Alors, ce que je veux énoncer et expliquer aujourd'hui, c'est le théorème suivant :

Théorème : (H. Moscovici et A. Connes)
$\mathrm{Sign}(M)$ *est un invariant d'homotopie dès que (le groupe fondamental)* Γ *est un groupe hyperbolique.*

Alors les groupes hyperboliques sont une classe remarquable de groupes discrets de présentation finie, dont un très grand nombre de propriétés ont été démontrées par

Mikhaïl Gromov. Et une propriété très importante de ces groupes, si vous voulez, c'est vraiment une classe de groupes qui va bien au-delà des classes de groupes pour lesquels la conjecture de Novikov avait été démontrée, parce que ce sont des groupes pour lesquels l'hyperbolicité est une définition combinatoire. Alors je vais en donner une définition, il y a un tas de définitions équivalentes, mais il y a une définition qui est la suivante. Ce sont des groupes de présentation finie, donc ce sont des groupes fondamentaux de variétés. On peut toujours choisir une variété V, de dimension 4 si on veut, telle que son groupe fondamental soit égal à Γ : $\pi_1(V) = \Gamma$. Et à ce moment-là, quelle que soit la réalisation de V qu'on choisit, l'hyperbolicité se lit sur V, V est compacte, on peut la doter d'une structure riemanienne, et l'hyperbolicité se lit de la manière suivante : elle se lit en disant que *(s'interrompant)*. Donc on considère et on choisit sur V un chemin dans V (une application de S_1 dans V), aussi différentiable qu'on veut, mais qui est telle qu'elle définisse un élément trivial dans π_1. À ce moment-là, ce qu'on demande, c'est que (évidemment, elle borde un disque), mais ce qu'on demande c'est qu'il y ait une inégalité isopérimétrique, c'est-à-dire qu'elle borde un disque D dont la surface soit majorée par une constante que multiplie la longueur du chemin γ.

$$\mathrm{Surf}(D) \leqq C \,\mathrm{long}(\gamma).$$

C'est bien sûr une propriété qui est indépendante du choix du chemin, c'est une propriété pour les chemins très longs ; pour les petits chemins, c'est évident. C'est une propriété qui se lit sur la métrique des mots, et disons que la seule propriété que je voudrais retenir de ces groupes-là, c'est qu'ils sont génériques, au sens où si on donne n générateurs et m relations, et si on donne une borne l sur la longueur des relations, si on compte la proportion des groupes hyperboliques, elle tend vers 1.

Donc en fait, si on choisit au hasard générateurs et relations, on tombera sur un groupe hyperbolique. Ce que je veux absolument expliquer en détail, c'est peut-être moins les détails de la démonstration du théorème, que la raison pour laquelle ce théorème invoque la géométrie non-commutative[1]. En fait, c'est presque évident au départ : la raison est qu'on s'intéresse à la signature. Lorsqu'on regarde la signature ordinaire, c'est une forme quadratique et si on travaille modulo la torsion ce qui est le cas ici, ça n'est pas très difficile de regarder ce que c'est qu'une forme quadratique, une forme quadratique réelle bien sûr. Maintenant le problème, c'est qu'on doit travailler avec une information plus grande. C'est-à-dire que la seule signature ordinaire donnera seulement la combinaison avec ω la classe triviale. Donc on doit pouvoir introduire des classes arbitraires. Et donc, on doit pouvoir utiliser d'une certaine manière le fait que la situation est équivariante par rapport au groupe Γ. Bien sûr, elle n'est pas équivariante par rapport au groupe Γ sur la variété M. Mais elle devient équivariante sur le groupe Γ lorsqu'on regarde le revêtement de M qui

[1] Sourit à cette idée.

est groupe fondamental Γ *(écrit au tableau* $\begin{array}{c}\widetilde{M}\\ \downarrow \pi\\ M\end{array}$). Et à ce moment-là, ce qu'on doit faire, c'est travailler non plus sur M mais sur $\widetilde{M}$ en gardant en tête qu'on a toujours le groupe Γ qui agit.

Alors la première chose qu'on va faire, c'est essayer de définir une signature équivariante d'une certaine manière, non pas de M mais de $\widetilde{M}$, et on va se demander où va habiter cette signature-là. Alors on va voir qu'il va y avoir deux définitions de cette signature. Ces deux définitions vont faire intervenir, comme on y est familier en topologie, un changement de l'anneau de base, c'est-à-dire qu'au lieu de prendre les nombres complexes et de travailler avec les nombres complexes, on va toujours travailler avec l'anneau qui est l'anneau du groupe *(écrit* $\mathscr{A} = \mathbb{C}\Gamma$*)*. Comme on ignore la torsion, en fait, on va travailler avec l'anneau du groupe à coefficients complexes. Et on va voir très vite pourquoi le fait qu'on s'intéresse à des formes quadratiques sur cet anneau de base impose pratiquement, très vite, d'étudier les C^*-algèbres, et de s'occuper d'une C^*-algèbre, et pourquoi ça va donner l'outil de base.

Alors maintenant, ce qui se passe, c'est qu'il y a deux définitions, il y a deux manières d'envisager la signature équivariante.

Je vais d'abord décrire la première.

La première provient de la théorie de la chirurgie équivariante : on considère une triangulation de M, on remonte cette triangulation à $\widetilde{M}$, et on obtient à ce moment-là un complexe de modules $\varepsilon_0 \xrightarrow{d} \varepsilon_1 \xrightarrow{d} \varepsilon_2 \dots$ (avec une différentielle d) jusqu'à la dimension de M, et tous ces modules, au lieu d'être des espaces vectoriels de dimension finie deviennent des modules sur l'algèbre $\mathscr{A}$, et deviennent des modules libres, ou au moins des modules projectifs de type fini. On fait une espèce de chirurgie algébrique sur ce complexe-là et on arrive, sans changer l'invariant de signature, à remplacer ce complexe-là par un complexe court, par un seul élément H, (j'oublie de dire qu'on est obligé bien sûr de garder l'information qui est donnée par le fait que M est une variété, c'est-à-dire qu'on a un cycle fondamental, ce qui permet de parler d'une dualité de Poincaré. Alors cette dualité de Poincaré, quand on assemble le complexe d'une bonne manière, donne H un élément de l'ensemble des matrices suffisamment grandes $M_q(\mathscr{A})$ avec $\mathscr{A} = \mathbb{C}\Gamma$, un peu comme un élément d'un groupe de Witt. C'est-à-dire que cet élément est auto-adjoint d'une part ($H = H^*$), c'est ce qui définit la forme quadratique, et d'autre part, il n'est pas du tout uniquement déterminé, modulo les matrices auto-adjointes triviales, donc modulo certaines opérations élémentaires, mais surtout modulo les matrices auto-adjointes de la forme $\begin{bmatrix} 0 & X \\ X^* & 0 \end{bmatrix}$.
On a une addition naturelle dans le groupe etc. La première chose que l'on obtient

comme un invariant, par cette théorie-là, c'est une forme quadratique, qui est donnée, à équivalence près des formes quadratiques.

La deuxième forme de la signature, c'est une forme beaucoup plus opératorielle, c'est une forme qui remplace le fait qu'on prend une triangulation de la variété et donc qu'on utilise sa finitude par des opérateurs elliptiques, ce qui est équivalent, mais ce qui est un petit peu plus facile à manier d'une certaine manière. Donc la deuxième forme consiste à considérer l'espace $\widetilde{M}$ et sur cet espace, l'opérateur $\widetilde{D}$ qui est l'opérateur de signature. Alors si on regarde cet opérateur de signature, c'est un opérateur qui est elliptique sur $\widetilde{M}$, et à un tel opérateur... Bon, il y avait, par exemple, le théorème d'Atiyah-Singer pour les revêtements, mais ce qu'on veut faire ici, c'est qu'on veut vraiment avoir un élément de K-théorie de l'algèbre $\mathscr{A}$, si on a un élément du groupe de Witt. Donc en fait, on est obligé de faire la chose suivante : on va construire un élément e, qui va jouer le rôle de la signature, de K_0, de K-théorie, $[e] \in K_0(\mathscr{A} \otimes R)$, non pas de $\mathscr{A}$[2]... (c'est assez facile de voir que l'anneau $\mathscr{A}$ va avoir une K-théorie triviale) mais de $\mathscr{A} \otimes R$, et ce produit tensorisé par un anneau R qui est universel, joue presque le rôle de l'équivalence de Morita. Bien sûr, on n'aura pas équivalence de Morita car si c'était le cas, on aurait $K_0(\mathscr{A} \otimes R) = K_0(\mathscr{A})$. Cet anneau R, c'est l'anneau des matrices infinies $[a_{ij}]$ telles que les a_{ij} décroissent plus vite que tout inverse d'un polynôme, lorsque i et j tendent vers l'infini. En fait, il y a une autre manière de l'écrire, R est l'algèbre des noyaux régularisants sur la variété M, $R = [a_{ij}] = C^\infty(M \times M)$. Et cette seconde écriture $R = C^\infty(M \times M)$ est indépendante du choix de M. Si on prend des valeurs propres du Laplacien, on s'aperçoit que cette algèbre-là des noyaux régularisants est indépendante du choix de la variété, et est égale à l'anneau des matrices $[a_{ij}]$.

Alors comment a-t-on abouti à un élément de $K_0(\mathscr{A} \otimes R)$? Simplement en construisant une paramétrix pour D. Alors ce qu'on fait, on écrit qu'il existe une paramétrix pour D notée $\widetilde{D}Q$, et il existe une paramétrix Q qui est Γ-invariante. Donc on choisit Q, Γ-invariante, et on écrit qu'on a $S_0 = \widetilde{D}Q - 1$ et $S_1 = Q\widetilde{D} - 1$ qui sont des opérateurs qui, si on était dans le cas compact, seraient simplement des opérateurs régularisants, mais ici, on n'est plus dans le cas compact, mais Γ-compact si vous voulez, et ce qu'on a, ce ne sont pas des éléments de R mais des éléments de R tensorisé par $\mathbb{C}\Gamma$ parce qu'on a le groupe Γ qui est là. Donc en fait, ce qu'on va obtenir avec ces deux éléments, on construit le projecteur e par la formule suivante : *(dit à part lui)* (bon alors là, je ne sais pas si je vais m'en souvenir, donc je préfère regarder dans mes notes, sinon, je vais écrire quelque chose de faux) :

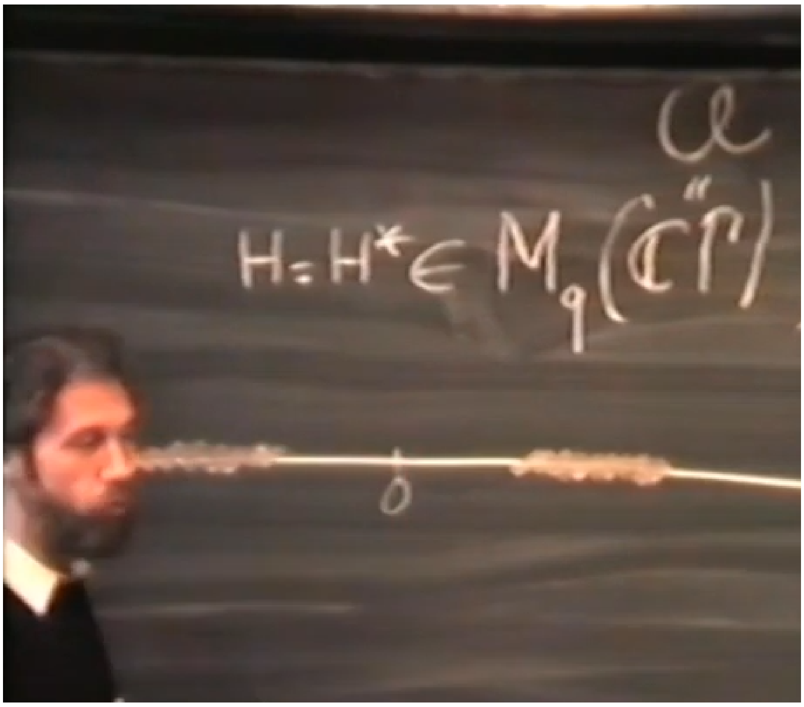
$$e = \begin{bmatrix} S_0^2 & S_0(1+S_0)Q \\ S_1 D & 1 - S_1^2 \end{bmatrix}$$

Donc c'est une petite formule algébrique, qui vient simplement d'une suite exacte en... Il y a des formules équivalentes à celle-là. Le fait que cette formule soit exactement

[2] $\mathscr{A} = \mathbb{C}\Gamma$.

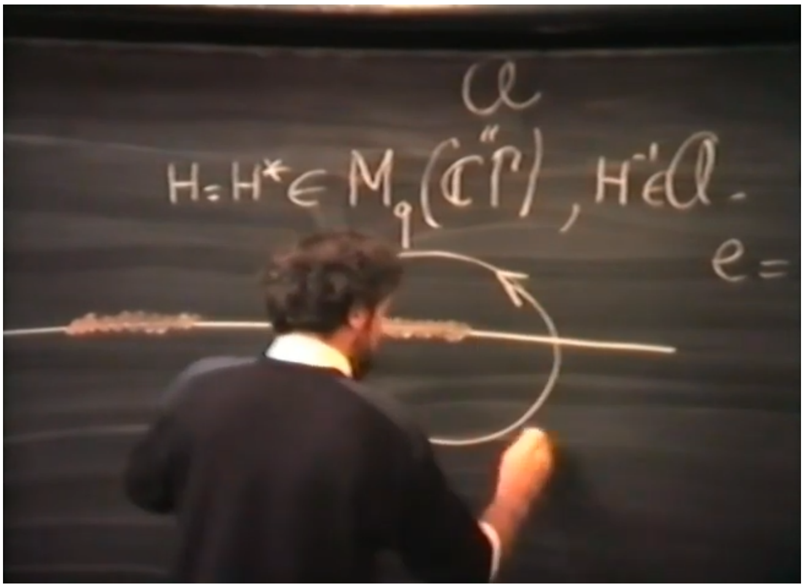
comme ça n'est pas très important. On arrive à construire un projecteur, une classe de K-théorie, uniquement déterminé à partir de l'opérateur $\widetilde{D}$ de signature sur $\widetilde{M}$ et à partir d'une paramétrix.

Alors, on a ces deux formes-là. On va voir que la forme 2, est une forme extrêmement importante pour faire des calculs, est une forme extrêmement importante pour obtenir des formules, parce que finalement ce qu'on veut, c'est non pas avoir un invariant dans le groupe abstrait comme le groupe de Witt, mais on veut un nombre. On veut le nombre qui est donné par la formule de Novikov. Donc on va voir que la formule 2 est très pratique pour obtenir un nombre, mais par contre la formule 2 n'est pas invariante par homotopie.



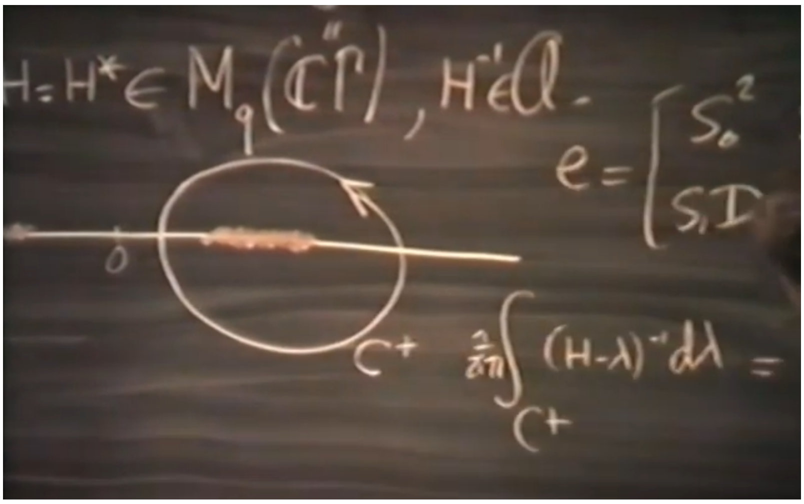
Par contre, la formule 1, elle, est difficile pour obtenir un nombre, mais elle est invariante par homotopie. Donc il est nécessaire d'aller plus loin, pour savoir quelle est la relation entre 1 et 2. Alors si vous avez une forme quadratique dans des cas très simples, cette forme quadratique, pour la classifier, ce que vous devez faire, c'est prendre le nombre de valeurs propres qui sont négatives. Une manière géométrique de voir ça, ça consiste à faire une intégrale de Cauchy, ça consiste à *(dessinant le dessin ci-dessus au tableau)*, on a $H = H^* \in M_q(\mathbb{C}\Gamma)$ (avec $\mathscr{A} = \mathbb{C}\Gamma$), et H est inversible $H^{-1} \in \mathscr{A}$. A priori, on se dirait, l'opérateur H, on va regarder son spectre, comme l'opérateur est auto-adjoint, bon, eh bien, on va dire que son spectre est auto-adjoint, comme il est inversible, il ne contient pas 0, et donc, on va simplement pouvoir faire ça *(il entoure les valeurs propres positives d'un cercle sur lequel il dessine une flèche* *dans le sens horaire, c'est le chemin C).* On fait une intégrale de Cauchy sur un chemin C plus un sur deux pi l'intégrale sur C^+ de $(H-\lambda)^{-1}d\lambda$ *(voir ci-dessous).*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{C^+}(H-\lambda)^{-1}d\lambda = e_+$$

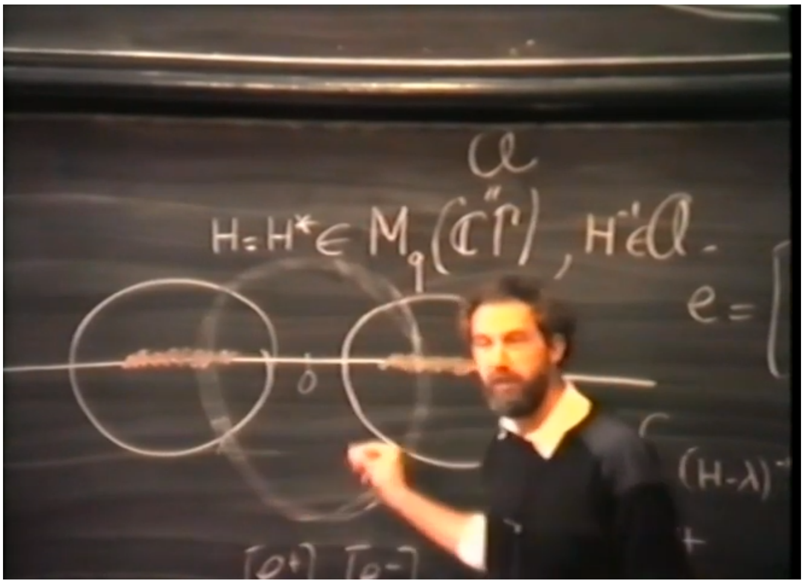


Et ça, ça doit définir un projecteur e_+, de même, on a e_- qui est le correspondant côté demi-plan négatif. Et on devrait avoir que

$$e_+ - e_- = [e]$$



Bon alors, il y a un tas de raisons pour lesquelles ça, c'est faux, a priori, si vous voulez. La première raison, c'est qu'il n'y a pas de K-théorie dans l'algèbre $\mathbb{C}\Gamma$. En général, la K-théorie de $\mathbb{C}\Gamma$ est triviale. La deuxième raison, c'est qu'il est complètement faux, en général, pour les spectres d'algèbres de Banach générales, que le spectre d'un élément auto-adjoint soit auto-adjoint. Si vous prenez $\mathbb{C}\Gamma$, c'est immédiatement faux parce que, par exemple, si vous regardez un élément comme $1 - \frac{1}{2}g$ où g est un générateur du groupe, si vous inversez cet élément, il va avoir une infinité de coefficients non nuls, et donc son inverse ne sera pas dans l'algèbre. Mais si vous regardez une algèbre comme $\ell^1(\Gamma)$, eh bien, à moins que le groupe Γ soit très simple, dans l'algèbre $\ell^1(\Gamma)$, le spectre d'un élément auto-adjoint inversible, en général, ça va être une couronne. Et donc, en général, il sera impossible de passer à travers, et il sera impossible de détecter e_+ et e_- ici. Donc on voit qu'on ne peut pas être aussi naïf que ça, on ne peut pas simplement écrire cette égalité et essayer de l'utiliser.



Ce qu'il faut faire, c'est absolument nécessaire à ce point-là, il faut trouver une algèbre qui contienne $\mathbb{C}\Gamma$ et telle que le spectre d'un élément dans cette algèbre soit auto-adjoint, si l'élément est auto-adjoint, le spectre soit réel. Donc c'est exactement à ce point-là que les C^*-algèbres interviennent. Alors quelle est la C^*-algèbre qui intervient ici. Alors soit $A = C^*(\Gamma)$ la C^*-algèbre de Γ, comment est-elle définie ? On a simplement un espace naturel de Hilbert $\mathscr{H}$ qui est égal à $\mathscr{H} = \ell^2(\Gamma)$. Dans cet espace de Hilbert, on a la représentation régulière de Γ, et donc on peut regarder la fermeture, simplement, de $\mathbb{C}\Gamma$ pour la norme *(il note)* $\overline{\mathbb{C}\Gamma} = A$. Si le groupe était commutatif, ce qu'on aurait obtenu comme ça, ce serait simplement l'algèbre des fonctions continues sur le dual de Pontryagin du groupe. Dans le cas non-commutatif, on a une algèbre, cette algèbre bien sûr n'est plus commutative en général, et ce qu'on voudrait faire, c'est de la topologie sur l'espace en question, bien qu'il ne soit plus décrit par cette algèbre-là, qui n'est plus commutative.

Ce qu'on sait en tout cas, c'est que (c'est un lemme) l'égalité $[e^+]-[e^-]=e$ est vraie dans la K-théorie de A, dans $K_0(A)$.

Une question d'un auditeur : "qu'est ce que A ?". C'est la C^*-algèbre du groupe, c'est la fermeture normique de l'algèbre du groupe dans l'espace ℓ^2. Dans l'espace ℓ^2, on a une norme naturelle, qui est la norme des opérateurs dans le Hilbert, on regarde simplement l'adhérence normique. Et le point de cette adhérence normique, c'est que dans le cas commutatif, si Γ était commutatif, on obtiendrait exactement A égale l'ensemble des fonctions continues sur le dual de Pontryagin de Γ, qu'on note $A = C(\widehat{\Gamma})$. C'est pour ça qu'on prend cette fermeture normique.

Le premier lemme qui est important, c'est que cette égalité que je cherchais tout à l'heure, en fait, elle est vraie, mais elle est vraie dans cette K-théorie, dans $K_0(A)$. Par contre, elle n'est pas vraie dans $K_0(C(\Gamma))$ car même si vous prenez le cas commutatif, même si vous prenez $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ par exemple, $K_0(C(\Gamma))$ sera en général égal à $\mathbb{Z}$ et vous n'aurez pas du tout les éléments qu'il faut pour pouvoir écrire l'égalité.

Une remarque du même auditeur, à laquelle il est répondu : j'utilise le produit tensoriel *algébrique.* Le produit tensoriel $\mathscr{A} \otimes R$ écrit plus haut pourrait être réécrit sous la forme $R\Gamma$: on a cet anneau tensoriel universel R des suites dont les coefficients décroissent très rapidement, pratiquement, ce R, c'est une forme un peu élaborée de M^∞. En K-théorie algébrique, on utilise toujours M^∞ d'un anneau ; ici, c'est un M^∞ qui est un petit peu plus élaboré, au sens où on utilise des matrices à décroissance rapide, mais à ce moment-là, la K-théorie est suffisamment riche, justement, pour contenir ces éléments-là.

Bon, maintenant, j'ai besoin d'un outil, qui est un outil essentiel de topologie différentielle. Mais ou lieu d'écrire cet outil sous la forme géométrique à laquelle on est habitué, je vais écrire cet outil sous une forme algébrique, et je l'appliquerai immédiatement à la situation de trouver un invariant, qui redonne la formule de Novikov.

Alors cet outil de topologie différentielle, si vous voulez, on a l'isomorphisme de Chern, qui permet d'associer à un fibré des classes caractéristiques, et qui ensuite, disons, si on veut obtenir un nombre à partir de ces classes caractéristiques, ce qu'on peut faire, c'est regarder $Ch(E)$ et l'accoupler par exemple avec une classe d'homologie ; cette classe d'homologie, je veux y penser comme étant un courant, un courant de de Rham, dans le cas des variétés. *(Il note)* $\langle Ch(E), c\rangle$ parce que je veux utiliser, non plus seulement la topologie, c'est-à-dire la C^*-algèbre A, mais je veux utiliser une espèce de structure différentielle sous-jacente. Alors, ce que je vais faire, c'est écrire un lemme algébrique, qu'il sera très facile de réinterpréter, de repenser en termes de courant, je vais tout de suite montrer comment, mais qui sera formulé de telle sorte qu'à aucun moment, je n'utiliserai le fait que les fonctions commutent entre elles, que les coordonnées des variétés commutent entre elles. Alors je vais écrire ce lemme. Et au lieu de l'écrire pour tout n, ce qui le rendrait assez incompréhensible, je vais l'écrire seulement pour la dimension 2.

Lemme* ($n = 2$): *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre.* (Pensez par exemple à l'algèbre des fonctions $\mathbb{C}^\infty$ sur une variété (mais elle n'a aucune raison d'être commutative), *et $\tau(f^0, f^1, f^2)$, une fonctionnelle trilinéaire d'éléments de $\mathscr{A}$, telle que (elle vérifie deux conditions très simples)* :

a) $\tau(f^1, f^2, f^0) = \tau(f^0, f^1, f^2)$ (τ est inchangée par permutation cyclique).

La deuxième condition va faire intervenir le lien avec le produit. La première condition ne fait pas intervenir le lien avec le produit. La seconde condition va faire intervenir le lien avec le produit et va généraliser la condition d'avoir une trace. Vous savez qu'une trace est caractérisée par la condition $\tau(f^0, f^1) - \tau(f^1 f^0) = 0$. Alors ici on va avoir plus de termes à mettre, et la condition va donner (la seule condition qu'on vérifie, c'est de ne jamais changer l'ordre des variables) :

b) $\tau(f^0 f^1, f^2, f^3) - \tau(f^0, f^1 f^2, f^3) + \tau(f^0, f^1, f^2 f^3) - \tau(f^3 f^0, f^1, f^2) = 0.$

Alors si ces 2 conditions sont vérifiées, alors, on va pouvoir construire, grâce à cette fonctionnelle-là, un invariant de K-théorie. L'énoncé du lemme est le suivant :

(Fin de l'énoncé du lemme commencé ci-dessus)
Alors l'égalité suivante définit un homomorphisme de $K_0(\mathscr{A} \to \mathbb{C})$.

On part d'une classe de projecteurs, bon disons, d'un projecteur, $e \in M_q(\mathscr{A})$ (donc qui vérifie $e = e^2$) et on lui associe le nombre complexe $\tau(e, e, e)$ (alors, bien sûr, a priori, τ n'était pas défini sur les matrices, mais on prolonge la définition de τ aux matrices, je mets ça entre parenthèses : à chaque fois que j'aurai des produits, je prendrai comme définition que $\tau(a^0 \otimes m^0, \ldots, a^2 \otimes m^2) = \tau(a^0, a^1, a^2)\mathrm{Tr}(m^0 m^1 m^2)$). C'est une manière complètement canonique de prolonger ça aux matrices. Et on vérifie facilement que les propriétés a) et b) restent vraies.

Donc si vous voulez, le point de ce lemme est le suivant : le point, c'est qu'alors qu'une trace définit évidemment un invariant de K-théorie, en associant à chaque projecteur la trace du projecteur, ici, on a une trace d'ordre plus élevé, qui également définit un invariant de K-théorie. Et si vous prenez l'exemple le plus simple, prenons un exemple. Prenons pour $\mathscr{A}$ les fonctions C^∞ sur une variété, l'algèbre commutative des fonctions C^∞ sur une variété, $\mathscr{A} = C^\infty(M)$, et considérons un courant de de Rham C, fermé, de dimension 2. Bon il est clair que le 2 ici n'a rien à faire, mais je le prends simplement pour éviter d'écrire de longues formules. Eh bien, à ce moment-là, on peut poser $\tau(f^0, f^1, f^2)$ égale le courant C évalué sur la forme différentielle $\tau(f^0, f^1, f^2) = \langle C, f^0 df^1 \wedge df^2 \rangle$. Il est immédiat que :

- la propriété a) est équivalente au fait que le courant soit fermé ; elle ne serait pas vraie si le courant n'était pas fermé.

- Et la propriété b), elle, est vraie en général, et elle résulte simplement de la règle de Leibniz de différenciation d'un produit.

Et remarquez une autre chose, c'est que j'aurais pu, dans ce cas-là, écrire une propriété plus forte que a). J'aurais pu écrire l'invariance par tout le groupe symétrique. Mais cette invariance serait cassée dès que je passe aux matrices. Quand je passe aux matrices, je dois faire le produit par la trace du produit des matrices dans l'ordre cyclique, et cette trace n'est pas invariante par des permutations arbitraires, c'est pour ça qu'on se limite aux permutations cycliques, c'est pour ça qu'on est obligé de regarder seulement les permutations cycliques. Alors dans ce cas-là, si on cherche quelle est la flèche de K-théorie, alors lorsqu'un fibré, si vous voulez, est représenté par un projecteur, lorsque vous représentez un fibré par un projecteur, c'est toujours possible bien sûr, le fibré a automatiquement une connexion canonique qui est la connexion grassmanienne, qui est l'image inverse de la connexion sur la grassmanienne. Et si vous cherchez ce que va vous donner la formule que j'ai écrite ici, la formule $\tau(e, e, e)$, eh bien ce que vous obtenez, c'est l'intégrale sur le courant C, de $e\ de\ de$, ou $\langle C, e\ de\ de\rangle$, maintenant on a affaire à des matrices, non plus à des scalaires, et ça, c'est exactement la formule qui donne l'accouplement du caractère de Chern avec le courant C, à une normalisation près bien sûr, parce que ça, ça va donner la courbure de la connexion grassmanienne.

Alors maintenant, donc, on a notre outil. Notre outil, c'est ce qui va remplacer les courants de de Rham. C'est un outil qui a toutes sortes de développements, qui ne me seront pas vraiment utiles pour mon exposé ici, mais si vous voulez, ce lemme est en quelque sorte le point de départ de la cohomologie cyclique. Qu'est-ce que la cohomologie cyclique ? La cohomologie cyclique, ça consiste à reconnaître que dans ce lemme, il y a une cohomologie qui est cachée. Et la cohomologie qui est cachée, c'est qu'en fait cette formule[3], on peut la réécrire $B\tau = 0$, où B est le bord de Hochschild et qu'en fait, on peut négliger les bords, c'est-à-dire qu'il y a une manière triviale de construire des fonctionnelles vérifiant a) et b) et donc qu'on a affaire à une cohomologie, qui est la cohomologie cyclique et qu'ensuite on peut calculer pour les variétés, etc.

Alors quel est le rapport avec ce dont je parle maintenant. Maintenant, on n'a pas affaire à des variétés, on n'a pas affaire à $C^\infty(M)$, on a affaire à l'algèbre $C(\Gamma)$ où Γ est un groupe discret. D'autre part, quelle est la donnée du problème de Novikov ? La donnée, c'était un cocycle de groupe, puisque ce qu'on avait au départ, c'est une donnée de base, qui est le cocycle ω, qui est la classe de cohomologie, comme classe

[3]la formule b) ci-dessus.

de cohomogie sur $d\Gamma$, mais de manière équivalente, on a un cocycle de groupe. Donc on a, si vous voulez,

$$c(g_1, \ldots, g_n) \text{ cocycle de groupe}$$

Donc ce que l'on a, c'est un scalaire, chaque fois qu'on a n éléments du groupe. Alors, ce que je veux faire, c'est à partir d'un tel cocycle de groupe, je veux construire ce qui est derrière-là, au tableau, là, je veux construire une fonctionnelle τ qui vérifie les propriétés a) et b). Alors on a le lemme suivant, qui est complètement élémentaire, mais qui est utile par rapport à ce qu'on veut faire.

Lemme : *Soit c un cocycle de groupe de dimension n, alors l'égalité suivante définit un cocycle cyclique, donc c'est-à-dire une fonctionnelle vérifiant les propriétés a) et b), généralisée à n quelconque, τ_c sur l'algèbre du groupe $\mathscr{A} = \mathbb{C}\Gamma$;*

Donc je veux savoir ce que c'est que $\tau_c(a^0, a^1, \ldots, a^n)$. Remarquez qu'il y a une variable de plus ici que tout à l'heure, puisque je dois commencer par a^0, où chacun des a^i est un élément de $\mathbb{C}\Gamma$. Alors comme on a affaire à une fonctionnelle qui est multilinéaire, eh bien, il suffit de savoir quelle est la valeur de cette quantité lorsqu'on prend des éléments du groupe, puisque par multilinéarité, on le saura en général. Alors donc en fait, au lieu de supposer que ce sont des éléments de $\mathbb{C}\Gamma$, je vais supposer que ce sont des éléments du groupe *(et il remplace $\tau_c(a^0, a^1, \ldots, a^n)$ par)* $\tau_c(g^0, g^1, \ldots, g^n)$. Alors la définition est la suivante : on pose que c'est égal à $(g^i \in \Gamma)$:

$$\tau_c(g^0, g^1, \ldots, g^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; g^0 g^1 \ldots g^n \neq 1 \\ c(g^1, \ldots, g^n) & \text{si } \; g^0 g^1 \ldots g^n = 1 \end{cases}$$

Alors vous voyez immédiatement que la première condition est invariante par permutation cyclique : si vous permutez les variables par permutation cyclique, ça ne change pas la condition que le produit des variables soit égal à 1. Pour la deuxième condition, dès que le cocycle est normalisé, c'est un petit exercice de vérifier qu'on a effectivement affaire à un cocycle cyclique.

Maintenant, on dispose d'un accouplement grâce au lemme que j'avais écrit avant, on dispose d'un accouplement entre la K-théorie de l'algèbre $\mathscr{A}$ en généralisant ce lemme, que j'avais écrit seulement pour le cas $n = 2$ *(il montre le lemme marqué d'une étoile ci-dessus)*, en généralisant pour un n quelconque, on dispose d'un accouplement entre la K-théorie de l'algèbre $\mathscr{A}$ et la cohomologie cyclique. Donc comme on a ce cocycle cyclique particulier, chaque fois qu'on a une classe de K-théorie, on a un nombre.

On avait la deuxième forme de la signature, qui était ici, je vous rappelle que la deuxième forme de la signature, c'était un élément qui appartenait à $K_0(\mathbb{C}\Gamma \otimes R)$ ($\mathbb{C}\Gamma$ tensorisé par l'anneau R des suites à décroissance rapide) :

$$[e] \in K_0(\mathbb{C}\Gamma \otimes R)$$

Alors cet anneau R des suites à décroissance rapide a comme propriété qu'il a une trace naturelle. Chaque fois qu'on a un élément de R, on peut définir $\mathrm{Trace}(r)$ $(r \in R)$ comme la somme des valeurs diagonales r_{ii} $(\mathrm{Trace}(r) = \sum r_{ii})$, et on en déduit que, non seulement l'accouplement de K-théorie a lieu avec $\mathbb{C}\Gamma$, lorsqu'on a un cocycle de groupe, mais il a également lieu avec $\mathbb{C}\Gamma$ tensorisé par R (i.e. $\mathbb{C}\Gamma \otimes R$).

Alors je vais d'abord écrire un premier résultat, qui est un premier théorème, qui généralise le théorème d'Atiyah-Singer pour les revêtements, et qui va nous permettre de commencer à travailler.

Alors ce premier théorème; (on obtient, à un coefficient près qui est très important, que :

Théorème 1 :

$$\langle [e], \tau_c \rangle \quad = \quad \frac{1}{(2\pi i)^q} \frac{q!}{(2q)!} \langle L(M) \Psi^*(c)[M] \rangle.$$

$$\textit{avec } \ \tau_c \ \textit{est un cocycle de groupe}, \quad e \in K_0(\mathbb{C}\Gamma \otimes R) \ \ \textit{et} \ \ n = 2q$$

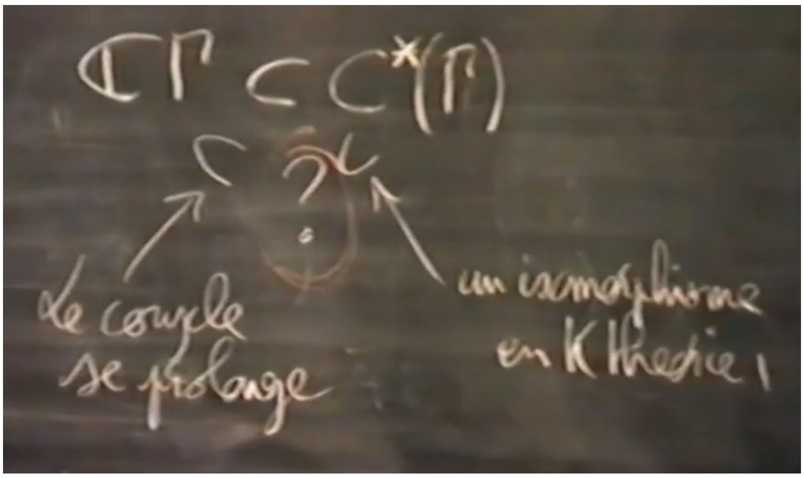
$L(M)$ est le polynôme, $\Psi^*(c)$ est l'image inverse du cocycle par l'application classifiante évaluée sur la classe fondamentale de M.

Donc en fait, le terme de droite, qui est la formule de Novikov, est en fait égal, à un coefficient non nul près, au terme de gauche, qui est égal à l'accouplement entre le cocycle cyclique et la signature vue en tant qu'élément de la K-théorie de cette algèbre $R(\Gamma)$.

Mais c'est vraiment là que le problème commence. Lorsqu'on est là, on pourrait dire "ah ben, c'est vrai, la conjecture de Novikov est vraie" parce qu'on a exprimé un théorème de l'indice, on a le terme de droite qui est le problème de Novikov, qui est le problème d'invariance par homotopie de ce terme-là, qui est égal au terme de gauche, qui est effectivement un terme de signature. Mais ce terme de signature, il était défini en utilisant des opérateurs elliptiques. Il était défini comme un élément de $K_0(R(\Gamma))$. Et on ne savait pas, c'est bien ce que j'avais écrit au tableau, on ne sait pas en général démontrer l'invariance par homotopie de ce terme-là *(le K_0...)*. Tout ce qu'on sait, c'est que lorsqu'on regarde les 2 dans la K-théorie de la C^*-algèbre, ils coïncident, et comme l'autre est invariant par homotopie, celui-là, lorsqu'on regarde son image dans la C^*-algèbre est invariant par homotopie. Alors c'est là qu'un problème d'analyse apparaît, et c'est là que la propriété que le groupe est hyperbolique va intervenir.

Donc la dernière partie de mon laïus sera simplement une partie d'analyse et maintenant, il me faut aller un tout petit peu plus loin que l'outil de topologie différentielle vu seulement au niveau de l'algèbre, ici, et il faut, grosso modo, que je fasse la même opération que l'opération, que l'on dit en trois mots pour les variétés, qui consiste à dire la chose suivante : en topologie différentielle, il est crucial, lorsque vous avez un problème de topologie, par exemple un fibré, topologique a priori, que vous puissiez le rendre C^∞. Alors on dit, bon, on prend un fibré, on le rend C^∞, mais il est très important qu'il n'y ait qu'une seule manière de le rendre C^∞, c'est-à-dire qu'en fait, ce qui est crucial, c'est que lorsqu'on regarde l'application de K_0 de l'algèbre des fonctions C^∞ de M (notée $K_0(C^\infty(M))$) vers l'algèbre des fonctions continues sur M (notée $K_0(C(M))$) (*l'application de son ensemble de départ vers son ensemble d'arrivée se note donc* $K_0(C^\infty(M)) \to K_0(C(M))$), c'est vraiment un exemple typique de ce qui se passe en topologie différentielle, on a ici *(à droite)* quelque chose qui est de la topologie, ici *(à gauche)*, quelque chose qui utilise la géométrie différentielle, des coordonnées régulières, etc., et il est crucial que l'on sache que cette application est un isomorphisme *(il note cela par le signe $\simeq$ sous la flèche de l'application).*

Alors dans le problème qui m'intéresse, cette question-là est une question d'analyse beaucoup plus difficile que dans le cas commutatif, et la raison, grosso modo, est la suivante : la raison est que les groupes non-commutatifs, comme le groupe Γ *(s'interrompant).* Ce qu'on sait, si vous voulez, c'est qu'on a l'inclusion $\mathbb{C}\Gamma \subset C^*(\Gamma)$. Si le groupe était commutatif, ça reviendrait à inclure les polynômes de Laurent, ou les polynômes trigonométriques dans les fonctions continues. Si on regarde les polynômes de Laurent, ou les polynômes trigonométriques, leur K-théorie n'est pas la même que la K-théorie des fonctions C^∞, parce que si vous inversez, si vous regardez le spectre, vous allez avoir des problèmes, parce que lorsque vous calculez l'inverse d'un élément, les coefficients vont décroître à l'infini, mais ne vont pas être nuls à un moment. Donc en fait, ce qu'on cherche à faire, c'est à trouver une algèbre qui est plus grande que $\mathbb{C}\Gamma$, qui soit là *(et il complète l'inclusion déjà écrite par une algèbre qui se trouverait entre les deux algèbres déjà écrites de la façon suivante :)*



(et en ajoutant les conditions nécessaires sur les inclusions recherchées) : pour l'inclusion gauche, il faut que le cocycle se prolonge, et pour l'inclusion droite, il faut qu'on ait

un isomorphisme en K-théorie.

Alors il se fait que pour les groupes hyperboliques, ce problème a une réponse, et cette réponse résulte de plusieurs résultats d'analyse, qui sont des résultats difficiles. Et en fait, la réponse, c'est exactement l'espace de Schwartz d'Harish Chandra qui a été inventé dans la théorie des groupes semi-simples. C'est-à-dire que la réponse n'est pas du tout évidente : on définit une sous-algèbre de la C^*-algèbre $C^*(\Gamma)$, que je vais noter $\mathscr{S}(\Gamma)$, et qui est donc exactement l'analogue, si vous prenez par exemple pour Γ un sous-groupe de $\mathrm{SL}(\mathbb{R})$ par exemple, un sous-groupe cocompact, cette algèbre $\mathscr{S}(\Gamma)$ va correspondre exactement à la condition qui est duale des distributions tempérées d'Harish Chandra, c'est-à-dire qu'elle va correspondre exactement à l'espace de Schwartz. Alors comment la définit-on ? On la définit grosso modo en disant qu'un élément de l'algèbre du groupe s'écrit $\sum a_g\, g$ où g est un élément du groupe et il nous faut donner une condition de décroissance des coefficients a_g. Cette condition va être la suivante $|g|^k a_g \in \ell^2$: chaque fois qu'on multiplie a_g par une puissance du nombre générateur qui apparaît dans g c'est-à-dire la longueur des mots à la puissance k, on demande que cette suite-là appartienne à ℓ^2. Alors je souligne vraiment plusieurs fois ℓ^2 ici parce que contrairement *(s'interrompant)*. Vous connaissez bien l'espace de Schwartz dans le cas de $\mathbb{R}$: pour l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}$, si une fonction est telle que son produit par la longueur, à toute puissance, appartient à ℓ^2, bien sûr la fonction appartient à ℓ^1. Mais ici ça n'est pas vrai. Parce que le groupe a croissance exponentielle et vous pouvez très bien avoir une fonction telle que son produit par toute longueur des mots à la puissance k appartienne à ℓ^2 sans que la fonction n'appartienne à ℓ^1. Et c'est un point crucial. C'est exactement le même point crucial que dans l'espace de Schwartz d'Harish Chandra, pour les groupes de Lie. Dans les groupes de Lie, ce qu'on fait, c'est qu'on prend une fonction sphérique et elle a la propriété d'être juste dans ℓ^2 mais pas d'être dans ℓ^1.

Donc on a cette propriété. *(Il encadre)* $\boxed{|\mathrm{g}|^k a_g \in \ell^2}$ et le lemme crucial qui est un lemme d'analyse, il consiste à mettre bout à bout les travaux d'Haagerup, Jolissaint et de la Harpe et ce lemme dit la chose suivante ; il dit qu'on a deux choses qui sont vérifiées :

Lemme : 1 *$\mathscr{S}\Gamma$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe.*

(Peu importe le terme technique, cela implique que la flèche de $K_0(\mathscr{S}\Gamma) \to K_0(C^*\Gamma)$ est un isomorphisme (*quelqu'un*[4] *intervient, AC répond* “Well, take the intersection if you want, okay, but this is exactly where the difficulty comes. I mean what you have to prove is that if a sequence satisfies this, then it is bounded as an operator and this is very difficult okay ? But let me state the lemma.” La première chose, donc, est que $\mathscr{S}\Gamma$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe et ça, avec une bonne

[4]Ofer Gabber ?

condition de $\mathscr{S}\Gamma$, c'est toujours vrai.

② Et la deuxième condition, c'est que :

Si le groupe Γ est un groupe hyperbolique alors tout cocycle C qui appartient à la cohomologie du groupe ($C \in H^*$) qui est borné se prolonge à $\mathscr{S}\Gamma$.

Alors qu'ai-je dit ? Ce que j'ai dit c'est que la fonctionnelle C dont je parlais tout à l'heure se prolonge à l'algèbre $\mathscr{S}\Gamma$ dès que le cocycle est borné. Et donc je peux maintenant conclure. Comment est-ce qu'on démontre le théorème de Novikov pour les groupes hyperboliques ? On utilise un lemme de Mikhaïl Gromov[5], pour conclure, et qui dit la chose suivante :

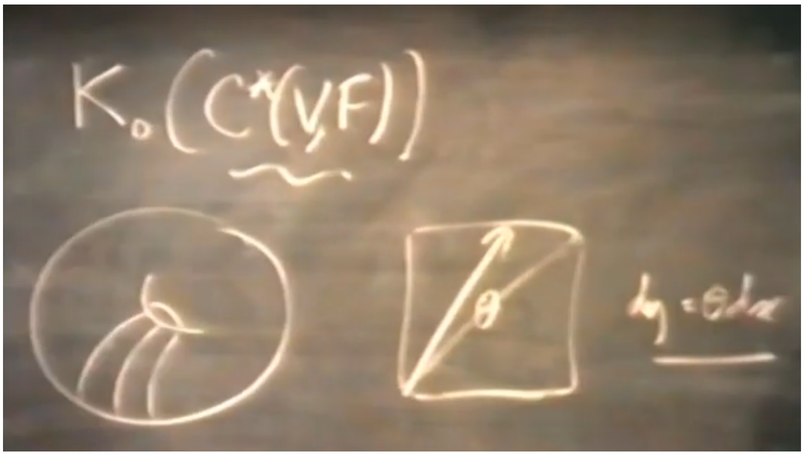
Lemme : (M. Gromov) *Si Γ est hyperbolique, toute classe de cohomologie $H^*(B\Gamma)$ est représentée par un cocycle borné.*

Alors en mettant bout à bout les estimées qui sont ici, on en déduit donc qu'on peut appliquer ces techniques de topologie différentielle. Et on applique ces techniques de topologie différentielle vraiment dans un cas non-commutatif. Et bien sûr, il y a un nombre considérable de difficultés supplémentaires qui apparaissent.

Alors je voudrais conclure mon laïus en disant deux choses : bon, je n'ai pas beaucoup parlé de l'isomorphisme de Thom pour le moment ; je me sens *(sous-entendu coupable)*... Je vais quand même dire deux mots ; la raison pour laquelle l'isomorphisme de Thom a joué un tel rôle, c'est la suivante : pour obtenir ce genre de techniques, il aurait été malsain de se restreindre aux groupes discrets. En fait, les algèbres non-commutatives qui proviennent des groupes discrets sont intimement reliées à un cadre plus général, qui est le cadre des feuilletages. Et lorsque vous avez le cadre des feuilletages, il y a d'un côté les variétés ordinaires, c'est-à-dire les feuilletages qui ont vraiment un espace-quotient, de l'autre côté les groupes discrets, d'une certaine manière. Et entre les deux, on a les feuilletages. Et alors pour les feuilletages, il se fait que si on a une variété V avec un feuilletage F (noté (V, F)), on a une liberté de manœuvre géométrique qui est plus grande et on peut voir ce qui se passe de manière plus facile. Et alors la raison pour laquelle l'isomorphisme de Thom intervient de manière cruciale, c'est que ce qu'on veut faire, c'est deviner quelle est la K-théorie, K_0 par exemple, de la C^*-algèbre du feuilletage (notée $K_0(C^*(V, F))$). Peu importe que ce soit la C^*-algèbre du feuilletage, c'est une généralisation de la C^*-algèbre du groupe si vous voulez, un feuilletage, c'est un objet dynamique comme ça, c'est un objet où l'holonomie, le pseudo-groupe d'holonomie par exemple joue le rôle du groupe

[5]Pour la collaboration A. Connes, H. Moscovici, M. Gromov, voir http://denise.vella.chemla.free.fr/AC-MG-HM-CRAS.pdf qu'on peut également trouver dans les publications de Mikhaïl Gromov dans sa page à l'IHES ou télécharger sur les archives des C.R.A.S.

Γ, et lorsqu'on cherche cette K-théorie de la C^*-algèbre du feuilletage, on s'aperçoit que, donc c'était le premier avatar de l'isomorphisme de Thom, qu'il y a un cas où l'on peut voir tout de suite ce qui se passe.



C'est le cas où on a un feuilletage dans lequel, par exemple un feuilletage comme ça, c'est très difficile à calculer même dans ce cas-là, donc dans le cas du feuilletage du tore avec une pente irrationnelle, c'était bien difficile à calculer déjà dans ce cas-là, dans le cas du feuilletage $dy = \theta dx$, eh bien, dans le cas d'un feuilletage comme ça, on s'aperçoit que, regardez ce qui se passe : vous avez l'espace-quotient, et sur cet espace-quotient, il y a un fibré en droites, dont l'espace total est la variété. Donc si on croit à l'isomorphisme de Thom, on en déduit que K_0 de l'espace-quotient, c'est-à-dire de la C^*-algèbre du feuilletage doit être égal, à un chiffre de dimension près, à $K_1(V)$. *(Il a noté) :* $K_0(C^*(V,F)) \approx K_1(V)$. Et on cherche à démontrer ça directement, on s'aperçoit, bien sûr, qu'on ne peut plus parler en termes géométriques et donc on ne peut pas avoir une démonstration trop simple. Après pas mal de travail, on arrive à démontrer ça ($K_0(C^*(V,F)) \approx K_1(V)$), et ensuite on se dit, si c'est vrai dans ce cas-là, qu'est-ce qu'on peut faire en général ? Eh bien, ce qu'on peut faire en général, on peut, en faisant de la chirurgie sur les feuilles, rendre les feuilles k-connexes pour un k arbitraire, ça c'est assez facile à faire, sans changer l'espace-quotient. Donc en fait ce qu'on peut faire, on peut, quand on a un feuilletage arbitraire, on peut chercher à trouver un autre feuilletage, W/G, tel que l'espace des feuilles soit le même $V/F = W/G$, mais tel que la structure des feuilles soit beaucoup plus simple. Et alors en fait, il y a un cas universel de ça, c'est ce qu'on appelle l'espace classifiant du groupoïde d'holonomie, donc $B(\text{Graphe}\, F)$ (d'ailleurs graphe qui a été défini par Thom) ; si on regarde cet espace classifiant $B(\text{Graphe}\, F)$, on s'aperçoit que sa situation par rapport à l'espace-quotient est grosso modo que les fibres sont des espaces contractiles. Et on en déduit que normalement, en travaillant un peu, on devrait avoir un isomorphisme qu'on appelle isomorphisme μ entre la K-homologie de cet espace classifiant $B(\text{Graphe}\, F)$ et la K-théorie de la C^*-algèbre. Alors cet isomorphisme, c'est une généralisation. Le fait que cet isomorphisme existe, c'est une généralisation très forte du problème de Novikov et en fait, pour le démontrer, on développe des techniques du type cohomologie cyclique, qui remplace la cohomologie de de Rham de l'espace-quotient, et on s'aperçoit que si on se spécialise au cas des groupes discrets, eh bien, ça marche au moins pour une classe de groupe assez grande. Ok, donc je crois que je vais m'arrêter là.

(Applaudissements)

Question : Is that a conjecture ?

Réponse : That's a conjecture, that it is an isomorphism.

Puis dernière intervention d'Ofer ?, à qui Alain Connes demande de lire l'article, pour voir si c'est simple, rires entendus et réponse interrompue par arrêt de la vidéo.

Tuesday, September 15, 2020

FAREWELL TO A GENIUS

We all learned with immense sorrow that Vaughan Jones died on Sunday September 6th.

I met him in the late seventies when he was officially a student of André Haefliger but contacted me as a thesis advisor which I became at a non-official level. I had done in my work on factors the classification of periodic automorphisms of the hyperfinite factor and Vaughan Jones undertook the task of classifying the subfactors of finite index of the hyperfinite factor among which the fixed points of the periodic automorphisms give interesting examples.

By generalizing an iterative construction which I had introduced he was first able to show that the indices of subfactors form the union of a discrete set with a continuum exactly as in conformal field theory. But his genius discovery was when he understood the link between his theory of subfactors and knot theory which is the geometry of knots in three space !

This is really a fantastic discovery that led to a new invariant of knots : the Jones polynomials !

This discovery was afterwards dressed using functional integrals but the real breakthrough is indisputably due to Vaughan Jones.

To me his discovery is one of the great jewels of the unity of mathematics where a seemingly remote problem such as the classification of subfactors of finite index turned out to be deeply related to a fundamental geometric problem !

For this reason I do not hesitate to affirm that Vaughan Jones' discovery is one of pure genius and that his work has all characteristic features that grant it immortality.

https://noncommutativegeometry.blogspot.com/2020/09/farewell-to-genius.html.

Jeudi 15 septembre 2020

ADIEU À UN GÉNIE

Nous avons tous appris avec une immense tristesse que Vaughan Jones est décédé dimanche 6 septembre.

Je l'ai rencontré à la fin des années 70 quand il était officiellement un étudiant d'André Haefliger mais qu'il m'a contacté pour être son tuteur de thèse, ce que je devins de façon non officielle. J'avais fait dans mon travail sur les facteurs la classification des automorphismes périodiques du facteur hyperfini et Vaughan Jones entreprit la tâche de classifier les sous-facteurs d'index fini du facteur hyperfini parmi lesquels les points fixes des automorphismes périodiques donnent des exemples intéressants.

En généralisant une construction que j'avais introduite, il a pu le premier montrer que les indices des sous-facteurs forment l'union d'un ensemble discret avec un continuum exactement comme en théorie conforme des champs. Mais sa découverte géniale a été la compréhension du lien entre sa théorie des sous-facteurs et la théorie des nœuds qui est la géométrie des nœuds dans l'espace à trois dimensions !

C'est vraiment une découverte fantastique qui a amené à un nouvel invariant des nœuds : le polynôme de Jones !

Cette découverte a ensuite été habillée en utilisant des intégrales fonctionnelles mais la réelle percée est indiscutablement due à Vaughan Jones.

Pour moi sa découverte est un des grands joyaux de l'unité des mathématiques où un problème semblant éloigné comme la classification des sous-facteurs d'index fini s'avère être profondément relié à un problème fondamentalement géométrique !

Pour cette raison, je n'hésite pas à affirmer que la découverte de Vaughan Jones est celle d'un pur génie et que son travail a toutes les caractéristiques qui garantissent son immortalité.

https://noncommutativegeometry.blogspot.com/2020/09/farewell-to-genius.html.

Un modèle efficace de l'espace-temps pour géométriser le modèle standard

Alain Connes

CERN, 2004

« Ok, donc, je veux dire, je suis mathématicien et vous savez, ce que je veux expliquer, bien sûr, on m'a posé cette question, vous savez : « qu'est-ce qui est fondamental en mathématiques ? et ainsi de suite » et euh, je veux dire, d'une certaine manière, vous savez, la façon dont je vois les choses parce que je suis devant un public composé principalement de physiciens est d'essayer de mettre en évidence d'une manière ou d'une autre les différences d'approche entre les mathématiques et la physique.

Et je veux dire que la première chose en mathématiques, vous savez, si vous y réfléchissez, je veux dire que le point principal des mathématiques est qu'elles sont vraiment une usine de nouveaux concepts. Donc d'une certaine manière, si vous voulez, la première chose fondamentale est que par le processus de distillation dans l'alambic de l'esprit humain, ce que nous produisons sont des concepts qui sont a priori extrêmement simples parce qu'ils sont comme des particules élémentaires de pensées. Donc par exemple, si vous pensez à un nombre comme le nombre 3, qu'est-ce que le nombre 3 ? Je veux dire que le nombre 3 est une qualité qui est commune à tous ces ensembles qui deviennent vides après que vous avez retiré un élément, un autre élément et un autre élément, d'accord ? C'est le nombre 3. Donc, euh, plus encore, je veux dire que je suis entièrement d'accord avec ce que Groot disait à propos de la communication, de la communication avec d'autres civilisations et ainsi de suite et en fait, il y avait un mathématicien qui a écrit un livre entier qui s'appelle Lincos1 . C'est un langage qui, simplement par, je veux dire, vous pouvez communiquer simplement en disant "il y a un signal ou il n'y a pas de signal". Et à partir de là, vous pouvez communiquer des concepts très élémentaires comme les nombres, l'addition, la multiplication, etc. Et puis vous trouvez votre voie.

Alors, si vous voulez, la première chose que nous fabriquons en quelque sorte, je veux dire les particules élémentaires de la pensée, ce sont ces nouveaux concepts. Et la deuxième chose, c'est que la façon dont nous devons procéder, si vous voulez, dans nos investigations est en fait assez différente de celle des physiciens, dans le sens où nous essayons de comprendre les choses d'en haut. Je vais vous donner des exemples très rapidement. Mais je voulais prendre deux concepts qui ne sont pas triviaux, qui sont au centre des mathématiques et qui sont en constante évolution, juste pour préciser quelque chose, pour préciser les sujets que vous connaissez et ces deux concepts sont les suivants : (en écrivant ESPACE et SYMETRIE au tableau) le premier concept est le concept d'espace et le deuxième concept est le concept de symétrie.

Bon, alors, ces éléments occupent vraiment aussi une place centrale en mathématiques ainsi qu'en physique. Mais je veux dire que la façon dont un mathématicien procède est assez différente de l'approche méthodologique, si vous voulez, d'un physicien. Donc, typiquement, ce qui s'est passé, je veux dire, pour un espace, je vais juste mettre deux transparents. Pour un espace, vous savez, je veux dire, c'était bien sûr, les architectes et les peintres du Moyen-Âge et ainsi de suite, utilisaient la perspective ; c'est une chose très bien comprise. Je ne sais pas ça, je ne sais pas comment l'installer, ça n'a pas d'importance, je veux dire, vous connaissez l'image, ok ? (en projection (sic !)

Dans le cadre du Symposium de Richard Dawkins, Gerard't Hooft et Alain Connes au Cern en 2004.

Référence youtube de la conférence : Alain Connes : « Un modèle efficace de l’espace-temps pour géométriser le Modèle Standard ». https://www.youtube-nocookie.com/embed/vBWPxGsXHD0.

Transcription et traduction à l'aide d'outils downsub, google traduction, Latex : Denise Vella-Chemla, octobre 2024. 1abr´eviation pour lingua cosmica.

Les mathématiciens, et en particulier Desargues, essayent de mettre ces règles empiriques de perspectives et autres sur une bonne base. Ils ont donc essayé de concevoir un bon modèle mathématique pour cela et qu'ont-ils conçu ? Ils ont conçu ce qu'on appelle la géométrie projective. La géométrie projective, qu'est-ce que c'est ? Je veux dire que c'est une géométrie dans laquelle les axiomes, si vous voulez les conditions qui seront remplies par la géométrie, sont incroyablement simples.
Qu'est-ce que c'est ? Il y aura des points et des lignes et il y a juste 4 axiomes :

- deux points déterminent une ligne ;
- une ligne a au moins trois points ok ;
- deux lignes qui proviennent de deux points qui sont sur deux lignes coplanaires (c'est-à-dire deux lignes qui se rencontrent) se rencontrent en un point ;
- et l'axiome final est que la géométrie (le quatrième axiome qui est le dernier) est que la géométrie est engendrée par un nombre fini de points.

En d'autres termes, il y a un nombre fini de points, ce qui signifie que si vous répétez l'opération consistant à prendre des lignes engendrées par deux points, vous obtenez tous les points. C'est tout. Les mathématiciens ont complètement classé ces géométries. Ils les ont toutes trouvées. Et ce qu'ils ont trouvé, c'est qu'il y a un espace projectif sur ce qu'on appelle un corps, d'accord. Qu'est-ce qu'un corps ? Vous connaissez le corps des nombres rationnels, vous connaissez le corps des nombres réels, mais si vous faites de la géométrie projective avec un corps de nombres réels, vous ratez tout. Je veux dire que vous diriez que vous savez que nous vivons dans un espace réel qui est en trois dimensions, donc vous ratez tout parce que nous faisons de la géométrie plane ; avec des nombres complexes au lieu de nombres réels, tous les cercles passent par deux points qui ont été trouvés par Poncelet, qui sont à l'infini et qui ont des coordonnées complexes qui sont appelées les points cycliques. Et alors tout devient miraculeusement plus simple, et meilleur, d'accord ? C'est donc là que les mathématiciens diffèrent des physiciens : ils classent tous les cas, d'accord, c'est une différence très très importante.

Le deuxième point est que lorsqu'ils ont classé tous les cas, ils ont classé toutes les instances de cas qui sont dites locales, qui sont localement compactes. Qu'ont-ils trouvé ? Ils ont trouvé les nombres réels, ils ont trouvé les nombres complexes, mais ils en ont trouvé d'autres : ils en ont trouvé d'autres comme les nombres p-adiques, ils ont trouvé des corps de fonctions sur un corps fini et ils ont la liste complète, et la liste complète est endian2. Et vous pouvez la regarder, d'accord, et vous savez qu'il n'y en a pas d'autres. Donc la principale différence d'approche, si vous voulez, c'est qu'en mathématiques, vous affichez en quelque sorte le paysage du monde. Et ensuite, vous pouvez y aller. Et en particulier, ce qu'ils ont trouvé dans le cas de la géométrie projective, c'est que le corps K n'a pas besoin d'être commutatif.

Donc si vous vous limitez en quelque sorte au cas commutatif vous serez gêné. Bon maintenant sur cette image vous pouvez déjà voir cette dualité entre l'ange de la géométrie et le diable de l'algèbre. Qu'est-ce que la dualité ? La dualité est la suivante : où est l'ange de la géométrie, eh bien vous savez, vous dessinez des images, c'est joli, vous voyez, en un éclair, vous voyez l'image entière et ainsi de suite et en un éclair, par exemple vous pouvez apprécier un théorème. Alors laissez-moi vous présenter un théorème qui est bien connu qui est dû à Morley qui est le seul théorème sur les triangles qui n'était pas connu des Grecs, ok. C'est un beau théorème, je l'ai montré à mon père, il l'a compris immédiatement : vous prenez n'importe quel triangle, ok, n'importe quel triangle le triangle ABC est complètement arbitraire vous le trissectez

2mal audible.

chaque angle, ok, vous décomposez chaque angle en trois parties égales vous coupez les trois secteurs, vous obtenez un petit triangle au milieu ; ce triangle est toujours équilatéral. C'est un beau résultat, vous savez, qui a été trouvé par Morley. Maintenant, essayez de le prouver, vous aurez du mal, ok. Donc je veux dire que je vous ai montré l'ange de la géométrie, je vais vous montrer le diable de l'algèbre, ok. Donc l'ange de la géométrie vous dit qu'il y a quelque chose de très beau, maintenant, prouvez-le, ok. Et c'était, je veux dire en fait, je veux dire que c'est un fait connu qu'il n'y a pas de belle preuve géométrique de cela, mais voici l'énoncé algébrique qui vient du diable de l'algèbre et qui est équivalent, je veux dire, qui est en fait beaucoup plus fort que cela.

Quelle est l'énoncé ? L'énoncé est maintenant vous pensez au groupe des transformations affines de la droite : x tend vers ax + b, je veux dire ce n'est pas une chose très compliquée[3] ok ? Maintenant ces transformations ont un point fixe, elles ont un x qui est fixé par la transformation ok c'est ce que j'appelle fixe. Et maintenant le théorème que vous pouvez donner au lycée en fait il a été donné à l'examen de français après que j'ai trouvé la preuve, il a été donné au Capes ok, avec quelques détails, donc quel est l'énoncé[4] ? C'est que vous prenez ce groupe de transformations affines, et vous écrivez l'équivalence entre deux conditions, la condition a) et la condition b). La condition a) est que f est égal à un où f, g et h sont des éléments du groupe. La condition b)^3 est qu'il y a aj qui est, si vous voulez, la partie amplitude du produit fgh dont le cube est égal à un qui n'est rien et alors que si vous prenez α + jβ + j 2γ est égal à zéro, vous êtes toujours dans la droite où α est un point fixe de fg, β est un point fixe de gh et γ est un point fixe de hf. Maintenant ça, vous pouvez le vérifier juste par calcul matriciel, c'est très très simple. Maintenant que faites-vous ? Maintenant, vous prenez la droite, pas la droite réelle, vous prenez la droite complexe, et vous prenez f et g et h comme étant la rotation autour du point A d'angle 2a, autour du point B d'angle 2b et C d'angle 2c ok ? Et vous le faites, bon, vous faites le calcul, vous trouvez que f est égal à 1 : c'est juste parce que la somme des angles d'un triangle fait π, c'est exactement la même chose, donc vous en déduisez que vous avez la deuxième condition, qui est α + jβ +^{3} j 2γ = 0 mais le point fixe de fg est exactement l'intersection des deux tri-secteurs, idem pour le point fixe de gh, idem pour le point fixe de hf. Et cette condition α+jβ + j 2γ = 0 est une condition bien connue pour obtenir un triangle équilatéral, qu'on apprend au lycée en fait, ok ? Donc vous voyez, voilà l'ange de la géométrie ; voilà le diable de l'algèbre. Mais le diable a beaucoup de pouvoir, pourquoi ? Parce que ce théorème qui est de ce côté-là, maintenant il est vrai pour n'importe quel corps.

Par exemple, c'est vrai pour le domaine à quatre unités, c'est vrai pour n'importe quel domaine. Alors maintenant, l'image que vous avez ici, qu'a-t-elle fait ? Elle a déclenché un processus cérébral qui va des zones visuelles du cerveau aux zones linguistiques du cerveau et l'algèbre est les zones linguistiques. Et à partir de ces zones linguistiques, vous obtenez une déclaration qui est purement linguistique, qui est une manipulation algébrique de symboles, etc. Mais maintenant, cela a un pouvoir énorme parce que maintenant cela ne s'applique pas seulement à votre image visuelle originale ; cela s'applique à une classe d'exemples beaucoup plus large, d'accord ?

La deuxième leçon que nous pouvons tirer de cette axiomatique, qui est cruciale en mathématiques, c'est qu'il y a des questions qui, pour les physiciens et pour beaucoup de gens, peuvent paraître complètement ésotériques. La question typique était que, lorsque vous regardez les axiomes d'Euclide, d'accord, lorsque vous regardez ces axiomes, vous savez, lorsque vous regardez les axiomes d'Euclide, il y en a beaucoup plus que les axiomes que je vous ai montrés pour la géométrie projective, il y a beaucoup, beaucoup d'axiomes.
Mais maintenant, si vous regardez ces axiomes, vous trouvez qu'il y en a un qui est dérangeant, vous devez

[3] mal audible
[4] examen en France pour devenir Professeur de mathématiques au collège.

avoir une certaine sensibilité pour comprendre que ce n'est pas que lorsque vous l'aurez enlevé, la liste devrait être beaucoup plus courte parce que c'est une liste très longue, ok, donc il y avait cet axiome, si vous voulez, qui disait justement que la somme des angles d'un triangle est égale à π c'était un des axiomes d'Euclide. On l'appelle l'axiome de l'unique parallèle mais c'est vraiment cet axiome qu'en fait la somme des angles d'un triangle est égale à π ok. Maintenant dans le modèle de Klein, donc les mathématiciens ont beaucoup réfléchi, ils ont essayé de prouver cet axiome. Legendre, pendant une longue partie de sa vie, a essayé de prouver cet axiome mais en essayant de prouver cet axiome, ils ont découvert qu'il y avait un nouveau monde, qui leur était inconnu, qu'ils ont découvert parce qu'il était cohérent. Donc ce qu'ils ont trouvé c'est que si vous laissez tomber cet axiome, que la somme des angles d'un triangle est égale à π, c'est toujours cohérent, d'accord, vous trouvez un monde cohérent, et finalement vous vous en rendez compte, par comment, c'est si simple, les points de la géométrie sont juste maintenant les points qui sont à l'intérieur d'une ellipse ; vous n'autorisez pas tous les points, vous autorisez seulement les points qui sont à l'intérieur d'une ellipse. Les lignes droites sont toujours les lignes droites habituelles mais maintenant vous voyez qu'en dehors d'une ligne donnée qui est une ligne D, vous pouvez passer plusieurs parallèles parce que ces deux lignes ne se rencontrent pas, d'accord. Le problème est que ce n'est pas suffisant pour définir la géométrie, vous devez définir la distance entre les points qui est le logarithme du rapport croisé entre les quatre points comme A, B, a, b, d'accord. Et puis vous trouvez que tous les axiomes euclidiens sont vrais mais l'axiome de l'unique parallèle n'est pas vrai. Alors qu'est-ce que vous gagnez avec ça, vous dites "oh d'accord je ne peux pas supprimer cet axiome de cette liste". Pas du tout, ce n'est pas ce que vous gagnez : ce que vous gagnez, ce sont deux grandes ouvertures sur l'idée de géométrie ; la première ouverture est l'ouverture de Galois, d'accord, qui était, je veux dire, l'idée des groupes de Lie et de Sophus Lie, qui est l'idée de symétrie, donc c'est la première grande ouverture dans laquelle ce que vous feriez, c'est de dire que cette géométrie non euclidienne est belle à cause de ses symétries, à cause du fait que vous voulez pouvoir transporter des corps rigides partout et ainsi de suite.

Mais en fait, il y avait une ouverture beaucoup plus large, et cette ouverture beaucoup plus large est venue de Gauss et Riemann ; et ce qu'ils ont fait, c'est de modéliser la géométrie dans une situation que vous connaissez très bien sous le nom de $g_{\mu\nu}$s, comme la surface de la Terre, etc., mais je veux dire que le principal nouvel apport, le principal nouvel ingrédient ici, c'est qu'au lieu d'avoir à faire de la géométrie d'une manière complètement si vous voulez, en quelque sorte harmonieuse, dans laquelle vous pouvez déplacer des corps rigides et donc, maintenant ce que vous voulez, vous voulez avoir une variété de points qui a une dimension qui n'est pas fixe plus un élément de ligne, d'accord. Et l'élément de ligne est prescrit arbitrairement essentiellement ; si vous voulez, la longueur de l'élément de ligne est prescrite simplement comme une forme quadratique locale. Ce qui est très important, c'est que les notions habituelles continuent d'avoir du sens dans cette nouvelle géométrie, donc la notion de ligne droite continue d'avoir du sens et bien sûr, je veux dire, vous savez probablement tous que la principale raison pour laquelle cette géométrie a eu autant de succès est que vous obtenez la loi de Newton dans un potentiel V donné lorsque, au lieu de laisser passer le temps, vous savez, comme dans l'espace-temps de Minkowski, ce que vous faites, c'est que vous laissez le temps passer d'une manière différente, selon la hauteur à laquelle vous vous trouvez dans le potentiel newtonien. Et maintenant, si vous continuez, je veux dire qu'un peu de cela, je pense que cela a probablement une certaine utilité au CERN, mais je veux dire que typiquement, par exemple, lorsque les gens ont creusé le tunnel sous le canal, ils ont utilisé la correction qui est donnée par cela afin de se positionner avec le GPS, par rapport aux satellites. Je veux dire que cette correction n'est pas triviale ; le temps passe vraiment différemment, lorsque vous êtes à un endroit différent dans le potentiel newtonien, d'accord.

Maintenant, comme je l'ai dit, d'accord, cette théorie a eu un succès incroyable et elle a eu un succès incroyable en tant que modèle de relativité générale et je viens de vous rappeler ces choses que vous connaissez aussi assez bien, Je suppose que c'est donc vous savez le potentiel de courbure, les équations d'Einstein et je veux dire ces qui sont vérifiés avec une précision incroyable dans l'histoire du pulsar binaire et ainsi de suite. Bon, c'est juste pour le flasher, ok. Donc maintenant, si vous voulez, la mentalité des mathématiciens est assez différente, elle est très très différente, dans le sens où au lieu d'essayer de résoudre un problème de physique spécifique, complètement spécifique, ce que nous faisons, c'est que nous essayons de regarder de manière harmonieuse les concepts généraux de la géométrie et ainsi de suite. Maintenant, il s'est avéré que l'idée habituelle de la géométrie qui est modélisée par cette géométrie riemannienne a récemment beaucoup évolué et elle a évolué de manière spectrale.

Donc je veux dire ici que je vous montre un spectre et ainsi de suite et ce que je veux dire par là est ce qui suit : ce que je veux dire, c'est qu'il y a eu une découverte fondamentale, vous le savez tous, qui est due à Heisenberg et qui est que lorsque vous essayez de modéliser, disons, dans le monde riemannien, dans l'idée de variétés, lorsque vous essayez de modéliser un système microscopique comme un atome qui est une interaction avec un rayonnement, d'accord, les seules données que vous avez sont spectrales, d'accord. Donc ce que vous avez, ce sont les spectres de la lumière émise ou de la lumière absorbée, etc. Maintenant, lorsque les gens essaient de modéliser cela et lorsque vous essayez d'appliquer le modèle classique, vous trouvez des lois qui ne sont pas compatibles avec les lois expérimentales qui sont la loi de Ritz-Rydberg. Maintenant, la loi de Ritz-Rydberg vous dit que les rayons spectraux se combinent, ils se combinent selon une certaine loi de combinaison, qui est appelée le principe de combinaison de Ritz-Rydberg et qui dit qu'une ligne qui est toujours étiquetée par deux indices comme i et j, l'état initial et final combinés avec j, k vous donne la transition de ligne i, k.
Heisenberg a alors eu l'idée de transporter ce que l'on obtiendrait comme produit des coordonnées sur l'espace classique dans cette configuration à partir de la loi expérimentale. Et on a obtenu une nouvelle loi et cette loi est la loi de composition des matrices. C'est donc la loi des matrices et ce qu'il a immédiatement remarqué, bien sûr, c'est que cette loi n'est pas commutative et cela signifie que ce que vous avez, c'est que les coordonnées que vous utiliseriez normalement comme coordonnées sur un espace ne commutent plus, d'accord.
Donc les mathématiciens quand ils sont face à ça, ok, ils doivent prendre au sérieux ce message et ils doivent aussi prendre au sérieux le message de Desargues parce que la géométrie desarguienne, c'est la géométrie qui est venue de l'espace projectif : le corps qui était là n'était pas un corps commutatif. Donc en fait il fallait étendre tous nos concepts de géométrie, si vous voulez, à ces situations non commutatives dans lesquelles les coordonnées sur un espace l'espace qu'on regarde ne sont plus commutatives, ok. et là...

D'accord, je veux juste le mentionner très brièvement, mais laissez-moi vous donner un exemple d'une surprise qui est arrivée il y a très longtemps, en fait dans les années 70, donc la surprise qui est arrivée est la suivante, eh bien, nous parlons de surprise, mais la grande surprise était la suivante ; c'est que si vous prenez une algèbre de coordonnées sur un espace non commutatif, elle évolue avec le temps ; elle a une évolution temporelle donnée par Dieu qui ne vient que de sa non-commutativité, qui ne vient que de la différence entre la gauche et la droite, d'accord. Donc je veux dire qu'il y a, si vous voulez, une application canonique de la droite réelle qui est le groupe à un paramètre des automorphismes, des classes d'automorphismes, ce qui signifie que cette algèbre si vous la regardez 10 minutes après qu'elle a tourné, d'accord, elle a une évolution temporelle complètement canonique, d'accord. Donc c'était la première surprise. Ce qui était très important c'était d'étendre à ce cadre les idées riemanniennes, les idées de mesure des distances et ainsi de suite et je vais juste vous montrer le transparent je vais juste mettre ce transparent pour vous dire quelle est la différence et pour vous dire de quelle façon la mesure des distances diffère dans cette nouvelle géométrie de ce qu'elle est dans l'ancienne géométrie.

La différence est très simple à expliquer : vous savez qu'à la fin du XVIIIe siècle, les gens ont essayé d'unifier l'unité de longueur. Ils ont donc demandé à des gens comme Laplace et Lagrange « que peut-on faire pour avoir une bonne unité de longueur ? ». Donc la première réponse était bien, prenons la longueur d'un pendule qui bat pendant une seconde, d'accord. Mais si vous faites ça et que vous grimpez au Mont-Blanc, vous savez, vous aurez une différence, donc ce n'est pas bon, d'accord. Et aussi, il faut définir la deuxième, d'accord. Donc ils ont beaucoup réfléchi, ils ont beaucoup réfléchi et ensuite ce qu'ils ont pensé c'est « eh bien, prenons le plus grand objet disponible, d'accord, qui est la terre, d'accord, sur lequel on peut mesurer, et prenons une toute petite partie de ce 1/40 millionième de cela, d'accord, ils le définissent exactement, et ensuite nous faisons un mètre, nous faisons un mètre, la géométrie c'est le mètre, et nous le déposons quelque part, d'accord, c'était au Pavillon de Breteuil à Paris et c'est l'unité de longueur. Mais pensez-y, vous savez, et ils y ont réfléchi pendant longtemps. Au bout d'un moment, ils se rendent compte que le compteur rétrécissait, qu'il y avait quelque chose qui n'allait pas, et puis si on veut mesurer quelque chose, il faut aller à Paris, comparer, ce n'est pas pratique, ok.

Donc en 1960, ils ont trouvé une nouvelle définition. Et la nouvelle définition est qu'il y a une certaine ligne orange dans le krypton, d'accord, et que l'unité de longueur devrait être un multiple de cette ligne orange dans le krypton. Maintenant... Ensuite, on a changé ça pour le césium, le krypton a été remplacé par le césium et bien sûr, on peut convertir la longueur en temps, en utilisant la vitesse de la lumière. Donc il n'y a pas de problème, d'accord. Maintenant, quel est l'avantage ? L'avantage est évident parce que si nous devions communiquer avec une autre civilisation, nous ne pourrions pas leur dire d'unifier l'unité de longueur en venant à Paris et en la comparant au mètre, d'accord. Mais nous pouvons leur dire : « allez, je veux dire, regardez votre tableau périodique des éléments, prenez ce nombre, les n, d'accord, prenez ce tableau spectral et faites-le et ce sera fait. » Maintenant, ce qui se passe, c'est que dans la géométrie non commutative, qui est cette géométrie différente, ce qui se passe, c'est que précisément, l'unité de longueur est exactement de cette nature spectrale. Et en fait, l'unité de longueur est exactement ce que les physiciens appellent le propagateur de fermion, c'est l'inverse de l'opérateur de Dirac. Et cette théorie s'applique dans un cadre beaucoup plus large que la géométrie riemannienne ordinaire ; elle contient la géométrie riemannienne, mais par exemple, l'action d'Einstein que j'ai présentée avant, je veux dire l'action de Hilbert-Einstein, vous savez, celle qui, lorsque vous différenciez par rapport à $g_{\mu\nu}$, vous donne l'équation d'Einstein. Cette équation, qu'est-ce que c'est ? Je veux dire, quelle est cette action ? C'est juste l'aire, l'aire bidimensionnelle d'un espace à quatre dimensions. Donc vous prenez un espace à quatre dimensions, d'accord, et au lieu d'écrire l'intégrale de ds à quatre, ce qui vous donnerait le volume à quatre dimensions, vous prenez quelque chose de bizarre, vous écrivez l'intégrale de ds au carré. Maintenant, si vous connaissez l'action d'Einstein, vous savez que 1/G a une dimension de un sur la longueur au carré. Donc en fait, vous mesurez exactement l'aire de cet espace, vous regardez une aire à deux dimensions. Donc, la seule chose que je veux mentionner, c'est que lorsque vous adoptez ce point de vue, alors, d'accord, et je veux dire que cela n'est apparemment pas encore largement connu, mais je veux dire que lorsque vous adoptez ce point de vue, le lagrangien, qui est la partie du modèle standard de cette gravitation, acquiert une forme incroyablement simple : ce lagrangien qui est une combinaison des deux choses, tout d'abord, vous savez, lorsque vous regardez ce lagrangien, vous regardez les symétries ; les symétries contiennent un groupe de morphismes différent, qui vient de la partie gravitation, mais il contient aussi un groupe de transformations de jauge de deuxième espèce qui viennent du modèle standard. Maintenant, si vous essayez d'observer un espace qui a comme groupe de symétries différents morphismes, ce que vous trouverez, c'est qu'il n'y a pas de variété qui fonctionne, et c'est l'idée de Kaluza-Klein, que cela ne fonctionne pas. Parce que si vous prenez un modèle de Kaluza-Klein, en fait, vous obtiendrez un groupe beaucoup plus grand, qui est toujours un groupe simple qui n'a pas de sous-groupe normal comme les transformations de jauge par difféomorphismes.
Mais, il existe un espace non commutatif très joli et simple, qui fait le travail et la raison pour laquelle il fait le travail est que précisément, lorsque vous prenez un espace non commutatif, il a des morphismes

qui sont relativement triviaux, qui sont appelés internes en mathématiques et parce qu'ils ne sont pas commutatifs, x devient u inverse, voyez-vous, parce que u ne commute pas avec x. Vous ne pouvez pas déplacer u et obtenir x. C'est donc un automorphisme non trivial. Mais c'est un automorphisme léger et ces automorphismes légers sont appelés internes en mathématiques et ils correspondent exactement aux symétries internes en physique, d'accord.

Maintenant, il s'avère que l'action qui combine l'action d'Einstein plus l'action du modèle standard est obtenue par cet espace très simple qui est le produit de l'espace-temps ordinaire par un espace fini quand on prend comme action juste le nombre de valeurs propres de l'élément de ligne, ok, donc vous prenez votre élément de ligne et vous comptez le nombre de valeurs propres de cet élément de ligne qui sont plus grandes que la longueur donnée ; vous le développez et vous trouvez ça ok ? Donc, je veux dire que ce sur quoi je veux conclure est le suivant : Dirac avait proposé une stratégie qui était de changer la mécanique quantique ; je propose une autre stratégie : et celle-ci en tant que stratégie est de changer la géométrie. Et il y a plein de bonnes raisons du côté mathématique de faire ça, ça a déjà eu un impact assez important en mathématiques si vous voulez faire ça, en appliquant la géométrie à des espaces qui ne sont pas commutatifs.

Il y a de nombreux exemples de tels espaces qui ne sont pas du tout commutatifs dans lesquels cette nouvelle géométrie s'applique, dans lesquels on peut faire des calculs qu'on ne pourrait pas faire autrement. Mais ce que je propose, je propose cette stratégie différente qui consiste à changer la géométrie pour rendre la géométrie quantique et bien sûr, d'accord, c'est à peu près ce qui se passe dans ce cas-là, et puis de dire qu'une fois que c'est comme ça, d'accord, alors on peut, vous savez, commencer à faire ce qu'on ferait normalement pour la gravité, mais juste parce que l'espace sera légèrement plus compliqué, cette théorie gravitationnelle pure contiendra en fait la gravité ordinaire et les champs de matière, d'accord ? Donc c'est une proposition, d'accord, c'est une proposition, qui est telle que par exemple, ce qui se passe dans cette proposition, c'est que le boson de Higgs n'est pas du tout naturel, le boson de Higgs est calculé à partir d'un calcul gravitationnel et ce que vous crachez est un doublet habituel de boson de Higgs, un doublet complexe de bosons de Higgs, d'accord. Et ce qui joue le rôle de la métrique, si vous voulez, ce qui joue le rôle de la métrique dans l'espace fini, c'est exactement la matrice Yukawa-? dans le modèle standard. Donc elle contient à la fois, si vous voulez, les masses Yukawa et la matrice de mélange Kobayashi-Maskawa et cela est incorporé dans la géométrie de l'espace fini, d'accord, d'accord. Donc je pense que j'ai été assez bref mais je pense que je vais m'arrêter là.

Le maître de cérémonie : Merci beaucoup. Malheureusement, je ne suis pas mathématicien, donc je ne peux pas vous poser de questions. Quelqu'un d'autre ? Oui, monsieur.

Un auditeur : Vous savez d'ailleurs que pour comparer les messes, il faut aller à Paris.

AC : non, non, en Angleterre, le kilo est en Angleterre. Ils pensent à le changer, bien sûr, je veux dire, le kilo lui-même fait perdre du poids, c'est bien connu.

L'auditeur : J'ai une question plus sérieuse. Je veux dire, puisque la masse est générée vraisemblablement par le mécanisme de Higgs, je me demande si vous pouvez faire des prédictions particulières à partir de votre modèle...

AC : pour dire ça, je veux dire que ce modèle, je veux dire que la formation de Higgs est un grand désert, auquel je ne crois pas bien sûr. Ok, ce modèle favorise un Higgs de 160 G, ouais exactement, et il donne ... (?) 5, ce qui n'est pas si mal. Et il donne un certain nombre de choses, vous savez, mais je veux dire, ce qu'il fait, c'est qu'il vous donne l'auto-couplage quartique du Higgs à un certain type d'unification, donc il favorise ... de cela

D'autres grandeurs. Donc si le Higgs est de 133, d'accord, alors ce n'est pas si bon pour ce modèle, vous voyez ce que je veux dire, et d'accord. Mais je veux dire que ce qu'il fait, vous voyez, le but de ce modèle est que nous avons, je veux dire que le processus psychologique dans lequel nous sommes est un peu fou parce que dans ce lagrangien très compliqué du modèle standard, nous avons isolé la partie électromagnétique et nous disons « C'est l'espace de Minkowski ». Bien sûr, vous connaissez l'espace de Minkowski, si nous regardons, il vient juste de la partie électromagnétique de ce lagrangien mais ce lagrangien a beaucoup plus de pièces, il a une partie faible et une partie forte. Et ce que je propose, c'est une géométrie plus grande, un cadre plus large qui peut absorber ce modèle comme étant de la géométrie pure et la réponse que vous obtenez n'est pas l'espace de Minkowski : c'est quelque chose qui est légèrement plus élaboré qui a une partie légèrement non commutative, d'accord. Donc c'est aussi simple que ça.

Je veux juste... Je ne dis pas que c'est un modèle final, mais je dis que 200 GV ou un teV, d'accord, c'est ce qu'on voit concrètement, c'est un raffinement de l'espace de Minkowski, c'est plus raffiné, il a cet aspect légèrement non commutatif. Bon, c'est ce que je dis, je ne dis pas, vous savez, c'est une théorie de tout ou c'est un modèle final, non non, non non, je suis extrêmement pratique et vous voyez ce que je veux dire, les pieds sur terre ; ce que je dis, c'est qu'il y a un cadre plus général pour la géométrie, qui s'applique à beaucoup plus de cas mathématiques ; c'est motivé par les mathématiques, pas par la physique, mais alors, bien sûr, cela devrait être compatible avec la physique. Maintenant, la façon dont c'est compatible avec la physique, c'est précisément que l'élément de ligne est défini comme le propagateur inverse du fermion, d'accord.
Ensuite, vous regardez et vous voyez ce que c'est et vous savez très bien que dans le modèle standard, le propagateur de fermions n'est pas seulement du Dirac pur, c'est du Dirac avec couplage UKW (?), vous voyez ce que je veux dire. Et puis, ok, vous obtenez cette géométrie plus sophistiquée, c'est tout, c'est tout ce que je dis. Mais le principe d'action, je veux dire le principe qui donne le lagrangien, est incroyablement simple. C'est clair comme de l'eau de roche. Ce n'est pas ça et ce que vous trouvez, vous savez, vous trouvez que je fais souvent des cauchemars où vous trouvez que le signe devant l'action d'Einstein est correct, le signe devant l'auto-couplage de Yang-Mills est correct, le signe devant le couplage minimal est correct, le signe devant le couplage quartique de Higgs que vous trouvez est correct, d'accord, et ainsi de suite. Donc peut-être que c'est un accident, vous pouvez dire que c'est une curiosité mathématique, et ainsi de suite. Mais il se pourrait que ce ne soit pas un accident, et vous savez, à l'heure actuelle, nous avons une sorte de théorie prépondérante du point de vue sociologique, et donc, je pense qu'il est important de savoir que ce n'est pas la seule, qu'il y a d'autres choses, je veux dire, bien sûr, ce n'est pas à l'intersection de la géométrie non commutative et de la théorie des cordes que le zéro, ce n'est pas zéro, nous savons qu'il y a une certaine intersection. Mais vous voyez, je le propose comme un modèle efficace : ce que je propose, c'est qu'il existe une notion plus flexible de géométrie qui vous donne un modèle efficace de l'espace-temps aux énergies que nous connaissons, bien sûr, ce n'est pas le modèle final, et lorsque les énergies augmenteront, nous devrons savoir si cela correspond ou non à cette idée de géométrie, c'est tout.

Un autre auditeur : Ok merci, quels problèmes votre proposition résout-elle ? Je veux dire qu'elle ne fait que prédire la masse du boson de Higgs ?

AC : Non, je veux dire que le modèle ne prédit pas vraiment la masse de Higgs, car il ne prédit que la masse de Higgs et le coût de la création d'un grand désert entre les deux, ce à quoi je ne crois pas, d'accord. Non, je veux dire, quel problème résout-il ? Il résout, si vous voulez, le problème d'écrire l'action du modèle standard au dos d'une enveloppe et vous, je veux dire, si vous me montrez l'action du modèle standard au dos d'une enveloppe.
Je le sais, je veux dire, je l'ai vu de nombreuses fois, ce n'est pas une chose que vous

je peux écrire au dos d'une enveloppe, tu sais, je veux dire, ou au dos d'un Timbre-Poste, d'un timbre, non non, je veux dire je veux l'écrire au dos d'un timbre. Donc au dos d'un timbre, ok, ce que je te dis c'est que tu prends l'élément de ligne comme ça... Tu veux écrire non non non non non non non c'est de la prédiction tu vois je ne crois pas en une théorie je veux dire je détesterais vivre dans un monde...

Un autre auditeur : Vous dites quelque chose sur la constante cosmologique, vous dites quelque chose sur ?? Ok comme beaucoup d'autres théories ?

AC : Oui, bien sûr, bien sûr, les théories... ok, bien sûr. Oui, mais je veux dire que vous ne payez pas le prix des grandes théories unificatrices dans le sens où vous ne dites pas que vous savez qu'il existe ce petit groupe de jauge, et donc non, vous obtenez juste... ce que vous obtenez est le modèle standard en tant que tel. Comme vous l'avez dit, le phénomène de Higgs provient de la géométrie, laissez-moi vous expliquer...

Le même auditeur : Est-ce que ça dit quelque chose pour la constante théologique ?

AC : Non, non, d'accord, laissez-moi vous expliquer pourquoi le phénomène provient de la géométrie, c'est si simple à expliquer, d'accord. Je veux dire que je simplifie à l'excès, d'accord, mais imaginez que vous ayez un espace-temps qui a deux côtés : le côté supérieur et le côté inférieur, d'accord. Maintenant, si vous prenez une fonction là-bas, d'accord, vous pouvez la différencier d'un côté, vous pouvez la différencier de l'autre côté, mais vous pouvez aussi la différencier transversalement. Or, c'est exactement comme ça que le Higgs se produit, d'accord. Donc le Higgs se produit parce que les fonctions, lorsque vous les différenciez de ce côté ou de cet autre côté, vous donneront des champs de jauge bien sûr, mais lorsque vous les différenciez transversalement, elles vous donneront quelque chose qui n'a pas de spin bien sûr, car le spin tournerait dans un espace, il ne tournerait pas transversalement, c'est comme ça que vous obtenez le Higgs. Et vous obtenez le Higgs avec les bons nombres quantiques, vous l'obtenez avec les bons nombres quantiques, c'est peut-être un accident, d'accord, vous savez.

Un autre auditeur : Le Higgs est-il une conséquence de la mesure de la variance ?

AC : Non, pas du tout, non, c'est une conséquence de la géométrie ce que je vous donne c'est un principe purement géométrique qui vous donne ça, c'est tout bon je sais je comprends les physiciens vous savez je comprends que quand Minkowski écrit son modèle de l'espace-temps, les gens peuvent lui dire "qu'est-ce que vous apportez à la relativité ?" et il ne peut rien dire ; bien sûr, ça n'apporte rien à la relativité restreinte, c'est la même chose, ce sont les mêmes équations, c'est exactement la même chose, d'accord. Ce que je vous dis c'est qu'il y a un modèle géométrique extrêmement simple qui vous donne exactement le modèle standard à partir d'un principe extrêmement simple, d'une certaine géométrie. La géométrie n'est pas si simple, la géométrie est plus délicate que la géométrie de Minkowski, c'est bon, d'accord. Je ne dis pas que je résous un problème physique.

Le maître de cérémonie : Ça ne peut pas tenir au dos d'une enveloppe, probablement pas, probablement pas, mais ça peut tenir dans la pause-café, alors nous allons avoir une séance de questions-réponses générales, après une courte pause.

Sur une idée de Michael Atiyah

Alain Connes

In memoriam Michael Atiyah,
avec admiration et gratitude

"In the broad light of day mathematicians check their equations and their proofs, leaving no stone unturned in their search for rigour. But, at night, under the full moon, they dream, they float among the stars and wonder at the miracle of the heavens. They are inspired. Without dreams there is no art, no mathematics, no life." [1]

(Michael Atiyah, Les Déchiffreurs 2008, Notices de l'AMS, 2010).

1 Introduction

Le théorème de Feit–Thompson sur la résolubilité des groupes finis d'ordre impair venait souvent à l'esprit de Michael Atiyah pendant sa participation à la conférence de Shanghai de 2017 au sujet de la géométrie non-commutative. La présence vivante de Michael parmi nous, et son inextinguible enthousiasme pour toutes les mathématiques – anciennes, nouvelles, et encore à créer – furent des points forts de cette rencontre.

L'idée de Michael que nous allons examiner dans cette note a été conçue par lui durant son voyage vers Shanghai. C'est une nouvelle stratégie pour FT, basée sur le processus itératif qu'il a esquissé.

5. The Iterative Process

Having started the Artin process of using the conjugation action of G on its non-empty subsets we now plan to iterate this process N times. As explained at the end of Section 3, the purpose of the iteration is to handle groups of any odd exponent $n \leq N$. The index j increases with the exponent n but eventually stops at N.

Our iterative process will produce a finite sequence, indexed by j (with $1 \leq j \leq N$), of

$$\text{odd integers } N_j, \text{ with } N_1 = N = |G|, \quad N_{j+1} = 2^{N_j} - 1 \tag{5.1}$$

$$\text{sets } S_j \text{ with } |S_j| = N_j, S_1 = G, \quad S_{j+1} = (2^{S_j})^* \tag{5.2}$$

$$\text{real fields } k_j \text{ with } k_1 = \mathbb{Q} \text{ and } k_{j+1} = N_j \times N_j \text{ matrices over } k_j \tag{5.3}$$

Figure 1 : Extrait des notes de Michael Atiyah [3]

Son idée est d'utiliser ce processus pour construire un caractère non trivial du groupe fini G. Prise trop à la lettre, cette idée ne peut pas fonctionner parce qu'elle s'appliquerait au groupe des permutations de G qui commute avec l'involution $g \mapsto g^{-1}$ et ce groupe n'a que des caractères d'ordre

Traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2024, de l'article Arxiv https://arxiv.org/pdf/1901.10761 .

[1]"Au grand jour, les mathématiciens vérifient leurs équations et leurs preuves, retournant chaque pierre dans leur recherche de rigueur. Mais, la nuit, sous la pleine lune, ils rêvent, ils flottent parmi les étoiles et s'émerveillent devant le miracle des cieux. Ils sont inspirés. Sans rêves, il n'y a pas d'art, pas de mathématiciens, pas de vie."

pair.

Le but du présent article, comme un hommage à une imagination lumineuse qui ne s'est jamais atténuée, est de prendre au sérieux la proposition de Michael Atiyah et de montrer que, en la comprenant dans un sens plus large, on aboutit à une idée très intéressante.

Mon point de départ est d'étudier plus généralement les itérations de la transformation qui remplace une représentation π d'un groupe fini G sur un espace vectoriel de dimension finie E par la différence $\wedge\pi - 1$, où $\wedge\pi$ est l'action de G sur la somme des puissances extérieures $\wedge^n E$ et 1 est la représentation triviale.

On montre d'abord, dans le § 2 (Proposition 2.1) que l'opération $\pi \mapsto \wedge\pi$ s'étend aux représentations virtuelles si et seulement si le groupe G est d'ordre impair. On discute brièvement dans le § 3 de ce qui ne va pas quand le groupe fini est d'ordre pair. Dans le cas impair, on montre dans le lemme 4.1 que l'opération wedge $\wedge : R(G)_{\mathbb{Z}} \to R(G)_{\mathbb{C}}$ est donnée par la formule :

$$\wedge(x) = e^{\sum_1^k c_j \psi_j(x)}, \;\; c_j = (-1)^{j+1}\frac{H(j/k)}{k} \tag{1}$$

où k est l'ordre impair de G, les ψ_j sont les opérations de Adams et la fonction $H(u)$ est la somme alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n+u}$. Cela permet d'étendre l'opération wedge à des fonctions à valeurs complexes sur le groupe G et ainsi de donner un sens à l'opération $\Psi(f) := \wedge f - 1$ sur de telles fonctions. On peut alors tester l'idée d'Atiyah d'utiliser l'itération de Ψ.

Evidemment, les caractères uni-dimensionnels, *i.e.* les morphismes $\chi : G \to \mathbb{C}^*$, sont les points fixes de Ψ puisque $\wedge\chi = 1 + \chi$. On étudie la transformation Ψ dans le cas non trivial le plus simple, le groupe non commutatif fini d'ordre impair le plus petit, qui est d'ordre 21. On détermine d'abord, dans le § 5 la transformation linéaire T sur la classe des fonctions pour lesquelles le wedge est la composition de l'exponentielle avec T. On trouve que T a un noyau non trivial. Dans le § 6, on peut finalement étudier les itérations de l'application Ψ dans notre exemple concret. Comme attendu lorsqu'on prend comme point de départ la représentation ρ donnée par l'action de G sur elle-même par conjugaison, l'itération $\Psi^{\circ n}(\rho)$ explose très rapidement et ne converge nulle part, rendant ainsi difficile d'imaginer qu'une telle itération puisse être utilisée pour prouver l'existence d'un caractère uni-dimensionnel non trivial. On montre dans le § 6, par un calcul effectif, que pour une classe complète de données initiales, les itérations de l'application Ψ convergent effectivement joliment vers un des deux caractères non triviaux du groupe G. Disons de façon plus détaillée que le groupe G a 4 classes de conjugaison non-triviales habituellement dénotées $7A$, $7B$ qui sont d'ordre 7 et de taille 3 et $3A$, $3B$ qui sont d'ordre 3 et de taille 7. On teste d'abord l'itération de Ψ sur les fonctions centrales f qui valent 1 excepté sur les classes $3A$, $3B$ sur lesquelles elles prennent des valeurs conjuguées. Ainsi, f est à valeur complexe et elle remplit la condition $f(g^{-1}) = \overline{f(g)}$. De telles fonctions dépendent d'un seul nombre complexe $z = f(3A)$ et l'analyse de Ψ devient l'itération d'une transformation du plan complexe qui est donnée explicitement dans le lemme 6.2.

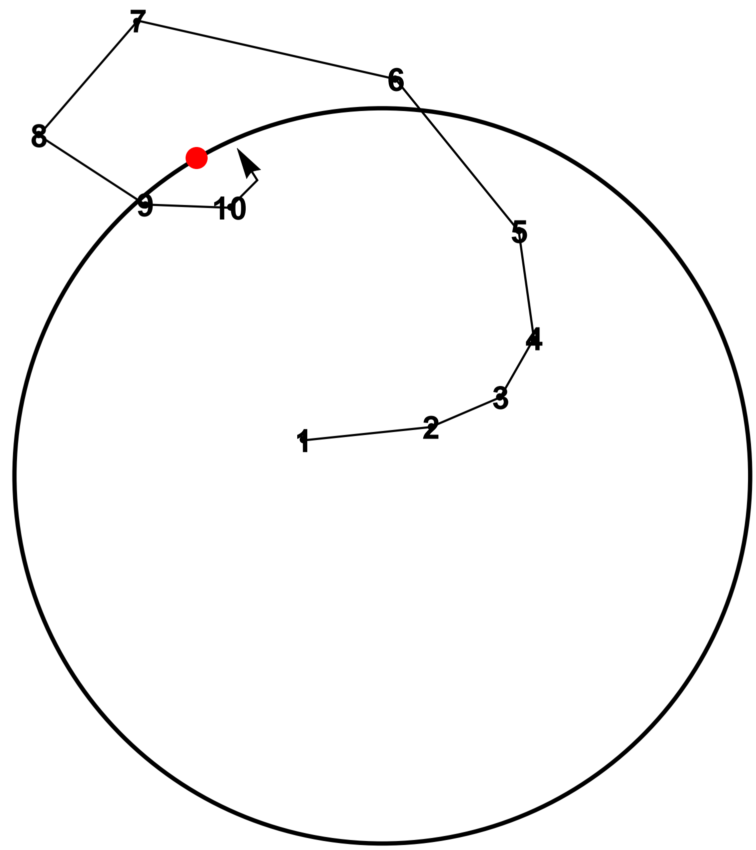


FIGURE 2 : Itération de la transformation $\Psi =$ wedge moins un.

L'itération concrète de cette transformation avec une donnée initiale proche de l'origine montre qu'en démarrant à partir d'un point sur l'axe réel, on converge vers le caractère de la représentation triviale, mais qu'en commençant à partir d'un point dans le demi-plan supérieur, on converge vers le caractère uni-dimensionnel non trivial de G (et vers son conjugué si on démarre à partir d'un point dans le demi-plan inférieur).

Pourtant, en étudiant plus avant le comportement de la transformation Ψ sur les fonctions non triviales sur les autres classes de conjugaison, on trouve un point fixe attracteur qui ne correspond pas à un caractère uni-dimensionnel. On montre dans le § 7 que les points fixes pour les autres classes de conjugaison sont les solutions d'une équation de Lambert $we^w = u$ dans laquelle la valeur $u = -\frac{6}{7}2^{-\frac{5}{7}} \log 2 \sim -0.362124$ s'avère appartenir à l'intervalle $[-1/e, 0)$ où deux solutions réelles existent. Alors que l'une d'elles correspond au caractère de la représentation triviale, l'autre ne provient pas d'un caractère. De plus, elle est le point fixe qui ne correspond pas à un caractère qui est un attracteur et cela rend assez difficile de conjecturer une relation précise entre les points fixes et les caractères des représentations uni-dimensionnelles.

Incidemment, il s'avère, de façon intéressante, qu'à la fois l'itération de l'exponentiation et l'équation de Lambert ont été étudiées par L. Euler [7,8] et on peut considérer la détermination des points fixes de l'opération $\Psi =$ wedge moins un, pour les groupes finis d'ordre impair, comme une variation de ces développements initiaux.

2 Imparité et wedge

On caractérise les groupes finis impairs *i.e.* les groupes dont l'ordre est un nombre entier impair, en fonction de la structure de λ-anneau de l'anneau de représentation $R(G)_{\mathbb{Z}}$. L'opération $\pi \mapsto \wedge\pi$ a du sens pour des représentations finies dimensionnelles et l'objectif est de voir si cette application s'étend à la représentation virtuelle en respectant la loi $\wedge(\pi_1 \oplus \pi_2) = \wedge(\pi_1) \otimes \wedge(\pi_2)$.

Proposition 2.1. *Soit G un groupe fini, les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *L'ordre de G est impair.*
2. *L'application $\wedge$ s'étend aux représentations virtuelles comme un morphisme du groupe additif $R(G)_{\mathbb{Z}}$ au monoïde multiplicatif $R(G)_{\mathbb{C}}$.*

Preuve. Supposons d'abord que l'application $\wedge$ s'étend à un morphisme. On a $\wedge(0) = 1$ et par conséquent,

$$\wedge(\pi) \wedge (-\pi) = 1 \in R(G)_{\mathbb{C}}$$

En passant à l'anneau $C(G)$ des fonctions centrales par l'application de Brauer, on obtient que le caractère de $\wedge(\pi)$ est inversible dans $C(G)$ et par conséquent, qu'il ne s'évanouit pas. Ainsi, par le lemme 2.2 (ci-dessous), il découle que G est d'ordre impair. Supposons maintenant que G est d'ordre impair.

Par construction, le groupe additif $R(G)_{\mathbb{Z}}$ s'obtient par symétrisation du monoïde additif des représentations finies dimensionnelles de G. Donc l'existence de l'extension est automatique si l'application $\wedge$ atterrit sur les éléments inversibles du monoïde multiplicatif $R(G)_{\mathbb{C}}$. Ce monoïde est le même que le monoïde de la classe des fonctions à valeurs complexes $C(G)$ selon le produit terme à terme. Un élément dans $C(G)$ est inversible ssi il ne s'évanouit pas et par conséquent, on obtient l'existence de l'extension en utilisant le lemme 2.2. $\square$

Lemme 2.2. *Soit G un groupe fini, les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *L'ordre de G est impair.*
2. *Pour toute représentation finie dimensionnelle π de G, les caractères de $\wedge\pi$ ne s'évanouissent pas :*

$$\mathrm{Tr}(\wedge\pi(g)) \neq 0\,, \ \ \forall g \in G$$

Preuve. Si G est d'ordre pair, il contient un élément g d'ordre 2 et $\lambda(g)$ a la valeur propre -1 dans la représentation régulière, de telle façon que

$$\mathrm{Tr}(\wedge\pi(g)) = \prod(1+\alpha) = 0$$

Si G est d'ordre impair, n'importe quel élément $g \in G$ est d'ordre impair et par conséquent, -1 ne peut pas être une valeur propre de $\pi(g)$ puisque $(-1)^k \neq 1$ pour k impair. Par conséquent,

$$\mathrm{Tr}(\wedge\pi(g)) = \prod(1+\alpha) \neq 0$$

Donc on obtient la conclusion souhaitée. $\square$

3 Euler et les séries divergentes

On explique brièvement ce qui ne va pas dans le cas pair. Il est intéressant de noter qu'étendre l'application $\wedge$ achoppe sur la sommation des séries divergentes. Pour être plus précis, on a par construction

$$\wedge = \sum_{0}^{\infty} \lambda_j \tag{2}$$

où les λ_j sont les opérations lambda qui font partie de la structure de l'anneau de représentation. Dans le cas le plus simple, *i.e.* quand le groupe G est réduit à un élément, les opérations λ_j sont données par les coefficients binomiaux

$$\lambda_j(x) := \frac{1}{j!} \prod_{0}^{j-1} (x-k) \tag{3}$$

Par conséquent, quand on applique (2) à des nombres négatifs $x \in \mathbb{Z}$, on obtient les sommes infinies

$$\wedge(-1) = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots$$

$$\wedge(-2) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots$$

pour lesquelles Leibniz et Euler donnent les valeurs $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ respectivement (voir [6, 4]).

> . For this reason, if we employ this definition of sum, that is to say, the sum of a series is that quantity which generates the series, all doubts with respect to divergent series vanish and no further controversy remains on this score, inasmuch as this definition is applicable equally to convergent or divergent series. Accordingly Leibniz, without any hesitation, accepted for the series *1 - 1 + 1 - 1 + etc.*, the sum *1/2*, which arises out of the expansion of the fraction *1/1+1*, and for the series *1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 etc.* the sum *1/4*, which arises out of the expansion of the formula $1/(1+1)^2$.

FIGURE 3 : Euler et les séries divergentes.

Ces valeurs donnent la réponse correcte $\wedge(-j) = 2^{-j}$ grâce aux signes alternés. Ce que la proposition 2.1 montre, c'est qu'on ne peut pas définir ces sommes de séries infinies quand tous les signes sont identiques puisque l'extension de l'application $\wedge$ n'est pas possible à moins que le groupe ne soit impair. Pour voir concrètement ce qui arrive dans le cas pair, considérons le groupe cyclique C d'ordre 2. Les éléments de $R(G)_{\mathbb{Z}}$ sont de la forme $n + m\chi$ où $\chi^2 = 1$ et $n, m \in \mathbb{Z}$. La structure du λ-anneau est telle que

$$\lambda_j(m\chi) := \frac{1}{j!} \prod_{0}^{j-1} (m-k)\chi^j \tag{4}$$

alors que l'application de Brauer envoie en particulier $\chi \mapsto -1$ par évaluation sur la classe de conjugaison non triviale. Par conséquent, sur cette classe, on obtient les sommes infinies

$$\wedge(-\chi) \mapsto 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$\wedge(-2\chi) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

et Euler énonce clairement que de telles sommes sont infinies, alors que leurs analogues alternées ne le sont pas.

4 Wedge en fonction des opérations de Adams

Quand l'ordre de G est impair, il est possible d'écrire une formule pour l'opération $\wedge$ comme une exponentielle d'une combinaison linéaire d'opérations de Adams dans l'anneau de représentation $R(G)_{\mathbb{Z}}$.

On utilise, pour $u > 0$, la notation suivante pour la fonction de Hurwitz

$$H(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m+u}$$

où la somme est convergente et peut être calculée pour des valeurs rationnelles de u, comme

$$H(2/3) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log(2)$$

En général, on a avec k un entier impair et $j \in \{1, \dots, k\}$,

$$H(j/k) = (-1)^{j+1} \sum_{|v|<k/2} \left(\cos\left(\frac{2\pi jv}{k}\right) \log\left(2\cos(\frac{\pi v}{k}\right) + \frac{\pi v}{k} \sin\left(\frac{2\pi jv}{k}\right)\right)$$

Théorème 4.1. *Soit G un groupe fini d'ordre impair k. Soit ψ_j les endomorphismes de Adams de l'anneau de représentation $R(G)_{\mathbb{Z}}$. Alors l'opération wedge $\wedge : R(G)_{\mathbb{Z}} \to R(G)_{\mathbb{C}}$ est donnée par la formule :*

$$\wedge(x) = e^{\sum_1^k c_j \psi_j(x)}, \;\; c_j = (-1)^{j+1} \frac{H(j/k)}{k} \tag{5}$$

Preuve. Les deux côtés définissent des morphismes du groupe additif $R(G)_{\mathbb{Z}}$ vers le monoïde multiplicatif $R(G)_{\mathbb{C}}$. Par conséquent, il suffit de vérifier l'égalité (**??**) quand $x = \pi$ est une représentation effective de G. On évalue la fonction de classe associée aux deux côtés sur un élément du groupe $g \in G$. En exprimant la trace en fonction des valeurs propres α_j de $\pi(g)$, le côté gauche donne $\prod(1+\alpha_j)$. Pour le côté droit, la formule est l'exponentielle calculée point par point dans l'anneau de classe $C(G)$ de l'expression obtenue en remplaçant $\psi_j(x)$ par $\sum \alpha_i^j$. Par conséquent, puisque l'exponentielle transforme l'addition en produit, il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\alpha^k = 1$, on a

$$1 + \alpha = e^{\sum_1^k c_j \alpha^j}$$

Pour voir cela, considérons pour $0 < t < 1$ la formule

$$\log(1 + \alpha t) = \sum_1^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\alpha^j t^j}{j}$$

En utilisant $\alpha^k = 1$, on réécrit le côté droit comme

$$\sum_1^k (-1)^{j+1} \alpha^j t^j \left(\sum_0^{\infty} (-1)^u \frac{t^{ku}}{j + ku} \right)$$

En appliquant l'exponentielle aux deux côtés (encore pour $t < 1$), on a

$$1 + t\alpha = \exp\left(\sum_1^k (-1)^{j+1}\alpha^j t^j \left(\sum_0^\infty (-1)^u \frac{t^{ku}}{j+ku}\right)\right)$$

Maintenant, quand $t \to 1$, on a la convergence

$$\lim_{t\to 1}\left(\sum_0^\infty (-1)^u \frac{t^{ku}}{j+ku}\right) = \frac{1}{k}H(j/k).$$

En effet, on a $j \geq 1$ et

$$\frac{t^{2kv}}{j+2kv} - \frac{t^{2kv+k}}{j+2kv+k} = \frac{t^{2kv}k}{(j+2kv)(j+2kv+k)} + \frac{t^{2kv}\left(1-t^k\right)}{(j+2kv+k)}$$

où l'on contrôle le comportement de la série faisant intervenir le dernier terme quand $t \to 1$ parce qu'on a $(1-t^k)|\log(1-t^{2k})| \to 0$ quand $t \to 1$.

Donc, la continuité de l'exponentielle permet de passer à la limite quand $t \to 1$ et fournit l'égalité requise. □

Corollaire 4.2. *Soit G un groupe fini d'ordre impair k. L'extension canonique de l'opération wedge $\wedge : R(G)_\mathbb{C} \to R(G)_\mathbb{C}$ (donnée par la formule* (**??**)*) a un noyau non trivial donné par les fonctions centrales $f(g)$ telles que*

$$\sum_1^k (-1)^j H(j/k) f(g^j) \in 2\pi i k\mathbb{Z}, \ \forall g \in G.$$

Preuve. La condition découle de (**??**). La transformation

$$T(f)(g) := \sum_1^k (-1)^j H(j/k) f(g^j) \tag{6}$$

est une application linéaire $T : R(G)_\mathbb{C} \to R(G)_\mathbb{C}$ sur les fonctions centrales. Si le noyau de T est trivial alors T est surjective et l'image inverse du réseau $(2\pi i k\mathbb{Z})^c$, où c est le nombre de classes, est non triviale. Par conséquent, dans toutes les cas, le noyau de $\wedge : R(G)_\mathbb{C} \to R(G)_\mathbb{C}$ est non trivial. □

5 Le premier groupe impair non abélien

On peut se demander si l'application linéaire (6) est toujours injective. Cela n'est pas le cas en général. On étudie l'exemple non abélien le plus simple. Le premier groupe non abélien d'ordre impair est d'ordre 21 et est le produit semi-direct du groupe cyclique $C(7)$ par le groupe cyclique $C(3)$ agissant non trivialement. C'est un sous-groupe d'indice 2 dans le groupe affine de $\mathbb{F}_7$. C'est un sous-groupe transitif du groupe de permutations sur 7 lettres et on le dénote TransitiveGroup(7,3).

Ce groupe a 5 classes de conjugaison, les 4 classes non triviales, étiquetées $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ (ou simplement $2, 3, 4, 5$ quand aucune confusion ne peut se produire) sont de la forme :

$$\gamma_2 = 7A, \gamma_3 = 7B,\ \gamma_4 = 3A,\ \gamma_5 = 3B,$$

où les classes $7A$ et $7B$ sont d'ordre 7 et de taille 3, et les classes $3A$ et $3B$ sont d'ordre 3 et de taille 7. L'action de l'inversion $j : g \mapsto g^{-1}$ échange simplement $3A$ et $3B$ d'une part, et $7A$ et $7B$ d'autre part. L'action de G sur lui-même par conjugaison commute avec l'inversion et se réduit (en plus de la représentation triviale) à la somme de deux copies des représentations de G par des permutations des ensembles à 3 et à 7 éléments. La représentation par des permutations sur l'ensemble à trois éléments $7A$ se fait par des permutations cycliques en utilisant le morphisme

$$G = C(7) \rtimes C(3) \to C(3)$$

La représentation par des permutations sur l'ensemble à sept éléments $3A$ est fidèle et elle donne

$$G \simeq \text{TransitiveGroup}(7, 3)$$

(dans la notation standard de théorie des groupes).

L'action des 21 applications puissance $g \mapsto g^n$, $n = 1, \ldots, 21$, sur la classe de conjugaison 2 est donnée par

$$\{2, 2, 3, 2, 3, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 1\}$$

Sur la classe de conjugaison 3, elle est donnée par

$$\{3, 3, 2, 3, 2, 2, 1, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 1, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 1\}$$

Ces classes sont d'ordre 7 et par conséquent, l'exposant pertinent dans (**??**) se réduit sur la classe 2 à

$$\frac{1}{7}u(1)H(1) + \frac{1}{7}u(2)\left(H\left(\frac{1}{7}\right) - H\left(\frac{2}{7}\right) - H\left(\frac{4}{7}\right)\right) + \frac{1}{7}u(3)\left(H\left(\frac{3}{7}\right) + H\left(\frac{5}{7}\right) - H\left(\frac{6}{7}\right)\right)$$

et sur la classe 3 à la même expression avec $u(2)$ et $u(3)$ échangés.

Mais on a

$$-H\left(\frac{1}{7}\right) + H\left(\frac{2}{7}\right) + H\left(\frac{4}{7}\right) = -H\left(\frac{3}{7}\right) - H\left(\frac{5}{7}\right) + H\left(\frac{6}{7}\right)$$

En fait, de façon plus précise, on a

$$H\left(\frac{1}{7}\right) + H\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{7})}, H\left(\frac{2}{7}\right) + H\left(\frac{5}{7}\right) = \frac{\pi}{\cos(\frac{3\pi}{14})}, H\left(\frac{3}{7}\right) + H\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

et l'égalité ci-dessus découle de

$$\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{7})} = \frac{1}{\cos(\frac{3\pi}{14})} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

En fait, on trouve que dans les deux cas, la somme se réduit à

$$\frac{\log 2}{7}\, u(1) + \frac{3}{7}\log 2\,(u(2) + u(3))$$

Donc cela signifie que le $\wedge(u)$ dépend seulement de la somme $u(2)+u(3)$ de la fonction centrale u, *i.e.* la somme de leurs valeurs sur les classes $7A$ et $7B$. La table de caractères pour G est la suivante

classe	1	7A	7B	3A	3B
taille	1	3	3	7	7
ρ_1	1	1	1	1	1
ρ_2	1	1	1	j^2	j
ρ_3	1	1	1	j	j^2
ρ_4	3	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$	0	0
ρ_5	3	$\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}$	0	0

où $j := e^{\frac{2\pi i}{3}}$. On voit sur cette table que les caractères des représentations ρ_4 et ρ_5 ont la même somme sur les classes $7A$ et $7B$. Par conséquent, on obtient le

Lemme 5.1. *Les représentations irréductibles ρ_4 et ρ_5 du groupe $G = C(7) \rtimes C(3)$ deviennent isomorphes après avoir appliqué le wedge, $\wedge\rho_4 = \wedge\rho_5$.*

Preuve. En effet, l'application T de (6) prend la même valeur sur ρ_4 et ρ_5 et le caractère de $\wedge\rho_j$ est une fonction de $T\rho_j$ de telle façon que les $\wedge\rho_j$ ont le même caractère et par conséquent sont égaux. $\square$

En fait, calculons les caractères de $\wedge\rho_j$. Sur les classes $7A$ et $7B$, ils vérifient l'égalité $u(2)+u(3) = -1$ et par conséquent, on obtient, puisque $u(1) = 3$,

$$\frac{\log 2}{7}\,u(1) + \frac{3}{7}\log 2\,(u(2)+u(3)) = 0$$

Après avoir pris l'exponentielle, cela donne la même contribution que $2\rho_1 + \rho_4 + \rho_5$ puisque le dernier est égal à $2-1=1$ sur les classes $7A$ et $7B$. Les réponses concordent pour la classe de conjugaison triviale où elles donnent toutes les deux 8. Il reste à voir ce qu'elles donnent sur les classes $3A$ et $3B$. Ces classes sont d'ordre 3 et l'action de la fonction puissance sur la classe 4 est de la forme

$$\{4,5,1,4,5,1,4,5,1,4,5,1,4,5,1,4,5,1,4,5,1\}$$

donc la somme pertinente se réduit sur la classe 4 à

$$\frac{1}{3}u(1)H(1) + \frac{1}{3}u(4)H\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}u(5)H\left(\frac{2}{3}\right)$$

et sur la classe 5 à la même expression avec $u(4)$ et $u(5)$ échangés. Mais on a

$$H(1/3) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log(2),\ H(2/3) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log(2)$$

À la fois pour ρ_4 et pour ρ_5, on a $u(1) = 3$, $u(4) = 0$ et $u(5) = 0$. Donc dans les deux cas, on a

$$\frac{1}{3}u(1)H(1) + \frac{1}{3}u(4)H\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}u(5)H\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}u(1)H(1) = \log 2$$

et après avoir prix l'exponentiation, cela donne 2. Ainsi nous avons montré

$$\wedge\rho_j = 2\rho_1 + \rho_4 + \rho_5\,,\ \forall j = 4,5 \tag{7}$$

et cela correspond dans chaque cas à la décomposition de $\wedge$ comme $\sum \wedge^j$.

On a ainsi calculé la matrice T agissant sur les vecteurs colonne comme étant

$$T = \begin{pmatrix} \log(2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\log(2)}{7} & \frac{3\log(2)}{7} & \frac{3\log(2)}{7} & 0 & 0 \\ \frac{\log(2)}{7} & \frac{3\log(2)}{7} & \frac{3\log(2)}{7} & 0 & 0 \\ \frac{\log(2)}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\log(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) & \frac{1}{3}\left(\log(2)-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \\ \frac{\log(2)}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3}\left(\log(2)-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) & \frac{1}{3}\left(\log(2)+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont

$$\left\{\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \log(2), \frac{6\log(2)}{7}, \frac{2\log(2)}{3}, 0\right\}$$

Ses vecteurs propres sont les lignes de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Itération de $\Psi = \text{wedge} - 1$

Le calcul ci-dessus restreint à la classe des fonctions qui prennent les mêmes valeurs sur les classes $2 = 7A$ et $3 = 7B$ et les mêmes valeurs sur $4 = 3A$ et $5 = 3B$ donne les résultats suivants.

Lemme 6.1. *Soit $G = C(7) \rtimes C(3)$. Soit $f \in R(G)$ une fonction classe qui est réelle et invariante sous $g \mapsto g^{-1}$. Alors, pour les trois valeurs de f sur la classe triviale 1, la classe $2 = 7A$ et la classe $4 = 3A$, on a*

$$\wedge(f)(1) = 2^{f(1)},\ \wedge(f)(2) = 2^{\frac{1}{7}f(1)+\frac{6}{7}f(2)},\ \wedge(f)(4) = 2^{\frac{1}{3}f(1)+\frac{2}{3}f(4)} \tag{8}$$

Preuve. La formule pour $\wedge f(2)$ vient de l'expression ci-dessus

$$\frac{\log 2}{7}\,u(1) + \frac{3}{7}\log 2\,(u(2)+u(3))$$

avec $u(2) = u(3) = f(2)$. La formule pour $\wedge f(4)$ provient de

$$\frac{1}{3}u(1)H(1) + \frac{1}{3}u(4)H\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}u(5)H\left(\frac{2}{3}\right)$$

avec $u(4) = u(5) = f(4)$ alors $H\left(\frac{1}{3}\right) - H\left(\frac{2}{3}\right) = 2\log 2$. □

Pour l'action du groupe sur lui-même par conjugaison, le caractère associe à $g \in G$ l'ordre de son commutant. Ici, cela donne 21 pour la classe 1, 7 pour les classes $2 = 7A$, $3 = 7B$, et 3 pour $4 = 3A$ et $5 = 3B$. Quand on commence à itérer le wedge -1 sur son point de départ, il devient immédiatement hors de portée puisque après deux étapes, il ressemble, pour les paires $(f(1), f(4))$ à :

$$\{21,3\},\ \{2097151,511\},\ \{2.272148509580683 \times 10^{631305}, 4.674093841761078 \times 10^{210537}\}$$

Pourtant, nous allons expliquer maintenant que cela se produit à cause d'un mauvais choix du point de départ. On élimine la condition $u(4) = u(5)$ et on impose les conditions $u(1) = u(2) = u(3) = 1$ qui sont par construction stables par la transformation $h \mapsto \wedge h - 1$. On définit $u(4) = x + iy$ un nombre complexe et on remplace la condition $u(4) = u(5)$ par $\overline{u(4)} = u(5)$. Alors on a le

Lemme 6.2. *La condition $\overline{u(4)} = u(5)$ est invariante par $h \mapsto \wedge h - 1$ et, en fonction des variables réelles (x, y), $u(4) = x + iy$, la transformation $h \mapsto \wedge h - 1$ est donnée par*

$$\Phi(x,y) := \left(2^{\frac{1}{3}(2x+1)}\cos\left(\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}\right) - 1, 2^{\frac{1}{3}(2x+1)}\sin\left(\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}\right)\right)$$

Preuve. On a, par définition, en utilisant $u(1) = 1$, que les composants pour $v = \wedge u - 1$ sont

$$v(4) = \exp\left(\frac{1}{3}H(1) + \frac{1}{3}u(4)H\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}u(5)H\left(\frac{2}{3}\right)\right) - 1$$

$$v(5) = \exp\left(\frac{1}{3}H(1) + \frac{1}{3}u(5)H\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}u(4)H\left(\frac{2}{3}\right)\right) - 1$$

On a

$$H(1) = \log(2),\ H(1/3) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log(2),\ H(2/3) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log(2)$$

par conséquent, les exponentiations donnent respectivement $\frac{\log 2}{3}(2x+1) + \frac{2i\pi y}{3\sqrt{3}}$ et son conjugué complexe. Donc on obtient la formule requise. $\square$

Le jacobien de Φ est donné par

$$J(x,y) = \frac{1}{3}2^{\frac{2(x+2)}{3}} \begin{pmatrix} \log(2)\cos\left(\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}\right) & -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}\right) \\ \log(2)\sin\left(\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}\right) & \frac{\pi}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{2\pi y}{3\sqrt{3}}\right) \end{pmatrix}$$

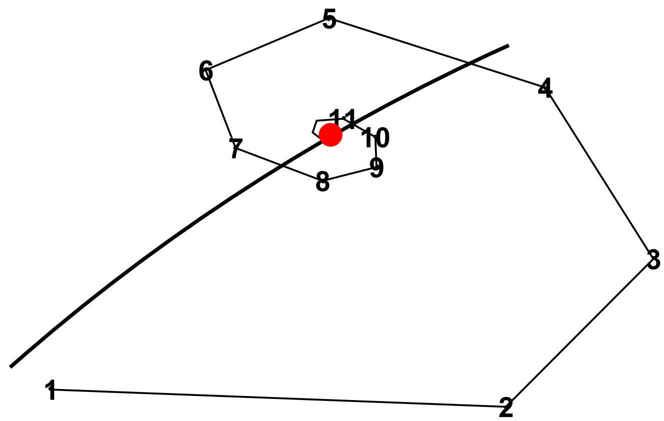
Quand on l'évalue sur le premier point fixe $P = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, on obtient

$$(J(P)^*J(P))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \log(2) & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

et on a la décomposition polaire

$$J(P) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.(J(P)^*J(P))^{\frac{1}{2}}$$

Il découle de cela, puisqu'à la fois les valeurs propres de $(J(P)^*J(P))^{\frac{1}{2}}$ sont < 1 que P est un point fixe attracteur.



En fait, le jacobien de la transformation Ψ au point fixe $1 \in \mathbb{C}$, est

$$\begin{pmatrix} \frac{4\log(2)}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

On a $\frac{4\log(2)}{3} < 1$, $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} > 1$ et cela montre que dès qu'on dévie dans le domaine complexe, par une légère perturbation, de la représentation triviale, on finit par atterrir dans le domaine d'attraction de l'un des deux caractères non triviaux. Par conséquent, on a le

Fait 6.3. *Les itérations $\Psi^{\circ n}(1 \pm i\epsilon)$ d'une petite perturbation complexe de la représentation triviale des classes 3A,3B, comme ci-dessus convergent, lorsque $n \to \infty$ vers un caractère non trivial de G.*

7 Tous les points fixes ne donnent pas des caractères

Ce très joli comportement de l'itération sur l'application Ψ n'est cependant pas vrai en général et il suffira de le démontrer en regardant son comportement sur les deux autres classes de conjugaison $7A$ et $7B$. Dans ce cas comme nous le verrons ci-dessous, on obtient après une itération la même valeur pour $u(2)$ et $u(3)$ qui est donnée, avec $u(1) = 1$, par

$$v(2) = v(3) = 2^{\frac{1}{7}+\frac{3}{7}(u(2)+u(3))} - 1$$

Par conséquent, dans ce cas, la transformation $\Psi = \wedge - 1$ prend la forme :

$$\Psi(z) = 2^{\frac{1}{7}+\frac{6}{7}z} - 1$$

L'équation du point fixe $\Psi(z) = z$ est équivalente à $we^w = -\frac{6}{7}2^{-\frac{5}{7}}\log 2$ où on laisse $w = -\frac{6}{7}(1 + z)\log 2$. La valeur numérique $u = -\frac{6}{7}2^{-\frac{5}{7}}\log 2 \sim -0.362124$ est légèrement plus grande que $-1/e \sim -0.367879$ et par conséquent, on tombe dans le domaine dans lequel il existe deux solutions pour l'équation de Lambert $we^w = u$ (voir [8, 5]). Ce sont $W(u)$ et $W_{-1}(u)$ comme on le montre dans la figure 4.

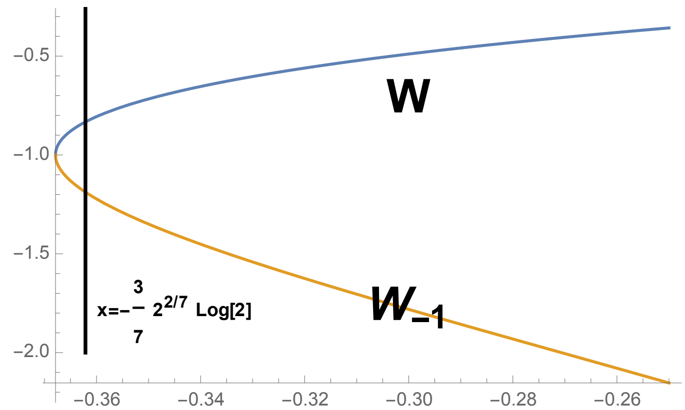


FIGURE 4 : Les deux branches de la fonction de Lambert dans l'intervalle $[-1/e, 0)$.

La solution évidente $z = 1$ correspond à $W_{-1}(u)$ mais la branche principale de la fonction de Lambert $W(u)$ donne une autre solution réelle non triviale $z \sim 0.401664$. Cette solution ne correspond pas de manière évidente à un caractère et de plus, elle ne peut avoir lieu sur la base de sa nature comme un point fixe de Ψ parce qu'elle s'avère être un attracteur. De plus, le problème qui survient est que le point fixe naturel 1 n'est pas un attracteur. En fait, la dérivée de $\Psi(z)$ en $z = 1$ est $\frac{12\log(2)}{7}$ qui est > 1. Par conséquent, 1 est un point fixe répulsif alors qu'en fait, l'autre $z = -\frac{7W\left(\frac{1}{7}(-3)2^{2/7}\log(2)\right)}{6\log(2)} - 1$ qui est ~ 0.401664 est un attracteur. Ce point fixe donne une solution de l'équation $\wedge f = 1 + f$ qui, bien qu'elle soit réelle (*i.e.* on a $f(g^{-1}) = \overline{f(g)}$ pour tout $g \in G$), et a pour dimension 1 (*i.e.* $f(1) = 1$) ne correspond pas à une représentation effective de dimension 1.

Notons également que l'équation de Lambert $we^w = u$ admet un nombre infini de solutions complexes données par les différentes branches complexes W_k, $k \notin \{-1, 0\}$, de la fonction de Lambert (voir [5]).

8 Conclusion

De l'analyse ci-dessus, on conclut qu'indubitablement, il vaut la peine d'investiguer en grand détail les points fixes de l'application $\Psi := \wedge - 1$ sur l'anneau de représentation complexifié des groupes finis d'ordre impair. En particulier, le lien avec les formes généralisées de l'équation de Lambert devrait être exploré. Mais il n'est toujours pas clair du tout de savoir si cette approche devrait mener à la construction d'un caractère non trivial uni-dimensionnel. Une raison d'être sceptique est que seule la loi de puissance des classes de conjgaison est utilisée pour dériver la formule pour Ψ, alors que la compatibilité avec la loi de puissance ne suffit pas à sélectionner des caractères parmi les fonctions de classe unitaire comme on le voit dans l'exemple le plus simple du groupe abélien impair $C(3) \times C(3)$.

Références bibliographiques

[1] M. F. Atiyah, *Characters and cohomology of finite groups*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 9 1961 23–64.

[2] M. F. Atiyah, G. Segal, *Equivariant K-theory and completion*. J. Differential Geometry 3 1969 1–18.

[3] M. F. Atiyah, *Groups of odd order*. Notes non publiées.

[4] E. J. Barbeau, P. J. Leah, *Euler's 1760 paper on divergent series*. Historia Math. 3 (1976), no. 2, 141–160.

[5] R. Corless, G. Gonnet, D. Hare, J. Jeffrey, D. Knuth, *On the Lambert W function*. Adv. Comput. Math. 5 (1996), no. 4, 329–359.

[6] L. Euler, *De seriebus divergentibus*, Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5 (1754/55), 205–237 (= Opera Omnia (1) 14, 585–617).

[7] L. Euler, *De formulis exponentialibus replicatis*, Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. 1, Opera Mathematica 15 (1927) 268-297 (original date 1777).

[8] L. Euler, *De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus*, Leonhardi Euleri Opera Omnia, Ser. 1, Opera Mathematica, 6, (1921) 350–369 (original date 1779).

À la recherche d'espaces conjugués
Alain Connes

Ilke Angela Maréchal : En mathématiques, la matière, à l'inverse des autres sciences, est exclusivement "matière à pensée". Tout comme le poète, le chercheur s'appuie sur signes et symboles pour extraire d'un "certain rien" quelque chose, pour inventer, jouer avec le langage et des mondes en quête d'existence. Le bois de construction a le caractère de pur "res cogitans".

Alain Connes : La plupart des sciences, de la physique nucléaire à la géologie, ont pour objet d'étude la matière et son organisation à différentes échelles. La réalité mathématique est plus difficile à décrire mais a des propriétés très semblables à la réalité matérielle. Elle résiste, est incontournable et se révèle source inépuisable d'information. Par contre, étant immatérielle, elle n'est pas localisable dans l'espace ou le temps. C'est ce qui la rend à la fois plus difficile à percevoir et, dans les rares cas où l'on a l'impression d'y voir, en fait une source de jubilation par le sentiment d'éternité ou d'atemporalité qui s'en dégage.

Il est vrai qu'un texte mathématique se présente comme une collection de symboles qui ne signifient rien au profane, un peu comme une partition de musique pour un non-musicien. Mais ces textes arides sont, pour le moment, notre seul moyen pour transmettre et faire avancer nos connaissances. En géométrie il devient de plus en plus possible, grâce aux progrès des moyens informatiques, d'illustrer, par des dessins ou des films, telle ou telle notion ou même une démonstration. Ceci est plus difficile pour l'algèbre, qui, comme le disait Hamilton, s'inscrit dans le temps beaucoup plus que dans l'espace.

De toute façon, de telles illustrations ne remplacent pas l'image mentale toujours plus pure et dépouillée. Il m'est impossible d'utiliser une notion ou un concept mathématique dont je n'ai pas de représentation mentale. Je peux connaître une notion, je pourrais même, peut-être, en donner une définition précise, mais, si elle n'est pas reliée à une représentation mentale, elle devient plus une gêne qu'un outil.

En géométrie, la représentation mentale est souvent construite autour de la perception visuelle. En algèbre, je pense qu'elle est de nature plus linguistique et musicale, c'est-à-dire très proche des ingrédients du poétique. Je m'explique, la nature symbolique des calculs algébriques rend évident le rapprochement avec l'aire du langage. Si je parle de plus de musique, c'est que la représentation mentale liée à l'algèbre a besoin précisément de s'inscrire dans le temps, dans la durée. Par exemple, quand on effectue un long calcul algébrique, la durée nécessaire est souvent très propice à l'élaboration dans le cerveau de la représentation mentale des concepts utilisés. C'est pourquoi l'ordinateur, qui donne le résultat

Extrait de *Sciences et imaginaire* sous la direction d'Ilke Angela Maréchal, éds. Bibliothèque Albin Michel Sciences, 1994.

d'un tel calcul en supprimant la durée, n'est pas nécessairement un progrès. On croit gagner du temps, mais le résultat brut d'un calcul sans la représentation mentale de sa signification n'est pas un progrès.

Ainsi, pour moi, la représentation mentale algébrique a les mêmes ingrédients, à la fois linguistique et musique, que la poésie. Je n'essaierai pas de pousser l'analogie plus loin mais cela me conduit à parler du rôle de l'imaginaire (au sens usuel, non mathématique, du terme) dans l'acte de recherche du mathématicien. Bien entendu, comme je l'ai dit plus haut, la seule valeur transmissible sûre, c'est le texte aride dont nous parlions. Il ne s'agit en rien de mélanger le rationnel, condition sine qua non de toute science, avec de l'irrationnel. Ce que je tiens à discuter, c'est le rôle de l'imaginaire individuel dans le processus mental qui libère l'esprit des contraintes ou des a priori et lui permet de franchir un saut qualitatif. Je parle d'une situation dans laquelle, face à un problème posé, une démarche complètement rationnelle a abouti à une impasse, faute d'imagination. Pour débloquer une telle situation, il semble nécessaire de faire intervenir d'autres aires du cerveau que celles du fonctionnement purement rationnel, en particulier de pouvoir associer les objets mathématiques étudiés avec des aires *a priori* très éloignées qui impliquent l'éducation artistique par exemple.

De telles associations n'ont, je pense, aucune valeur absolue autre que de mettre en route d'autres parties du cerveau. Il est amusant de constater que ces associations peuvent être tout à fait inconscientes et ne se manifester que dans le temps de sommeil liminaire où une chaise devient un espace de Hilbert sans que la sonnette d'alarme de l'asile d'aliénés se manifeste. D'ailleurs, la seule "recette" que je connaisse pour mettre en route mon imaginaire est de m'allonger dans l'obscurité et de naviguer, tout en restant éveillé, au plus près possible de ce sommeil liminaire. Un mathématicien bien connu, auquel on demandait quelle était la plus grande difficulté en mathématique, répondait : "Pour moi le plus difficile est de convaincre ma femme que le moment où je travaille le plus, c'est quand je suis allongé dans l'obscurité avec les jambes en l'air.".

Ilke Angela Maréchal : Cette "procédure" en mathématique va tout à fait de pair avec cette démarche de poète dont, sur la porte fermée de sa chambre, un écriteau indique : "Ne pas déranger, le poète travaille quand il dort !". Peut-être pourrait-on voir ici une liaison entre imaginaire et mystère ?

Alain Connes : Dans certains cas, je dirais qu'il est plus important de percevoir le potentiel d'un résultat mathématique, d'une formule ou d'une notion que d'en comprendre ou connaître la démonstration. Quand j'étais élève à l'École normale supérieure, je me souviens, ayant feuilleté par hasard les œuvres complètes de von Neumann, d'avoir été fasciné par la notion de "dimension continue". Je ne comprenais absolument pas le détail des démonstrations, mais le caractère mystérieux et puissant de cette notion déclenchait en moi un appel irrésistible. J'ai eu, plus tard, une expérience semblable à propos de la théorie de Tomita. Mon attitude dans ces cas-là consiste à ne pas du tout me presser pour comprendre les démonstrations. Car une fois cette compréhension acquise, le mystère disparaît et le potentiel d'imaginaire très lié à la créatitivité disparaît lui aussi. À l'inverse j'essaie de m'appuyer sur ces résultats pour résoudre d'autres problèmes en utilisant leur charge intuitive, leur potentiel créateur.

Ilke Angela Maréchal : Ceux qui sont aux prises avec une activité de création connaissent bien ces instants et ces forces. C'est un peu comme si le résultat visé, bien qu'"inconnu encore" et "sans forme", avait une telle force d'appel que le mystère et l'imaginaire doivent lâcher du lest devant le potentiel intuitif qui met en branle le mécanisme purement créatif. Pourriez-vous donner un exemple concret de ce potentiel créateur que recèle l'imaginaire des mathématiciens ?

Alain Connes : Je vais essayer de décrire deux exemples de structures mathématiques non encore élucidées, pas encore bien comprises, dont on aurait tort de vouloir donner une mise en forme prématurément. Le jour où elles seront élucidées et comprises, où l'on aura le paysage vraiment devant les yeux, leur aspect mystérieux et imaginaire aura disparu. Le pouvoir suggestif de l'imaginaire consiste précisément à ressentir, par l'intuition, l'existence de ces structures sans pour autant pouvoir les définir avec précision. Il est clair que l'essai de description auquel je vais me livrer ne fait pas partie de l'activité admise du mathématicien et que l'on ne saurait y attacher qu'une valeur heuristique.

Mon premier exemple provient de la théorie des nombres. L'un des problèmes essentiels de cette théorie est de comprendre l'ordre sous-jacent à la suite des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11... L'on pense que cette compréhension proviendra de celle d'un espace géométrique X, appelé le *site arithmétique*, et dont naïvement l'ensemble des points est la suite ci-dessus à laquelle on rajoute un point $\{\infty\}$. L'on connaît toutes sortes de propriétés que doit posséder cet espace géométrique, avant tout il doit être doté d'un semi-groupe de correspondances Fr_s, pour s réel et positif qui joue le rôle des correspondances de Frobenius. De plus les valeurs propres de l'action de F sur la cohomologie $H^f(X)$ devraient être intimement reliées aux zéros de la fonction zeta de Riemann. De même l'on pense que l'analogue des "diviseurs" sur espace produit $X \times X$ doit impliquer les dimensions continues dont je parlais plus haut. L'on pourrait énumérer bien d'autres propriétés de cet hypothétique espace géométrique X. Pour le moment il fait partie de l'imaginaire des mathématiciens. Les raisons qui motivent sa considération sont, d'une part, l'analogie avec d'autres situations, plus simples mais voisines sur le plan conceptuel, d'autre part, la difficulté à démontrer par les outils classiques de la théorie analytique des nombres l'hypothèse formulée par Riemann sur la répartition des nombres premiers. L'analogue de cette hypothèse a été démontré dans les cas les plus simples et le rôle de l'analogue de l'espace X y est crucial. Si l'on essaie de forcer les choses et de formuler prématurément la structure du site arithmétique X, on aboutit assez vite à des absurdités comme l'égalité $X = X \times X$, etc. Il s'agit d'un bon exemple où l'imaginaire à un rôle important, celui de donner un cadre qui permet de ne pas s'encombrer des difficultés techniques quotidiennes et d'essayer de deviner progressivement la structure inconnue. Il est clair que ce processus d'élaboration concerne de près l'intuition, l'esthétique, et présuppose une harmonie préétablie, par opposition à une démarche complètement rationnelle qui va se tarir assez vite.

Je pense que cet exemple du site arithmétique X est d'autant plus remarquable qu'il fait partie de l'imaginaire commun des mathématiciens et qu'il existe sans qu'il soit nécessairement documenté par des articles.

Mon second exemple provient de la physique des particules. La conception usuelle de cette théorie considère que les particules élémentaires (quarks et leptons) sont des éléments indivisibles de la matière (atomos), lesquels sont localisés dans l'espace géométrique Y de la physique. Mes réflexions sur cette théorie, et des calculs compliqués sur le Modèle Standard [*], m'ont conduit à une opinion différente que je formulerai ainsi : *"La géométrie de l'espace physique Y est spécifiée par la théorie des champs."*.

Cet énoncé peut paraître inopérant, il devient en fait très efficace à condition d'avoir le cadre mathématique conceptuel pour le comprendre. J'ai travaillé depuis quinze ans sur une adaptation de la géométrie de Gauss et de Riemann qui permet d'exploiter l'énoncé ci-dessus ; en particulier le Modèle Standard dévoile alors la structure fine de l'espace Y à l'échelle de 10^{-16} cm qui correspond aux énergies actuellement accessibles dans ces énormes microscopes que sont les accélérateurs de particules comme celui du CERN. La structure obtenue n'est ni continue ni discrète mais un produit de ces deux cas extrêmes. L'espace Y apparaît comme superposition de deux couches Y_L, Y_R d'orientations opposées et les forces d'interaction comme le boson de Higgs apparaissent simplement dans l'électrodynamique de cet espace plus complexe. Cependant, cette théorie est pour le moment limitée car elle ne comprend que le lagrangien sans incorporer la théorie pleinement quantifiée. C'est là à nouveau que je considère comme essentiel le rôle de l'imaginaire. Il consiste à attribuer une valeur de principe à l'énoncé ci-dessus. Après tout, c'est seulement dans les accélérateurs de particules que l'on teste la géométrie de l'espace physique avec cette précision. L'on peut alors, comme plus haut pour le site arithmétique, spécifier de nombreux traits de la géométrie cherchée. L'un d'entre eux est que l'espace Y est perçu par son "exponentielle" et non pas (ce qui correspondait au lagrangien) comme un espace à une particule.

Ces deux espaces, le site arithmétique X et l'espace de la physique Y sont bien entendu des motivations essentielles pour aller au-delà du cadre classique de la géométrie.

Ilke Angela Maréchal : Ces fruits de l'imaginaire créatif, les images, les concepts, les idées, les théorèmes, les poèmes, ont-ils une existence propre où ne seraient-ils que des intermédiaires, des langages, comme par exemple von Neumann l'affirme en ce qui concerne les mathématiques ?

Alain Connes : Il est vrai que, d'une part, les mathématiques servent à formuler les choses en langage, à modéliser les phénomènes. Lorsqu'on écrit une phrase mathématique, elle à un contenu par rapport à son domaine par un mécanisme de traduction, mais il y a autre chose dans les mathématiques qui n'est

∗. Actuellement la théorie la plus fondamentale, qui intègre trois des quatre interactions de base : la faible, l'électromagnétique et la forte.

absolument pas réductible au langage, une sorte de réalité archaïque. Elle à les mêmes traits que la réalité extérieure : elle est a priori non organisée.

Ilke Angela Maréchal : Pourrait-on dire prélinguistique ?

Alain Connes : Je dirais plutôt préconceptuelle. La réalité mathématique brute a une nature inductive. L'activité du mathématicien la comprend de manière projective.

Ilke Angela Maréchal : Si je comprends bien, les mathématiques ont bien une nature double : d'une part, elles gardent leur nature propre, d'autre part, elles servent d'outils à elles-mêmes et aux autres ?

Alain Connes : Il est vrai qu'en physique quantique, par exemple, pour décrire les phénomènes, les mathématiques servent d'outils adéquats là où le langage courant n'est pas du tout performant et induit en erreur parce que les mots s'avèrent ambigus. À cause du conditionnement venant de la physique classique, on attribue, par exemple, en physique quantique, à un électron une position et une vitesse alors que cela n'a pas de sens véritable. C'est uniquement une question de langage. Je crois que peut-être d'ici cinquante ans, lorsque les physiciens auront trouvé le bon langage, ils cesseront de parler de la position ou de la vitesse d'une particule quand ils feront un cours de mécanique quantique.

Ilke Angela Maréchal : Le mathématicien partage la revendication du poète ?! Je pense à Rimbaud : tout le problème est de "trouver la langue" !

Alain Connes : À ce propos, je n'exclus pas du tout d'ailleurs que la poésie ait un rôle à jouer dans ce genre de choses, car n'est-elle pas une exploration des limites, des bornes, du langage ? On voit bien qu'elle arrive par des assemblages de mots à suggérer une idée nouvelle. Comme une mosaïque, dont aucun élément n'est nouveau, mais bien la mosaïque en elle-même, capable de traduire quelque chose qui a été perçu mais ne peut s'exprimer en des mots ordinaires.

Ilke Angela Maréchal : Pourrait-on dire qu'avec un effort plus grand pour une vulgarisation des sciences le problème serait à résoudre ? Donner à voir au grand public, proposer à l'imaginaire collectif ce qui se cache derrière les formules et leurs ballets ésotériques ?

Alain Connes : Oui, tout à fait. Il faudrait retraduire les formules en mots, encore faudrait-il que le public arrive à concevoir ce qu'il y a derrière tel ou tel mot. Par exemple, en japonais existe un mot qui veut dire "feuilletage" mais dont le kanji, le caractère japonais, indique clairement qu'il s'agit d'un ensemble de feuilles, ce que ne dit pas le mot français.

Ilke Angela Maréchal : Un ensemble de feuilles, comme vos deux espaces superposés. Il faut donc des mots, une unité multiple, d'une part, univoques et, d'autre part, englobant en eux-mêmes un sens complexe.

Alain Connes : Oui, mais ce seront des mots empruntés aux mathématiques et qui ne seront plus ambigus. L'on doit s'assurer de l'existence d'un modèle mathématique précis, comme il y en a pour la mécanique quantique, condition nécessaire pour faire usage dans le langage courant des mots qui étiquettent ce modèle et qui ont un sens précis. La physique du XVIII^{e} siècle nous a habitués aux notions comme énergie, position, vitesse, etc., et nous, au XX^{e} siècle, utilisons ces mots comme des mots courants. Je pense qu'au XXI^{e} siècle on utilisera des mots qui seront des mots sophistiqués de la mathématique comme par exemple "fonction d'onde". Ce qui enlèvera complètement l'ambiguïté apparente de certains résultats de physique expérimentale.

Je suis persuadé que l'homme s'habituera très bien à ces mots et les intégrera dans le langage courant en faisant finalement sien le concept correspondant. Prenons, en physique quantique, la notion de *fonction*. Je m'explique : lorsqu'on a découvert l'imprimerie, enfin a pu être transmise la notion de *nombre*, car elle pouvait dès lors se propager très facilement. Aujourd'hui, grâce à l'ordinateur on peut transmettre une *courbe*, des graphiques précis. On va atteindre une nouvelle étape dans laquelle la fonction (le graphe, le dessin) deviendra aussi palpable dans le langage courant que le nombre. Et la fonction d'onde, cruciale en mécanique quantique, deviendra aussi tangible que la vitesse qui est un nombre ! Le pas nouveau de la physique quantique, la fonction d'onde, est un graphe ! Donc, il y a le même pas à franchir, pour le commun des mortels, analogue à celui franchi à l'apparition de l'imprimerie pour les nombres. Quand ce pas sera franchi, on pourra parler non plus de la vitesse, ni de la position d'un électron, mais de sa fonction d'onde.

Ilke Angela Maréchal : Il n'y aura plus d'équivoque, le problème aura été dépassé ?

Alain Connes : Oui, mais le pas conceptuel à franchir est énorme. Il ne s'agit pas d'inventer un nouveau mot que seul les gens d'une certaine caste comprendront, comme actuellement pour la fonction d'onde. Il importe que le grand public puisse digérer cette notion de fonction d'onde pour ne plus concevoir la physique quantique avec les outils de la physique macroscopique.

Ilke Angela Maréchal : En fait, une histoire d'évolution... cela peut prendre du temps. L'ordinateur peut-il y jouer un rôle ?

Alain Connes : L'ère des ordinateurs a l'énorme avantage de rendre la notion de graphique, de fonction, transmissible par l'écriture (de l'ordinateur) et de la transformer en une notion du même niveau que la notion de nombre. Il participe ainsi, en tant qu'outil, à une amélioration du fonctionnement cérébral. Qu'est-ce que cela veut dire ? Il est un fait que le calcul différentiel, découvert par Newton et Leibniz, est aujourd'hui appris par les élèves de seconde ou de première comme allant de soi. En deux, trois siècles, des notions compliquées ont été digérées par notre civilisation. Je pense que de manière analogue, un enfant, éduqué en 2200 par exemple, tout comme nos enfants apprennent à sept ou huit ans à manipuler les nombres, va savoir manipuler les fonctions, les dérivées, etc. Cela ne voudra pas dire que le cerveau se sera amélioré depuis, mais que le programme introduit dans leur cerveau sera meilleur et plus performant. À cette évolution, beaucoup de choses devront participer et je pense que l'art ne doit pas rester indifférent. Et vice versa : pourquoi ne pas trouver une équation pour les coups de crayons de Picasso ? L'orteil du Minotaure - voilà une courbe qui a des caractéristiques, une idée transformée en courbe dont on perçoit parfaitement la pertinence ! Voilà le prototype de questions qu'on pourra poser à ceux qui essaieront de comprendre l'art de manière différente. Cela pourra se faire avec les fonctions analytiques tracées par ordinateur. Car, tout comme les nombres l'ont fait jadis, les formes et les courbes passeront dans le grand public.

Ilke Angela Maréchal : En dehors de l'attrait des secrets des artistes, quel peut être le défi pour un chercheur en mathématique aujourd'hui ?

Alain Connes : Encore et toujours la géométrie : "Quelle est la nature des espaces X et Y décrits ci-dessus ?"

Ilke Angela Maréchal : Vous venez de parler de fonctions analytiques tracées par ordinateur pour surprendre un "secret" de l'artiste. Peut-être puis-je inverser la direction et dire : il se peut que, pour approcher le secret de la nature des espaces X et Y, il faudrait beaucoup d'intuition, à la manière de l'Indien Ramanujan, un des plus brillants mathématiciens, qui dans la théorie des nombres parvenait à établir ses théorèmes par une pure intuition.

Alain Connes : Et qui formait avec l'Anglais Hardy un couple idéal : l'un, gouverné purement par des intuitions extraordinaires, l'autre doté d'une technique remarquable. De toute façon, quels que soient les procédés employés, Paul Valéry, dans son admirable texte "Au sujet d'*Eureka*", expose l'enjeu clairement :

> *Mais c'est la gloire de l'homme que de pouvoir se dépenser dans le vide ; ce n'est pas seulement sa gloire. Les recherches insensées sont parentes de découvertes imprévues. Le rôle de l'inexistant existe ; la fonction de l'imaginaire est réelle ; et la logique pure nous enseigne que* le faux implique le vrai. *Il semble donc que l'histoire de l'esprit puisse se résumer en ces termes :* il est absurde par ce qu'il cherche, il est grand par ce qu'il trouve.

Extrait du résumé du cours au Collège de France d'Alain Connes en janvier 1999 concernant la formule de trace et la fonction ζ de Riemann

Théorème 5. *Soient k un corps global de caractéristique non nulle et Q_Λ le projecteur orthogonal sur le sous-espace de $L^2(X)$ engendré par les $f \in \mathscr{S}(A)$ tels que $f(x)$ et $\widehat{f}(x)$ s'annulent pour $|x| > \Lambda$. Soit $h \in \mathscr{S}(C_k)$ une fonction à support compact. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Quand $\Lambda \to \infty$, on a*

$$\mathrm{Trace}(Q_\Lambda(U(h)) = 2h(1)\log' \Lambda + \sum_v \int'_{k_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^* u + o(1)\ ;$$

b) *Toutes les fonctions L sur k satisfont l'hypothèse de Riemann.*

Si k est un corps global de caractéristique nulle, on n'a plus la commutation des projecteurs P_Λ et $\widehat{P_\Lambda}$ à cause des places archimédiennes. Pour résoudre ce problème, on se concentre sur le cas de la place réelle. On a alors les deux projecteurs orthogonaux P_Λ et $\widehat{P_\Lambda}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ avec $\widehat{P_\Lambda} = FP_\Lambda F^{-1}$ pour la transformation de Fourier associée au caractère $x \mapsto \exp(ix)$ de $\mathbb{R}$. Le point-clef, dû à Landau, Pollack et Slepian est la commutation de P_Λ et $\widehat{P_\Lambda}$ avec l'opérateur différentiel du second ordre

$$\Delta_\Lambda = -\partial(\Lambda^2 - x^2)\partial + \Lambda^2 x^2. \tag{21}$$

Plus précisément, on démontre :

Lemme 6. *L'opérateur Δ_Λ défini sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est symétrique, ses indices de défaut sont tous deux égaux à 4 et il admet une unique extension auto-adjointe qui commute à la fois avec P_Λ et $\widehat{P_\Lambda}$.*

En posant $U = 2P_\Lambda - 1$, $V = 2\widehat{P_\Lambda} - 1$, on obtient une représentation du groupe produit libre de deux groupes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à 2 éléments, c'est-à-dire du groupe diédral. Les représentations irréductibles de ce groupe sont indexées par les orbites de l'involution $z \mapsto \bar{z}$ dans le dual de Pontrjagin $U(1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ du groupe $\mathbb{Z}$.

La décomposition en somme directe de représentations irréductibles de la représentation π_Λ associée à $(P_\Lambda, \widehat{P_\Lambda})$ s'obtient en diagonalisant l'opérateur ($P_\Lambda \widehat{P_\Lambda} P_\Lambda$ dans $L^2([-\Lambda, \Lambda])$) et l'on a,

(22) Les valeurs propres de $P_\Lambda \widehat{P_\Lambda} P_\Lambda$ sont simples et de la forme

$$1 > \lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_n > \lambda_{n+1}, \quad \lambda_n \to 0 \quad n \to \infty.$$

(23) Le vecteur propre de $P_\Lambda \widehat{P_\Lambda} P_\Lambda$ associé à λ_n est la n-ième fonction sphéroïdale, i.e. la n-ième fonction propre de l'opérateur Δ_Λ restreint à l'intervalle $L^2([-\Lambda, \Lambda])$.

Référence : A. Connes, Formules explicites, formules de trace et réalisation spectrale des zéros de la fonction zêta. Annu. Collège de France 95 (1998), pp. 115–122.
https://www.college-de-france.fr/sites/default/files/documents/alain-connes/UPL8550790458066685627_AN_99_connes.pdf.
Transcription : Denise Vella-Chemla, 9 décembre 2024